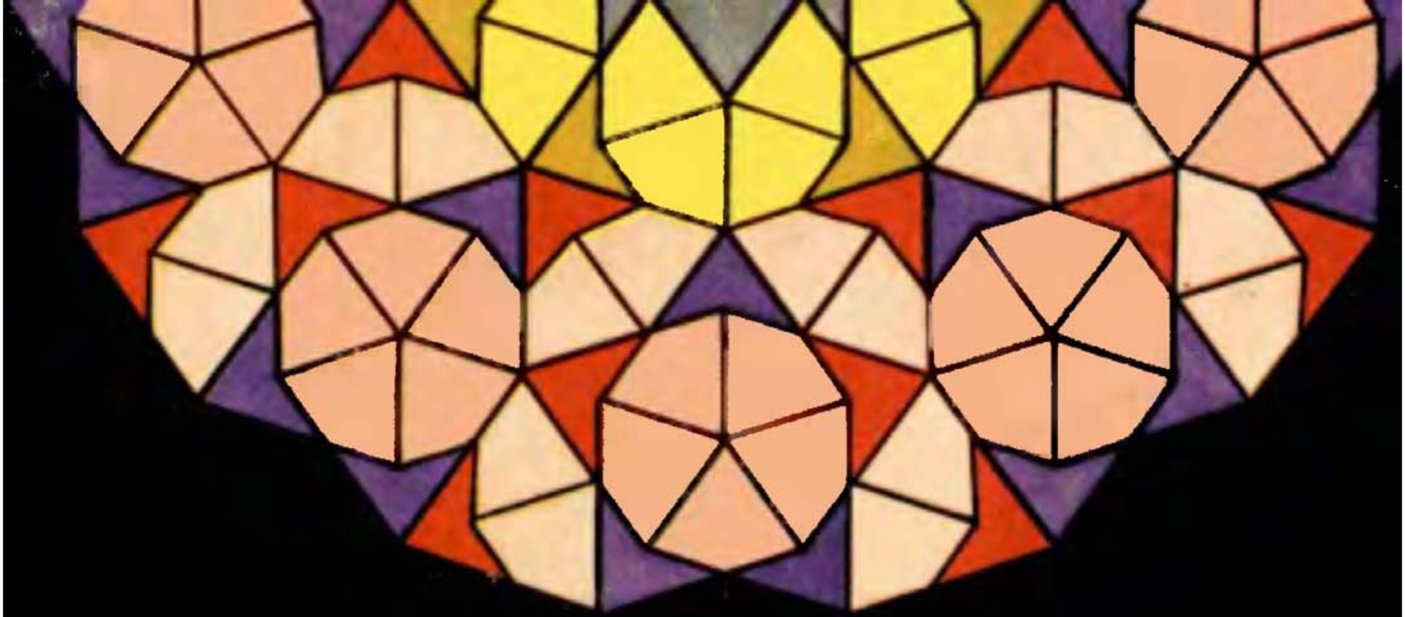
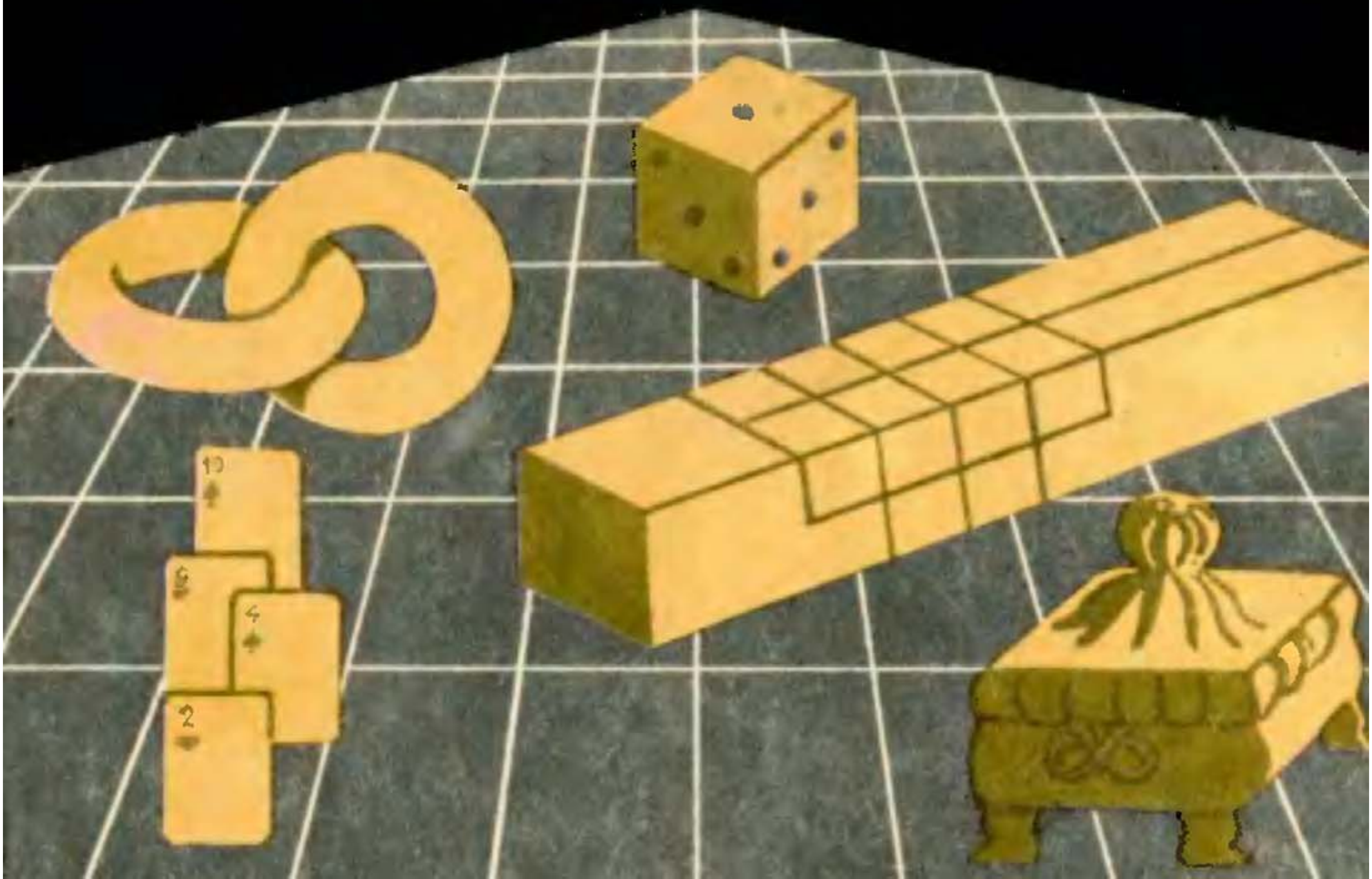


М. Гарднер

От мозаик Пенроуза к надежным шифрам

Издательство «Мир»



Martin Gardner

Penrose tiles to trapdoor ciphers

W. H. Freeman and Company New York

М. Гарднер

От мозаик Пенроуза к надежным шифрам

Перевод с английского
Ю. А. Данилова

Москва «Мир»
1993

ББК 22.1
Г 20
УДК 51(0.062)

Гарднер М.
Г 20 От мозаик Пенроуза к надежным шифрам: Пер. с англ.– М.: Мир, 1993.– 416 с., ил.
ISBN 5-03-001991-X

Новая книга выдающегося американского популяризатора науки Мартина Гарднера продолжает серию его известных книг. В ней среди затронутых тем читатель найдет непериодические мозаики Пенроуза, фракталы Мандельброта, сюрреальные числа Конуэя, познакомится с комбинаторными головоломками, сможет освоить новую игру – ним Витхоффа.

Для всех любителей математики.

$\text{Г}\,\dfrac{1602010000-256}{041(01)-93}\,6-91$ **ББК 22.1**

Федеральная целевая программа книгоиздания России

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-001991-X (русск.)
ISBN 0-7167-1987-8 (англ.)

От переводчика

Автор предлагаемой вашему вниманию книги хорошо известен в нашей стране и за рубежом и вряд ли нуждается в рекомендации. Это он «тот самый» Мартин Гарднер, матемаг и добрый волшебник, более четверти века творивший чудеса на страницах журнала «Scientific American», успевший написать и издать целую библиотеку замечательных книг, во многом определивших лицо современной занимательной математики, автор интереснейших комментариев к кэрролловской «Алисе», человек, совершивший немало других не менее удивительных и достославных деяний.

Стиль Мартина Гарднера, бесхитростный и, казалось бы, незамысловатый, обладает неотразимой привлекательностью и для неофита, и для искушенного профессионала. Преподносимый Гарднером математический факт удивителен, почти парадоксален, таинствен и манящ. Этот факт – приглашение к раскрытию тайны, к постижению истины. Но простота гарднеровского стиля сродни не простоте примитивистов, а простоте, присущей произведениям высокого искусства; она достойна зрелого мастера, каковым, несомненно, является Мартин Гарднер.

Широкому читателю публикации Гарднера, будь то журнальная статья или книга, открывают редчайшую, чтобы не сказать уникальную, возможность приобщиться к радости самостоятельного исследования. Не раз и не два бывало, что по прочтении очередной статьи Гарднера в выпуске «Scientific American» кто-нибудь из любителей принимался за задачу, безнадежную с точки зрения сведущих профессионалов, и находил решение!

Нередко, особенно в последние годы, Гарднер берет на себя смелость знакомить читателя с необычными объектами, измышляемыми математиками и находящими применение для описания явлений, наблюдаемых физиками. Именно Гарднер познакомил миллионы читателей во всем мире с непериодическими мозаиками Пенроуза, одним из первых оценив их важность и красоту. Несколько позднее эти необычные мозаики нашли применение в теории нового класса твердых тел – так называемых квазикристаллов. Именно Гарднер познакомил широкую аудиторию с объектами дробной размерности (фракталами), существенно расширившими наши представления о тех математических письменах, которыми, по словам великого Галилея, начертана величественная Книга Природы. Остро реагируя на все новое и необычное, Гарднер первым поведал своим многочисленным читателям об удивительных языковых экспериментах, проводимых группой Улипо. Гарднеру мы обязаны знакомством и с сюрреальными числами Конуэя, надежными шифрами, поразительными скульптурами Беррокаля, в которых изысканность формы сочетается с коварством головоломки и многими другими не менее значительными и необычными объектами. Сколь бы эксцентричными и экзотическими ни казались некоторые материалы Гарднера, среди них нет «пустышек» – в каждом из них заложена глубокая идея, оценить которую нам, читателям, удается не сразу.

Каждый томик Гарднера читатель берет с нетерпением и ожиданием чего-то необычного, как берут дети коробочку с сюрпризом. Нужно сказать, что ожидания эти непременно оправдываются – такова еще одна особенность стиля Гарднера.

На Западе имя Гарднера довольно часто ассоциируется с именем одного из его литературных героев – доктором Матриксом, подобно тому, как нерасторжимо связаны имена Марка Твена и Тома Сойера или Гека Финна, Сервантеса и Дон Кихота, Гуго Штейнгауза и доктора Шарадека, Конан Дойля и Шерлока Холмса. В нашей стране доктор Матрикс совершенно неизвестен, поскольку книги Мартина Гарднера о нем на русский язык никогда не переводились. Подобно Конан Дойлю, решившему было погубить Шерлока Холмса после роковой схватки с профессором Мориарти в пучине Рейхенбахского водопада, но вынужденного впоследствии на радость читателям извлечь своего героя из небытия, Мартин

Гарднер также на время расстался со своим персонажем с тем, чтобы затем снова вернуть его читателям.

Эта книга – тринадцатая в серии книг, выпущенных Мартином Гарднером по материалам, опубликованным в разделе «Математические игры», и обсужденных с читателями. На ее страницах любителя, как всегда, ожидает много интересного и неожиданного, и мы не вправе более испытывать его терпение.

Ю. Данилов

Предисловие

Роджеру Пенроузу

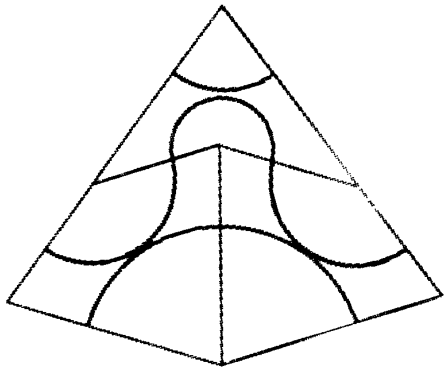
за его прекрасные и удивительные открытия в математике, физике и космологии, за глубокое творческое постижение процессов, происходящих в природе, и за скромность, позволяющую ему не предполагать, что он исследует всего лишь плоды человеческого разума.

В предлагаемую вниманию читателя книгу вошли статьи, опубликованные в разделе «Математические игры» журнала «Scientific American», который я редактировал в течение 25 лет. Это – тринадцатый том в серии моих публикаций такого рода. Тема, которая объединяет все книги моей серии, если таковая вообще существует,– занимательная математика, т. е. математика, излагаемая в игровом духе. Как и в предыдущих книгах, в статьи, вошедшие в настоящее издание, были внесены исправления и дополнения на основе живой обратной связи с читателями. Что же касается мозаик Пенроуза (особенно их неожиданных приложений в теории кристаллического состояния), криптосистем и французской группы Улипо, то со времени моих первых публикаций произошло так много событий, что я счел за благо посвятить каждой из этих тем новенькую – с иголочки – статью. Впервые публикуются и поразительные новые известия о моем давнем друге докторе Матриксе. Я сообщаю о своем открытии: выяснилось, что доктор Матрикс не был убит агентом госбезопасности, как предполагалось ранее, а благополучно здравствует в Касабланке.

Мартин Гарднер

Глава 1

Мозаики Пенроуза



Публикуя в конце 1975 г. в журнале «Scientific American» статью о периодическом разбиении плоскости на конгруентные выпуклые многоугольники (эта статья вошла в мою книгу [1, 1*)]), я обещал читателям опубликовать со временем статью о непериодических разбиениях плоскости. Я выполнил свое обещание и опубликовал в 1977 г. статью, в которой впервые сообщалось о замечательной непериодической мозаике, открытой известным английским специалистом в области математической физики и космологии Роджером Пенроузом. Именно эта статья и воспроизведена в этой главе. Но прежде всего позвольте мне дать некоторые определения и сообщить кое-какие необходимые предварительные сведения.

Периодической мозаикой, или разбиением плоскости, называется такая мозаика, в которой можно выделить область, заполняющую без пробелов и наложений всю плоскость при трансляциях, или параллельных переносах, т. е. при сдвигах области без поворотов или отражений. Голландский художник М. К. Эшер известен тем, что многие его рисунки и гравюры представляют собой периодические мозаики, состав-

*) Первое число в квадратных скобках означает номер главы, второе – номер ссылки в списке литературы, помещаемом в конце каждой главы. Номера с одной звездочкой относятся к тем ссылкам, которые в оригиналах приведены непосредственно в тексте, номера с двумя звездочками – к литературе, добавленной переводчиком.– *Прим. перев.*

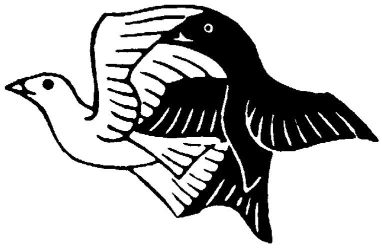


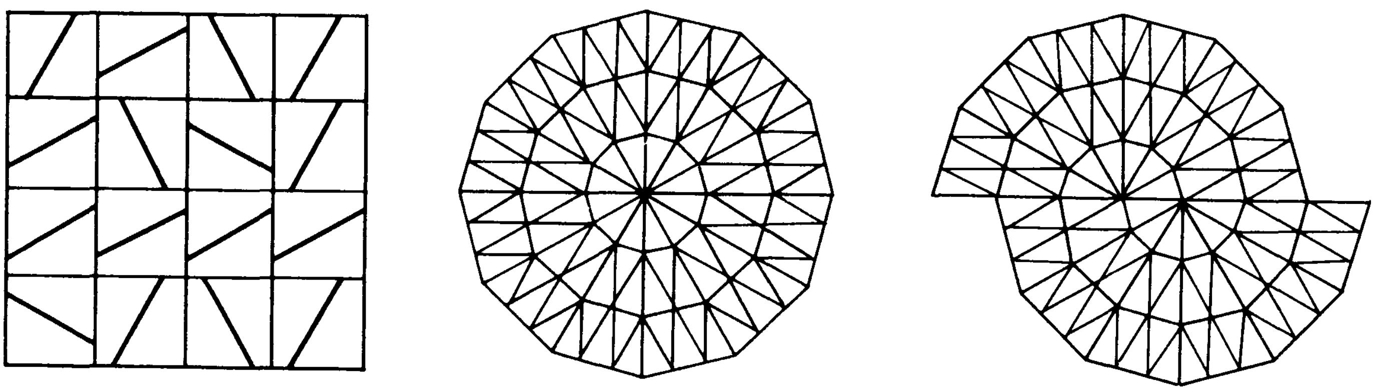
Рис. 1

Периодическая мозаика М. К. Эшера (1949).

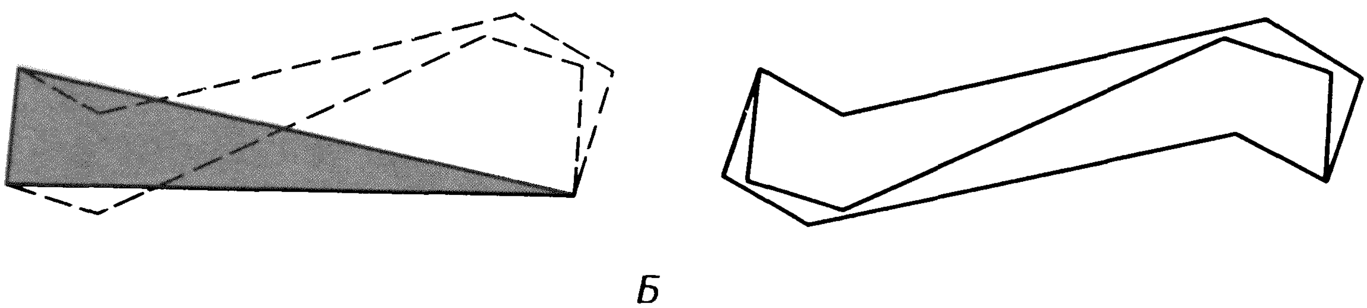
ленные из областей, напоминающих очертаниями живых существ. Типичная эшеровская мозаика изображена на рис. 1. Примыкающие друг к другу белая и черная птицы образуют фундаментальную область, которая при трансляции заполняет («замощает») всю плоскость. Представим себе, что плоскость покрыта прозрачной пленкой, на которую нанесены контуры каждой элементарной области. Только в том случае, если мозаика периодическая, вы можете сдвинуть пленку, не поворачивая ее, в новое положение, при котором контуры на ней в точности совпадут с контурами областей на плоскости.

Существует бесконечно много фигур, например правильных шестиугольников, из которых можно сложить только периодическую мозаику. Существует бесконечно много других фигур, из которых можно сложить и периодические, и непериодические мозаики. Бесконечную шахматную доску нетрудно превратить в непериодическую мозаику из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников или из четырехугольников: для этого достаточно разбить каждый квадрат на две части так, как показано на рис. 2А слева, и изменить ориентацию, чтобы нарушить периодичность. Нетрудно построить непериодическую мозаику из домино.

Из равнобедренных треугольников можно также построить мозаику, располагая их радиально, как показано на рис. 2А в середине. Хотя такая мозаика отличается высокой упорядоченностью, она не периодическая. Как отметил Майкл Голдберг в 1955 г. [2, 1], такую мозаику можно разрезать пополам, а затем сдвинуть одну полуплоскость относительно другой на один шаг или на несколько шагов, образуя непериодическую спиральную мозаику типа той, которая изображена на рис. 2А справа. Равнобедренный треугольник допускает бесконечно много деформаций при замене его равных сторон двумя конгруентными линиями, как это показано на рис. 2Б слева. Если новые стороны состоят из прямолинейных отрезков, то возникает многоугольник с 5, 7, 9, 11, ... сторонами, образующий спиральную мозаику. На рис. 3 изображен поразительный орнамент, который получается по такому рецепту из многоугольника с девятью сторонами. Впервые он был построен Хайнцем Фодербергом с помощью сложной процедуры. Метод Голдберга делает построение такого орнамента почти тривиальным.



А



Б

Рис. 2

(А) Непериодическое разбиение плоскости на конгруентные фигуры. (Б) Эннеагон, или девятиугольник (изображен слева штриховыми линиями), пара эннеагонов (справа), образующих восьмиугольник, из которых можно сложить периодическую мозаику.

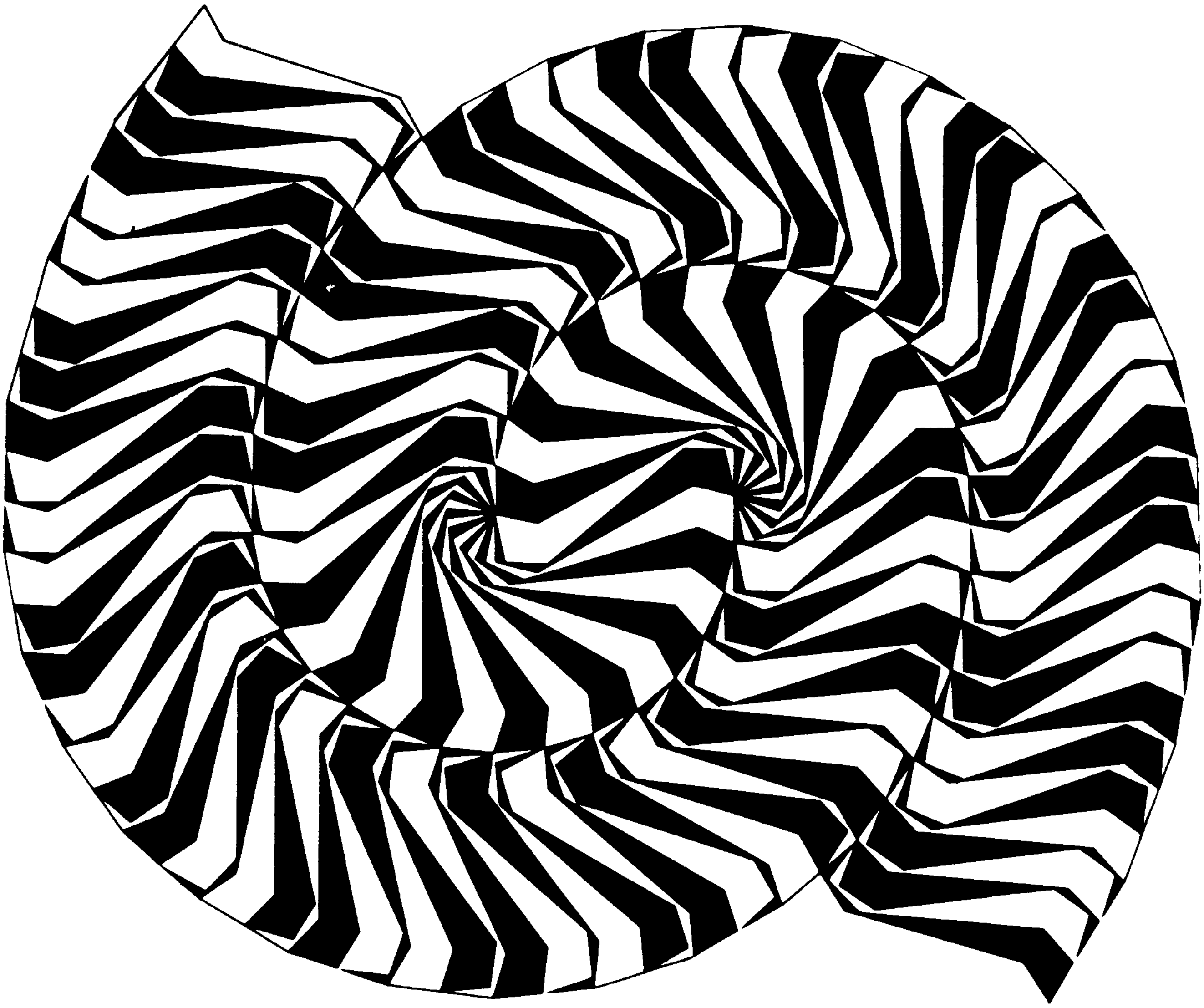


Рис. 3

Спиральная мозаика Хайнца Фодерберга.

Во всех известных случаях непериодического разбиения плоскости на конгруентные фигуры эти же фигуры позволяют строить и периодические мозаики. На рис. 2Б справа показано, как из двух эннеагонов (девятиугольников) Фодерберга можно составить один восьмиугольник, который позволяет очевидным образом периодически замостить всю плоскость.

Другого рода непериодические разбиения плоскости получаются из фигур, из которых, если взять их несколько, можно составить увеличенную копию одной фигуры. Соломон Голомб называет такие фигуры «делящимися». (См. гл. 24 моей книги [1, 2*].) На рис. 4 показано, как фигура, известная под названием «сфинкс», при построении из нее непериодической мозаики образует новые сфинксы более крупных размеров. И в этом случае два сфинкса (один из

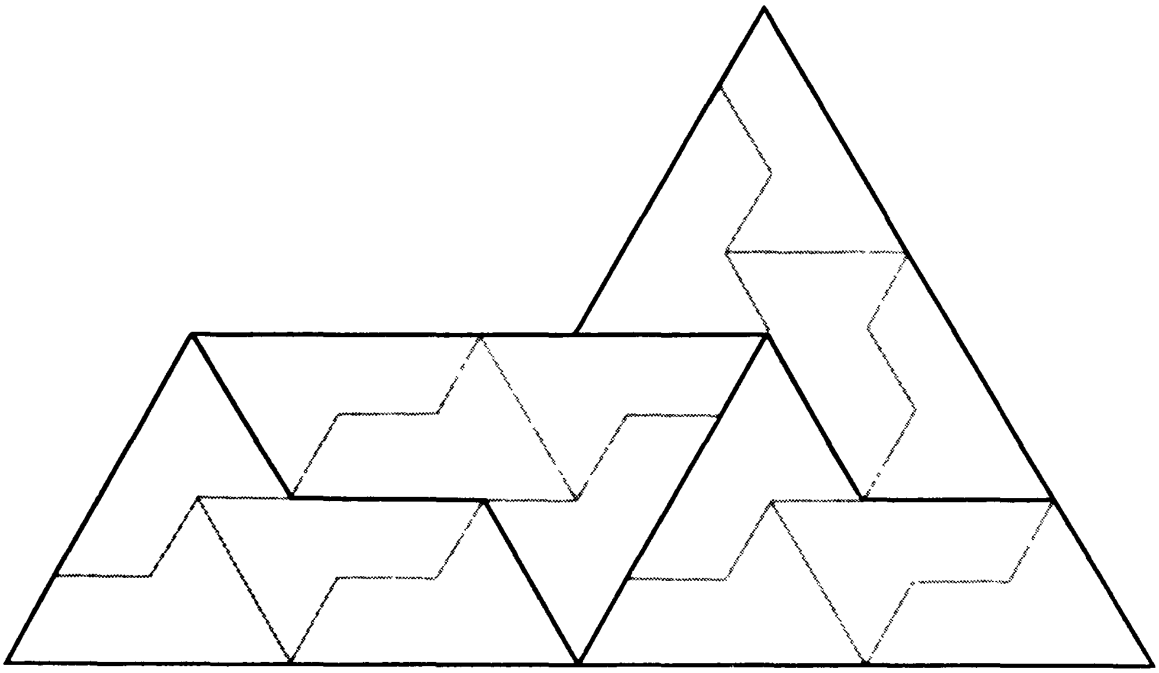


Рис. 4

Три поколения сфинксов в непериодическом разбиении плоскости

которых повернут на 180° относительно другого) очевидным образом позволяют построить периодическую мозаику.

Существуют ли наборы фигур, из которых можно строить только непериодические мозаики? Под «только» мы понимаем, что ни из одной фигуры, ни из какого-то их подмножества, ни из всего набора нельзя построить периодическую мозаику, но из всего набора можно построить непериодическую мозаику. При построении мозаики разрешается поворачивать фигуры и заменять их зеркальными отражениями.

На протяжении многих десятилетий специалисты полагали, что таких наборов не существует, но их мнение оказалось неверным. В 1961 г. Хао Ван заинтересовался задачей о замощении плоскости множествами единичных квадратов, стороны которых раскрашены по-разному. Такие множества получили название «домино Вана», а сам Ван написал о них великолепную статью для журнала «Scientific American» (1965) [2, 2]. Задачу, которую поставил Ван, можно сформулировать так: найти процедуру, позволяющую для любого набора домино решать, можно ли из него построить мозаику, если домино укладывать так, чтобы смежные ребра были одного цвета. Поворачивать домино или заменять их зеркальными отражениями не разрешается. Поставленная

Ваном задача важна потому, что связана с проблемой разрешимости в математической логике. Ван предположил, что любой набор домино, которым можно замостить плоскость, позволяет построить периодическую мозаику, и показал, что если его гипотеза верна, то для задачи о построении мозаики существует решающая процедура.

В 1964 г. Робер Берджер в своей докторской диссертации по прикладной математике [2, 3], представленной Гарвардскому университету, показал, что гипотеза Вана неверна. Общей решающей процедуры не существует. Это означает, что существует какой-то набор домино Вана, из которых можно построить только непериодическую мозаику. Берджер построил такой набор из более чем 20 000 домино. Впоследствии ему удалось найти меньший набор, состоящий из 104 домино, а Доналду Кнуту удалось уменьшить число домино в наборе до 92.

Каждый такой набор домино Вана нетрудно превратить в многоугольные фигуры, из которых можно строить только непериодические мозаики. Для этого нужно просто снабдить соприкасающиеся стороны домино, уложенных в мозаику, точно подогнанными друг к другу выступами («шипами») и впадинами («пазами»). Соответствие шипов и пазов заменяет прежнее условие совпадения цвета примыкающих друг к другу сторон домино. Согласно прежнему условию примыкающие стороны домино должны быть одного цвета. Это условие должно было соблюдаться для всех цветов. Допуская повороты и отражения элементарных областей, Робинсон построил 6 фигур (рис. 5), допускающих в указанном выше смысле построение непериодической мозаики. В 1977 г. Роберт Амманн обнаружил другой набор из 6 фигур, из которых также можно сложить непериодическую мозаику. Неизвестно, можно ли сложить из фигур такого квадратного типа мозаику, если число их меньше 6. Имеются веские основания полагать, что число 6 минимально.

Роузболловскому профессору математики Оксфордского университета Пенроузу удалось найти меньшие наборы фигур неквадратного типа, из которых можно построить непериодическую мозаику. Работая в основном в области теории относительности и квантовой механики, Пенроуз проявляет активный интерес к занимательной математике. Это – фамильная черта Пенроузов: отец Роджера – генетик Л. С. Пен-

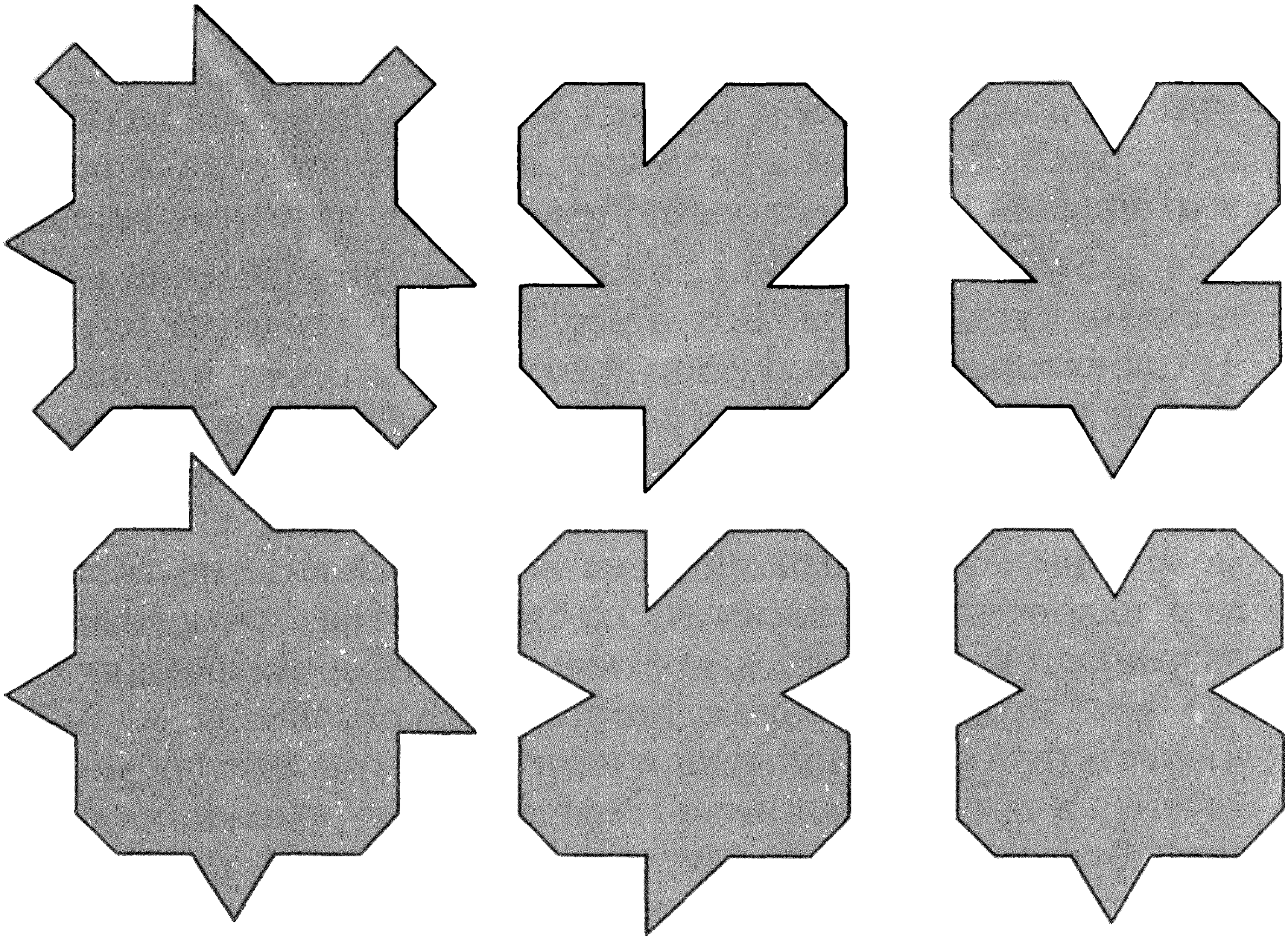


Рис. 5

Шесть «изразцов» Рафаэла М Робинсона, из которых можно сложить непериодическую мозаику.

роуз также был любителем занимательной математики. (Отец и сын Пенроузы совместными усилиями изобрели знаменитую «лестницу Пенроузов», которая совершает виток за витком, не поднимаясь при этом ни на шаг. Эшер изобразил эту лестницу в своей литографии «Восхождение и спуск».) В 1973 г. Роджер Пенроуз обнаружил набор из 6 фигур, из которых можно построить непериодическую мозаику. Вскоре ему удалось сократить число фигур до двух.

Так как найденные фигуры могли стать основой коммерческих игр-головоломок, Пенроуз воздерживался от публикации своего открытия до тех пор, пока не получил на них патенты в Великобритании, США и Японии. Эти патенты действуют и поныне. В не меньшей степени я признателен Джону Хортону Конуэю за многочисленные результаты его исследований мозаик Пенроуза.

Форма двух основных фигур Пенроуза может быть различной, но наиболее интересна пара фигур, которые Конуэй назвал «наконечником дротика» и «воздушным змеем». На рис. 6А показано, как построить наконечник и змей из ромба с углами в 72° и 108°. Разделим длинную диагональ ромба в отношении, равном хорошо известному золотому сечению $(1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}61803398...$, и соединим точку деления с вершинами тупых углов. Вот и все. Пусть φ – золотое сечение. Тогда каждый прямолинейный отрезок – сторона наконечника или змея – имеет длину, равную либо 1, либо φ. Наименьший угол равен 36°. Все остальные углы кратны ему.

Разумеется, ромбом с внутренними углами в 72° и 108° можно выложить периодически всю плоскость, но складывать наконечники и змеи так, чтобы они образовали ромб, не разрешается. Избежать запретных вариантов соединения фигур мы можем, снабжая стороны наконечников и змеев соответствующими шипами и пазами, но той же цели можно достичь и проще. Например, вершины фигур можно обозначить буквами *H* и *T* так, как это показано на рис. 6Б, и ввести правило, по которому при подгонке сторон разрешается совмещать только вершины, помеченные одинаковыми буквами. Вершины для облегчения составления мозаики можно пометить точками двух различных цветов (один цвет соответствует букве *H*, другой – букве *T*), но Конуэй предложил более изящный метод – проводить на каждой фигуре дуги окружностей двух цветов (на рис. 6 эти дуги изображены черным и серым цветом). Каждая такая дуга делит стороны фигур, а также оси симметрии на части, длины которых образуют золотое сечение. Правило построения мозаики состоит в том, что при совмещении сторон должны соединяться дуги одного цвета.

Чтобы в полной мере оценить красоту и загадочность мозаики Пенроуза, необходимо изготовить набор, состоящий по меньшей мере из 100 змеев и 60 наконечников. Число змеев находится к числу наконечников (так же, как площадь змея к площади наконечника) в отношении, равном золотому сечению. Вам могло показаться, что меньших по размерам наконечников потребуется больше, чем змеев, но в действительности дело обстоит иначе: змеев в мозаике оказывается в 1,618... больше, чем наконечников. В бесконечной мозаике отношение числа змеев к числу наконечников в точности равно золотому сечению. Иррациональность этого отношения лежит в основе данного Пен-

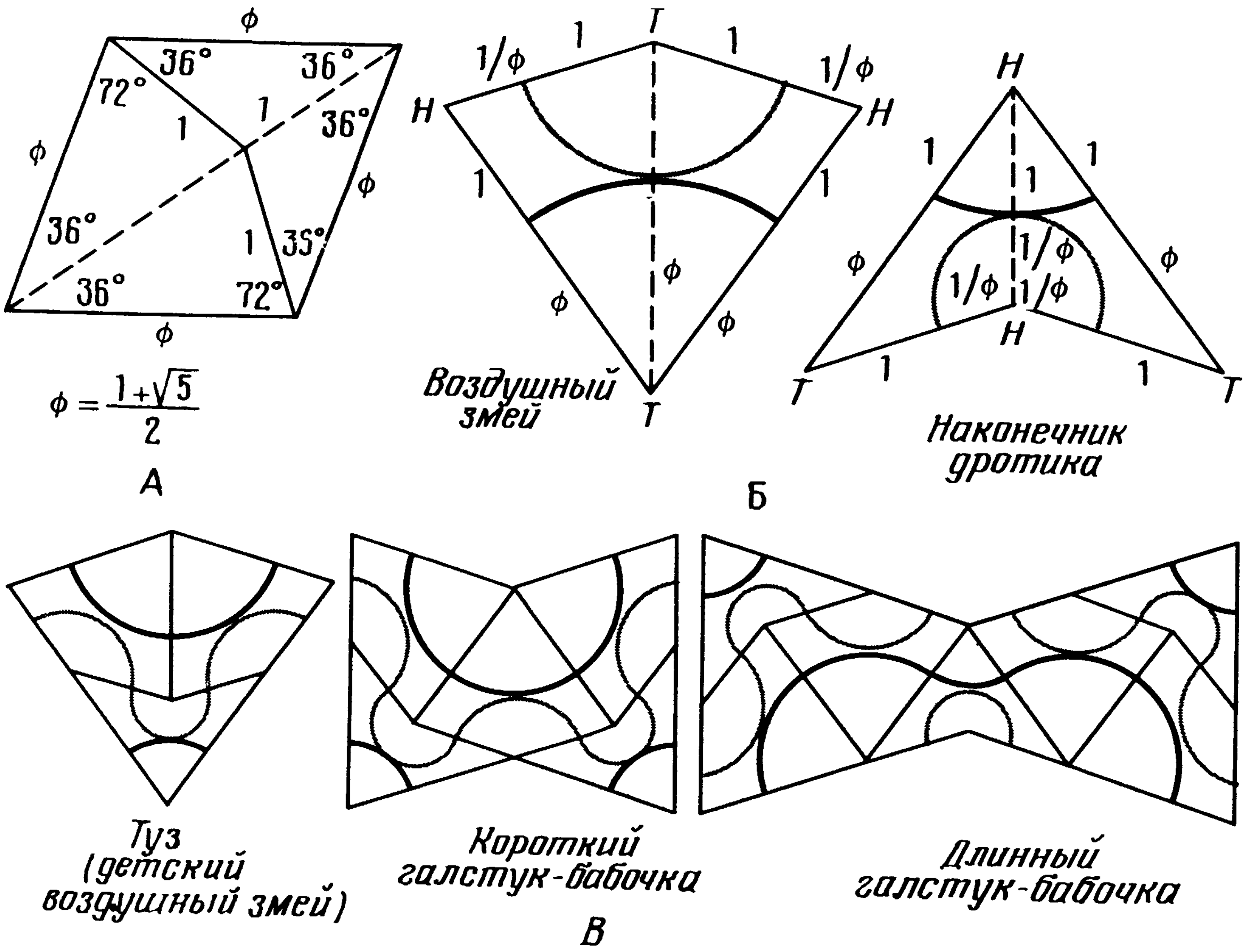


Рис. 6

(А) Как построить наконечник дротика и воздушный змей. (Б) Раскраска (черные и серые линии) наконечника дротика и воздушного змея, позволяющая контролировать построение непериодической мозаики. (В) Тузы и галстуки-бабочки, позволяющие ускорить построение мозаик.

роузом доказательства непериодичности его мозаики, так как если бы мозаика была периодической, то отношение числа змеев к числу наконечников заведомо было бы рациональным.

Если вы захотите построить мозаику Пенроуза, то лучше всего начертить тонкими линиями на листе бумаги как можно больше наконечников и змеев, выдерживая при этом пропорцию на пять змеев три наконечника. Затем выкройку следует многократно сфотографировать и раскрасить дуги окружностей на фигурах, например, в красный и зеленый цвет фломастерами. Конуэй обнаружил, что построение мозаики Пенроуза можно ускорить, а фрагменты ее оказываются более устойчивыми, если змеи и наконченики изготавливать в три раза более крупных размеров, чем на рис. 6В. Расширяя мозаику, вы можете непрестанно заменять наконечники и змеи тузами и галстуками-бабочками. В действительности при составлении любой бесконечной мозаики можно использовать бесконечный набор сколь угодно больших *пар* основных фигур.

Начинается построение мозаики Пенроуза с укладки наконечников и змеев вокруг одной вершины и последующего радиального расширения узора. Каждый раз, когда вы пристраиваете к участку границы новую фигуру, вам необходимо выбирать между наконечником и змеем. Иногда выбор предрешен, иногда свободен. Бывают случаи, когда подходят обе фигуры, но впоследствии вы можете прийти к противоречию (дойти до такого места, где по правилам окажется невозможным пристроить к мозаике ни змей, ни наконечник). В этом случае вам не остается ничего другого, как вернуться назад и изменить выбранную вами фигуру. При построении мозаики удобно сначала обойти границу и пристроить все фигуры там, где их выбор предопределен. Такая операция не может привести к противоречию. Затем можно попробовать попытать счастья с теми фигурами, выбор которых однозначно не определен. Всегда можно продолжить построение мозаики. Чем больше вы будете возиться с фигурами, тем больше вы будете открывать для себя «правил», позволяющих строить мозаику более эффективно. Например, наконечник входит в углубление между двумя змеями, образуя вездесущий туз.

Мозаики Пенроуза образуют несчетное множество – так же, как точки на прямой. Доказать это можно многими способами. Все доказательства основаны на использовании одного поразительного явления, открытого Пенроузом. Конуэй называет его «расширением» и «сжатием». На рис. 7 показана начальная стадия расширения. Представьте, что каждый наконечник разрезан пополам, после чего все короткие стороны исходных наконечников, примыкающие друг к другу, склеены. В результате получится новое разбиение плоскости (контуры его элементарных областей показаны на рис. 7 жирными черными линиями) на змеи и наконечники более крупных размеров.

Расширение можно продолжать до бесконечности, и каждое новое поколение фигур будет крупнее предыдущего.

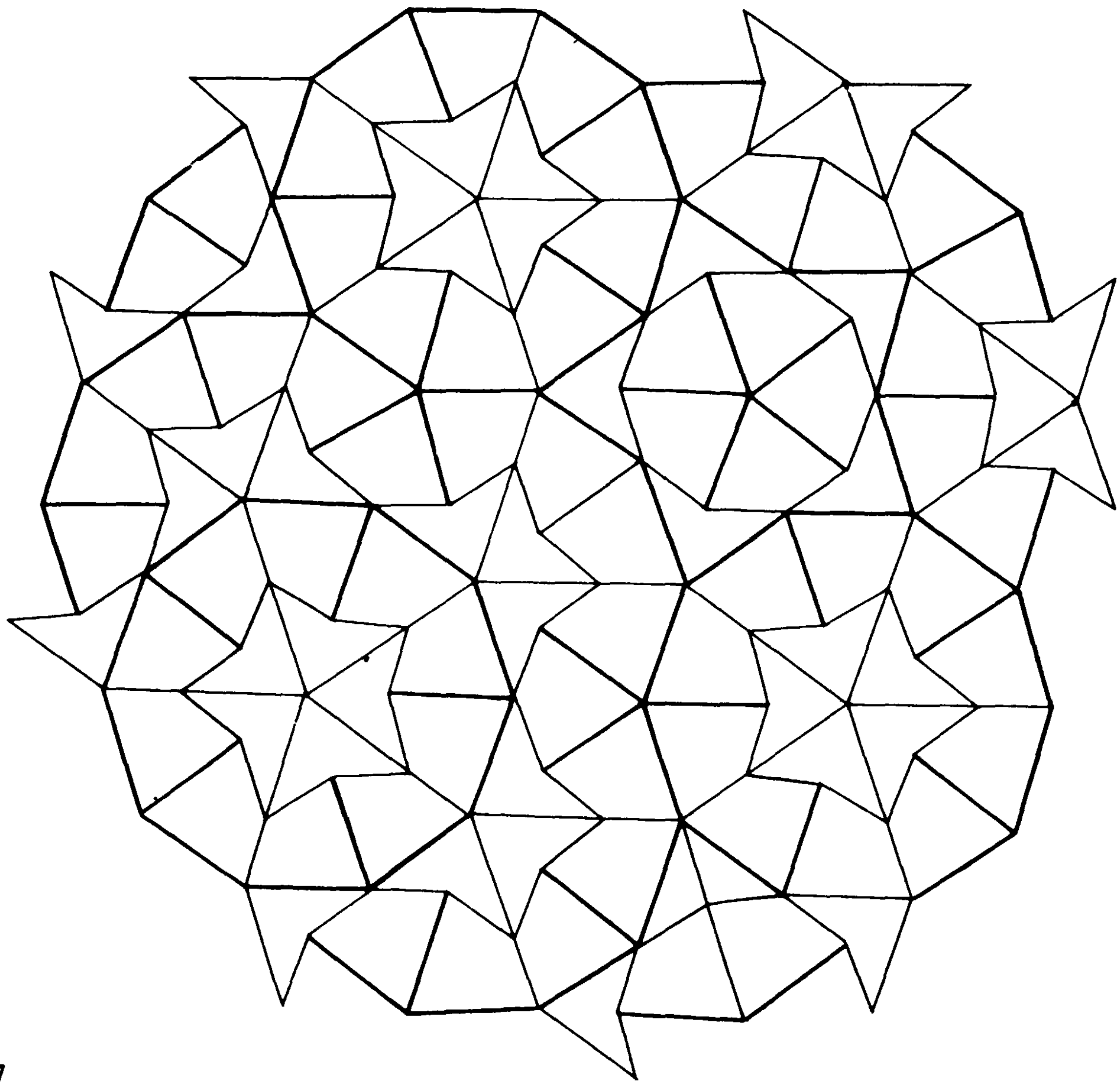


Рис. 7

Расширение («раздувание») узора.

Заметим, что змеи второго поколения, хотя они имеют такую же форму и такие же размеры, как тузы первого поколения, «устроены» иначе. Именно поэтому туз иногда называют детским змеем. Его не следует смешивать со змеем второго поколения. Сжатие – процесс, аналогичный расширению, но проводимый в противоположном направлении. На каждой мозаике Пенроуза мы можем вычерчивать все более мелкие поколения наконечников и змеев. Построение мозаики при этом также продолжается до бесконечности, порождая фрактальную структуру (см. гл. 3).

Общий ход предложенного Конуэем доказательства несчетности мозаик Пенроуза (сам Пенроуз доказал несчетность своих мозаик иначе) сводится к следующему. Обозначим на змее половину, лежащую слева от оси симметрии, буквой L, а половину, лежащую справа, буквой R. Проделаем то же с половинами наконечника, обозначая их соответственно буквами l и r. Выберем наугад какую-нибудь точку на мозаике. Запишем букву, которой обозначена половина фигуры (змея или наконечника), содержащая выбранную нами точку. Расширим мозаику один раз и запишем букву, соответствующую положению выбранной точки на фигуре второго поколения. Продолжая расширять мозаику, вы порождаете бесконечную последовательность символов, однозначно описывающую исходную мозаику, так сказать, с точки зрения выбранной точки.

Выберем на исходной мозаике другую точку. Предложенная процедура может породить последовательность символов, которая начинается иначе, чем первая последовательность, но, начиная с некоторого символа и до конца, совпадает с ней. Если построенные последовательности не совпадают после конечного начального отрезка, то они соответствуют различным мозаикам. Указанным способом можно получить не все возможные последовательности из четырех символов, но можно показать, что последовательности, обозначающие различные мозаики, находятся во взаимно однозначном соответствии с точками числовой оси.

Приводя иллюстрации мозаик Пенроуза, мы не изображали на змеях и наконечниках цветных дуг окружности, так как образуемые дугами узоры маскируют контуры основных фигур. Но если вы будете работать со змеями и наконечниками, украшенными цветными дугами, то непременно будете поражены красивыми узорами, сплетаемыми из этих дуг. Пенроуз и Конуэй независимо доказали, что если дуги образуют замкнутую кривую, то она имеет центр симметрии пятого порядка. Любой узор может иметь самое большее две незамкнутые кривые каждого цвета. В большинстве узоров все кривые замкнуты.

Хотя можно построить мозаики Пенроуза с высокой симметрией (бесконечное множество мозаик обладает двусторонней, или билатеральной, симметрией), большинство мозаик, как и сама Вселенная, представляют собой смесь порядка и неожиданных отклонений от него, способную кого угодно поставить в тупик. Когда мозаики расширяются, они всегда стремятся повторить себя, но это им так никогда и не удается. Г. К. Честертон заметил однажды, что внеземное существо, наблюдая, как много особенностей строения человеческого тела дублируется справа и слева, склонилось бы к выводу о том, что и сердце должно находиться у нас по обе стороны тела. Наш мир, по утверждению Честертона, «выглядит чуть более математическим и регулярным, чем он является в действительности; его точность выставлена напоказ, его неточность скрыта; его произвол как бы подстерегает вас в засаде». «Скрытое отклонение от точности хотя бы на дюйм ... неизменно присутствует во всем и повсюду, ... это своего рода тайный заговор во Вселенной».

Приведенный отрывок из Честертона дает весьма точное описание плоских миров Пенроуза.

В мирах Пенроуза есть еще нечто более удивительное. В некотором смысле, точно переданном в виде так называемой *теоремы о локальном изоморфизме*, все мозаики Пенроуза одинаковы. Пенроузу удалось показать, что любая конечная область в любой мозаике совпадает с каким-то участком любой другой мозаики. Более того, в любой мозаике любой выбранный фрагмент другой мозаики встречается бесконечно много раз.

Трудно себе представить, насколько эта ситуация противоречит здравому смыслу. Вообразите, что вы живете на бесконечной плоскости, выложенной одной из несчетного множества мозаик Пенроуза. Вы обследуете свою мозаику участок за участком, охватывая каждый раз все большую территорию. Независимо от того, сколь большую область плоскости вы обследуете, вам никогда не удастся установить, на какой мозаике вы живете. Бесполезно совершать дальние путешествия и исследовать несвязные области, так как все они принадлежат какой-то одной большой области, которая в точности повторяется бесконечно много раз в любой мозаике Пенроуза. Разумеется, для периодических разбиений плоскости такое утверждение тривиально, но миры Пенроуза не периодичны. Они отличаются друг от друга бесконечно многими деталями и в бесконечно многих отношениях, и тем не менее их можно различить только в недостижимом пределе.

Предположим, что вы исследуете круглую область диаметра d. Назовем ее *городом*, в котором вы живете. Внезапно вы переноситесь в некоторый случайно выбранный параллельный мир Пенроуза. Как далеко вы окажетесь от круглой области, которая в точности повторяет все улочки и переулки вашего родного города? Конуэй отвечает на этот вопрос поистине замечательной теоремой: расстояние от периметра вашего города до периметра города-двойника никогда не превосходит диаметра *d*, умноженного на куб золотого сечения, или 2,11... *d*. (Это верхняя грань, а не среднее расстояние.) Если вы пойдете в правильном направлении, то, пройдя расстояние всего лишь в 2,11... *d*, вы непременно окажетесь в точной копии вашего родного города. Теорема Пенроуза применима и к Вселенной, в которой мы живем. Любой большой круглой структуры (а различных круглых структур существует бесконечно много) можно достичь, преодолев в определенном направлении расстояние, которое заведомо меньше, чем (грубо говоря) удвоенный диаметр структуры, и с высокой вероятностью равно ее диаметру.

Теорема Конуэя весьма неожиданна. Рассмотрим аналогичный изоморфизм на примере непериодической последовательности цифр в десятичном разложении числа π. Если вы выберете конечный набор из 10 цифр и начнете со случайно выбранного места разложения, то заведомо встретите выбранный конечный набор, если продвинетесь достаточно далеко вдоль разложения, однако заранее неизвестно, в какую сторону (к началу или от начала разложения) следует двигаться, и расстояние, которое предстоит преодолеть прежде, чем встретится выбранный набор, заведомо больше 10 цифр. Чем длиннее выбранный набор, тем, вообще говоря, дальше придется отходить от исходной цифры, чтобы встретить его снова. Что же касается мозаик Пенроуза, то, попав на любую из них, вы всегда окажетесь достаточно близко к дубликату вашего родного города.

Наконечники дротиков и воздушные змеи можно уложить вокруг вершины только семью различными способами. Рассмотрим сначала два способа, порождающие мозаики с осью симметрии 5-го порядка, или обладающие по терминологии Пенроуза пентагональной симметрией.

Солнце (белая фигура на рис. 8) не налагает жестких ограничений на примыкающие к нему фигуры. Если при укладке новых фигур следить за сохранением пентагональной симметрии, то получится красивая мозаика, которую вы видите на рис. 8. Структура такой мозаики однозначно определена на всем ее бесконечном протяжении.

Звезда (белая фигура на рис. 9) жестко регламентирует свое окружение, позволяя уложить в непосредственной бли-

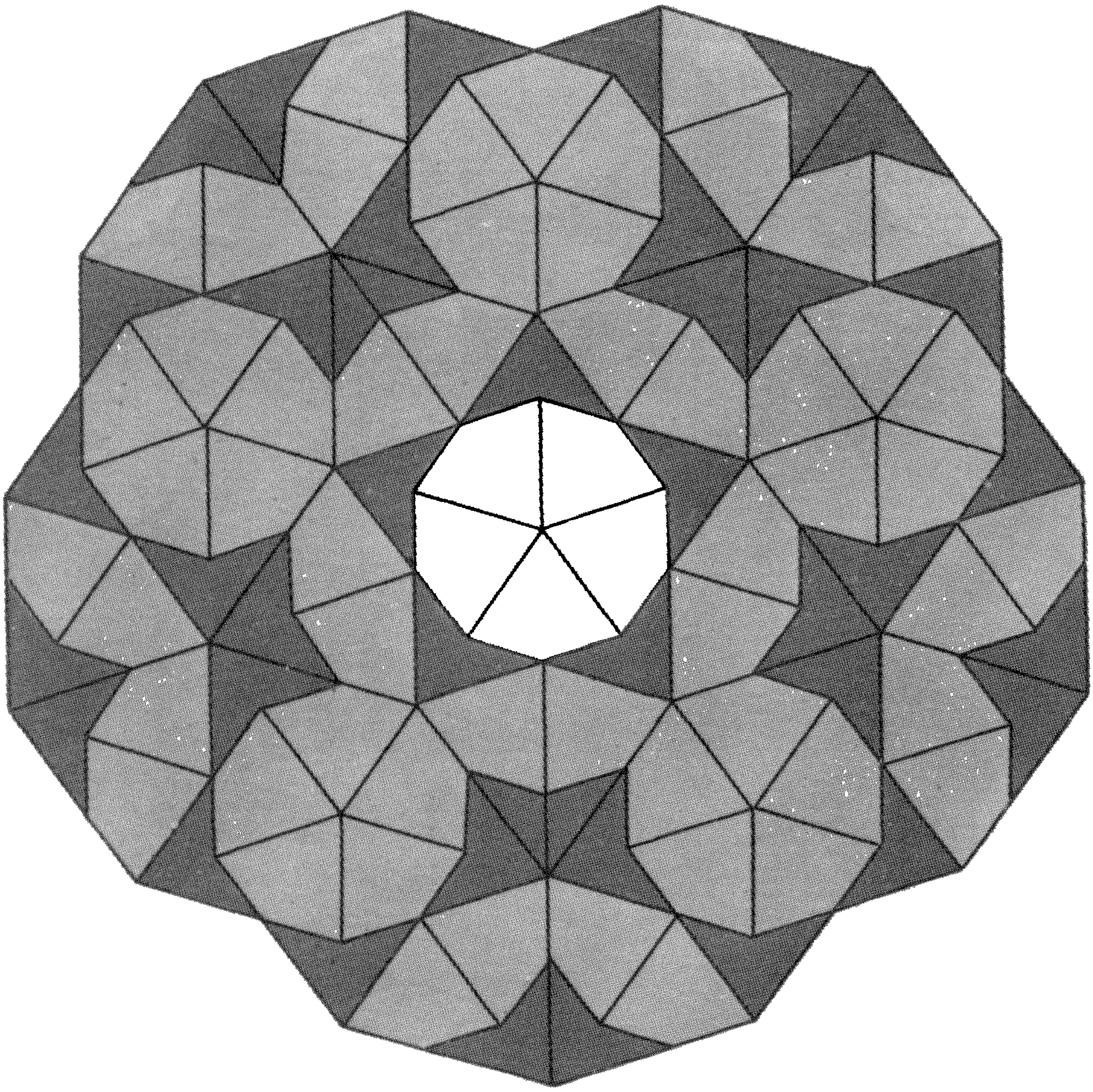


Рис. 8

Бесконечный узор-солнце

зости от себя только 10 змееев (серые фигуры на рис. 9). Расширяя этот фрагмент мозаики с сохранением симметрии с центром 5-го порядка, вы получаете еще одну бесконечную и однозначно определенную мозаику, напоминающую ковер из цветов. Мозаики на основе звезды и солнца – единственные среди мозаик Пенроуза, обладающие идеальной симметрией с центром 5-го порядка. Они эквивалентны в следующем смысле: расширив или сжав одну из них, вы получите вторую мозаику.

Туз – третий способ укладки фигур вокруг вершины. Ближайшее окружение туза может быть различным. Фигуры, непосредственно примыкающие к двойке, валету и даме (белым фигурам на рис. 10), однозначно определены. Как обнаружил Пенроуз (и независимо от него Клив Бах), некоторые из семи способов укладки змеев и наконечников

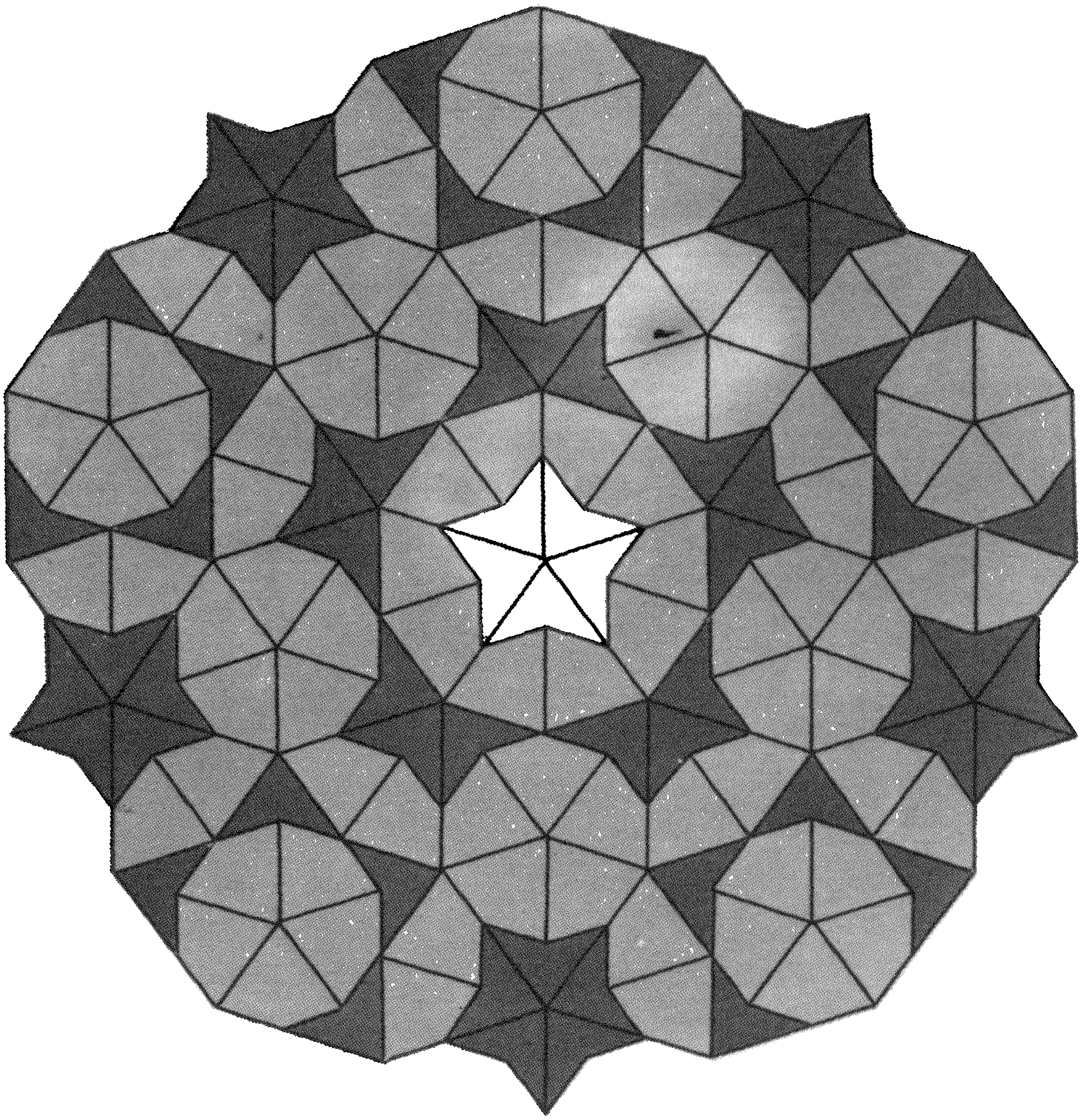


Рис. 9

Бесконечный узор-звезда.

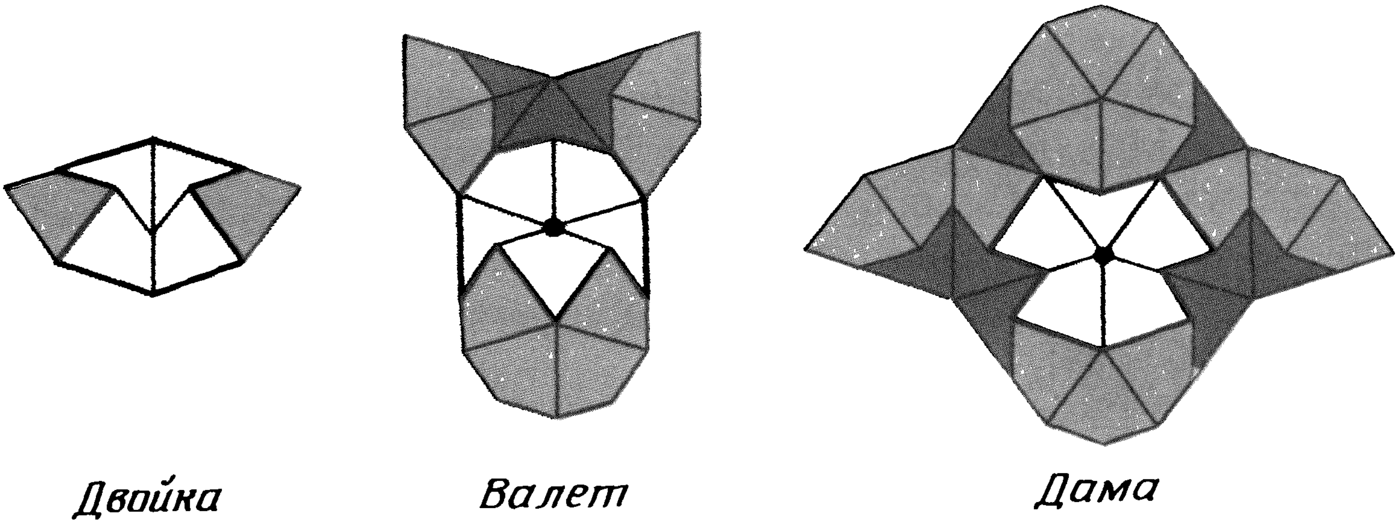


Рис. 10

«Империи» двойки, валета и дамы.

вокруг вершины однозначно определяют положение фигур, не примыкающих непосредственно к фрагменту мозаики, диктующему порядок укладки. На фото 1 более яркими цветами показана *империя* короля (фигуры, закрашенной темно-серым цветом). Положение всех ярких фигур однозначно определяется королем. (К числу таких фигур относятся не показанные на рисунке два туза, примыкающие извне к левой и правой границе.)

Рисунок с империей короля был выполнен компьютерной программой, которую составил Эрик Регенер из Университета Конкордия в Монреале. Программа Регенера позволяет осуществлять любое число расширений произвольной мозаики Пенроуза. Жирными черными линиями показана область, разбиение которой однозначно определяется королем. Тонкими черными линиями показано разбиение после третьего расширения: нетрудно видеть, что король и почти вся его империя воспроизведены заново.

Наиболее необычный из всех миров Пенроуза, существенный для понимания пенроузовских разбиений плоскости,– бесконечная мозаика типа колеса, центральная часть которой изображена на рис. 11. Правильный десятиугольник в центре, очерченный жирным черным контуром (каждая сторона десятиугольника составлена из длинного и короткого звена), Конуэй называет *колесом*. Каждая точка на любой мозаике находится внутри какого-то колеса, структура которого в точности совпадает со структурой колеса на рис. 11. Произведя однократное расширение, мы убедимся в том, что каждая точка окажется внутри колеса бóльших размеров. Аналогично каждая точка лежит внутри колеса любого поколения, хотя колеса не обязательно должны быть концентрическими.

Заметим, что 10 светло-серых спиц простираются неограниченно. Конуэй называет их *червяками*. Червяки состоят из длинных и коротких галстуков-бабочек, причем отношение числа длинных галстуков-бабочек к числу коротких равно золотому сечению. Каждая мозаика Пенроуза содержит бесконечно много сколь угодно длинных червяков. Расширяя или сокращая червяка, вы получите другого червяка с той же осью. Заметим, что два полных червяка проходят через центральное колесо на бесконечной мозаике, построенной на основе колеса. (Внутри центрального колеса червяки не

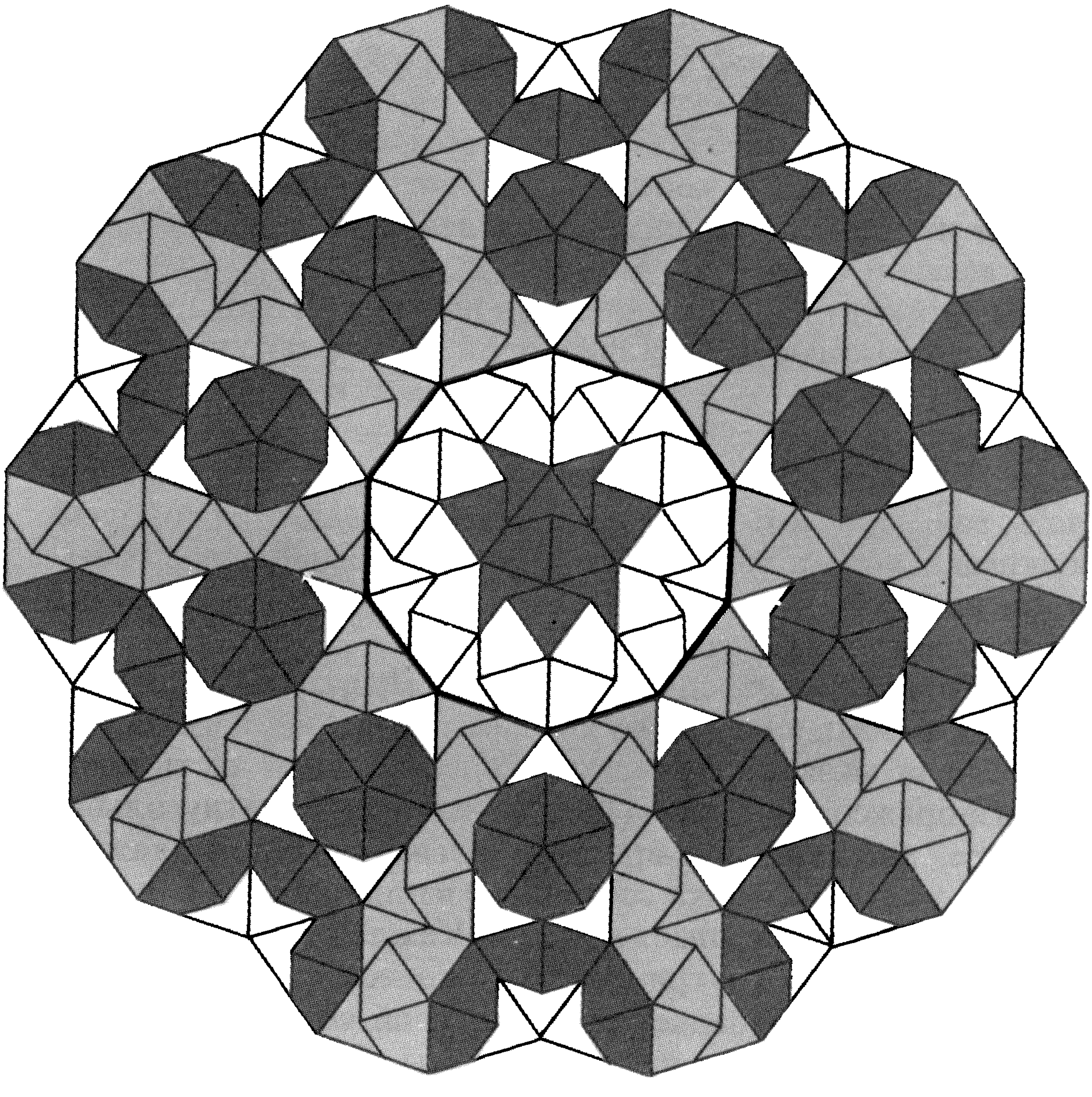


Рис. 11

«Колесо» с «Бетменом» (человеком – летучей мышью) в центре

окрашены в светло-серый цвет.) Остальные спицы представляют собой полубесконечные червяки. Если исключить спицы и внутренность центрального колеса, то остальная мозаика обладает идеальной симметрией с центром 10-го порядка. Пространство между любыми двумя спицами заполнено чередующимися фрагментами мозаик на основе солнца и звезды все возрастающих размеров.

У любой спицы бесконечной мозаики на основе колеса можно поменять местами стороны (или, что то же, каждый из образующих спицу галстуков-бабочек можно повернуть на 180° вокруг его центра), и перевернутая спица будет по-прежнему точно вписываться в промежуток между окружающими ее фигурами, за исключением тех, которые лежат внутри центрального колеса. Спиц всего десять. Каждая из них может находиться в 2 состояниях. Следовательно, всего существует $2^{10} = 1024$ комбинаций состояний. Но после исключения поворотов и отражений всей мозаики как целого остаются только 62 различные комбинации. Каждая комбинация высекает внутри колеса область; которую Конуэй назвал *декаподом* (десятиножкой).

Декаподы состоят из 10 одинаковых равнобедренных треугольников, имеющих форму увеличенных половинок наконечника. Наибольшей симметрией обладают декаподы *циркулярная пила* и *морская звезда*, которые вы видите на рис. 12. Как и в случае червяка, каждый треугольник, входящий в декаподы, можно повернуть на 180° вокруг его оси симметрии. С точностью до поворотов и отражений декаподов как целого всего существует 62 «состояния» декапода. Обозначим вершины выступов на периметре каждого декапода через *T*, а вершины впадин через *H*. Тогда при дальнейшем построении мозаики буквы *H* и *T* должны входить только парами *HT* или *TH*.

Если спицы расположены в таком же порядке, как в бесконечной мозаике на основе колеса, то в центре возникает декапод, получивший название Бетмен (человек – летучая мышь). Бетмен (серая фигура в центре) – единственный декапод, который может быть составлен из элементарных фигур с соблюдением всех правил. (Ни одна конечная область не

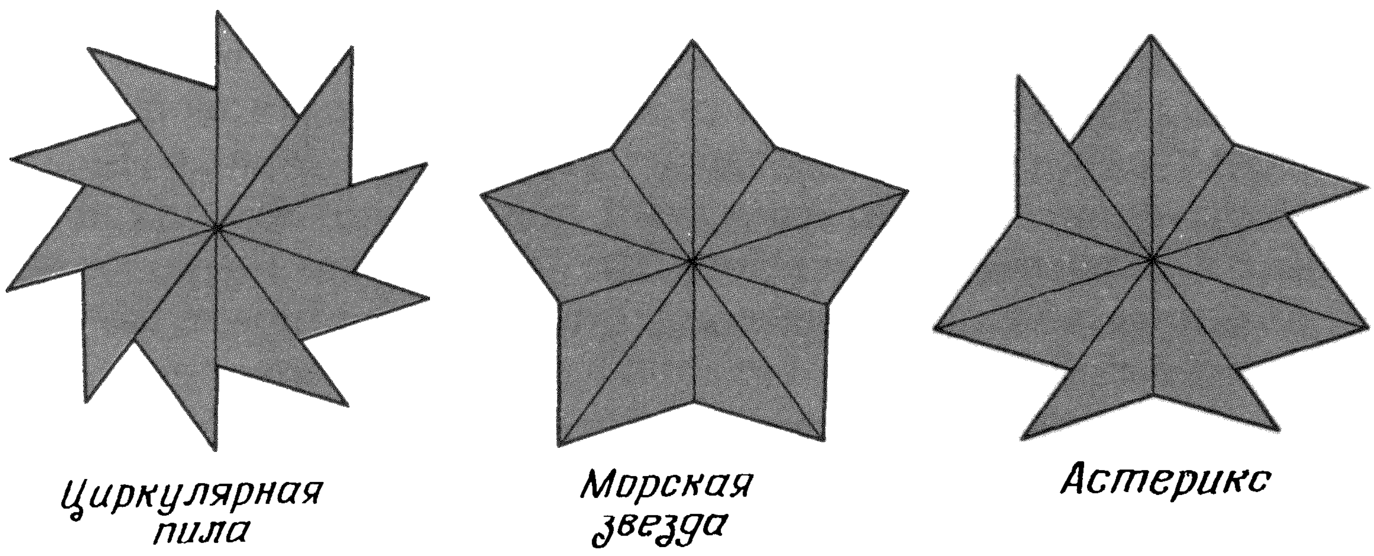


Рис. 12

Три декапода.

допускает более одного разбиения на элементарные фигуры, удовлетворяющего всем правилам.) Однако Бетмен отнюдь не гарантирует однозначного построения бесконечной мозаики на основе колеса. Он лишь допускает такое построение. Действительно, ни один конечный участок построенной по всем правилам мозаики не определяет однозначно всю мозаику, так как такой конечный фрагмент содержится в *любой* мозаике.

Заметим, что бесконечная мозаика на основе колеса обладает двусторонней симметрией с осью симметрии, проходящей через вертикальную ось Бетмена. При расширении мозаика остается неизменной с точностью до зеркального отражения относительно прямой, перендикулярной оси симметрии. Пять наконечников в Бетмене и два его центральных змея – единственные фигуры в любой мозаике Пенроуза, не лежащие внутри области с симметрией 5-го порядка. Все остальные фигуры в этой или в любой другой мозаике принадлежат бесконечно многим областям с симметрией 5-го порядка.

Остальные декаподы (их 61) порождаются внутри центрального колеса остальными комбинациями (таких комбинаций 61) поворотов червяков в спицах. Все эти декаподы являются *дырками* в следующем смысле. Дыркой называется любая конечная пустая область в бесконечной мозаике, которую нельзя заполнить фигурами с соблюдением всех правил. Может быть, вы подумали, будто каждый декапод является центром бесконечно многих мозаик, но тут миры Пенроуза играют с нами еще одну шутку. Как ни удивительно, 60 декаподов порождают единственное разбиение плоскости, которое отличается от мозаики, определяемой только структурой спиц. Исключение составляют только Бетмен и еще один декапод, известный под названием Астерикс[1]. Как и Бетмен, Астерикс допускает бесконечно много мозаик на основе колеса и, кроме того, позволяет строить мозаики другого рода.

---

[1] Астерикс Галл – популярный персонаж серии французских детских книжек с картинками. Действие всех историй происходит во времена Юлия Цезаря. Имя героя Астерикс выбрано по созвучию с французским названием типографского знака * («звездочка»), который напоминает своими очертаниями этот декапод.

А теперь самое время упомянуть об одной поразительной гипотезе. Конуэй считает, хотя у него нет строгого доказательства, что любая дыра какой угодно формы или размера эквивалентна дыре-декаподу в следующем смысле: перекладывая фигуры вокруг дыры, забирая или добавляя в случае необходимости конечное число фигур, любую дыру можно преобразовать в декапод. Если эта гипотеза верна, то любое конечное число дыр в мозаике можно свести к какому-нибудь одному декаподу. Для этого необходимо лишь удалить достаточное число «лишних» фигур, чтобы дыры слились в одну большую дыру, а затем перестраивать ее до тех пор, пока не получится декапод, который не поддается разбиению на элементарные фигуры.

Представим себе, что декапод – это изразец или плитка, из которых можно складывать мозаики. За исключением Бетмена и Астерикса, каждый из 62 декаподов может служить своего рода затравочным дефектом, который становится центром кристаллизации. Он однозначно определяет бесконечную мозаику на основе колеса со всеми спицами и прочими деталями. Если гипотеза Конуэя верна, то любая *чужеродная фигура* (термин Пенроуза), которая однозначно порождает мозаику, как бы велика она ни была, имеет контур, преобразуемый в контур одного из 60 дыр-декаподов.

Змеи и наконечники можно переделывать в другие фигурки с помощью того же приема, которым мы выше преобразовывали равнобедренные треугольники в многоугольники, позволяющие строить спиральные мозаики. Этим же приемом Эшер превращал многоугольные плитки, образующие мозаику, в фигуры, напоминающие своими очертаниями людей и животных. На рис. 13 показано, как Пенроуз превратил свои наконечники и змеи в цыплят, образующих только непериодическую мозаику. Обратите внимание на то, что, хотя цыплята асимметричны, их никогда не приходится переворачивать «наизнанку», чтобы замостить плоскость. Жаль, что Эшер ушел из жизни до того, как стали известны мозаики Пенроуза. Как бы он использовал заложенные в них возможности!

Разрезая наконечники и змеи на меньшие части и пересоставляя последние, можно построить пары фигур со свойствами, аналогичными свойствам наконечников и змеев. Пенроуз

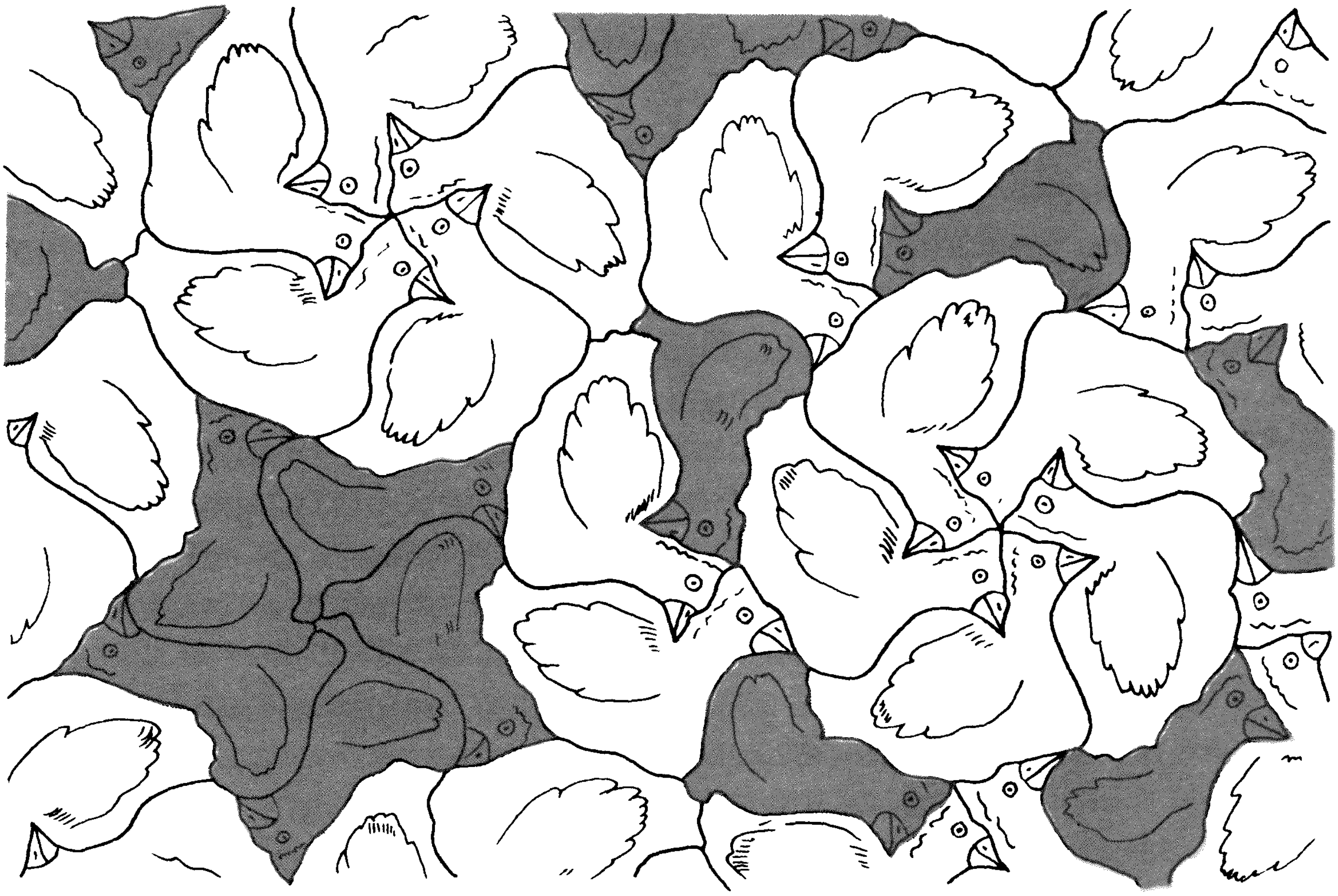


Рис. 13

Непериодическая мозаика Пенроуза «Цыплята».

обнаружил одну такую пару необычайно простых фигур: это ромбы, которые вы видите на образце мозаики, представленном на рис. 14. Все стороны имеют одинаковую длину. Больший ромб имеет углы в 72° и 108°, меньший – в 36° и 144°. Как и в случае змеев и наконечников, площади и количества фигур каждого типа, необходимых для построения бесконечной мозаики, находятся в отношении, равном золотому сечению. Расширяя и сжимая мозаики такого типа, мы получаем несчетное множество непериодических разбиений плоскости. Непериодичность достигается с помощью выступов и впадин на границах фигур или раскрашиванием сторон в разные цвета, как это было предложено Пенроузом (на рис. 14 раскраске соответствует черный и серые цвета).

В тесной связи между двумя множествами «плиток» и золотым сечением нетрудно убедиться, если взглянуть на пентаграмму, изображенную на рис. 15. Она была мистическим символом пифагорейского братства в Древней Греции. С помощью пентаграммы завлек в ловушку Мефистофеля гётевский Фауст. Построение неограниченно продолжаемо как внутрь, так и наружу, и каждый прямолинейный отрезок находится в отношении, равном золотому сечению, к следующему меньшему отрезку. Посмотрим, как все четыре элементарные фигуры Пенроуза входят в пентаграмму. Воздушный змей – это четырехугольник ABCD, наконечник дротика – четырехугольник AECB. Как любит говорить Конуэй, в основе двух наборов элементарных фигур лежат одни и те же «золотые штучки». Любая теорема о змеях и наконечниках может быть переформулирована в соответствующую теорему о ромбах Пенроуза или о любой другой паре его элементарных плиток, и наоборот. Конуэй предпочитает иметь дело с наконечниками и змеями, но другим математикам нравится работать с более простыми ромбами. Роберт Амманн обнаружил поразительное разнообразие других наборов изразцов, порождающих непериодические мозаики. Один из таких наборов состоит из двух выпуклых пятиугольников и одного выпуклого шестиугольника, однозначно определяющих непериодическую мозаику даже без маркировки сторон. Амманн нашел несколько пар элементарных фигур, в каждую из которых входит шестиугольник с пятью внутренними углами в 90° и одним углом в 270°. Эти

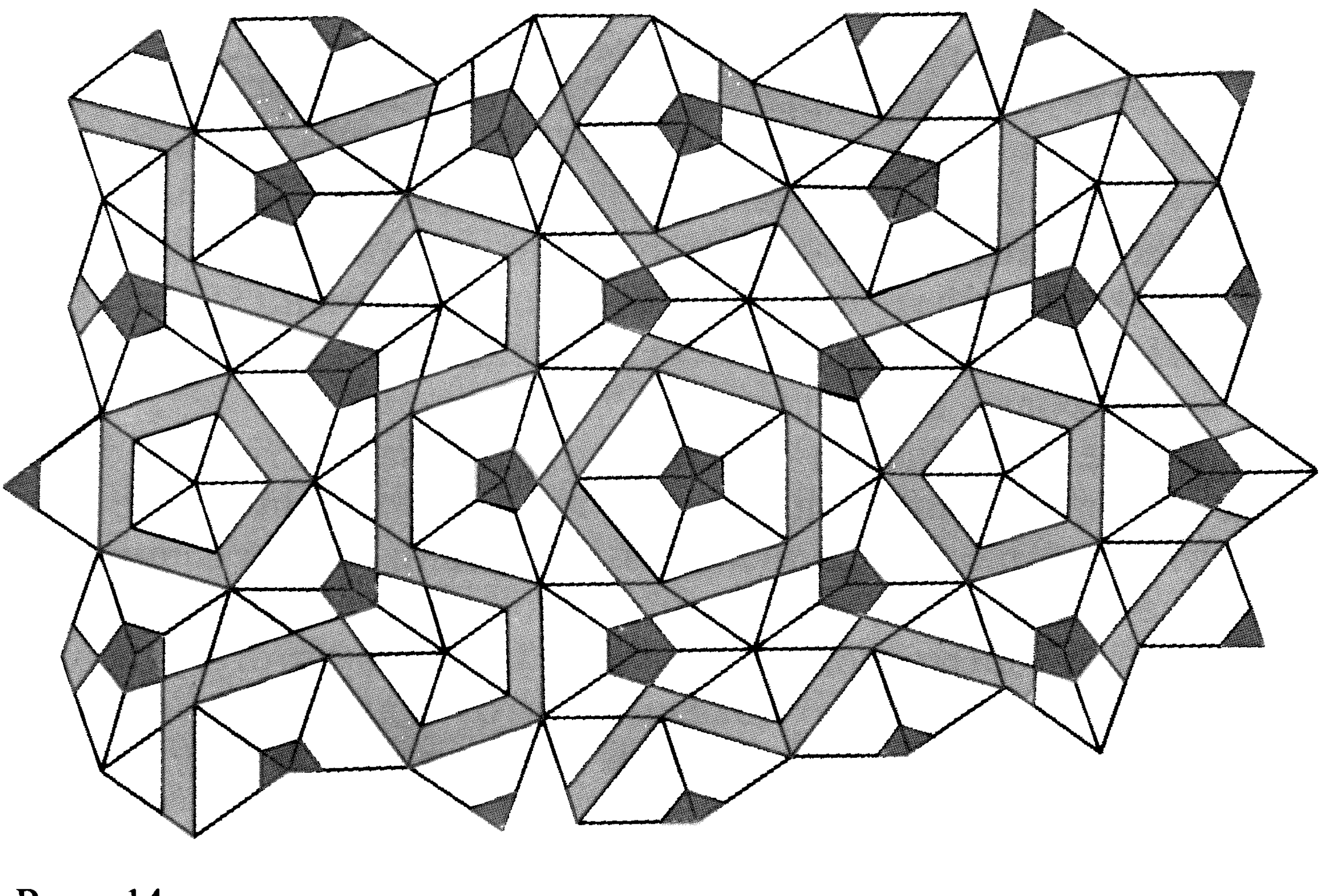


Рис. 14

Непериодическая мозаика Пенроуза из ромбов.

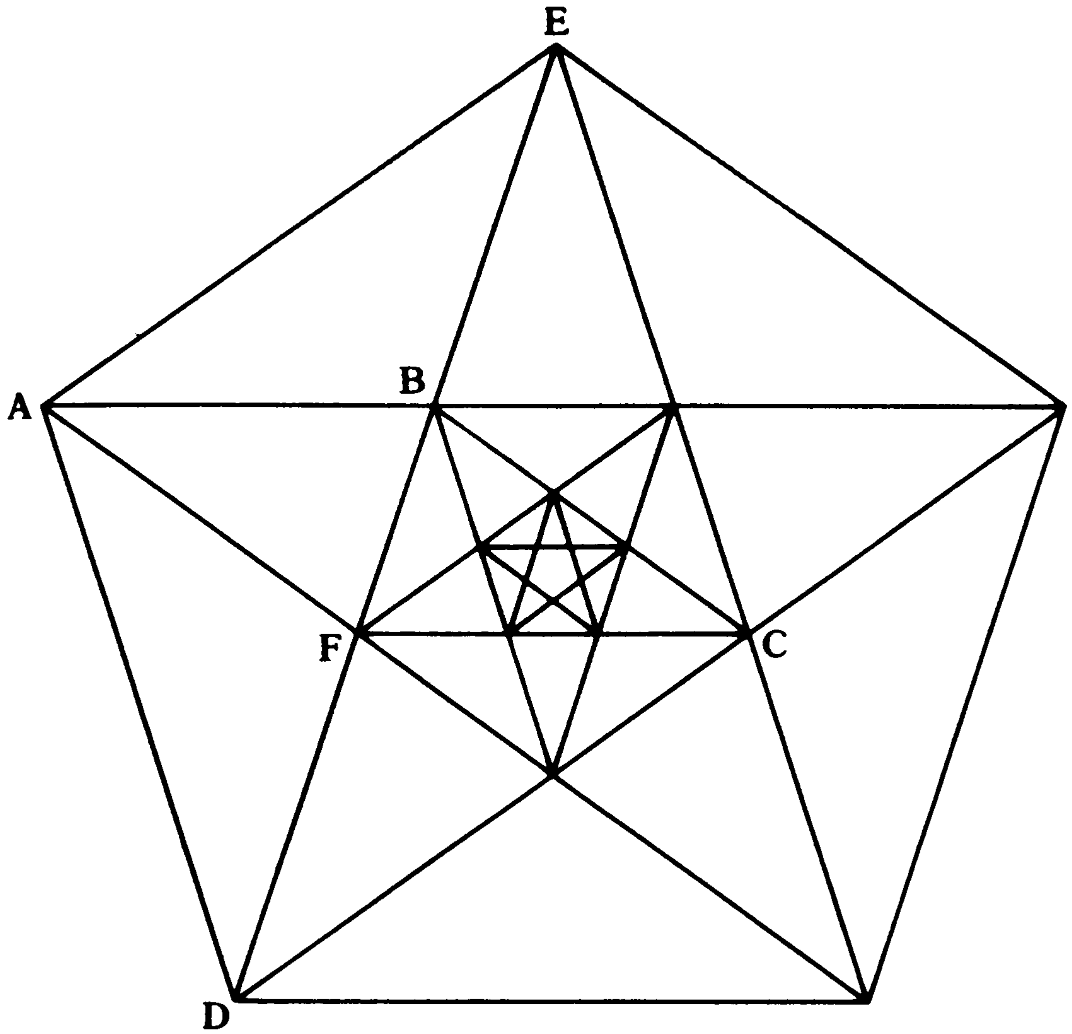


Рис. 15

Пифагорейская пентаграмма.

множества изображены в книге Грюнбаума и Шепарда [2, 13]. Там же обсуждаются их замечательные свойства.

Существуют ли пары фигур, не связанных с золотым сечением и порождающих непериодическую мозаику? Существует ли пара подобных фигур, из которых можно было бы сложить только непериодическую мозаику? Существует ли пара выпуклых фигур, из которых можно было бы сложить только непериодическую мозаику без предварительной маркировки сторон?

Разумеется, главная нерешенная задача состоит в том, существует ли одна фигура, из которой можно было бы сложить непериодическую мозаику? Большинство специалистов склонны думать, что это невозможно, но никому еще не удавалось и близко подойти к доказательству этого утверждения. Не было даже доказано, что если такая фигура существует, то она должна быть невыпуклой.

Глава 2

Мозаики Пенроуза. II

За десятилетие, прошедшее со времени публикации моей первой статьи о мозаиках Пенроуза в январском номере журнала «Scientific American» за 1977 г., Роджер Пенроуз, Джон Конуэй, Роберт Амманн и другие исследователи продвинулись в исследовании непериодических мозаик необычайно далеко. (Я по-прежнему буду называть мозаики непериодическими, хотя Грюнбаум и Шепард в своей фундаментальной монографии о разбиениях плоскости [2,13] называют множество фигур *апериодическим,* если из него можно построить только непериодические мозаики.) Открытие того, что теперь принято называть полосами, или дорожками, Амманна, и трехмерных аналогов мозаик Пенроуза привело к поразительным успехам в области кристаллографии, но прежде чем переходить к ним, мне хотелось бы начать эту ранее не опубликованную главу с краткого обзора некоторых предшествовавших событий.

Роберт Амманн, блестящий молодой математик, занимавшийся рутинными расчетами на компьютерах в Массачусетсе, независимо от Пенроуза открыл его ромбические «плитки», позволяющие строить непериодические мозаики, в 1976 г., примерно за восемь месяцев до публикации моей статьи о мозаиках Пенроуза в разделе «Математические игры» журнала «Scientific American». Между нами завязалась переписка, и я сообщил Амманну о воздушных змеях и наконечниках дротиков и о том, что первенство в открытии ромбов принадлежит Пенроузу. Амманн вскоре понял, что обе пары фигур, из которых можно составлять мозаики, определяются пятью семействами параллельных прямых, пересекающих плоскость в пяти различных направлениях, которые пересекаются под углом $360°/5 = 72°$. Одно из семейств таких линий, разрезающих плоскость на полосы, или дорожки, Амманна, вы видите на рис. 16.

Заметим, что прямые, образующие границы полос Амманна, проходят через вершины тупых внутренних углов (впадин) наконечников, обращенных остриями либо в одну и ту же, либо в противоположную сторону. Это утверждение не совсем точно, но для наших целей вполне годятся линии, проведенные через вершины впадин. Относительно точного расположения линий см. уже упоминавшуюся книгу Грюнбаума и Шепарда [2,13]. При точном построении границы полос Амманна проходят немного в стороне от вершин тупых внутренних углов наконечников. Внутри каждого

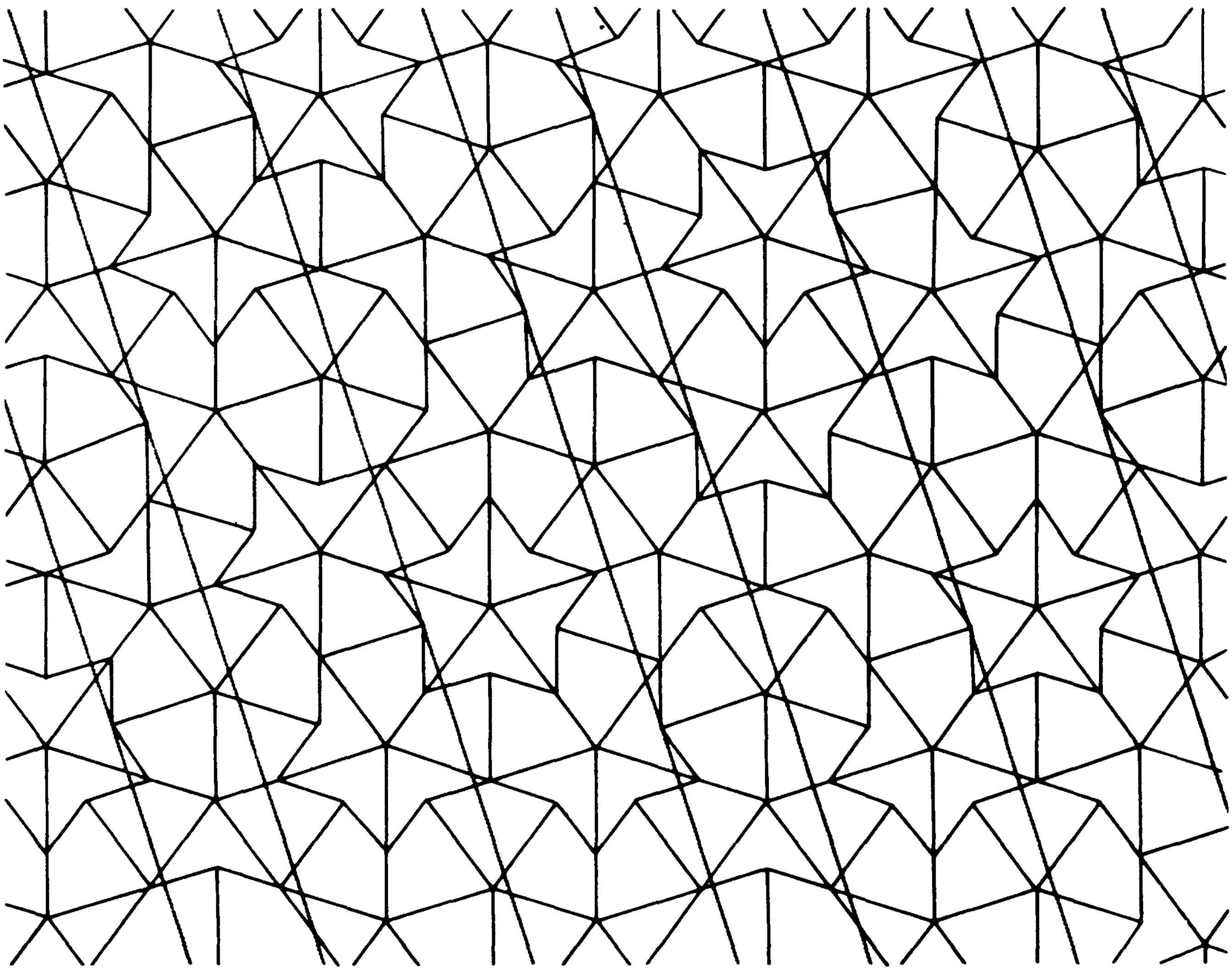


Рис. 16

Семейство полос Амманна, образующих (слева направо) последовательность SLLSLLS.

правильного десятиугольника на мозаике полосы Амманна образуют правильную пентаграмму (пятиконечную звезду).

Нетрудно видеть, что ширина полос Амманна может принимать два различных значения: L (если полоса широкая) и S (если полоса узкая). Если границы полос проведены с математической точностью, то длины L и S находятся между собой в золотом отношении. Кроме того, на бесконечной плоскости число широких полос относится к числу узких полос того же разбиения, как золотое сечение. Двигаясь в направлении, перпендикулярном семейству полос, обозначим последовательность ширин полос как последовательность букв L и S. Эта последовательность непериодическая и является замечательным одномерным аналогом разбиения Пенроуза. К ней, в частности, применима теорема о локальном изоморфизме. Выбрав любой конечный отрезок последовательности, вы всегда можете найти его дубликат не очень далеко от того места, где находится выбранный вами отрезок. Например, начав с любого места последовательности, отсчитайте любое конечное множество, например миллиард букв. Затем, начав с любого другого места последовательности и продвигаясь вдоль нее, вы непременно обнаружите где-то дубль выбранного вами отрезка длиной в миллиард букв. Но бесконечная последовательность в целом единственна.

Конуэй обнаружил, что интересующую нас последовательность символов L и S можно получить из золотого сечения следующим образом. Запишем в возрастающем порядке кратные золотого сечения $(1 + \sqrt{5})/2$ и округлим их до ближайшего целого числа. В результате мы получим последовательность, которая начинается с чисел 1, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 33, 35, 37, 38, 40, 42, 43, 45, 46, 48, 50, ... В «Справочнике целочисленных последовательностей» Н. Дж. А. Слоуна [2, 1*] эта последовательность значится под номером 917. Округлив квадраты золотого сечения, вы получите последовательность 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, ... Такие две последовательности называются *дополнительными*: каждое положительное целое число входит в эти последовательности, взятые вместе, один и только один раз. Последовательные кратные произвольного действительного числа a, округленные до ближайшего целого числа, образуют *спектр числа a*. Если число a

иррационально, то его спектр называется последовательностью Битти в честь канадского математика Сэмюэла Битти, привлекшего внимание к такого рода последовательностям в 1926 г. Как мы и узнаем из гл. 8, дополнительные последовательности Битти, построенные на основе золотого сечения, порождают выигрышную стратегию для знаменитого варианта игры в ним, известного под названием игры Витхоффа. Литература о последовательностях Битти приведена в библиографии к этой главе.

Соседние числа в золотой последовательности Битти отличаются либо на 1, либо на 2. Записав первую строку разностей между соседними числами, заменим каждую единицу на 0, а каждую двойку на 1. В результате мы получим бесконечную двоичную последовательность, которая начинается так: 101101011011010... . Это не что иное, как отрезок символов S и L в любом бесконечном семействе полос Амманна. Конуэй использует термин *музыкальная последовательность* для обозначения любого конечного отрезка последовательности, построенной на основе золотого сечения. Я буду придерживаться терминологии Пенроуза и называть такие отрезки последовательностями Фибоначчи.

Такие последовательности обладают многими интересными свойствами. Например, поставив нуль и запятую перед последовательностью Фибоначчи, приведенной выше в двоичной записи, мы получим иррациональную двоичную дробь, порожденную следующей непрерывной дробью:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2^2+\cfrac{1}{2^3+\cfrac{1}{2^5+\cfrac{1}{2^8+\cfrac{1}{2^{13}+\cfrac{1}{2^{21}+\cfrac{1}{2^{34}+\ldots}}}}}}}}}}$$

Показатели степеней двойки этой непрерывной дроби – не что иное, как числа Фибоначчи. Конуэй получил множество так и не опубликованных им результатов относительно взаимосвязей между мозаиками Пенроуза и числами Фибоначчи, в свою очередь имеющих непосредственное отношение к особенностям роста различных растений.

Мозаики Пенроуза, как мы видели, самоподобны в том смысле, что расширение (раздувание) или сжатие любой из них порождает другую мозаику Пенроуза. Последовательности Фибоначчи обладают таким же свойством самоподобия. Существует множество способов, позволяющих расширить или сжать их так, чтобы при этом возникла другая последовательность Фибоначчи, но простейший из них состоит в следующем. Чтобы сжать исходную последовательность Фибоначчи, заменим каждую букву *S* буквой *L*, каждую комбинацию *LL* буквой *S* и отбросим все одиночные буквы *L*. Например, последовательность *LSLLSLSLLSLLSLS* при сжатии по такому правилу переходит в последовательность *LSLLSLSLL*. Чтобы расширить исходную последовательность, следует заменить каждую букву *L* буквой *S*, каждую букву *S* комбинацией *LL* и вставить букву *L* между двумя соседними буквами *S*.

Никакая последовательность Фибоначчи не может содержать комбинацию букв *SS* или *LLL*. Это позволяет весьма просто распознавать, является ли некоторая последовательность букв *S* и *L* последовательностью Фибоначчи или нет. Применим к предъявленной нам последовательности правила сжатия столько раз, сколько это необходимо для того, чтобы у нас получилась либо последовательность, содержащая комбинации *SS* или *LLL* (в этом случае исходная последовательность не является последовательностью Фибоначчи), либо какая-то одна буква – *S* или *L* (это доказывает, что исходная последовательность является последовательностью Фибоначчи). Если вы подвергаете расширению или сжатию мозаику Пенроуза, то последовательность букв *S* и *L*, соответствующая каждому семейству полос Амманна, также претерпевает расширение или сжатие. Последовательность длинных и коротких галстуков-бабочек в любом червяке, таком, как червяки в десяти спицах в мозаике на основе колеса, также является последовательностью Фибоначчи.

Два семейства полос Амманна задают разбиение плоскости на непериодические параллелограммы, образующие решетку, в которую вписываются исходные фигуры. Грюнбаум и Шепард замечают по этому поводу, что отнюдь не обязательно считать, будто элементарные фигуры определяют полосы Амманна: «фундаментальна именно система полос, а функция элементарных областей состоит только в том, чтобы практически реализовать их». Полосы Амманна – нечто не поддающееся непосредственному созерцанию, подобно квантовым полям, определяющим положения и траектории частиц. Амманн был первым, кто понял (еще в 1977 г.), что его решетка полос приводит к *теоремам о форсинге* – теоремам, которые говорят о том, как небольшой набор фигур вынуждает занять вполне определенные положения бесконечные множества других фигур.

В письме ко мне Амманн сообщал: «Всякий раз, когда какое-нибудь множество фигур вынуждает две параллельные прямые занять определенные положения, оно вынуждает также занять вполне определенные положения бесконечное множество несмежных параллельных прямых. Всякий раз, когда три прямые пересекаются под надлежащими углами, они с необходимостью порождают элементарную фигуру мозаики». Этим же свойством конечного множества фигур однозначно определять положения других фигур, расположенных сколь угодно далеко от первых, обладают ромбы Пенроуза и квадраты Робинсона, хотя они и не связаны с золотым сечением.

Опираясь на открытия Амманна, Конуэй сформулировал и доказал много замечательных теорем о форсинге. Упомяну лишь о том, что две фигуры Пенроуза (каждая из которых может быть любого типа), надлежащим образом расположенные и находящиеся на произвольном расстоянии одна от другой, определяют два бесконечных семейства (но не все семейства) полос. В свою очередь пересечения этих двух семейств определяют положения бесконечного множества фигур. Например, король, дама, валет, двойка и звезда определяют положения бесконечного множества фигур в своих империях. (Туз и солнце не определяют однозначно положение ни одной фигуры.) Империя короля необычайно плотна. Можно было бы думать, что плотность распределения фигур с однозначно определенными положениями убывает по мере удаления от центра, но это не так. Плотность остается постоянной на всей плоскости.

Еще одним выдающимся открытием Амманна (также совершенным в 1976 г.) был набор из двух ромбоэдров (параллелепипедов с шестью конгруентными ромбическими гранями), которые порождают непериодическое разбиение пространства. Развертки этих двух тел изображены на рис. 17. Если вырезать их из плотной бумаги, перегнуть по ребрам и, сложив, склеить скотчем сходящиеся грани, то получатся два тела, которые вы видите на рис. 17 внизу. Правый ромбоэдр можно представить себе как куб, сжатый вдоль пространственной диагонали, а левый ромбоэдр – как куб, вытянутый вдоль пространственной диагонали. Все

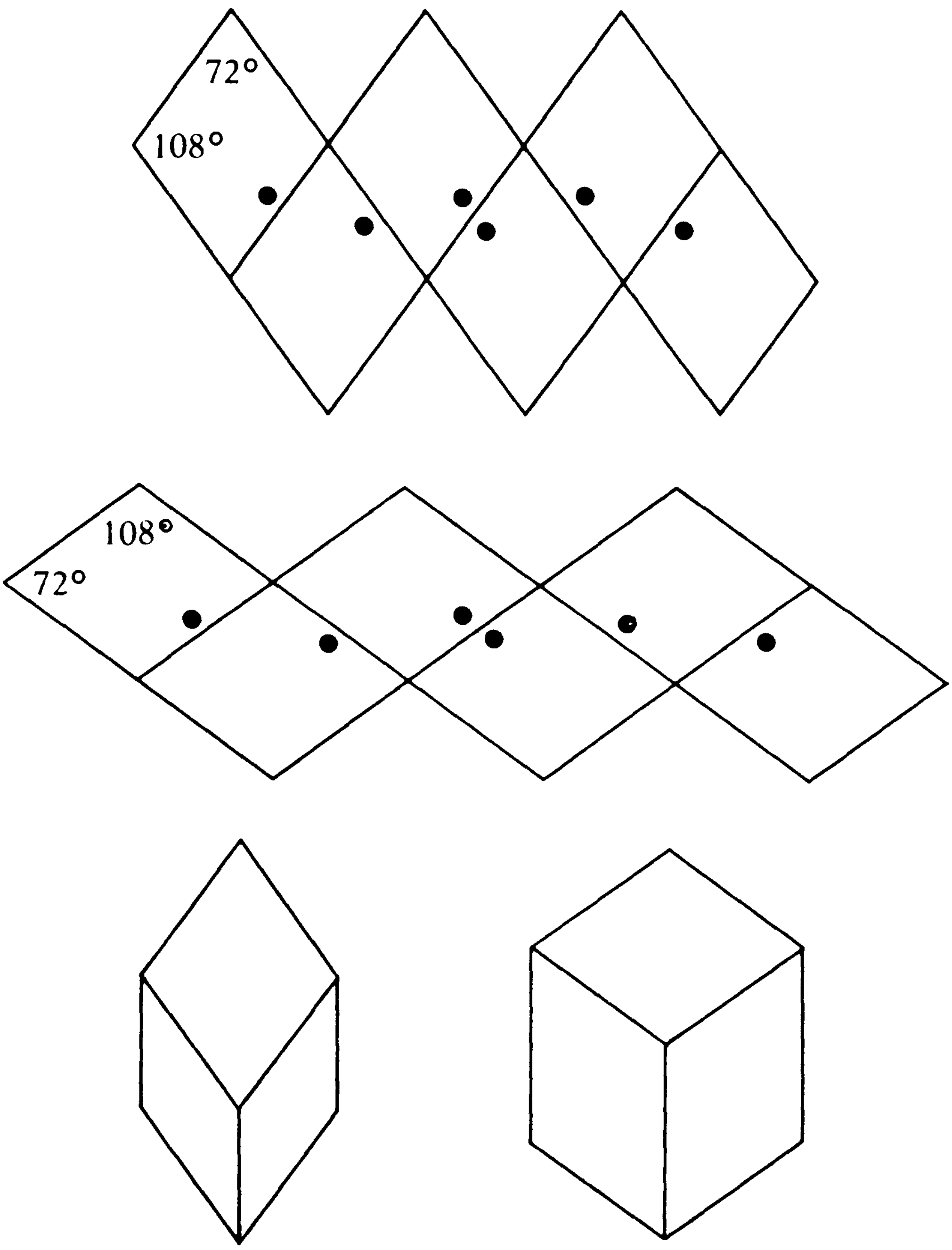


Рис. 17

Развертки тупо- и остроугольного ромбоэдров.

двенадцать граней обоих ромбоэдров конгруентны, а длины их пространственных диагоналей образуют золотое сечение. В одном из своих примечаний к тринадцатому изданию классической книги Роуза Болла [2, 2*] ее редактор Г. С. М. Кокстер назвал ромбоэдр такого типа *золотым ромбоэдром*. Существуют золотые ромбоэдры только двух типов, оба из которых были изучены еще Кеплером. У остроугольного ромбоэдра в двух противоположных вершинах сходятся три равных острых угла граней. У тупоугольного золотого ромбоэдра в двух противоположных вершинах сходятся равные тупые углы граней. В остальных вершинах как остроугольного, так и тупоугольного ромбоэдра сходятся острые и тупые углы граней.

Два ромбоэдра, открытых Амманом, являются двумя ромбоэдрами золотого типа. Грани остроугольного ромбоэдра пересекаются вдоль ребер под углами 73° и 108°. Грани тупоугольного ромбоэдра пересекаются под углами 36° и 144°. (Четыре двугранных угла кратны $360°/10 = 36°$.) Плоские углы при вершинах граней близки к 64° и 116°. Чтобы воспрепятствовать составлению периодической мозаики, грани ромбоэдра снабжают соответствующими выступами и впадинами. Обратите внимание на маленькие черные кружки, которые нанесены на грани разверток ромбоэдров (рис.17). Представим себе, что у каждого ромбоэдра имеется дубликат, на грани которого кружки нанесены в порядке, зеркально симметричном их расположению на гранях оригинала. Тогда из четырех ромбоэдров (двух исходных и двух зеркально симметричных им) можно составить непериодическую пространственную мозаику, если следить за тем, чтобы на смежных гранях черные пятнышки-кружки совпадали. Неизвестно, можно ли избежать зеркально симметричной маркировки граней и построить пространственную непериодическую мозаику всего лишь из двух тел с надлежаще размеченными гранями. Если через пространственную мозаику под соответствующим углом провести плоскость, то в сечении получится мозаика, очень близкая по своей структуре к мозаике Пенроуза из ромбов.

Я сообщил Пенроузу результаты Амманна. В ответном письме, датированном 4 мая 1976 г., Пенроуз попросил меня передать его поздравления Амманну в связи с двумя результатами: независимым открытием мозаик из ромбов и пространственной мозаикой из двух золотых ромбоэдров. Далее в письме Пенроуза говорилось:

«Вполне возможно, что эти результаты имеют определенное значение для биологии. Вспомним, что некоторые вирусы растут в форме правильных додекаэдров и икосаэдров. Всегда было непонятно, как они это делают. Но с непериодическими телами Амманна в качестве структурных единиц можно построить квазипериодические «кристаллы» с казалось бы (кристаллографически) невозможными направлениями спайности вдоль додекаэдрических или икосаэдрических плоскостей. Может быть, вирусы обладают способностью расти, образуя такие структурные единицы, или такое предположение слишком фантастично?».

Через год после того, как Амманн нашел непериодическое разбиение пространства на золотые ромбоэдры, его открытие было повторено Коджи Миязаки, архитектором из университета японского города Кобе. Миязаки обнаружил также новый способ непериодического разбиения пространства на золотые ромбоэдры без жесткого порядка следования элементарных областей. Пять остроугольных и пять тупоугольных золотых ромбоэдров, определенным образом собранных, образуют ромбический триаконтраэдр. Два триаконтраэдра, соединенные общей тупой вершиной, можно окружить 60 золотыми ромбоэдрами (30 тупоугольными и 30 остроугольными) так, что при этом образуется ромбический триаконтраэдр бóльших размеров. Такое увеличение можно продолжать до бесконечности, порождая разбиение пространства на соты с центром икосаэдрической симметрии.

Гипотезы, высказанные Пенроузом относительно кристаллов, и даже его терминология оказались удивительно пророческими. В начале восьмидесятых годов некоторые физики и математики начали осторожно поговаривать о возможности существования атомной структуры кристаллов типа непериодической пространственной решетки, а в 1984 г. Дэни Шехтман и его коллеги из Национального бюро стандартов США сообщили о сенсационном открытии: они обнаружили непериодическую структуру на электронограмме быстро охлажденного сплава марганца и алюминия, который химики сразу же окрестили шехтманитом. Расположение рефлексов – светлых пятен – на электронограмме обладало осью симметрии 5-го порядка, что убедительно свидетельствует о существовании непериодического разбиения пространства, аналогичного мозаике Пенроуза.

Такого еще никто не видывал! По словам популяризатора науки Иварса Петерсона, картина, открывшаяся исследователям из группы Шехтмана, была столь же невероятной, как пятиугольная снежинка. В кристаллографии долгое время господствовала догма, согласно которой кристаллы могут обладать осями симметрии только 2-, 3-, 4- и 6-го, отнюдь не 5-, 7- или 8-го порядка. Согласно другой догме, твердое вещество могло существовать только в двух формах: атомы располагаются в пространстве либо регулярно, периодически, либо хаотически, как в аморфных телах, например в стекле.

Упорядоченные решетки всех известных ранее кристаллов выводились из трех платоновых тел: тетраэдра, куба и октаэдра. Додекаэдр и икосаэдр не входили в число допустимых платоновых тел, так как они обладают осью симметрии 5-го порядка, а это делает невозможным периодическое разбиение пространства на додекаэдрические и икосаэдрические ячейки. И вдруг физики обнаруживают вещество, структура которого, судя по всему, обладает икосаэдрической симметрией. Подобно мозаике Пенроуза, шехтманит остается статистически неизменным при повороте на любой угол, кратный 72°, или 1/5 окружности, но не обладает периодичностью, если учесть дальний порядок. Шехтманит занимает промежуточное положение между стеклом и обычными (периодическими) кристаллами. Это означает, что между аморфными телами и периодическими кристаллами существует не четкая демаркационная линия, а плавный переход.

Среди физиков, химиков и кристаллографов открытие Шехтмана и его сотрудников произвело впечатление взорвавшейся бомбы. Аналогичные непериодические структуры вскоре были обнаружены и в других сплавах. В физических и кристаллографических журналах начали появляться десятки статей. Стало ясно, что твердое тело может обладать непериодическими решетками с осями симметрии любого порядка. В качестве моделей были предложены наборы из двух или более решеток, допускающих или однозначно определяющих непериодическое разбиение пространства. Была получена кристаллическая структура, состоящая из слоев, наделенных структурой двумерных ромбических мозаик Пенроуза. Голландский математик Г. Н. де Брёйн разработал алгебраическую теорию непериодической мозаики, основанную на так называемых *пентагридах* – аналогах полос Амманна. В неопубликованной статье 1987 г. де Брёйн сообщил об открытой им удивительной связи между теорией непериодических разбиений и теоремой о тасовании карт, известной фокусникам под названием принципа Гэлбрайта. (Об этом принципе см. гл. 42 моей книги [2, 3*][1].)

Ныне экспериментальные и теоретические исследования *квазикристаллов* (как стали называть новую разновидность твердых тел, занимающую промежуточное положение между классическими идеальными кристаллами и аморфными телами) ведутся с необычайным размахом. Правда, по мнению некоторых исследователей, квазикристаллические решетки нельзя считать настоящими непериодическими решетками. Главным оппонентом представлений о непериодичности квазикристаллов выступает Лайнус Полинг, утверждающий, что электронограммы квазикристаллов надлежит интерпретировать как ложную форму пятиугольной симметрии, известной кристаллографам под названием множественного двойникования. Заметка, опубликованная Полингом в журнале «Nature» [2, 17], завершалась словами: «Кристаллографам можно более не беспокоиться о том, что одно из оснований их науки поставлено под сомнение». Еще одна интерпретация состоит в том, что квазикристаллы якобы представляют собой просто-напросто необычно большие ячейки периодических мозаик, которые будут обнаружены впоследствии, когда экспериментаторам удастся изготовить образцы более крупных размеров. Были предложены и другие интерпретации. Те же исследователи, кто убежден в существовании нового класса твердотельных структур, считают, что все альтернативные интерпретации электронограмм должны быть отброшены и что простейшим объяснением пятиугольной симметрии является истинная непериодичность. Возможно, что за несколько лет экспериментальные исследования опровергнут подобные утверждения и поликристаллы постигнет печальная судьба «поли-

---

[1] Мы приводим здесь уточненную транскрипцию фамилии автора принципа.– *Прим. перев.*

воды». Но если непериодическая интерпретация уцелеет, то открытие квазикристаллов станет поворотным пунктом в истории кристаллографии.

Если квазикристаллы реальны, то в последующие годы мы станем свидетелями создания все более эффективных методов их получения. Множество вопросов настоятельно требуют ответа. Какие физические силы участвуют в создании этих необычных кристаллов? Пенроуз высказал гипотезу о том, что в формировании квазикристаллов могут играть роль нелокальные эффекты квантовых полей, поскольку трудно представить, чтобы квазикристаллы могли расти без общего плана, сохраняя тем не менее дальний непериодический порядок. (В приведенном выше отрывке из письма Пенроуза (1976 г.) рассуждения о вирусах отражают его представления о том, каким образом квазикристалл мог бы расти без управляющего воздействия нелокальных сил.) Каковы упругие и электронные свойства квазикристаллов? Удастся ли геологам когда-нибудь найти природные квазикристаллы?

Если квазикристаллы действительно окажутся тем, чем их считают сторонники непериодичности, то их можно рассматривать как яркий пример того, как работа, выполненная в области занимательной математики для забавы и удовлетворения эстетических потребностей, может обрести существенные чисто практические приложения в физике и технике.

В 1980 г. мне довелось присутствовать на лекции, прочитанной Конуэем о мозаиках Пенроуза для сотрудников фирмы «Bell Laboratories». Обсуждая «дырочную» теорию, Конуэй воспользовался следующим наглядным образом. Вообразите себе, предложил он слушателям, огромный храм, пол которого выложен мозаикой Пенроуза, с круглой колонной в самом центре. Кажется, будто мозаика продолжается и под ней, но в действительности центральная колонна скрывает дыру, которая не может быть покрыта мозаикой. Заметим, что в дырчатых мозаиках правильное примыкание полос Амманна нарушается при прохождении их через дыру.

Разумеется, фигуры, из которых составлены мозаики Пенроуза, всегда можно раскрасить в четыре цвета так, что никакие две фигуры одного и того же цвета не будут иметь общих сторон. Достаточно ли для этих целей трех цветов? Конуэй утверждает, что, исходя из теоремы о локальном

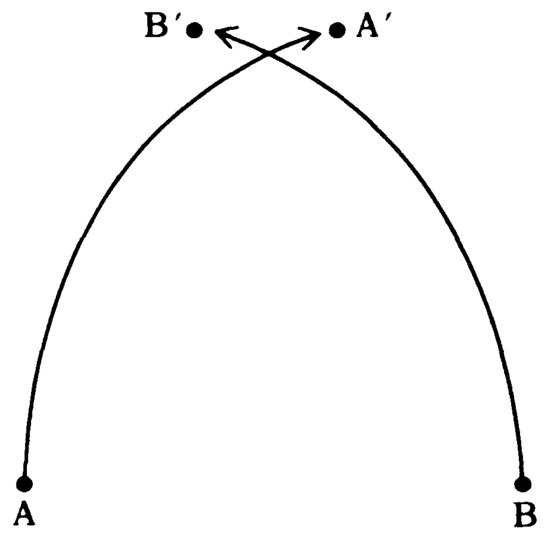


Рис. 18

Доказательство Барлоу невозможности существования у любого узора двух центров симметрии 5-го порядка.

изоморфизме, можно доказать следующее утверждение: если какая-нибудь мозаика Пенроуза может быть правильно раскрашена в три цвета, то все мозаики Пенроуза также могут быть правильно раскрашены в три цвета [1], однако до сих пор никому не удалось доказать, что какую-нибудь бесконечную мозаику Пенроуза можно правильно раскрасить в три цвета.

Конуэю принадлежит следующее простое доказательство от противного того, что никакая мозаика не может иметь более одного центра симметрии 5-го порядка (сам Конуэй приписывает авторство английскому математику Питеру Барлоу, который скончался в 1862 г. и ныне известен главным образом как автор «Таблиц Барлоу»). Предположим, что какая-то мозаика имеет более чем один центр симметрии 5-го порядка. Выберем два таких центра A и B, расстояние между которыми минимально (рис. 18). Повернув мозаику вокруг центра B на угол $360°/5 = 72°$, переведем центр A в точку A'. Вернувшись затем в исходное положение и повернув мозаику вокруг центра A на 72° по часовой стрелке, переведем центр B в точку B'. В результате приходим к следующему. Если наше предположение верно, то оба поворота переводят мозаику в себя, но два центра

---

[1] Под правильной понимается такая раскраска, при которой никакие две фигуры, имеющие общую границу, не окрашены в один цвет. *Прим. перев.*

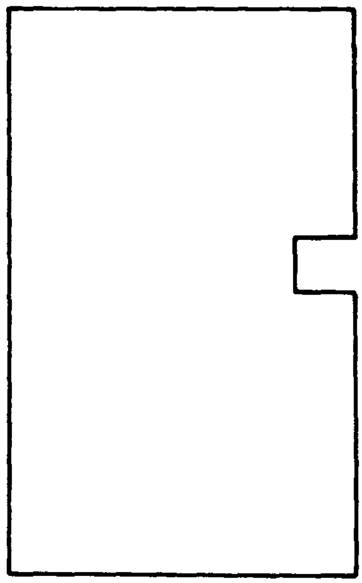


Рис. 19

«Изразец» Конуэя, позволяющий построить разбиение плоскости $r = 0$ способами.

симметрии 5-го порядка A' и B' находятся на меньшем расстоянии, чем A и B. Это противоречит нашему второму предположению, согласно которому A и B расположены на минимальном расстоянии друг от друга.

Существуют отдельные «изразцы» (и наборы изразцов), позволяющие единственным способом периодически замостить плоскость: такими свойствами обладают, например, правильный шестиугольник и пентамино в форме креста. Все треугольники и все параллелограммы порождают несчетное множество периодических разбиений плоскости. Грюнбаум и Шепард [2, 13] высказали гипотезу о том, что не существует фигуры, которая порождала бы *счетное* множество периодических разбиений плоскости. Этим авторам принадлежит и другая гипотеза, согласно которой при любом положительном целом числе r существуют отдельные фигуры, порождающие ровно r периодических разбиений плоскости. Такие фигуры были найдены при r от 1 до 10. На лекции Конуэй продемонстрировал «изразец Конуэя» (рис. 19), соответствующий $r = 0$. В заключение Конуэй заметил, что первая из когда-либо прочитанных им лекций — лекция о мозаиках Пенроуза, на которой он ни разу не запнулся, произнося столь сложные сочетания терминов, как «воздушные змеи» и «наконечники дротиков».

Глава 3

Фракталы Мандельброта

Сравнят зулусы с гладкою дугой
Улыбку губ, изогнутых слегка,
А путь к селенью за рекой
С полетом мотылька.

Джон Апдайк. *Зулусы живут в стране, где нет квадрата.*

Одна из наиболее поразительных особенностей истории математики – постоянный пересмотр определений тех названий, которые присвоены различным классам математических объектов. Обычно процесс пересмотра протекает следующим образом. Объектам присваивается некоторое имя (название x) и дается определение, в общих чертах согласующееся с интуитивным представлением и общеупотребительным значением слова x. Затем кто-нибудь открывает какой-нибудь необычный объект, удовлетворяющий принятому определению, но заведомо не являющийся тем, что имеют в виду обычно под объектом x. После этого предлагается новое, более точное определение, которое либо исключает новый объект из класса объектов x, либо включает его в этот класс. Новое определение «действует» до тех пор, пока кто-нибудь не находит новых исключений. Если обнаруживаются объекты, удовлетворяющие уточненному определению, но не согласующиеся с расширенным представлением об объекте x, то уточненное определение вновь подвергается пересмотру, и этот процесс может продолжаться бесконечно.

Если исключения из общего правила сильно противоречат интуиции, то иногда их называют *монстрами*. Нередко, говоря о них, добавляют эпитет «патологические». В этой главе мы рассмотрим такое понятие, как *кривая*, опишем несколько кривых-монстров, вынудивших математиков пересмотреть определение кривой, и познакомим читателя с одним устрашающим новым монстром, «пойманным» лишь в прошлом году замечательным специалистом в области компьютерных наук Уильямом Госпером, работающим в фирме «Symbolic Inc.» (г. Маунтин-Вью, штат Калифорния). Читателям моих книг доводилось встречаться с Госпером в связи с теорией клеточных автоматов и, в частности с игрой «Жизнь». Именно Госпер сконструировал *глайдерное ружье*, позволившее «универсализировать» клеточное пространство игры «Жизнь». (Игре «Жизнь» посвящены гл. 20–22 моей книги «Крестики-нолики» [3, 1*]. [1])

Древнегреческие математики располагали несколькими определениями кривых. Согласно одному из определений, кривой называлось пересечение двух поверхностей. Например, конические сечения, как явствует из их названия, получаются при сечении конуса плоскостью под различными углами. Согласно другому определению, кривая – это след движущейся точки. Например, окружность – это след, оставляемый вращающейся ножкой циркуля; эллипс – след карандаша, вставленного в туго натянутую петлю из нити, накинутую на две воткнутые в бумагу булавки. Остальные кривые могут быть порождены как следы, оставляемые пишущими устройствами более сложных механизмов.

Созданная в XVII в. аналитическая геометрия позволила дать более точное определение кривой. Все известные кривые оказались графиками решений соответствующих алгебраических уравнений. Возникает вопрос: нельзя ли определить плоскую кривую как геометрическое место точек на плоскости с декартовой системой координат, удовлетворяющих какому-нибудь уравнению с двумя переменными? Нет, потому что графики решений таких уравнений могут состоять из изолированных точек или не связанных между собой линий, а такие множества точек не хотелось бы называть кривыми. Выход из затруднения был указан математическим анализом. Название «кривые» сохранилось только за графиками,

---

[1] Более ранний вариант гл. 20 см. в книге [3, 2*], гл. 38 – *Прим. перев.*

точки которых являются непрерывными функциями, удовлетворяющими соответствующему уравнению.

Интуитивно кажется очевидным, что если функция, графиком которой служит кривая, непрерывна, то она дифференцируема, или, что то же самое, в любой точке к кривой всегда можно провести касательную. Но во второй половине XIX в. математики начали находить всевозможные кривые-монстры, которые были непрерывны, но нигде, т.е. ни в одной точке, не дифференцируемы. Один из наиболее поразительных монстров был описан в 1890 г. итальянским математиком и логиком Джузеппе Пеано. Он показал, каким образом одна точка, двигаясь непрерывно по квадрату,

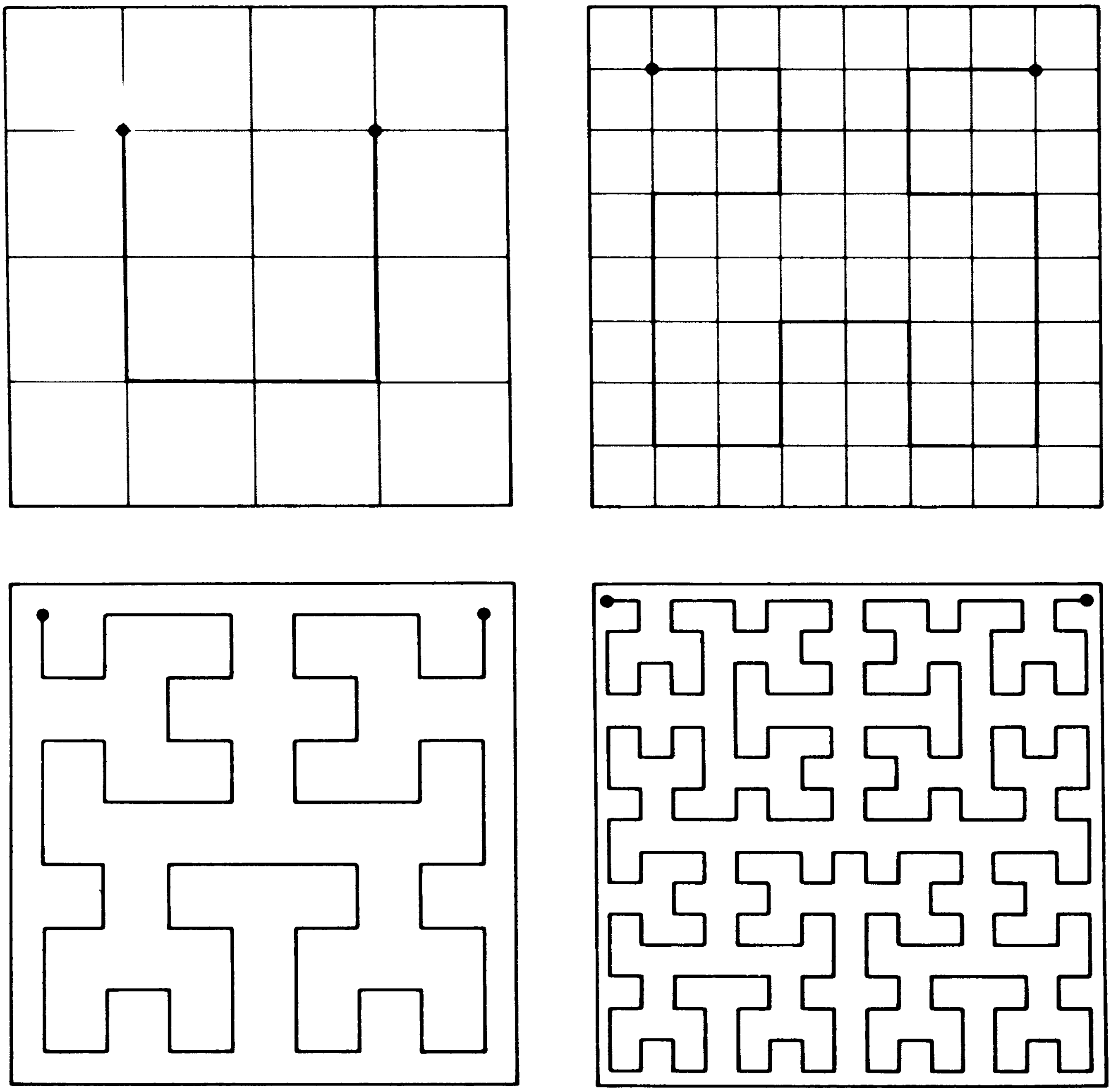


Рис. 20

Открытая кривая Пеано, построенная Гильбертом.

может (за бесконечное время) пройти по крайней мере один раз через каждую точку квадрата и его границы! (В действительности такая кривая должна проходить через бесконечное множество точек по крайней мере трижды.) В пределе построенная Пеано кривая сплошь заполняет весь квадрат. Вместе с тем кривая Пеано – вполне «законный» график непрерывной функции. Тем не менее ни в одной точке к ней нельзя провести касательную, так как в любой момент времени нам неизвестно направление, в котором движется точка.

Давид Гильберт предложил простой способ построения кривой Пеано с двумя концевыми точками. Первые четыре

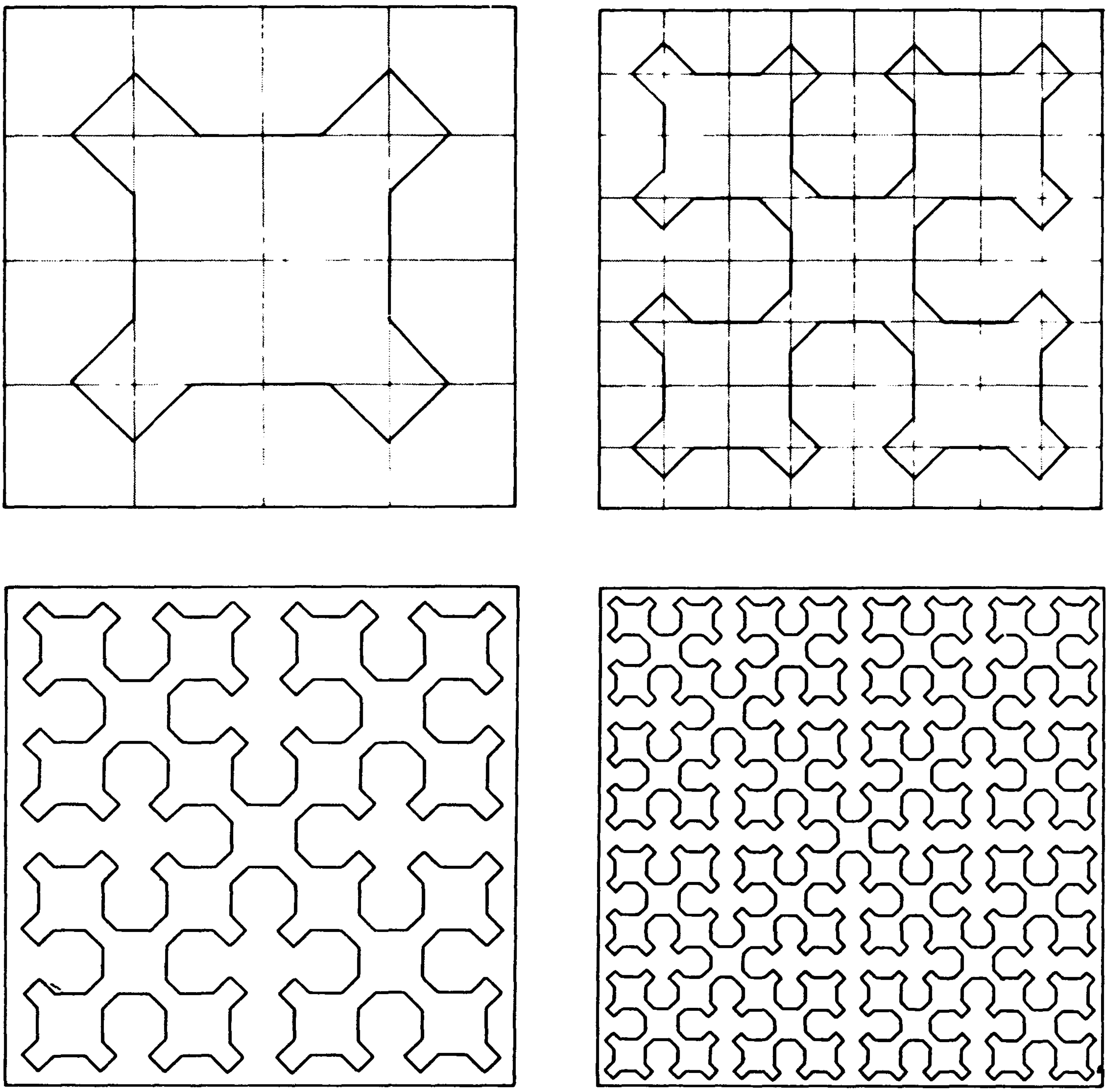


Рис. 21

Замкнутая кривая Пеано, построенная Серпинским.

этапа его рекуррентной процедуры ясны из рис. 20. В пределе кривая начинается и заканчивается в верхних вершинах квадрата. На рис. 21 показано, как Вацлав Серпинский построил замкнутую кривую Пеано.

В обоих вариантах построения кривой Пеано последовательные ломаные можно рассматривать как приближения к графику предельной кривой. В каждом из вариантов предельная кривая имеет бесконечную длину и полностью заполняет квадрат, хотя каждое приближение не содержит несчетное множество точек квадрата, обе координаты которых иррациональны. (В общем случае предел последовательности приближенных кривых может проходить через многие точки, не принадлежащие ни одному из приближений.) Кривая Серпинского ограничивает площадь, составляющую 5/12 площади квадрата. Впрочем, последнее утверждение не вполне точно. Приближенные кривые ограничивают площади, которые стремятся в пределе к 5/12, но для самой предельной кривой (графика предельной функции) различие между внутренней и внешней относительно нее частью квадрата утрачивает смысл!

Кривые Пеано вызвали у математиков глубокий шок. Эти одномерные (казалось бы) кривые в пределе заполняют двумерную область. Можно ли в таком случае называть их кривыми? И словно для того, чтобы еще более усугубить и без того тяжелое положение, кривые Пеано легко могут быть обобщены на более высокие размерности и заполнять кубы и гиперкубы.

Шведский математик Хельге фон Кох построил в 1904 г. еще одну кривую-монстра, известную теперь под названием кривой-снежинки. Начнем с равностороннего треугольника и, применив к нему рекуррентную процедуру, изображенную на рис. 22, построим извилистую кривую, напоминающую очертаниями снежинку. В пределе она имеет бесконечную длину. Более того, расстояние между любыми двумя точками на кривой бесконечно! Площадь, ограниченная кривой фон Коха, в точности равна 8/5 площади исходного треугольника. Подобно кривой Пеано, ни в одной точке кривая фон Коха не имеет единственной касательной. Это означает, что порождающая эту кривую функция, хотя и непрерывна, но недифференцируема.

Если треугольники строить внутрь, а не наружу, то

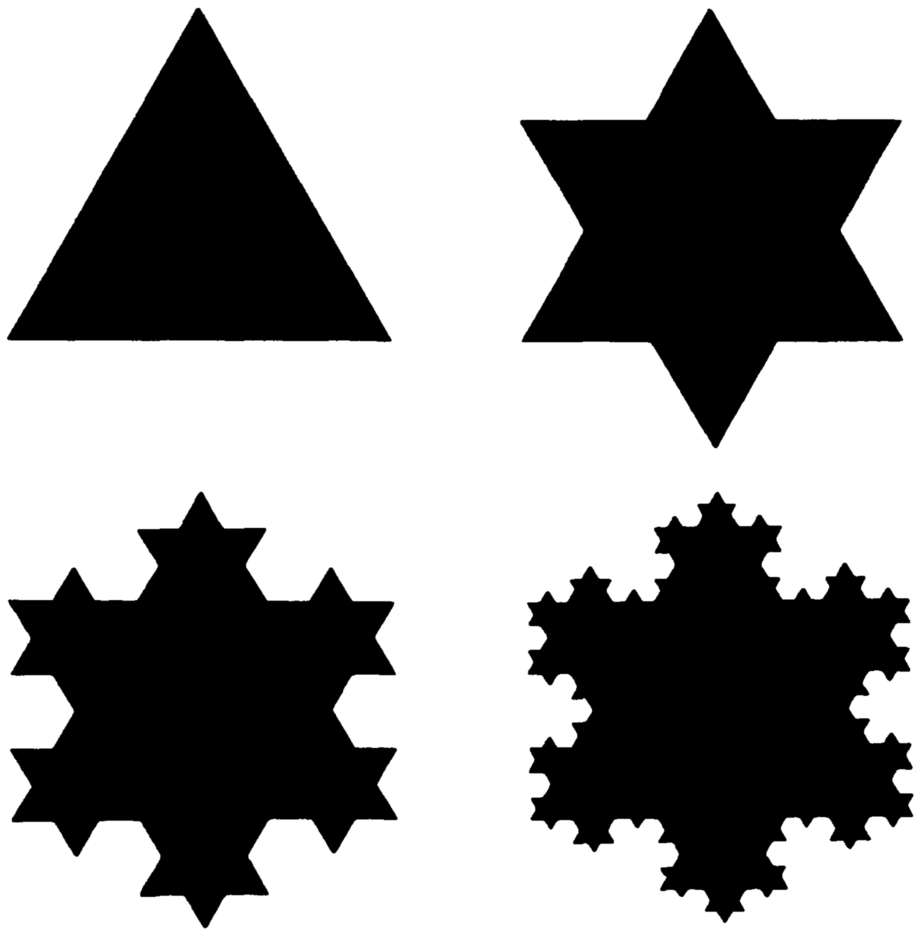


Рис. 22

«Снежинки» Хельге фон Коха первых четырех порядков.

получится кривая-антиснежинка. Периметр ее также имеет бесконечную длину, и ограничивает она бесконечное множество несвязных областей, общая площадь которых составляет 2/5 площади исходного треугольника. Начать можно с правильного многоугольника, имеющего более трех сторон, и строить подобные многоугольники на средней трети каждой из сторон. Квадрат с меньшими квадратами, построенными на его сторонах наружу, порождает предельную кривую, как бы вышитую крестом, которая имеет бесконечную длину и ограничивает площадь, вдвое превышающую площадь исходного квадрата. (См. мою шестую книгу математических игр из журнала «Scientific American», гл. 22.) Если подобные квадраты строить внутрь, то возникает кривая, как бы вышитая антикрестом, которая имеет бесконечную длину и ограничивает нулевую площадь. Аналогичные построения с правильными многоугольниками, имеющими более четырех сторон, порождают предельные кривые с самопересечениями.

Трехмерный (пространственный) аналог кривой-снежинки можно получить, разделив каждую грань правильного тетраэдра на четыре равносторонних треугольника, построив на центральном треугольнике меньший тетраэдр и продолжив этот процесс неограниченно. Каков будет окончательный результат: получится ли конечное тело с поверхностью, имеющей бесконечно большую площадь? Нет, поразительный ответ (сообщенный мне Госпером) состоит в том, что в пределе поверхность совпадает с поверхностью идеального куба!

Обобщение конструкции можно продолжить, деля стороны правильного многоугольника более чем на три части. Например, разделим каждую сторону равностороннего треугольника на пять частей, построим на втором и четвертом отрезке меньшие треугольники и повторим эту процедуру неограниченно. Предельного обобщения мы достигнем, выбирая какую-нибудь замкнутую кривую, допускающую разбиение на конгруентные сегменты, изменяя каждый сегмент каким угодно образом так, чтобы весь процесс можно было повторить на меньших сегментах последующих поколений и перейти к пределу. Аналогичные построения можно производить и на поверхностях пространственных тел. Разумеется, в результате таких операций могут получиться сложные кривые или поверхности с самопересечениями, не представляющие особого интереса.

О различного рода патологических монстрах можно было бы написать целую книгу. Голландский тополог Л. Э. Я. Брауэр опубликовал в 1910 г. рекуррентную процедуру, позволяющую разделить произвольную область на три подобласти столь «сумасшедшим образом», что в пределе все три подобласти будут соприкасаться в каждой точке (см. статью Ганса Гана «Геометрия и интуиция» [3, 4*]). Конструкция Брауэра допускает обобщение: произвольную область можно разделить на *n* частей, которые будут соприкасаться в каждой точке. Сравнительно недавно было открыто еще одно семейство монстров: так называемых кривых дракона. О них я сообщил читателям раздела «Математические игры» журнала «Scientific American» в 1967 г. (моя статья была перепечатана в книге [3, 5*]). Анализ кривых дракона был дан в 1970 г. Чендлером Дэвисом и Доналдом Кнутом.

Теперь я имею честь представить читателям нового монстра Госпера – изящную кривую Пеано, которую ее автор назвал извивающейся змеей. Построение этой кривой начинается с группы из семи правильных шестиугольников (рис. 23). Их восемь вершин соединены серой ломаной, составленной из семи равных прямолинейных отрезков. Такая серая линия есть не что иное, как извивающаяся змея 1-го порядка. Извивающаяся змея 2-го порядка изображена на рис. 23 жирной черной линией. Она получается при замене каждого звена серой ломаной уменьшенной копией змеи 1-го порядка. Длина каждого сегмента извивающейся змеи 2-го порядка составляет $1/\sqrt{7}$ длины серого сегмента; та же

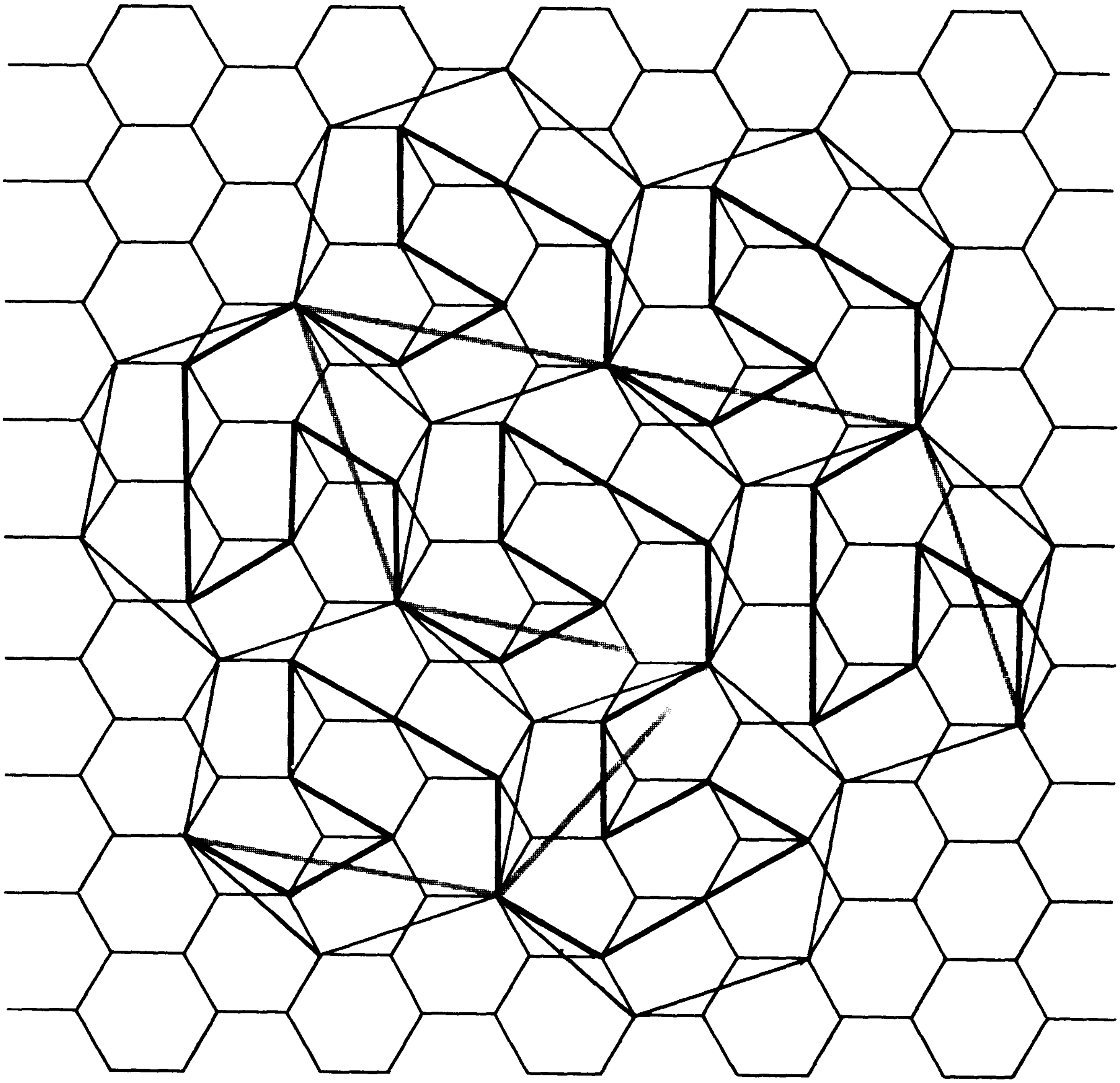


Рис. 23

«Извивающаяся змея» Уильяма Госпера первого (серые линии) и второго (черные линии) порядков.

пропорция сохраняется и на последующих стадиях построения кривой.

Продолжая рекуррентную процедуру, мы получаем извивающиеся змеи все более высокого порядка. На рис. 24 показаны две извивающиеся змеи 3-го и 4-го порядков, построенные с помощью компьютера. Деля плоскость на черные и белые части с границей, проходящей через вершины змеи, мы увидим, что извивающаяся змея разбивает плоскость на две весьма извилистые части, имеющие почти, но не совсем одинаковую форму.

Кривая, служащая пределом ломаных (извивающихся змей все более высокого порядка), проходит через каждую точку области, в которой она построена, по крайней мере один раз полностью заполняя эту область. Извивающаяся змея в пределе имеет бесконечную длину и недифференцируема. Подобно прямой, она самоподобна в том смысле, что если увеличить любой участок прямой, то он будет выглядеть так же, как и вся прямая. Извивающиеся змеи обладают таким же свойством.

Как современные математики, знающие о существовании всех этих «сумасшедших» кривых, определяют, что такое кривая? Монстры вышли на сцену настолько плотной толпой, что ни одно из определений не охватывает всех объектов, которые обычно называют кривыми. Тополог определяет кривую как множество точек, которое компактно, связно и образует одномерный континуум. Но для того чтобы это определение стало до конца ясно читателям, понадобился бы довольно длинный экскурс в теоретико-множественную топологию. Определение тополога охватывает «хорошие» кривые – графики дифференцируемых функций, но не распространяется на все рассмотренные нами недифференцируемые монстры. «Разумеется, мы не располагаем физическими примерами кривых типа извивающихся змей, – писал Филип Моррисон. – Природа не знает бесконечностей, даже в молекулярных столкновениях. На уровне нескольких ангстремов происходит обрезание. Тем не менее сюрпризов хватает». Под сюрпризами Моррисон имеет в виду те встречающиеся в природе случайные структуры, которые при последовательных увеличениях обнаруживают свойство статистического самоподобия. Приведенное выше замечание заимствовано из рецензии Моррисона [3, 6*] на замечательную книгу Бенуа

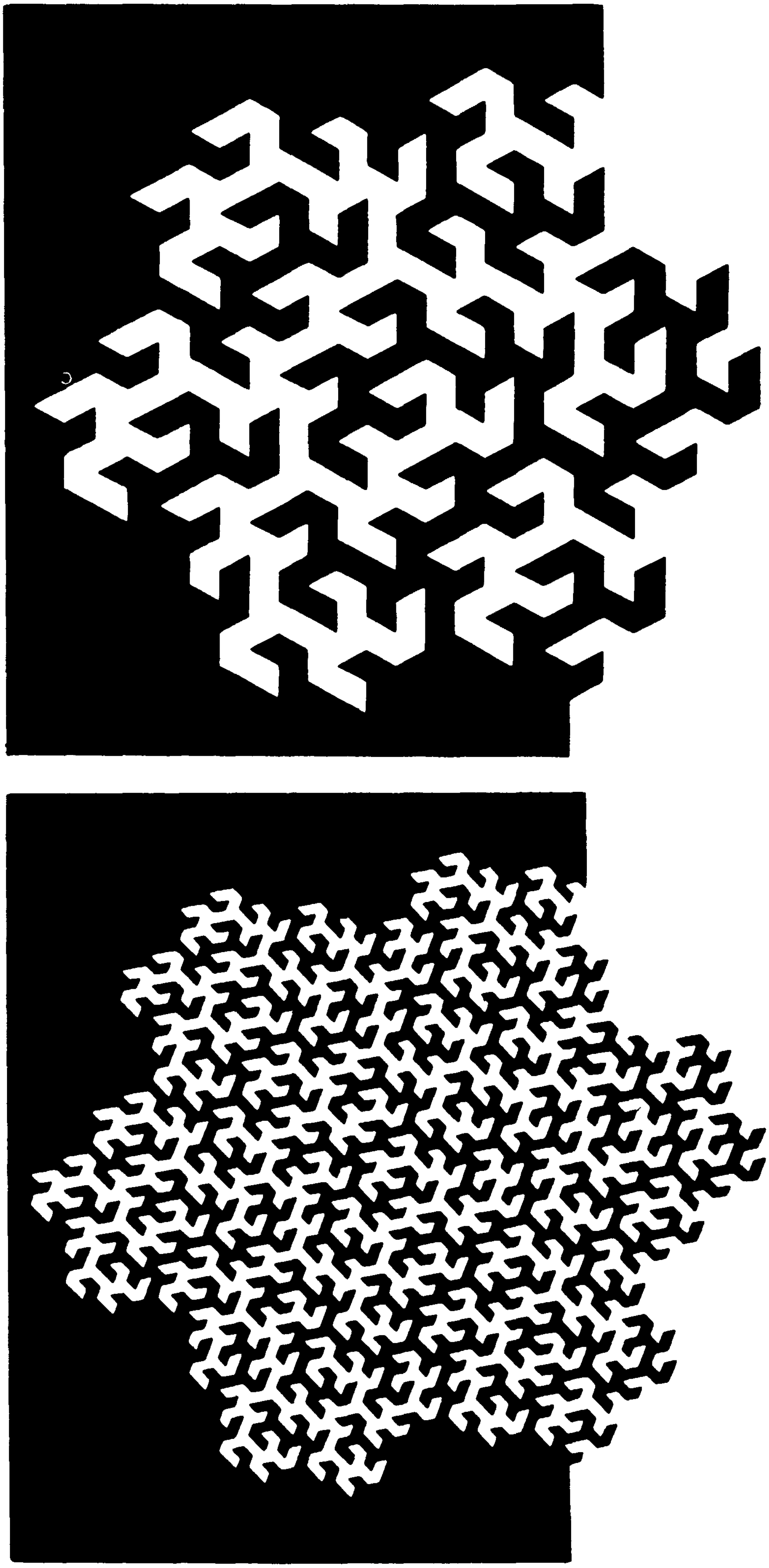


Рис. 24

«Извивающаяся змея» третьего (вверху) и четвертого (внизу) порядков.

Мандельброта «Фрактальные объекты: форма, случай и размерности» [3, 2].

Мандельброт – французский математик польского происхождения (родился в Варшаве в 1924 г.), работающий ныне в качестве сотрудника фирмы ИБМ в Исследовательском центре имени Томаса Дж. Уотсона в Йорктаун-Хайтсе, штат Нью-Йорк. Подобно Станиславу Уламу и многим другим выдающимся польским математикам, Мандельброт с успехом работал и в чистой, и в прикладной математике, главным образом в области физики и экономики. Его учитель, французский математик Поль-Пьер Леви, был первым, кто предпринял систематическое исследование статистически самоподобных кривых, но в то время большинство математиков рассматривали их как бесполезные причудливые курьезы, и только Мандельброт понял, что самоподобные объекты являются основным инструментом для анализа множества самых различных физических явлений.

В книге Мандельброта приведено множество картинок-«портретов» фрактальных явлений. Возьмем хотя бы береговые линии. Их изрезанность носит нерегулярный характер: береговые линии статистически самоподобны. С высоты береговая линия выглядит так же, как вблизи. Говорить о «длине» береговой линии бессмысленно, так как все зависит от точности измерения. Как говорит Моррисон: «Длина береговой линии на картах, выполненных в различных масштабах, подчиняется степенному закону так же, как и извивающаяся змея, в широком диапазоне – от сотен километров до метров, где прекращается география и начинаются мелкие камешки».

Другим примером фрактального объекта может служить поверхность Луны. Вспомните то удивление, которое вы испытали при виде первых фотографий поверхности нашего естественного спутника, снятых со спутника на окололунной орбите: изрытая оспинами кратеров и впадин поверхность Луны выглядела практически такой же, какой мы видим ее в телескопы с Земли. Только размеры кратеров были другими. С таким же статистическим самоподобием мы сталкиваемся, разглядывая поверхность некоторых сортов сыра, россыпь звезд на небосводе, кору деревьев, контуры гор, изучая атмосферную турбулентность, шум в аудитории и бесчисленные другие явления природы. Траектории взвешенных частиц, совершающих броуновское движение, приближенно можно считать статистически самоподобной кривой, имеющей (в пределе) бесконечную длину и нигде не дифференцируемой.

Но вернемся к извивающейся змее. Если мы попытаемся вычислить ее периметр, то столкнемся с удивительным парадоксом: периметр можно построить с помощью рекуррентной процедуры, гораздо более простой, чем процедура, используемая для построения самой извивающейся змеи. На рис. 25 показано, как действует такая процедура. Мы начинаем с правильного шестиугольника и заменяем каждую его сторону зигзагообразной (черной) линией из трех равных звеньев. Длина каждого звена составляет $1/\sqrt{7}$ от длины стороны исходного шестиугольника. В результате мы получаем невыпуклый 18-угольник. Так как зигзагообразная линия захватывает ровно столько же новой территории, сколько уступает старой, площадь 18-угольника равна площади исходного шестиугольника. Повторяя построение на каждой из сторон 18-угольника, получаем 54-угольник и т. д. Представим себе, что, применяя процедуру бесконечно много раз, мы достигли предела. На каждом этапе число сторон утраивается, но площадь остается неизменной. В пределе площадь, заполненная извивающейся змеей, в точности равна площади исходного шестиугольника.

Вся область обладает удивительным свойством: ее можно разрезать, как показано на рис. 26, на семь подобластей,

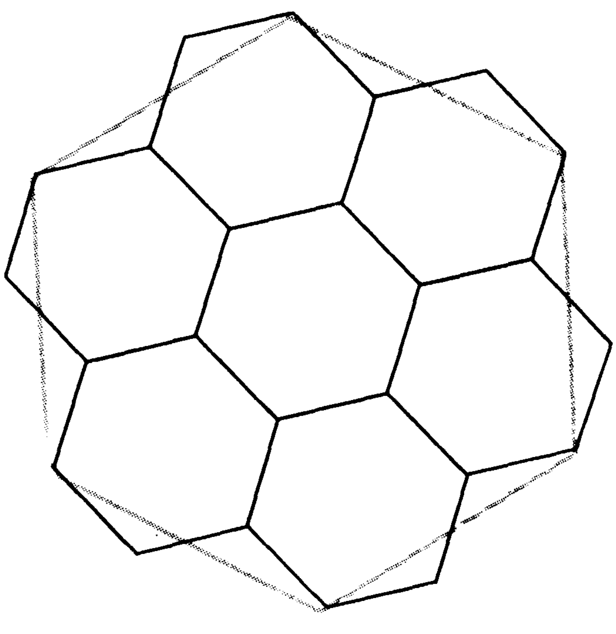


Рис. 25

Построение границы извивающейся змеи.

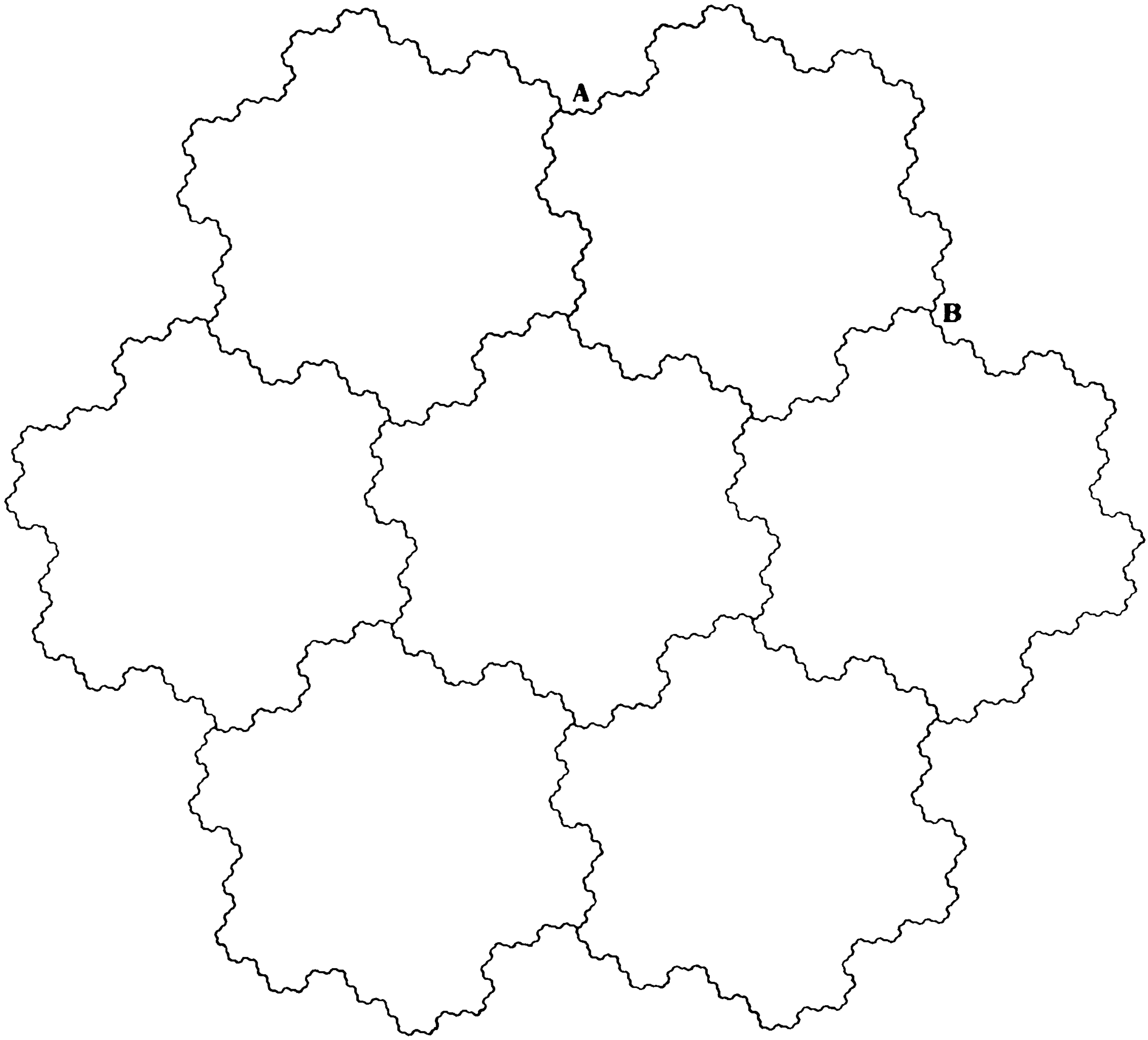


Рис. 26

Парадокс извивающейся змеи.

каждая из которых является уменьшенной копией всей области.

А теперь мы вплотную подходим к парадоксу. Чему равно отношение площади подобласти к площади всей области? Ясно, что 1/7, так как семь одинаковых подобластей составляют одну большую область. Но подойдем к оценке отношения площадей с другой стороны, памятуя о том, что площади подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров. Наружный периметр области состоит из шести сегментов, таких, как сегмент от точки A до точки B, длина которого равна половине длины замкнутой границы подобласти. Чтобы граница подобласти стала конгруентна границе всей области, ее нужно раздуть в 3 раза. Но коль скоро это так, отношение площадей подобласти и области должно быть равно $(1/3)^2 = 1/9$. Таким образом, мы «доказали», что отношение площадей равно и 1/7, и 1/9. В письме, из которого я впервые узнал об этом парадоксе, Госпер вопрошал: «Voss ist los?» [1].

Решение парадокса заключено в особом, противоречащем интуитивным представлениям характере патологической границы. Относительно площади охватываемой ею части плоскости нет никакой неясности: площадь всей области действительно в семь раз больше площади любой подобласти. Относительно самой границы также нет никакой неопределенности: она *выглядит* несколько расплывчатой, но тем не менее представляет собой точно определенное бесконечное множество точек. Вместе с тем граница обладает одним свойстьом, сильно противоречащим интуитивным представлениям. Во сколько раз следует раздуть границу одной из семи подобластей, чтобы она стала конгруентной с внешней границей всей области? Нам кажется, что в 3 раза, но в действительности в $\sqrt{7} = 2{,}645...$ раз. Разумеется, воспроизвести границу на книжной иллюстрации невозможно, так как в пределе ее сложность бесконечна. Мы можем напечатать лишь несколько первых этапов построения границы, а затем типографская краска начинает смазывать мелкие детали.

Возникает глубокий вопрос: какую размерность следует приписать границе извивающейся змеи? Как и граница снежинки фон Коха, граница извивающейся змеи лежит в необычной, несколько таинственной «ничейной полосе» между размерностью 1 и размерностью 2. В 1919 г. немецкий тополог Феликс Хаусдорф решил проблему размерности таких кривых, приписав им дробные, или, если следовать терминологии Мандельброта, *фрактальные* размерности. Термин *фрактал* был введен Мандельбротом в 1975 г. Он произвел его от латинского глагола frangere – ломать и прилагательного fractus – дробный. Термин отражает изломанный, фрагментированный характер фрактальных объектов и наводит на мысль о дробных числах, служащих количест-

---

[1] Госпер обыгрывает здесь созвучие фамилии известного исследователя фрактальных объектов Фосса с вопросительным местоимением «вас»: Was ist los? (нем.) В чем дело? *Прим. перев.*

венной мерой негладкости фракталов. Размерность Хаусдорфа, или фрактальную размерность, не следует путать с размерностью пространств Хаусдорфа – топологических структур, в которые, к счастью, нам нет необходимости вдаваться подробнее.

Семейство евклидовых размерностей 0, 1, 2, 3, 4, ... иногда называют топологическими размерностями, так как пространства с различными евклидовыми размерностями топологически различны, т. е. одно такое пространство нельзя перевести в другое непрерывной топологической деформацией. Точка имеет топологическую размерность 0. Гладкие, «хорошие» кривые – прямые, окружности, параболы и т. д. – имеют евклидову размерность 1. Поверхности имеют размерность 2, объемные тела – размерность 3 и гипертела – более высокие размерности.

Чтобы понять, как вычисляются фрактальные размерности, рассмотрим сначала отрезок прямой. Если увеличить его в x раз, то увеличенный отрезок можно разрезать на y копий исходного отрезка. Размерность отрезка прямой – это показатель степени числа x, равный числу y. Для отрезка $x = y$, так как, удвоив отрезок, мы получаем две копии исходного отрезка, утроив – три копии и т. д. Переводной коэффициент можно записать в виде $\log 2/\log 2 = 1$.

Увеличим квадрат, удвоив его сторону. Увеличенный квадрат можно разрезать на четыре копии исходного квадрата. Если утроить сторону квадрата, то увеличенный квадрат можно разрезать на девять копий. В общем случае, увеличивая линейный размер плоской фигуры в x раз, мы тем самым увеличиваем ее площадь в x^2 раз. Следовательно, размерность квадрата равна $\log 4/\log 2 = 2$. Если ребро куба увеличить в два раза, то увеличенный куб можно разрезать на восемь копий исходного куба. Размерность куба равна $\log 8/\log 2 = 3$. Аналогичным образом можно получить размерности гиперкубов в высших топологических (евклидовых) пространствах.

Применим тот же подход к снежинке фон Коха. Увеличивая линейные размеры какой-нибудь ее части в три раза, мы получаем четыре копии исходной снежинки. На каждом этапе построения длина штриховой линии ровно в 4/3 раза превышает длину сплошной линии на предыдущем этапе, хотя каждый прямолинейный отрезок по длине составляет

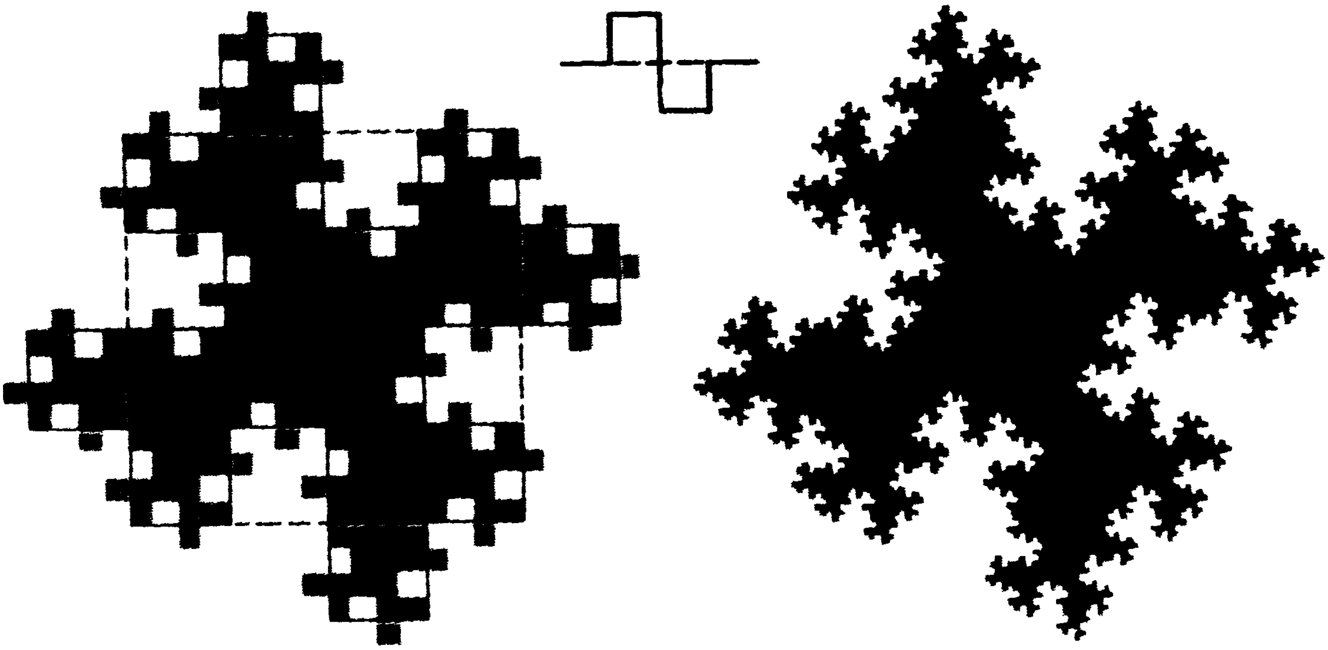


Рис. 27

Квадратные снежинки Бенуа Мандельброта первых трех порядков.

1/3 длины отрезка предыдущего этапа. Следовательно, предельной кривой разумно сопоставить размерность Хаусдорфа D, или фрактальную размерность, равную $\log 4/\log 3 = 1{,}261859\ldots$. Граница извивающейся змеи Госпера строится с помощью повторной замены прямолинейного отрезка зигзагообразной ломаной, которая в $3/\sqrt{7}$ раз длиннее отрезка. Фрактальная размерность границы равна $\log 3/\log\sqrt{7} = 1{,}12915\ldots$.

То, что эти числа называются *размерностями*, в какой-то мере способно вводить в заблуждение. Дело в том, что эти числа не являются евклидовыми размерностями. Их лучше рассматривать как меры сложности, или, как однажды назвал их Мандельброт, как «степени извилистости». Сложность границы извивающейся змеи Госпера немного меньше, чем сложность снежинки фон Коха. На рис. 27, заимствованном из книги Мандельброта [3, 3], вы видите разновидность снежинки, которая получается при многократной замене четырех единичных отрезков восемью единичными отрезками. Эта «квадратная» снежинка имеет сложность $\log 8/\log 4 = 1{,}5$. Следовательно, ее фрактальная размерность несколько больше фрактальной размерности границы извивающейся змеи Госпера. Поскольку на каждом этапе построения граница захватывает ровно такую же площадь, которую отсекает от фигуры, построенной на предыдущем этапе, предельная кривая ограничивает такую же площадь, какую занимает исходный квадрат.

Фрактальные размерности можно записать с помощью общей формулы $D = \log n/\log(1/r)$, где n – число самоподобных частей, возникающих при увеличении линейных размеров исходной фигуры в r раз, D – фрактальная размерность. Фрактальные кривые, одномерные в евклидовом смысле, могут иметь фрактальные размерности от 1 до 2, если кривая плоская, и больше, если кривая искривляется и скручивается в евклидовых пространствах более высоких размерностей. Если фрактальная кривая проходит через каждую точку области, заключенной внутри ее границы на плоскости, как извивающаяся змея (я имею в виду саму змею, а не ее границу) и другие кривые Пеано, то в пределе ее евклидова размерность и ее фрактальная размерность равны 2. Если фрактальная кривая проходит через каждую точку некоторой области пространства, то в пределе она достигает евклидовой и фрактальной размерности 3. Аналогично, фрактальная поверхность с евклидовой размерностью 2 может иметь фрактальную размерность, заключенную между 2 и 3, если кривая принадлежит трехмерному пространству, и выше, если кривая извивается в евклидовых пространствах более высокой размерности, и аналогичные утверждения справедливы относительно фрактальных структур более высоких топологических размерностей.

Может ли сложность фракталов оцениваться числами, которые меньше единицы? Может, хотя структуры, о которых идет речь, топологически не эквивалентны отрезкам прямых. Например, возьмем отрезок прямой, удалим его центральную треть, затем удалим центральную треть каждого из двух оставшихся подотрезков и продолжим этот процесс выбрасывания средней трети до бесконечности. В результате мы получим то, что Мандельброт предпочитает называть *канторовской пылью*. В математической литературе такие множества принято называть дисконтинуумами Кантора, или канторовскими множествами, в честь Георга Кантора, который впервые исследовал их. Применяя формулу Мандельброта для фрактальной размерности к канторовской пыли, получаем число, заключенное между 0 и 1. Точное значение фрактальной размерности канторовской пыли равно $D = \log 2/\log 3 = 0{,}6309\ldots$. Другие процедуры вырезания части отрезка приводят к другим фрактальным размерностям. Мандельброт называет их *подфракталами*, чтобы отличать от фракталов, размерность которых больше их евклидовой размерности.

В абстрактном мире чистой математики фрактальные структуры рассмотренного нами типа принято называть *упорядоченными фракталами*. Разумеется, в реальном мире никаких упорядоченных фракталов не существует. Береговые линии, деревья, реки, облака, молнии, траектории частиц в броуновском движении и тысячи других фракталоподобных явлений можно рассматривать как несовершенные модели, которые в определенных пределах сверху и снизу являются фракталами в статистическом смысле. Самоподобие их проявляется в том, что они сохраняют статистическое подобие независимо от масштаба. Фрактальные размерности при различных масштабах подлежат усреднению, и, для того чтобы проводить такое усреднение, необходимо накопить достаточно обширный запас эмпирических данных. Такие фракталы называются случайными, или статистическими. Например, береговые линии имеют фрактальные размерности, которые изменяются от побережья к побережью. Как показывают исследования, эти размерности заключены в пределах от 1,15 до 1,25 (последнее число характеризует сложность западного побережья Англии).

Поверхности гор могут служить великолепными моделями случайных фрактальных поверхностей. Мандельброт и его сотрудники, главным образом Ричард Ф. Фосс из ИБМ, за последние несколько лет составили компьютерные программы, рисующие искусственные горные цепи, облака и не существующие в природе планеты с вымышленными океанами и континентами. На фото 2 вы видите одну из наиболее поразительных компьютерных композиций Фосса: напоминающая Землю, не существующая в природе планета, восходящая над своим естественным (также не существующим в природе) спутником. Компьютерные программы, основанные на использовании фрактальных форм, позволяют изображать искусственные облака. Воссоздать деревья, которые были бы похожи на настоящие, оказалось труднее, но Майкл Барнсли и его коллеги из Технологического института Джорджии научились «рисовать» листья деревьев и папоротника (см. статью Иварса Петерсона [3, 25]). Эти достижения компьютерной графики породили целую серию странных искусственных ландшафтов на воображаемых планетах в различных научно-фантастических фильмах, начиная с «Звездного переселения II: гнев хана».

Канторовские множества можно построить в любом евклидовом пространстве и получить пористую, как губка, «пыль» с фрактальной размерностью, меньшей, чем размерность пространства. Мандельброт получил случайные фракталы канторовской пыли в трехмерном пространстве, которые поразительно напоминают распределение звезд во Вселенной. Иерархия звездных скоплений, сверхскоплений и скоплений сверхскоплений наводит на мысль о том, что и вся Вселенная в той или иной мере обладает структурой, близкой к структуре случайного фрактала.

Дополнение

Хотя эта глава была значитально расширена и дополнена новыми данными по сравнению с первоначальным вариантом, опубликованным мной в журнале «Scientific American» в 1976 г., в ней всё же недостает некоторых последних результатов.

Когда в 1967 г. Мандельброт опубликовал свою первую, ставшую классической статью о фракталах «Велика ли длина побережья Британии?», он, конечно, не ожидал, что его работа в необычайно короткий срок вызовет подлинный переворот в математике и физике. Фракталы стали не только предметом интенсивного изучения в топологии, но и неотъемлемой частью общих понятий новой области физики, опрокинувшей многие традиционные представления о случайности и сложности и получившей название теории хаоса. Область эта настолько обширна и развивается так быстро, что я ограничусь лишь ссылкой на первую общедоступную книгу-бестселлер Джеймса Глейка «Хаос. Как создается новая наука» [3, 7*].

Нарисованная Глейком картина становления новой науки позволит вам познакомиться с самыми важными типами фракталов, связанными с так называемыми *странными аттракторами*, изящными фракталами (на комплескной плоскости), известными под названием множеств Жюлиа, и совершенно невероятными множествами Мандельброта

(*М*-множествами), открытыми Мандельбротом в 1980 г. Множество Мандельброта с полным основанием было названо самым загадочным объектом в геометрии. По мере продолжения исследований определение фрактала расширялось все больше, пока, наконец, Мандельброт не предложил отложить точное определение до тех пор, пока не будет достигнута полная ясность. Например, теперь более не требуется, чтобы упорядоченные фракталы сохраняли самоподобие во всех масштабах. Построены различного рода *нелинейные фракталы*, такие, как аффинные фракталы, обнаруживающие при последовательных увеличениях аффинные деформации. Множество Мандельброта – своего рода словарь для всех множеств Жюлиа (я даже не пытаюсь объяснить, *что* это значит!) – не самоподобно (*М*-множество обладает самоподобием только в топологическом смысле), хотя оно и содержит бесконечно много своих копий. Каждый очередной уровень увеличения открывает непредсказуемые сюрпризы. Более года, рассматривая *М*-множество под всё большим увеличением, исследователи даже не знали, связно ли это множество. При каждом увеличении обнаруживались открытые изолированные «островки» и частицы пыли. При последующих увеличениях эти несвязные части соединялись с «материком», но открывались новые островки и новая пыль. Наконец, в 1982 г. удалось доказать, что *М*-множество в пределе связно, но потребуется не один десяток лет, пока будут открыты его основные свойства.

В интервью журналу «Omni» (июнь 1986 г.) известный английский специалист по математической физике Роджер Пенроуз сослался на множество Мандельброта в обоснование своего платонистского подхода к математике:

> «Доводилось ли вам когда-нибудь видеть картины, нарисованные компьютером, – объекты, известные под названием множеств Мандельброта? Впечатление такое, как будто вы отправляетесь в путешествие в какой-то далекий мир. Вы включаете свое чувствительное устройство, видите невероятно сложную конфигурацию с множеством всевозможных деталей и пытаетесь понять, что́ это такое. Вы можете вообразить, что перед вами какой-то необыкновенный ландшафт или, быть может, живое существо, облепленное со всех сторон крохотными детенышами, очень похожими на

породившее их создание, но всё же несколько отличающимися от него. Весьма искусная и впечатляющая картина! И всё же, даже глядя на уравнения, никто не имел ни малейшего представления о том, что они могут порождать структуры такого типа. А ведь эти ландшафты – не плод чьего-то разыгравшегося воображения: все видят одну и ту же картину. Вы исследуете нечто с помощью компьютера, но это ничем не отличается от исследования, проводимого с помощью обычной экспериментальной техники».

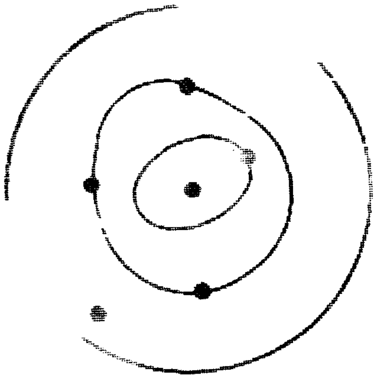
Если вы чувствуете себя вполне уверенно на комплексной плоскости и хотели бы исследовать с помощью компьютера непроходимые джунгли M-множеств, то вам необходимо подписаться на «Amygdala». Это ежемесячный журнал, печатающий сообщения о новых открытиях, связанных с M-множествами, эффективных алгоритмах, их исследованиях с помощью компьютеров и обо всем, что имеет какое-то отношение к M-множествам и поразило воображение редактора. Кстати сказать, редактор изобрел даже новую разновидность научной фантастики, которая получила название M-множественной НФ и основана на таких сюжетах, как M-множества, населяющие гиперпространство-время и наделенные паранормальными способностями. Основателем и редактором журнала является Ролло Сильвер. Он называет себя «онтологическим инженером, который живет и работает в горах северного Нью-Мехико». Лишенный сообщества равных себе и полуобезумевший от одиночества, он, пытаясь хоть как-то защитить себя, начал издавать в 1986 г. «Amygdala».

Кстати сказать, «amygdala» означает по-латыни «миндаль». Это название выбрано в честь Мандельброта, фамилия которого означает на немецком языке и на идиш «миндальный хлеб».

«Фрактальная геометрия природы» Мандельброта [3, 6], несомненно, принадлежит к числу самых прекрасных, фантазийных и увлекательных книг по математике, которые когда-либо были опубликованы. Ее текст и иллюстрации, от которых захватывает дух, знакомят читателя с такими поразительными монстрами, как чертова лестница, сосиски Минковского, воображаемые снежинки Госпера, кластеры Бернулли, ковры Серпинского, губки Менгера, пыль Фату, различного рода извилистые кривые, драконы и всевозможные виды свернувшегося молока и сыров.

С 1978 г. Мандельброт – профессор математики Йельского университета. В 1980 г. он был удостоен Колумбийским университетом медали Ф. Бернарда «За выдающиеся научные заслуги» – престижной награды, присуждаемой каждые пять лет Национальной академией наук США. С тех пор он получил еще шесть наград за заслуги перед наукой и успел шесть раз стать почетным доктором. Несомненно, что в будущем его ожидают и другие почетные звания и награды. Он был признан самым разносторонним математиком после Джона фон Неймана и Норберта Винера.

Глава 4
Сюрреальные числа Конуэя



> Один сказал: «Печатай, Джон».
> Сказал другой: «Постой».
> Один сказал: «Ты – эталон».
> «Ну нет!» – сказал другой.
>
> Джон Баньян. *Апология своей книги*

Ставший почти легендой математик из Кембриджского университета (ныне работающий в Принстонском университете) Джон Хортон Конуэй цитирует приведенные в эпиграфе строки в конце предисловия к своей книге «О числах и играх» [4, 1*], или ОЧИГ, как называют ее сам автор и его друзья. Трудно представить себе математика, который не оценил бы по достоинству эту книгу. В ней собраны плоды математического творчества Конуэя: она глубока по содержанию, открывает немало новых подходов, будоражит воображение, оригинальна, блистает всеми красками, остроумна и исполнена чисто кэрроллианской игры слов. Математикам от специалистов по математической логике и теории множеств до самых скромных любителей понадобилось бы не одно десятилетие, чтобы открыть заново то, мимо чего Конуэй прошел либо умышленно, либо по забывчивости, и исследовать необычные новые теории, первый шаг к освоению которых был сделан в ОЧИГе.

Приводимый здесь дружеский шарж на Конуэя можно было бы назвать «Джон Конуэй (Рогатый)». Бесконечно убывающие по размерам взаимно зацепляющиеся рога обра-

Портрет Джона Конуэя (Рогатого), полученный его сотрудниками при распечатке с компьютера.

зуют в пределе то, что топологи называют «дикой» структурой. Структура на шарже называется рогатой сферой Александера. Хотя она эквивалентна односвязной сферической поверхности шара, ограничиваемая ею область не односвязна. Петлю из упругой нити, охватывающую основание рога, нельзя снять со структуры даже за бесконечно большое число шагов. (В четырехрогой механической головоломке, получившей название «Сумасшедшая петля», есть нейлоновая петля, которую, однако, *можно* снять.)

Конуэю принадлежит изобретение компьютерной игры «Жизнь», которую я имел честь предложить вниманию читателей в редактируемом мной разделе «Математические игры» журнала «Scientific American» в 1971 г. (см. три главы о «Жизни» в моей книге [4, 2*]). Тщательно выбрав несколько до смешного простых правил, Конуэй создал клеточный автомат, обладающий необычайно глубокой и разнообразной структурой. Теперь он проделал нечто подобное еще раз. Используя простейшее из возможных различий (разбиение на два непересекающихся множества) и добавляя несколько простых правил, определений и гипотез, Конуэй построил богатое числовое поле и связанную с ним не менее богатую структуру игр для двух персон.

История того, как числа Конуэя были созданы в последовательные «дни творения» начиная с нулевого дня, рассказана в небольшой книге Доналда Кнута «Сюрреальные числа» [4, 6]. Я посвятил ей главу «Ничто» в моей книге [4, 3*] и поэтому не буду пересказывать ее снова, а напомню читателю, что построение чисел по Конуэю основано на одном правиле: если заданы левое множество L и правое множество R и ни один элемент множества L не равен и не больше любого элемента множества R, то между L и R существует число $\{L \mid R\}$ – «простейшее число» (в смысле, определенном Конуэем).

Начав буквально с ничего (пустого множества) слева и справа,– $\{\mid\}$, мы получаем определение нуля. Все остальное получается методом внедрения вновь порождаемых чисел на определенное место в строго упорядоченной «лево-правой» последовательности. Выражение $\{0 \mid 0\}$ числом не является, но $\{0 \mid\}$ с пустым множеством справа определяет 1, $\{\mid 0\}$ определяет -1 и т. д.

Продолжая по индукции, Конуэй смог определить все целые числа, все рациональные числа, все трансфинитные числа Кантора, множество бесконечных малых (обратных числам Кантора, а не бесконечно малых в смысле обычного математического анализа) и бесконечные классы таинственных чисел, которых никто прежде не видывал, таких, как

$$\sqrt[3]{\omega+1}-\frac{\pi}{\omega},$$

где ω (омега) – первое кардинальное число Кантора.

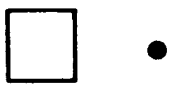
Игры Конуэя построены аналогичным, но более общим образом. Фундаментальное правило состоит в следующем: если L и R – любые два множества игр, то существует игра $\{L\,|\,R\}$. Одни игры соответствуют числам, другие не соответствуют, но все игры (подобно всем сюрреальным числам) «опираются на ничто». «Напомним читателю еще раз, – пишет Конуэй, – что, поскольку в конечном счете все упирается в вопросы об элементах пустого множества, ни одно из наших индуктивных построений не требует никакого «основания»».

В «игре» по системе Конуэя два игрока – Левый (L) и Правый (R) – поочередно делают ходы. (Левый и Правый – названия игроков, как белые и черные, Артур и Берта, но не содержат никакой информации относительно того, кто делает первый ход и кто второй.) Каждая игра начинается с первой позиции, или первого состояния. В этом состоянии и в каждом из последующих состояний игрок располагает определенным выбором, или запасом ходов. Каждый выбор полностью определяет следующее состояние. В стандартной партии первый из игроков, кто не может сделать ход в соответствии со всеми правилами игры, проигрывает. Это разумное соглашение. Конуэй пишет: «Так как обычно мы считаем себя проигравшими, если не можем найти хороший ход, нам заведомо следовало бы признать себя проигравшими, если мы не можем сделать ни одного хода!». В варианте игры на «мизер», обычно гораздо труднее поддающемся анализу, тот, кто не может сделать ход, считается выигравшим. Каждой игре можно поставить в соответствие граф в виде корневого дерева, ветви которого означают варианты ходов, которые может выбирать игрок. На деревьях Конуэя выборы Левого идут снизу вверх и налево, а выборы Правого – снизу вверх и направо.

Игры могут быть «беспристрастными», как игра в ним. Это означает, что тот из игроков, чья очередь ходить, может сделать любой ход, который согласуется с правилами игры. Если же игра не беспристрастная, как шахматы (где каждый из игроков может делать ходы только своими фигурами), то Конуэй называет такую игру пристрастной. В закинутую им сеть попадают как огромное количество известных игр – от игры в ним до шахмат, так и бесконечно много игр, о которых никто никогда не слыхивал. Хотя теория Конуэя применима к играм с бесконечно большим числом состояний, или к играм с бесконечно большим числом вариантов выбора, или к играм с бесконечно большим числом состояний и вариантов выбора, Конуэй рассматривает главным образом игры, которые заканчиваются после конечного числа ходов. «Левый и Правый,– поясняет Конуэй,– люди, занятые и обремененные высокой политической ответственностью».

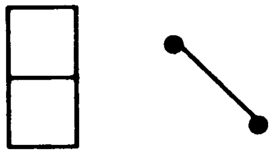
Низшие уровни своей теории Конуэй иллюстрирует на примере позиций, заимствованных из пристрастной игры, основанной на выкладывании костей домино. Я кратко упоминал о ней в гл. 19 моей книги [4, 4*] под названием Кросскрем (Конуэй называет ее Доминирингом). Доска представляет собой шахматную доску произвольных размеров и формы. Игроки поочередно выкладывают на доску по одной кости домино так, чтобы она покрывала два смежных (т.е. имеющих общую сторону) поля, но Левый должен выкладывать свои кости вертикально, а Правый горизонтально. Первый из игроков, кто не сможет сделать очередной ход, считается проигравшим.

Изолированный пустой квадрат не позволяет сделать ход



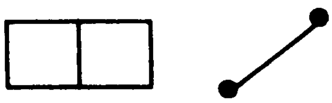
ни одному из игроков. «Ходить не разрешается» соответствует пустому множеству, поэтому этой простейшей из всех игр в нотации Конуэя присвоено значение $\{\,|\,\} = 0$ – простейшее из всех чисел. На ее графе-дереве, изображенном справа от квадрата, есть только одна корневая вершина без ветвей. Поскольку ни одна из сторон не может сделать хода, второй игрок независимо от того, является ли он Левым или Правым, выигрывает. «Я вежливо предоставляю вам сделать первый ход в этой игре»,– пишет Конуэй. Поскольку вы не можете сделать хода, он выигрывает.

Вертикальная полоска из двух (или трех) полей не дает



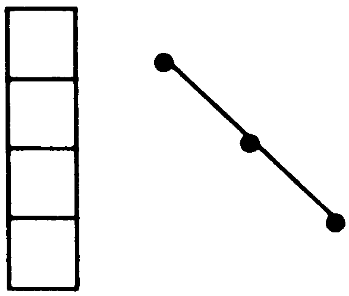
Правому сделать ни одного хода, но позволяет Левому сделать один ход. Этот ход Левого приводит к позиции со значением 0, поэтому такой полоске соответствует значение $\{0\,|\,\} = 1$. Это простейшая из всех положительных игр, и ей отвечает простейшее из положительных чисел. Положительные игры независимо от того, кто делает первый ход, выигрывает Левый. Граф-дерево, соответствующий такой полоске, изображен справа.

Горизонтальная полоска из двух (или трех) полей позво-



ляет сделать один ход Правому, но не дает сделать ни одного хода Левому. Такой полоске соответствует значение $\{\,|\,0\} = -1$. Это простейшая из всех отрицательных игр, и ей отвечает простейшее отрицательное число. Отрицательные игры независимо от того, кто делает первый ход, выигрывает Правый.

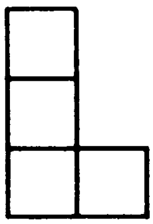
Вертикальная полоска из четырех (или пяти) полей имеет

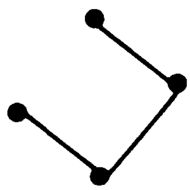


значение 2. Правый не может сделать ни одного хода. Левый, если хочет, может занять два средних поля, чтобы выйти из нулевого состояния, но своим «лучшим» ходом он занимает два поля, примыкающих к верхнему или нижнему концу полоски, так как тогда у него остается возможность сделать дополнительный ход. Если вся шахматная доска состоит

только из такой полоски, то, разумеется, любой ход оказывается выигрышным, но если полоска представляет собой отдельный фрагмент более обширной доски или одной из многих досок в «сеансе одновременной игры», или в составной игре, то может оказаться важным сделать ход, который максимизирует число дополнительных ходов, остающихся для игрока. Поэтому на графе-дереве показана только оптимальная стратегия для Левого. Значение игры равно $\{1 \mid 0\} = \{1 \mid \} = 2$. Горизонтальная полоска из четырех полей имеет значение -2. Если на каком-то фрагменте шахматной доски ходы может делать только один игрок и правила позволяют ему выложить n костей, но не больше, то такой фрагмент имеет значение $+n$, если этот игрок Левый, и $-n$, если этот игрок Правый.

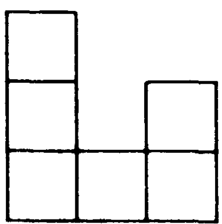
Ситуация становится более интересной, если на каком-то фрагменте доски ходы могут делать оба игрока, так как в этом случае один игрок может блокировать другого. Рассмотрим следующий фрагмент доски:





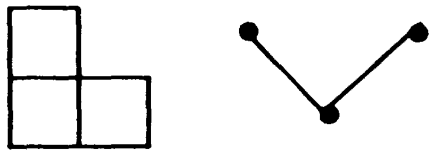
Левый может выложить кость домино так, что заблокирует любой ход Правого, оставляя тому нулевую позицию и обеспечивая себе выигрыш. Аналогично Правый может блокировать Левого, поскольку единственный ход Правого оставляет позицию со значением 1. В нотации Конуэя значение этой позиции выглядит как $\{0, -1 \mid 1\} = \{0 \mid 1\}$, а это выражение определяет $1/2$. Следовательно, позиция оценивается как полхода в пользу Левого. Поворачивая L-образный фрагмент на бок, мы получаем позицию, которая оценивается как $\{-1 \mid 0{,}1\} = \{-1 \mid 0\} = -1/2$, или как полхода в пользу Правого.

В теории Конуэя возникают и более сложные дроби. Например,



имеет значение $\{1/2|1\} = 3/4$ хода в пользу Левого, так как 3/4 – простейшее число между 1/2 и 1 – значениями оптимальных выборов для Левого и Правого. В игре, получившей название пристрастный Хакебуш (беспристрастный вариант этой игры приведен в моей книге [4, 2*], о которой я уже упоминал выше, и более подробно рассмотрен в книге Конуэя [4, 1*]), Конуэй указывает позицию, в которой Левый имеет преимущество в 5/64 хода перед своим противником!

Значения некоторых позиций, возникающих в игре, вообще не являются числами. Простейшим примером может служить следующий фрагмент доски при игре в кросскрем:



И Левый, и Правый могут сделать только по первому ходу, поэтому тот, кто открывает игру, выигрывает независимо от того, Левый он или Правый. Так как каждый игрок может понизить значение до 0, значение позиции равно $\{0|0\}$. Это не число. Конуэй обозначает его знаком $*$ и называет «звездочкой». Другим примером могла бы служить кучка фишек при игре в ним, состоящая из одной-единственной фишки. Это простейшая «нечеткая» игра. Нечеткие значения соответствуют положениям, в которых любой из игроков выигрывает, если делает первый ход.

Значение составной игры равно просто сумме значений образующих ее игр-компонент. Это утверждение относится и к значению позиции в неоконченной партии, которая может быть разделена на какое-то множество подыгр. Например, на рис. 28 показана позиция, возникающая при игре в кросскрем на стандартной шахматной доске. Указаны значения отдельных фрагментов доски. Позиция кажется вполне уравновешенной, но сумма значений фрагментов равна $1^1/_4$. Это означает, что Левый имеет преимущество в один и одну четверть хода перед Правым и, следовательно, выигрывает независимо от того, кто делает следующий ход. Прийти к такому выводу на основе построения полного дерева игры было бы трудно, а по теории Конуэя он получается быстро и автоматически.

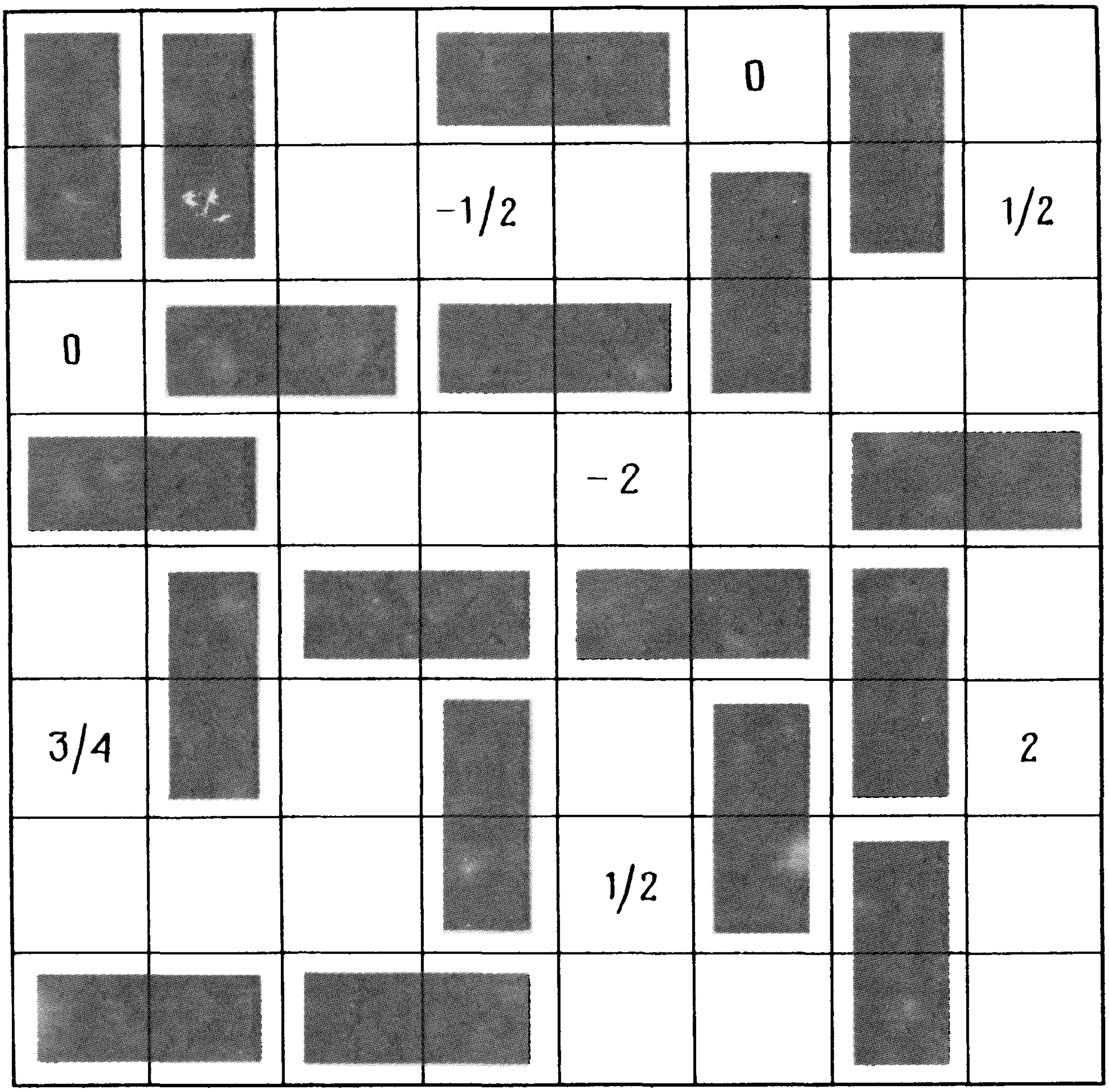


Рис. 28

Позиция при игре в кросскрем, при которой выигрывают левые.

Игра не считается «решенной» до тех пор, пока не известен ее исход (т.е. значение игры – нулевое, положительное, отрицательное или нечеткое) в предположении, что каждый из игроков придерживается оптимальной стратегии, и не найдена выигрышная стратегия для того из игроков, кто одерживает победу. Такое ограничение применимо только к игре, котоя должна закончиться за конечное число ходов, но в таких играх может возникать бесконечно большой выбор, как в игре, которую Конуэй называет «У моего папы больше денег, чем у твоего». Игроки поочередно называют какую-то сумму денег. После того как второй сделает свой ход, игра завершается (после двух ходов). Выигрывает тот, кто назовет бóльшую сумму денег. Хотя дерево игры, по признанию Конуэя, довольно сложно, исход игры ясен: выигрывает второй игрок.

Существуют ли нетривиальные начала? Да, но они служат тем прочным фундаментом, на котором Конуэй, найдя изобретенным им новым играм точное место в развитой им же «лево-правой» схеме, тщательно возводит фантастическое здание внушительных размеров. Не буду вдаваться в подробности, а вместо этого опишу несколько необычных игр, которые Конуэй анализирует в свете своей теории. Во всех этих играх мы имеем в виду стандартный вариант, когда тот из игроков, кто первым не может сделать очередной ход, проигрывает.

1. Кол (игра названа по имени своего изобретателя Колэна Ву). На листе коричневой бумаги рисуется карта. У L – черная краска, у R – белая. Игроки поочередно закрашивают области на карте, следя за тем, чтобы области, примыкающие друг к другу вдоль линейного участка границы, не были окрашены в один цвет. Полезно мысленно представить все области, примыкающие к белой области, окрашенными в белый цвет, а все области, примыкающие к черной области, окрашенными в черный цвет. Тогда все области, которые должны быть окрашены и в белый, и в черный цвета, следует изъять с карты как не поддающиеся правильному раскрашиванию.

Конуэй анализирует кол с помощью дуального графа карты (рис. 29), определяя то, что он называет «взрывными вершинами», и помечая их вспышками молний. Разумеется, в кол можно играть, раскрашивая области не обязательно в белый и черный цвета, а в любые два цвета. Ву сообщает, что в множестве всех топологически различных связных карт одной области, разделенной на 5 подобластей, в 9 случаях выигрывает игрок, делающий первый ход, и в 21 случае – игрок, делающий второй ход. В общем случае игра в кол неразрешима.

2. Снорт[1] (в честь Саймона Норта). В снорт играют так же, как в кол, за исключением того, что примыкающие друг к другу области должны быть окрашены в один цвет. Эта игра также неразрешима. Конуэй подозревает, что теория игры в снорт богаче, чем теория игры в кол. Самый ценный совет Конуэя: если вы можете окрасить в свой цвет любую

---

[1] Игра слов: snort (англ.) – храп, фырканье. – *Прим. перев.*

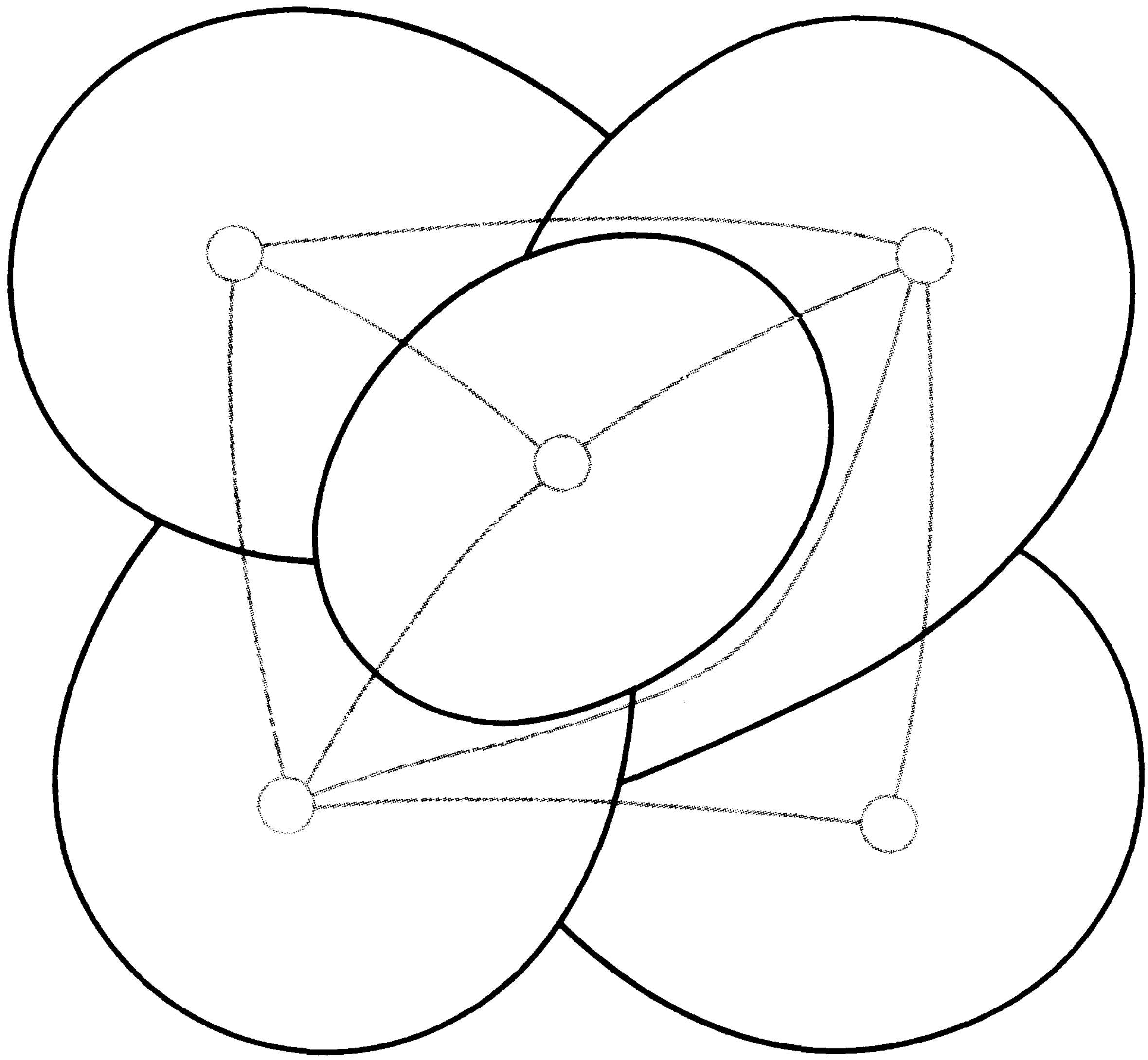


Рис. 29

Карта с пятью областями и двойственный ей граф (серые линии) для игры в кол и снорт.

область, примыкающую к области, окрашенной в цвет вашего противника, сделайте это. Кроме того, Конуэй сформулировал и доказал несколько важных теорем об игре в снорт, которые он опубликовал в работе под названием «Краткий словарь снорта» (Short Snort Dictionary).

3. Игра в серебряный доллар без доллара. Доской для этой игры служит горизонтальная полоска из клеток, неограниченно простирающаяся вправо (рис. 30А). Мелкие монеты, произвольно разложенные по некоторым клеткам (по одной монете в клетке), образуют начальную позицию. Игроки поочередно перемещают по одной монете влево на любую пустую клетку. Перепрыгивать через клетки не разрешается. В конце концов все монеты собираются у левого конца полосы – в тупике. Тот из игроков, кто первым не сможет сделать очередного хода, проигрывает.

Эта игра по существу представляет собой игру в ним

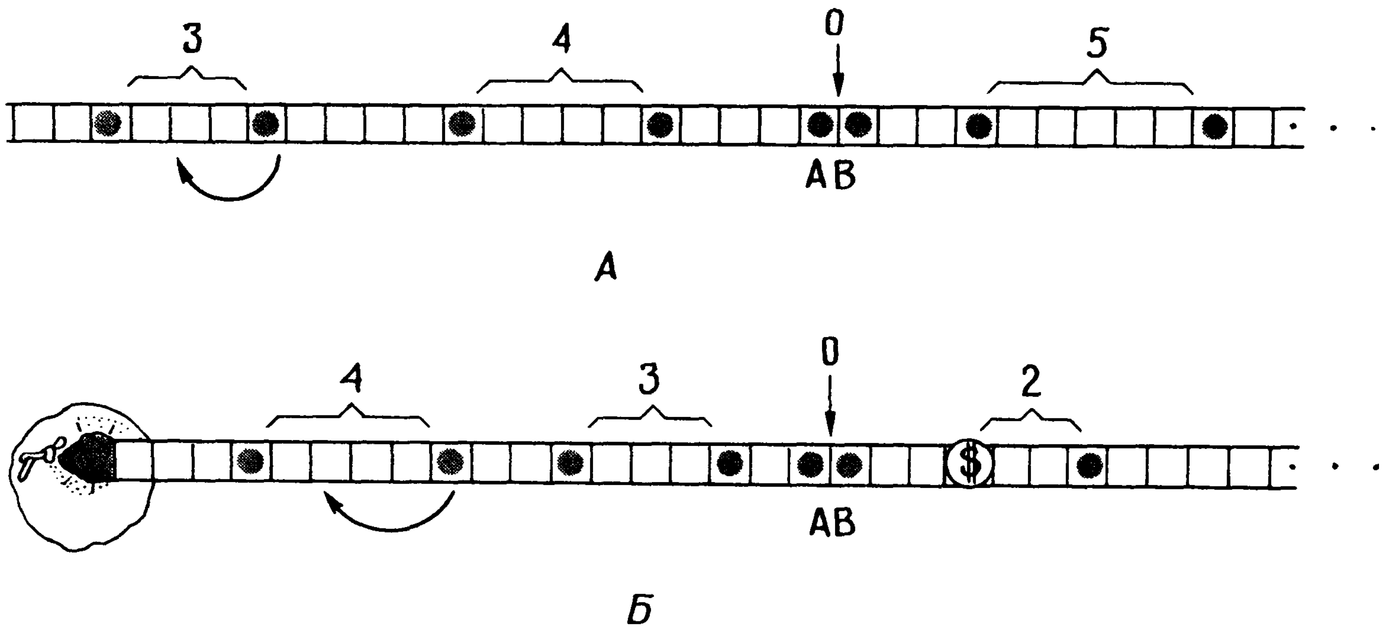


Рис. 30

(А) Игра в «серебряный доллар» без серебряного доллара. (Б). Та же игра с серебряным долларом.

в одной из его бесконечных модификаций. (Я надеюсь, что читатель знаком с игрой в ним и знает, как определить выигрышную стратегию.) В противном случае он может почерпнуть необходимые сведения из многих книг, в том числе из книги Конуэя [4, 1*] или моей книги [4, 5*]. Кучкам (или рядам) фишек при игре в ним соответствуют пустые клетки между монетами, начиная с самого правого промежутка между монетами и далее справа налево через один. На рис. 30 кучки фишек при игре в ним указаны скобками и стрелкой. Промежутки состоят из 3, 4, 0 и 5 пустых клеток, поэтому игра эквивалентна игре в ним с кучками из трех, четырех и пяти фишек.

Рациональная стратегия строится так же, как при игре в ним: делать такие ходы, которые уменьшают сумму фишек в кучках до нуля; в такой игре выигрывает тот, кто делает второй ход. Одно тривиальное различие состоит в том, что в данном случае размеры «кучки» могут расти. Но если вы придерживаетесь выигрышной стратегии и ваш противник делает ход, увеличивающий размеры кучки, то своим следующим ходом вы сразу уменьшаете кучку до предыдущих размеров, передвигая монету, которая расположена непосредственно справа от кучки.

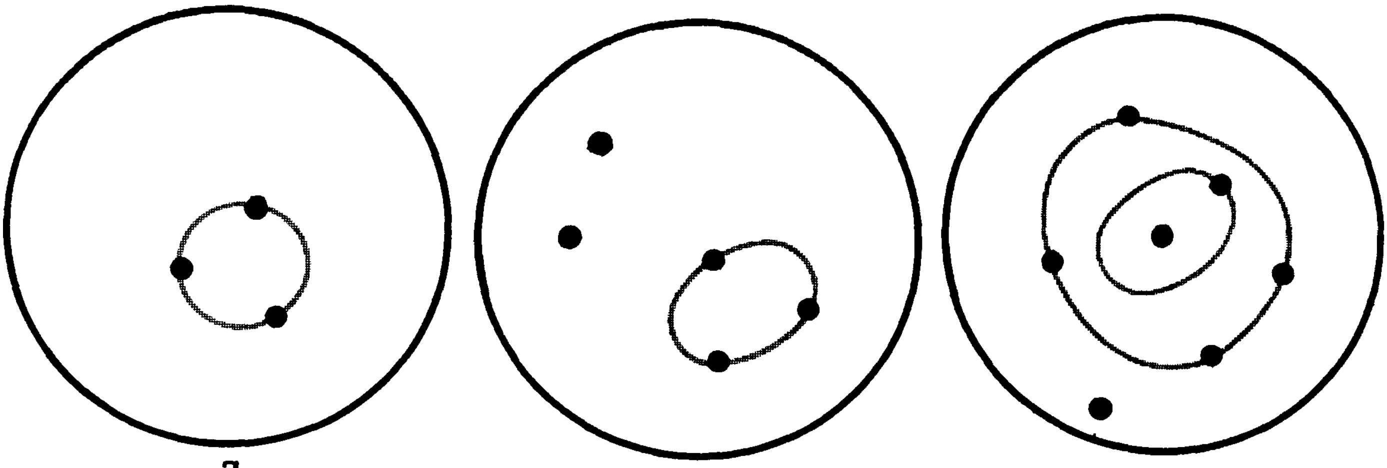
Если в позиции, представленной на рис. 30, право сделать очередной ход принадлежит вам, то вы заведомо выиграете, сделав ход, указанный искривленной стрелкой. Если ваш противник в ответ передвинет фишку *A* на две клетки влево, то пустая «кучка» вырастет до кучки из двух фишек. Вы своим следующим ходом сдвигаете фишку *B* на две клетки влево, тем самым возвращая кучку в прежнее состояние («кучка» из 0 фишек).

4. Игра в серебряный доллар с серебряным долларом. В эту игру играют так же, как в предыдущую, с тем лишь различием, что одна из монет (любая) теперь серебряный доллар, а самая левая клетка – мешок для монет (рис. 30Б). Самая левая монета может, перемещаясь, попасть в мешок. Когда доллар оказывается в мешке, игра завершается, и тот, кто делает следующий шаг, выигрывает, забирая мешок.

Эта игра также является замаскированным вариантом игры в ним. Мешок считается пустым, если справа от него находится монета достоинством в пенни, и полным, если это серебряный доллар. В остальном вы играете в ним, как прежде. Если вы придерживаетесь выигрышной стратегии, то забросить доллар в мешок будет вынужден ваш противник. Если же победитель обречен забросить доллар в мешок, то мешок следует считать полным, когда монета справа от него есть та самая монета, которая лежит слева от доллара, и пустым в противном случае. Позиция на рис. 30Б соответствует игре в ним с кучками из 4, 3, 0 и 2 фишек. Первый игрок выигрывает в обоих вариантах, только если он делает ход, указанный искривленной стрелкой.

5. Римс. Начальная позиция этой приятной разновидности игры в ним состоит из двух или более групп пятнышек («точек»). Сделать ход означает провести через любое число точек, принадлежащих одной группе, простую замкнутую петлю. Петля не должна иметь самопересечений, а также касаться других петель или пересекаться с ними. Одна из партий игры в римс показана на рис. 31.

Как показал Конуэй, играть в римс все равно, что играть в ним с одним дополнительным правилом: если угодно, вы можете при очередном ходе выбрать центральную фишку ряда и оставить два новых ряда (а не один и не несколько). Хотя число кучек может возрастать, выигрышной остается стандартная стратегия при игре в ним. Если каждую петлю проводить через одну или две точки, то игра в римс экви-



3 5 7

Рис. 31

Позиция при игре в римс.

валентна известной игре «Рассада» (см. гл. 16 моей книги [4, 6*]). Конуэй называет ее «Досада».

6. Прим и дим. Позвольте мне предварить знакомство с этими играми представлением «прайм нима» (нима на простых числах) – игры более элементарной, которую Конуэй в своей книге не рассматривает. Впервые она была проанализирована около 20 лет назад Клодом Э. Шенноном. В прайм ним играют так же, как в обычный ним, за исключением того, что игрокам разрешается забирать из кучек только простое число фишек (число 1 также считается простым). «Эта игра содержит некоторый элемент математического розыгрыша,– писал Шеннон (частное сообщение),– поскольку на первый взгляд кажется, будто она использует глубоко аддитивные свойства простых чисел. В действительности используется только одно свойство, а именно то, что все кратные первого непростого числа не являются простыми числами».

Первое непростое число есть число 4. Следовательно, стратегия состоит просто в том, чтобы считать число фишек в каждой кучке равной остатку от деления его на 4, и затем придерживаться обычной стратегии при игре в ним, но с числами по модулю 4. Если число 1 не считать простым, то стратегия в стандартном варианте игры оказывается менее простой, а в мизерном варианте, насколько мне известно, никогда не анализировалась.

При игре в прим, предложенной Алленом Триттером, игроки берут из каждой кучки число фишек, взаимно простое с числом фишек в кучке. Иначе говоря, два числа, о которых идет речь (число фишек в кучке и число фишек, забираемых игроком при очередном ходе), не должны быть равны и иметь общих делителей, кроме 1. При игре в дим из кучки, в которой n фишек, игроку разрешается забрать число фишек, равное любому *делителю* числа n (включая 1 и n). Конуэй приводит решения обеих игр, а также их вариантов, в которых при игре в прим разрешается из кучки, содержащей 1 фишку, брать 1 фишку, а при игре в дим не разрешается забирать из кучки, содержащей n фишек, все n фишек.

7. Как разрезать пирог («каткейк»)? Это новая пристрастная игра, изобретенная Конуэем. Для этой игры берется некоторое множество прямоугольных пирогов, каждый из которых разделен на единичные квадраты, как вафли. Ход Левого состоит в разрезании пирога на две части вдоль любой вертикальной линии квадратной решетки, шаг Правого – в разрезании пирога вдоль любой горизонтальной линии решетки. У этой игры удивительно простая теория.

На рис. 32 изображен пирог размером 4×7. В обозначениях Конуэя ему соответствует значение 0. Иначе говоря, второй игрок выигрывает независимо от того, кто делает первый ход. На первый взгляд кажется, будто преимущество

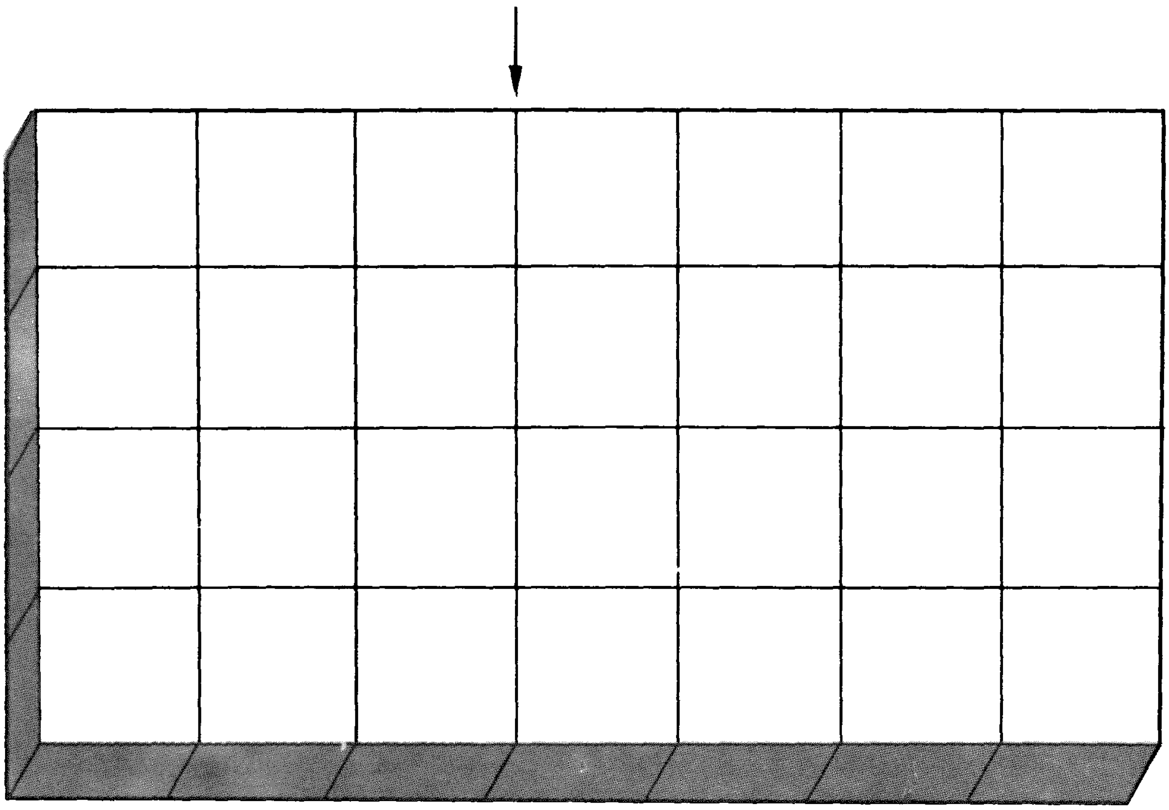


Рис. 32

Заготовка для разрезания торта. Первый ход – разрез по вертикали, указанной стрелкой.

на стороне игрока, проводящего вертикальные разрезы, так как у него имеется почти вдвое больше возможностей сделать первый ход, чем у его противника, но в действительности это не так, если он делает первый ход. Предположим, что игрок, проводящий вертикальные разрезы, делает первый ход и разрезает пирог по линии, указанной стрелкой. Каков оптимальный (выигрышный) ответный ход второго игрока?

Приведу лишь несколько примеров из экзотического перечня Конуэя. Игры могут быть короткие, маленькие, совсем маленькие, ручные, спокойные, беспокойные, божественные, экстравертированные и интравертированные. Есть подъемы, спуски, удаленные звезды, полузвезды и суперзвезды. Есть также атомные веса и множества с такими названиями, как Он, Но, Уг и Оз. У Конуэя есть своя теория температуры с термограммами, на которых горячие точки можно охлаждать, поливая их холодной водой. Есть у него и принцип Маха для малого мирка: атомный вес короткой совсем маленькой игры равен по крайней мере единице в том и только том случае, если игра позволяет оставить «за флагом» самые удаленные звезды!

Доказанная Конуэем теорема 99 придает его книге несколько причудливый характер. Она утверждает следующее (я перефразирую формулировку теоремы, чтобы исправить небольшую ошибку, которую Конуэй обнаружил слишком поздно, когда книга уже вышла из печати): любая короткая совсем маленькая игра с нулевым атомным весом подчинена некоторой суперзвезде. Только ощущение незавершенности, замечает Конуэй, вынуждает его закончить книгу заключительной теоремой. Теорема 100 гласит: «Это последняя теорема в этой книге».

Ответы и решения

Задача состояла в том, чтобы найти выигрышный ответный ход на ход первого игрока в игре «Как разрезать пирог?». Пирог имеет форму прямоугольника 4×7. Если первый игрок разрезает пирог по вертикали на квадрат 4×4 и прямоугольник 4×3, то единственный ответный ход состоит в том, чтобы фрагмент 4×3 разрезать на два прямоугольника 2×3.

Дополнение

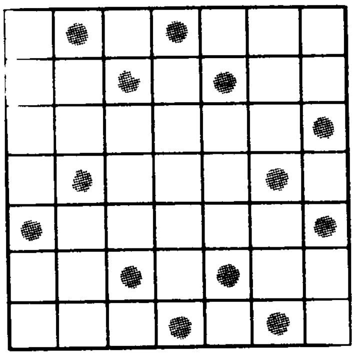
Так как эта глава впервые была опубликована в журнале «Scientific American» в 1964 г., Конуэй успел с тех пор опубликовать другие книги и статьи, появились и статьи о Конуэе. Некоторые из этих публикаций приведены в списке литературы. Особенно значительна двухтомная монография Элвина Берлекампа и Ричарда Гая «Выигрышные стратегии» [4, 7*]. Она уже стала классическим трудом по занимательной математике и содержит немало важных технических достижений в теории игр и комбинаторике. Относительно вклада Конуэя в разработку теории мозаик Пенроуза см. гл. 1 и 2 настоящей книги. Его работам по спорадическим группам и теории узлов посвящены мои публикации в номерах журнала «Scientific American» за июнь 1980 г. и сентябрь 1983 г. В 1987 г. Конуэй покинул Кембридж и стал профессором Принстонского университета.

В сентябре 1976 г. Конуэй выступил с докладом о своей теории игр на конференции по занимательной математике в Университете Майами. В заключение своего доклада «Вся полнота теорий игр» [4, 5] Конуэй сказал:

«Изложенные теории применимы к сотням и тысячам игр, поистине изящным миниатюрам; вы можете изобретать все новые и новые игры. Особенно замечательно, когда вам удается найти игру, которую кто-то рассматривал и до вас и, возможно, не слишком преуспел в этом, а вы видите, что к ней применима одна из этих автоматических теорий, вычислить значение одной из позиций и заявить: «Ясно! Правый на 47/64 хода впереди и находится на пути к выигрышу».

Глава 5

Возвращение из Клондайка и другие задачи



«Комбинаторная революция» в математике не идет на убыль, и поток книг и статей по комбинаторике не иссякает. Определенный вклад в такое развитие событий внес компьютер, позволивший анализировать комбинаторные задачи, слишком сложные для того, чтобы пытаться решать их другими методами. Еще одним стимулом стало все более широкое применение комбинаторики в науке и технике, в частности в физике элементарных частиц и молекулярной биологии. В крупных масштабах окружающий нас мир допустимо рассматривать как совокупность континуумов, описываемую методами математического анализа, но на микроуровне он предстает как мешанина дискретных элементов с загадочными скачкообразными переходами и любопытными комбинаторными свойствами. В некоторых современных теориях квантуются даже время и пространство.

Сотни интригующих комбинаторных задач-головоломок, старых и новых, привлекают теперь внимание серьезных математиков. Начнем хотя бы с одной «призовой» занимательной задачи Сэма Лойда. Недавно задачу Лойда удалось «расколоть» с помощью компьютерной программы. Мы рассмотрим также еще несколько комбинаторных задач. Никаких подходов к их общему решению не видно, и даже в упрощенных вариантах они нелегко поддаются решению.

Величайшей из книг по занимательной математике, кода-либо изданных в США, является объемистый том в бледно-зеленом холщевом переплете под заголовком «Энциклопедия Сэма Лойда, содержащая 5000 головоломок, фокусов и занимательных задач с решениями» [5, 1*]. На оборотной стороне ее переплета значится цена 5 долларов, но тот, кому удастся сегодня купить ее меньше чем за 25 долларов, может считать, что ему повезло. Относительно истории публикации «Энциклопедии» Сэма Лойда почти ничего не известно. Хотя она богато иллюстрирована, ни один из нескольких ее художников не идентифицирован. На экземплярах книги указано, что она издана либо «Morningside Press», либо «Lamb Publishing Company» (оба издательства нью-йоркские), но неизвестно, какое из двух изданий вышло первым.

Все экземпляры датированы 1914 г. Поскольку Сэма Лойда к тому времени уже три года как не было в живых, широко распространено мнение, что его сын воспользовался именем отца и, собрав его многочисленные задачи из старых газет и журналов, наскоро составил из них объемистый том. (В тексте книги полно пропусков, ошибок и опечаток.) Впоследствии было установлено, что Лойд-старший редактировал и издавал ежеквартальный журнал «Our Puzzle Magazine» («Наш журнал головоломок»), первый номер которого вышел в июне 1907 г. Сейчас любой выпуск этого журнала является большой библиографической редкостью. «Энциклопедия» представляет собой просто перепечатку номеров этого журнала, выполненную с оригинальных типографских полос.

Задача Лойда «Возвращение из Клондайка», которую вы видите на рис. 33, была опубликована во втором выпуске (за октябрь 1907 г.) его журнала и воспроизведена на с. 106 «Энциклопедии». Неизвестно, почему Лойд называл задачу «призовой»: потому, что за решение ее читателям журнала предлагалась премия, или потому, что задача в одном из своих более ранних перевоплощений предлагалась на одном из конкурсов по решению задач-головоломок.

«Начинать надо с поля в самом центре, помеченного сердечком,– пишет Лойд,– и сделать три шага по прямой в любом из восьми направлений: на север, юг, восток или запад, или, как говорят дамы, по косой – на северо-восток, северо-запад, юго-восток или юго-запад. Сделав три шага по прямой, вы достигнете какого-то квадрата, в котором стоит

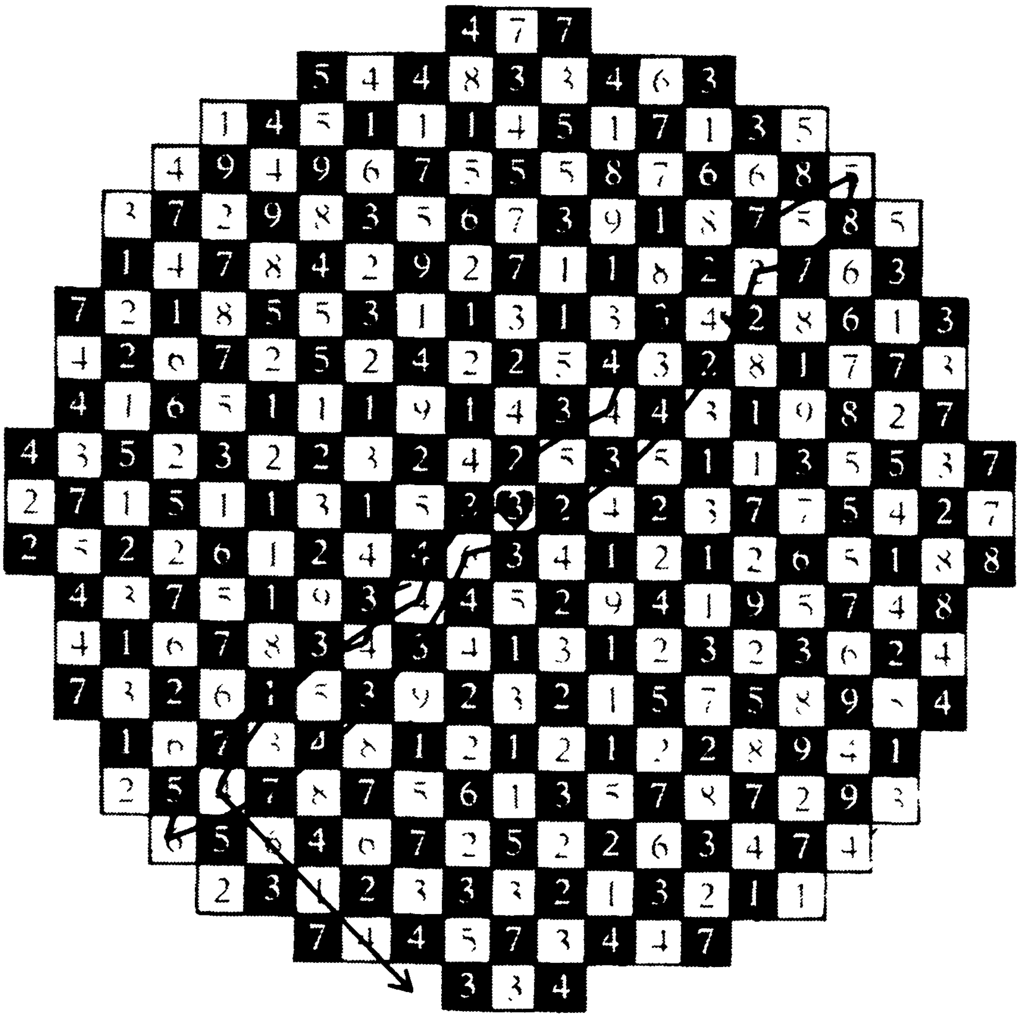


Рис. 33

Предложенное Сэмом Лойдом решение его задачи «Возвращение из Клондайка».

какое-то число. Оно сообщает сведения о втором дне путешествия, указывая, сколько шагов в любом из восьми направлений нужно совершить. Достигнув новой точки, вы отправляетесь дальше и совершаете указанное в новом квадрате число шагов. Так вы продолжаете действовать до тех пор, пока не дойдете до квадрата с числом, которое выводит вас ровно на один шаг за границу доски. Тогда вы можете считать, что вам удалось выбраться из леса, и кричать что душе угодно, поскольку вы решили задачу».

Трудноуловимое решение, предложенное самим Лойдом, показано кривой черной линией. Маршрут просто колеблется то вверх, то вниз вдоль главной диагонали до тех пор, пока не достигнет числа, позволяющего, как пишет Сэм Лойд в своем решении, «совершить дерзкий побег на свободу в юго-восточном направлении!». По утверждению Лойда, решение единственно. «Те, кто не сумеет найти его, с легкостью обнаружат, что достаточно на любом этапе сделать один неверный шаг, как игра втянет вас в роковой водоворот, из которого невозможно выбраться».

Но старый маэстро заблуждался! В начале 1976 г. Пенелопа Дж. Грин, аспирантка-социолог из Вашингтонского университета, Р. Дункан Митчелл, аспирант-экономист из того же университета, и Хорейс А. Грин, преподаватель физики из Университета Рузвельта в Чикаго, предприняли совместными усилиями атаку на головоломку Лойда, воспользовавшись составленной Митчеллом программой на Фортране. В считанные секунды программа нашла предложенное Лойдом решение и ... сотни других! Выбраться из леса можно, выходя из центра 3 по любому из восьми направлений. Начало одного из альтернативных маршрутов показано на рис. 34. Все новые маршруты в конце концов приводят к квадрату с числом 4 – ключевому полю на главной диагонали, после чего завершаются, как в решении Лойда.

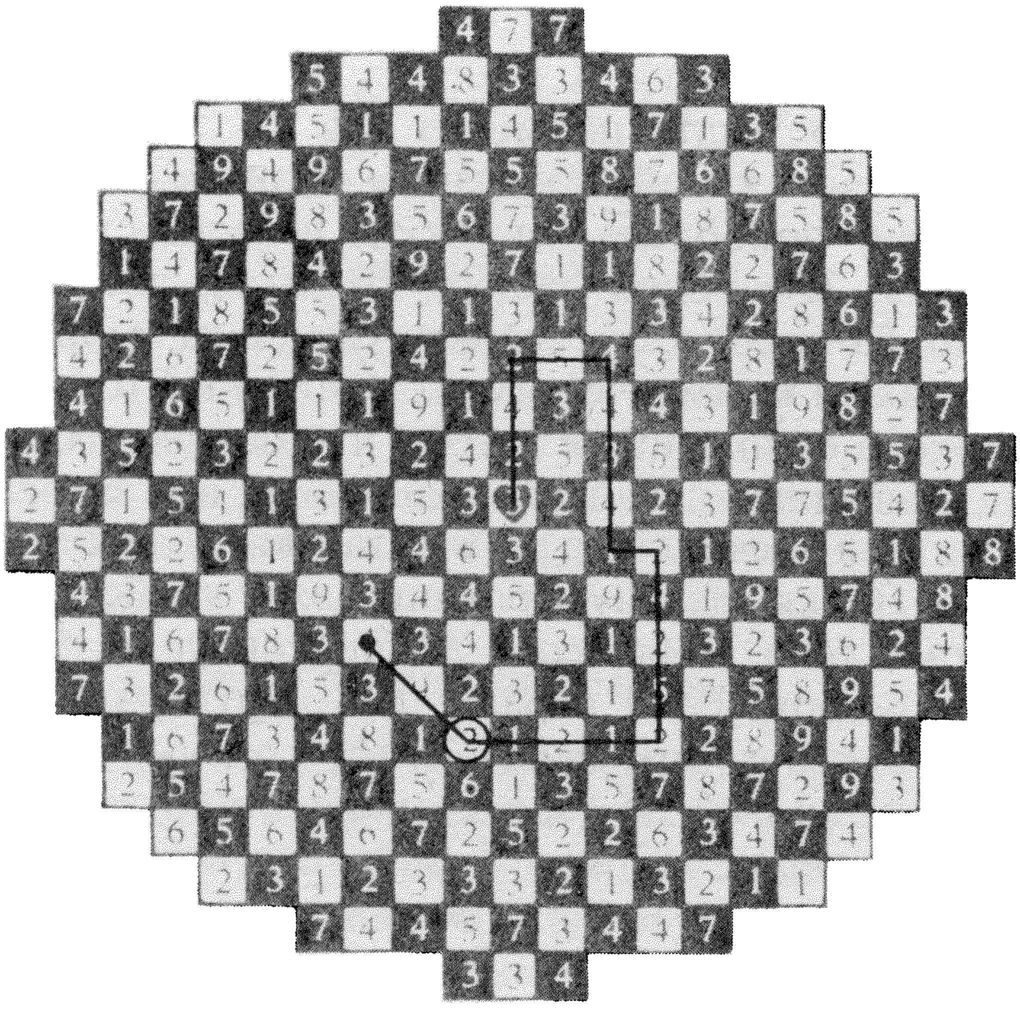


Рис. 34

Альтернативный маршрут через «камень преткновения» – двойку.

Все трое программистов отметили одну необычную особенность альтернативных решений. Все альтернативные маршруты имеют одну и только одну общую клетку, через которую не проходит маршрут Лойда. Грин, Митчелл и Грин назвали эту клетку с числом 2 «камнем преткновения» (на рис. 34 она обведена кружком). Может быть, художник по ошибке вписал двойку в эту клетку? Такое предположение весьма правдоподобно, так как, когда программисты принялись подставлять вместо двойки другие цифры, компьютер нашел только одну отличную от нуля цифру, исключающую все альтернативные маршруты.

Эту приятную задачу (в действительности очень простую) я предлагаю читателям: исправить головоломку Лойда «Возвращение из Клондайка», заменив «камень преткновения» с двойкой на клетку с единственной отличной от нуля цифрой, восстанавливающей единственность решения Лойда. Называя решение Лойда единственным, мы абстрагируемся от излишних «экскурсов в сторону», когда от какой-то клетки отходят только для того, чтобы затем вернуться к ней и продолжить маршрут, и от таких вариантов, когда из клетки *A* в клетку *B* следуют окольным путем, хотя можно идти прямо из *A* в *B*.

Происхождение китайских шашек, игры на специальной доске, которая приобрела широкую известность во всем мире в начале 20-х годов нашего столетия, достоверно не установлено. По-видимому, впервые она была выброшена на рынок под таким коммерческим названием в США. Игра не имеет никакого отношения к Китаю и мало чем напоминает шашки, но название «китайские шашки» за ней закрепилось.

Стандартная доска для игры в китайские шашки показана на рис. 35. Лунки перенумерованы для удобства записи ходов. Кроме того, добавлены линии контуров досок всех меньших размеров. Если играют два партнера, то 10 шариков одного цвета помещают в треугольный «загон» из лунок с номерами от 1 до 10, а 10 шариков другого цвета – в лунки с номерами от 112 до 121. Правила игры в китайские шашки напоминают правила игры в хальму (см. гл. 11 моей книги [5, 2*]) – популярной британской игры, которая, возможно, послужила прототипом китайских шашек.

Разрешается делать ходы двух типов. «Шаг» – это ход в одном из шести направлений на соседнюю незанятую

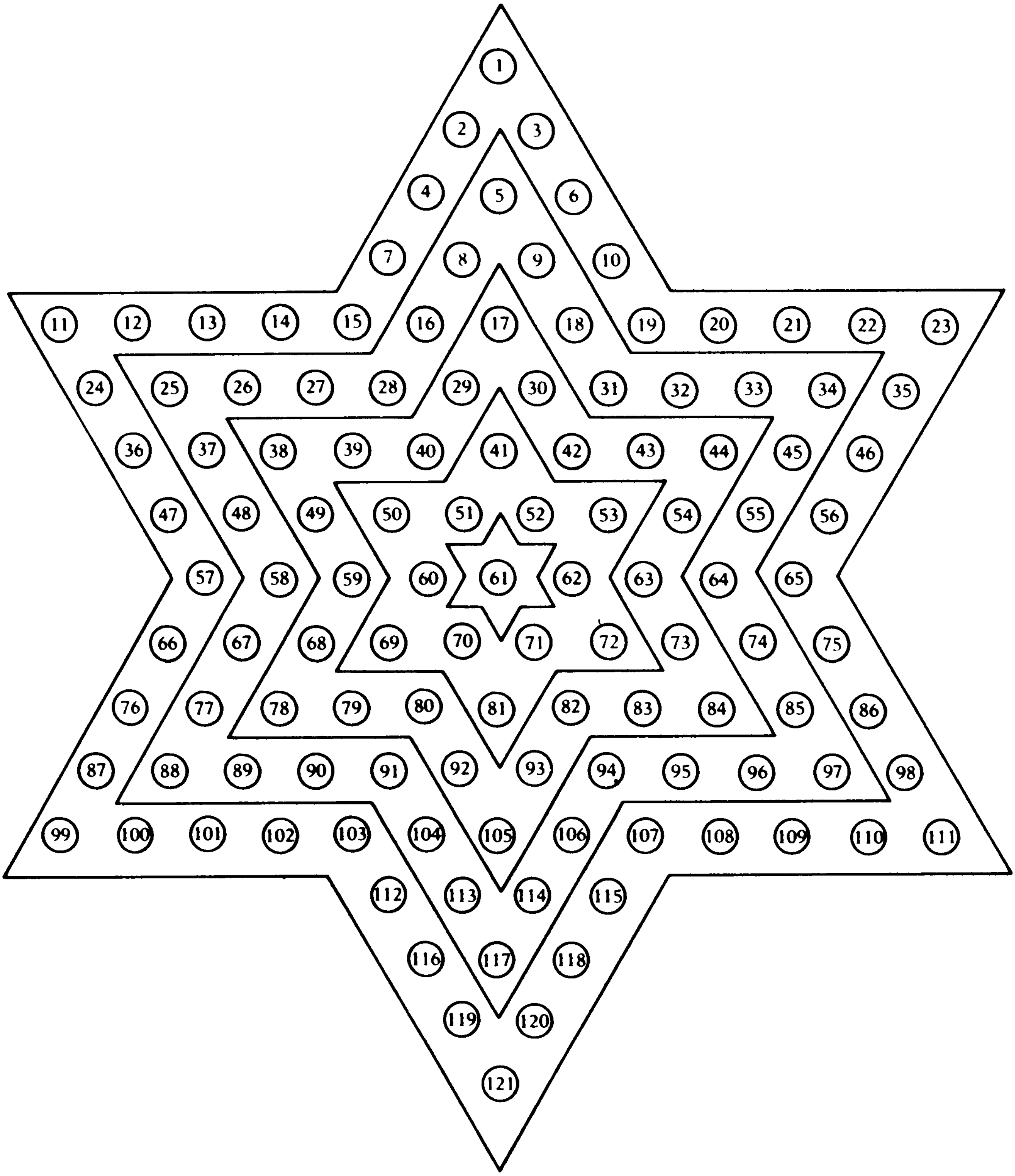


Рис. 35

Одна из досок для игры в китайские шашки.

лунку. «Скачок» – это ход через соседний шарик в одном из шести направлений на незанятую лунку по другую сторону от шарика. Скачок напоминает перепрыгивание шашки через шашку противника. Отличие состоит в том, что шарик, через который совершается скачок, не удаляется с доски и может принадлежать как тому, кто делает ход, так и его противнику. Скачки можно совершать подряд столько раз, сколько это возможно, или прервать серию скачков в любом удобном месте. Делать скачки совсем не обязательно. Сочетать шаги и скачки в одном ходе запрещается. Выигравшим считается тот, кто первым займет все лунки в загоне своего противника.

Ясно, что играть в китайские шашки на вырожденной «звезде» с одной-единственной лункой невозможно. При игре на следующей по размерам доске у каждого игрока имеется по одному шарику, и игра тривиальна: выигрывает тот, кто делает первый ход. Когда размеры доски возрастают настолько, что у каждого из игроков появляется по три шарика, сложность игры неизмеримо возрастает. Насколько мне известно, никто пока не знает, кто из игроков должен выиграть.

Играть в китайские шашки на такой звездообразной доске очень приятно. Чтобы игрок не мог искусственно создавать ничью, удерживая шарик в лунке (в исходном загоне), следует дополнить правила еще одним: если шарик может покинуть загон, перепрыгнув через шарик противника, то он должет сделать скачок. Покинув загон, шарик не должен в него возвращаться на «постоянное жительство», хотя может бывать «*проездом*», совершая серию скачков.

Рассмотрим на каждой из звездообразных досок следующую задачу из игры в солитер. Шарики одного цвета расставляют по лункам нижнего загона. Чему равно минимальное число ходов (серия скачков считается одним ходом), необходимых для того, чтобы перевести все шарики в верхний загон?

Задача не имеет смысла на звездообразной доске наименьших размеров и тривиальна на доске с 13 лунками. Для звездообразной доски с загонами на 3 шарика игра в солитер завершается за 11 ходов, например: 92–81, 81–71, 105–82–61, 61–52, 93–82, 82–61–42, 42–30, 71–61, 61–42–17, 52–41, 41–29.

Для звездообразной доски с 6 шариками наилучшее решение, которое мне удалось найти, состояло из 18 ходов. Начиная с хода 113–93, существует много способов построить за 9 шагов вертикальную «лестницу» из шариков на лунках 9, 30, 52, 71, 93 и 114. Еще 9 ходов требуются для того, чтобы, обращая сыгранную часть партии, поместить 6 шариков в верхний загон.

А теперь обратимся к нашей главной задаче: чему равно минимальное число ходов, необходимых для того, чтобы переместить 10 шариков из одного загона в противоположный загон на стандартной доске для игры в китайские шашки? Впервые я услышал об этой задаче в 1961 г. от Октава Левеншпиля, профессора химического машиностроения в Университете штата Орегон. В своем письме профессор Левеншпиль сообщал, что ему удалось решить задачу за 31 ход, но его матушке, «признанному семейному чемпиону по решению задач-головоломок, шахматам и бриджу» однажды удалось справиться с задачей за 28 ходов, но она не удосужилась их записать. Канадский журнал для фокусников «Ibidem» (ныне прекративший свое существование) опубликовал в августе 1969 г. «доказательство», что минимальное число ходов равно 29. В 1971 г. Левеншпиль, пытаясь восстановить 28-ходовое решение своей матери, неожиданно наткнулся на изящное решение, состоявшее всего лишь из 27 ходов! Харри О. Дэвис из Портленда (штат Орегон) считает, что располагает доказательством минимальности 27 ходов, но его заявление пока не получило подтверждения.

Удастся ли вам, читатель, найти решение из 27 ходов? Иногда комплект для игры в китайские шахматы продают с доской бóльших размеров, вмещающей в каждом загоне по 25 шариков. Лучшее из решений для такой доски, хранящихся в моей картотеке, содержит 35 ходов и прислано в 1974 г. Минвэн Ду с Тайваня.

Британский «аналог» Сэма Лойда Генри Эрнест Дьюдени опубликовал в номере лондонской газеты «Tribune» за 7 ноября 1906 г. задачу о расстановке на шахматной доске 16 пешек, из которых никакие 3 не располагаются на одной прямой ни в каком направлении. (Эта задача впоследствии вошла в книгу Дьюдени [5, 1] (задача № 17).) Под «прямой» здесь понимается *любая* прямая, а не только вертикаль, горизонталь и диагональ. Пешки условно представлены точками в центрах клеток. С тех пор как стало известно, обобщенной задаче о расстановке точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, было посвящено несколько статей в специальных математических журналах.

Основная задача, до сих пор так и не решенная, состоит в ответе на следующий вопрос: всегда ли можно расставить $2n$ фишек на квадратной шахматной доске $n \times n$ ($n > 1$) так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой?

Старинный принцип[1] «два попугая в одной клетке» показывает, что число фишек $2n$ не может быть превзойдено ни на одной горизонтали и ни на одной вертикали не может находиться более двух фишек, а так как при размещении $2n$ фишек на каждой горизонтали и на каждой вертикали окажется по две фишки, добавление еще одной фишки заведомо приведет к тому, что на какой-то горизонтали и какой-то вертикали окажется три фишки. Менее тривиальное рассуждение (предложенное Р. Р. Холлом, Т. Х. Джексоном, А. Садбери и К. Уайлд в их работе 1975 г.) показывает, что всегда можно расставить по крайней мере n фишек. Эти же авторы показали, что для досок бóльших размеров можно приблизиться вплотную к оценке $3n/2$ фишек.

Майкл А. Адена, Дерек А. Холтон и Патрик А. Келли в работе 1974 г. [5, 5] опубликовали компьютерные программы, позволившие найти все различные решения при n от 2 до 10. Решения, отличающиеся поворотами или зеркальными отражениями досок, различными не являются. Число решений соответственно равно 1, 1, 4, 5, 11, 22, 57, 51 и 156. На рис. 36 показано по одному примеру для каждого значения n от 2 до 10. Обратите внимание на поразительную простоту и симметрию решения при $n = 8$.

В 1974 г., когда создавалась работа [5, 5], решение задачи при $n = 11$ не было известно. Авторы привели решение при $n = 12$, но оно оказалось неверным: авторы не заметили две прямые, содержавшие по три фишки.

Решения при $n = 11$ и $n = 12$ были найдены в 1975 г. Д. Крэггсом и Р. Хьюзом-Джонсом из Кентского университета и были опубликованы в 1976 г. Они представлены на рис. 37. Крэггс и Хьюз-Джонс нашли еще 5 других решений при $n = 11$ и 3 других при $n = 12$. Общее число решений при этих двух значениях n неизвестно, и никому пока не удалось построить решение для квадрата со стороной больше 12. Ричард К. Гай и Патрик А. Келли в работе [5, 4] 1968 г. привели аргументы в пользу своей гипотезы, согласно

[1] Мартин Гарднер имеет в виду шутливую формулировку принципа Дирихле, утверждающую, что если попугаев больше, чем клеток, то по крайней мере в одной клетке окажется не менее двух попугаев. *Прим. перев.*

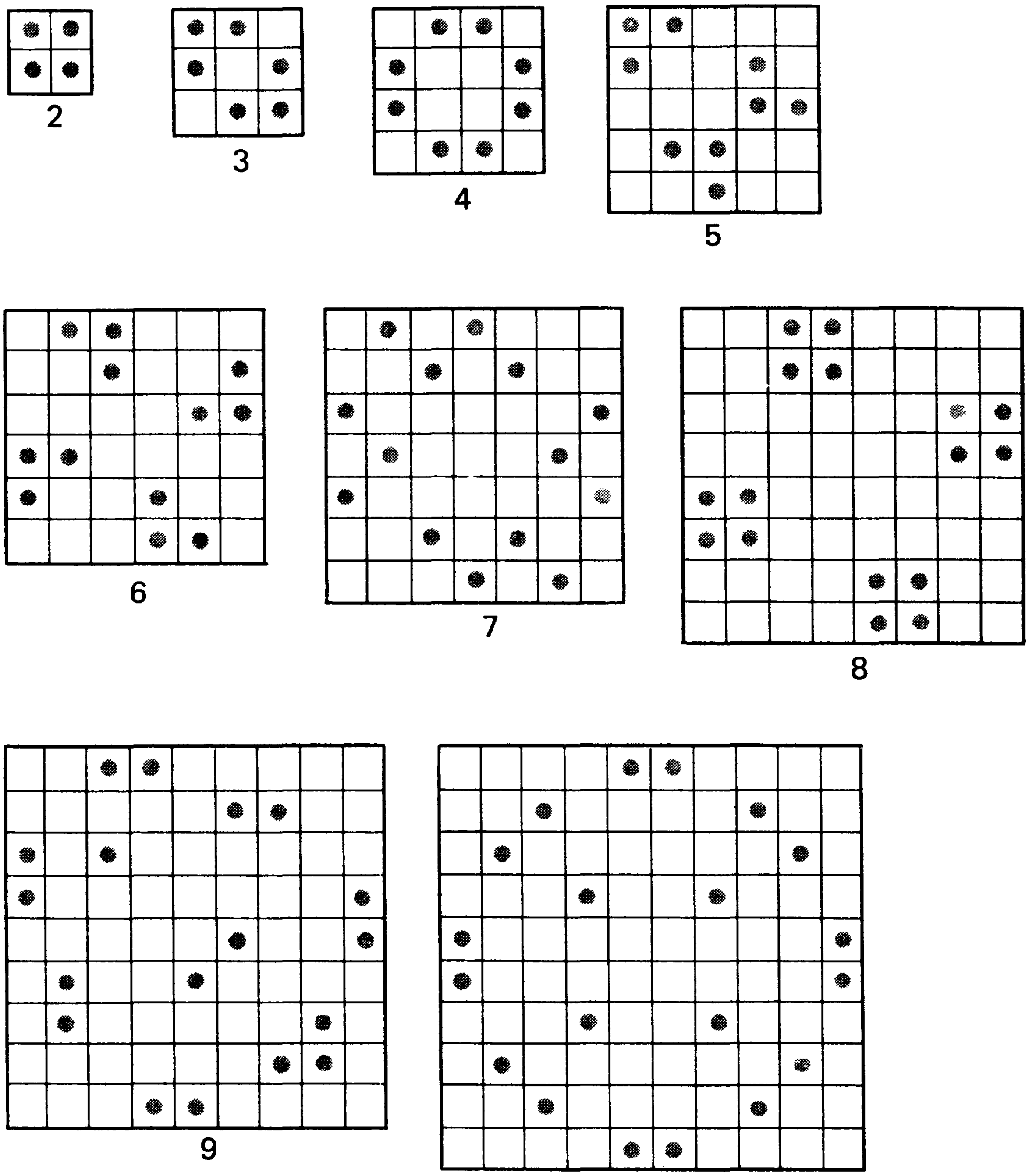


Рис. 36

Некоторые решения задачи о расстановке максимального числа шашек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

которой число порядков квадратных досок, допускающих $2n$ решений, конечно. Не известны размеры наименьшей доски, на которой $2n$ решений не существуют.

Задача становится разрешимой, если сузить определение «прямой» и понимать под таковой только вертикали, горизонтали или диагонали. Максимальное число решений не может быть больше, чем $2n$, и $2n$ решений возможны на всех досках порядка больше единицы. При $n > 3$ задача решается с помощью суперпозиции любых двух решений классической задачи о расстановке не атакующих друг друга

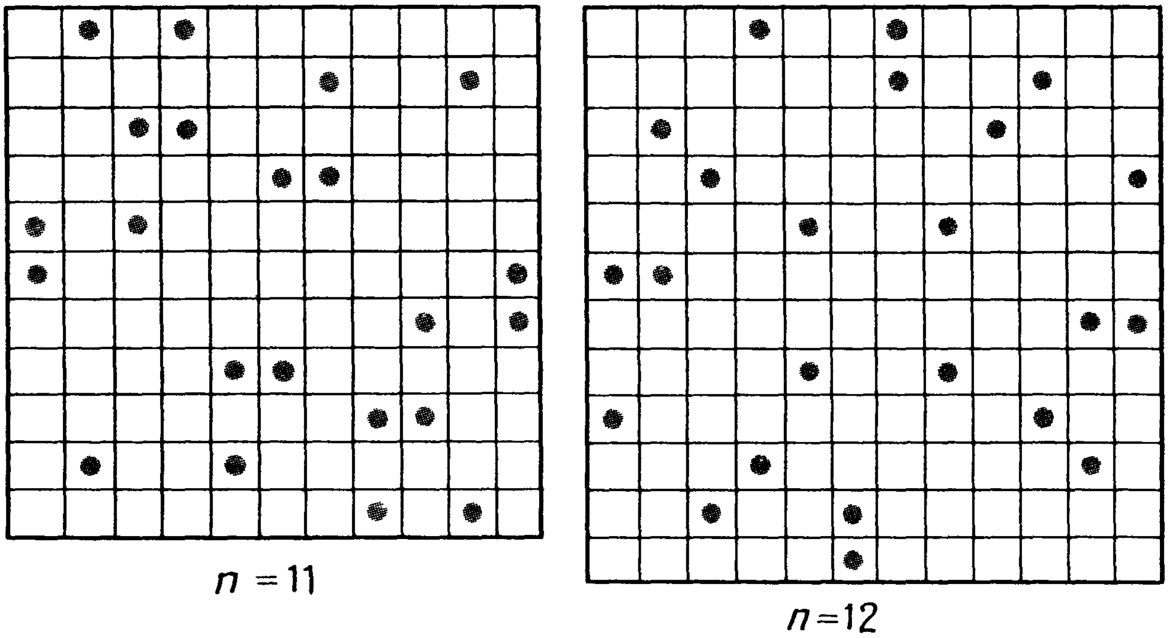


Рис. 37

Полученные недавно решения задачи о расстановке максимального числа шашек.

ферзей (на доске $n \times n$ требуется расставить n ферзей так, чтобы ни один из них не был под боем другого).

Вместо задачи о максимальном числе фишек, которые могут быть расставлены на доске $n \times n$ так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой, можно поинтересоваться минимальным числом фишек, которые можно расставить на доске так, чтобы при добавлении еще одной фишки на любую свободную клетку какие-то три фишки оказались на одной прямой. Эта увлекательная задача пока еще не привлекла должного внимания со стороны специалистов.

Если «прямую» понимать в самом широком смысле слова – как прямую любой ориентации, то задача становится трудной. На рис. 38 показаны минимальные решения при n от 3 до 10. Последовательность состоит из 4, 4, 6, 6, 8, 8, 8, 10 фишек. Последние три решения были получены статистиком из Великобритании Стифеном Эйнли и приведены в его книге [5, 3*]. Конфигурация для порядка 10 достаточна и для порядка 11. Эйнли нашел также решения с 12 фишками для порядков 12, 13 и 14.

Остается нерешенной задача и в том случае, если «прямая» понимается в ограниченном смысле – только как вертикали, горизонтали и диагонали. Иначе говоря, чему равно наименьшее число пешек, которые можно расставить

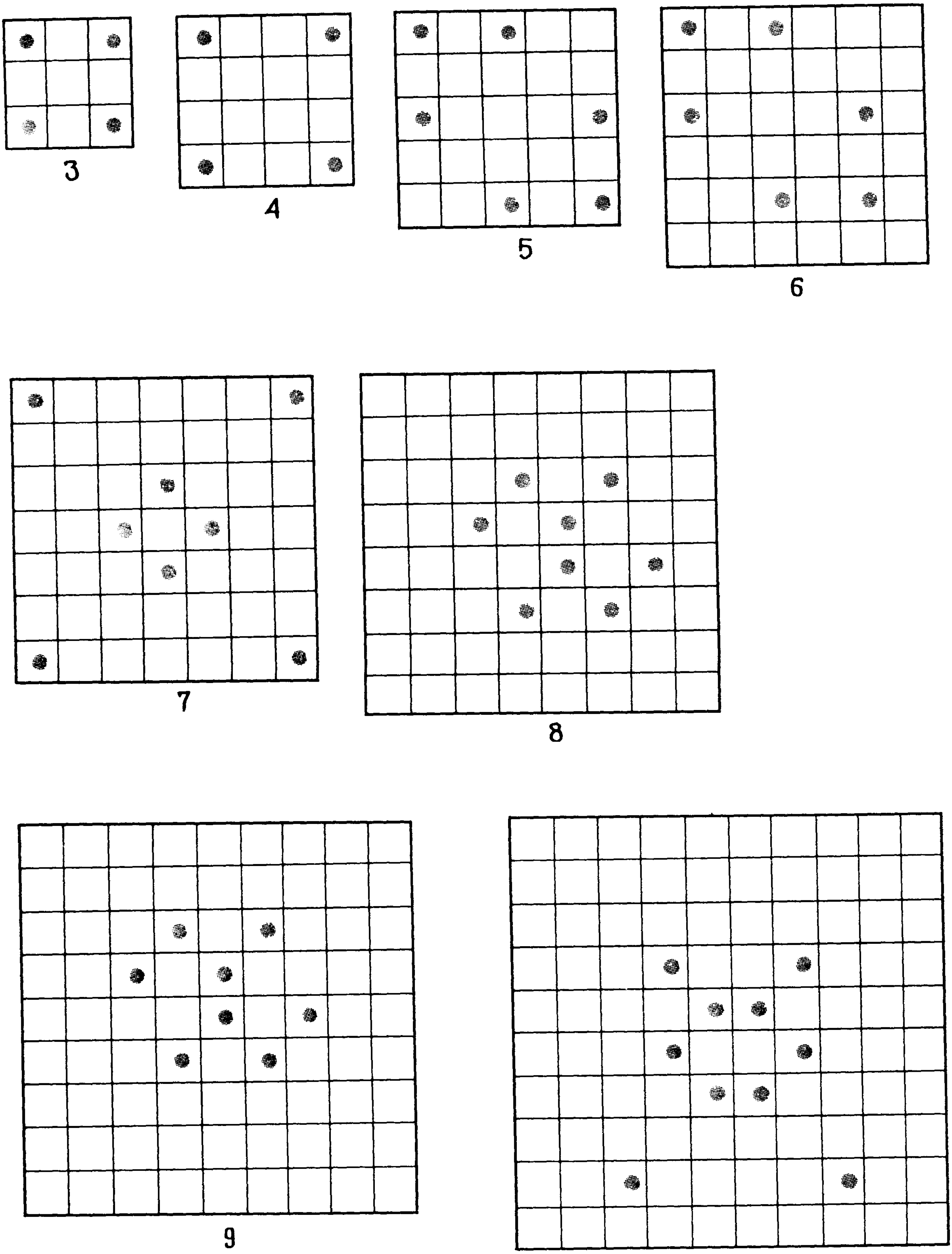


Рис. 38

Решения задачи о расстановке минимального числа шашек («прямая» понимается в широком смысле).

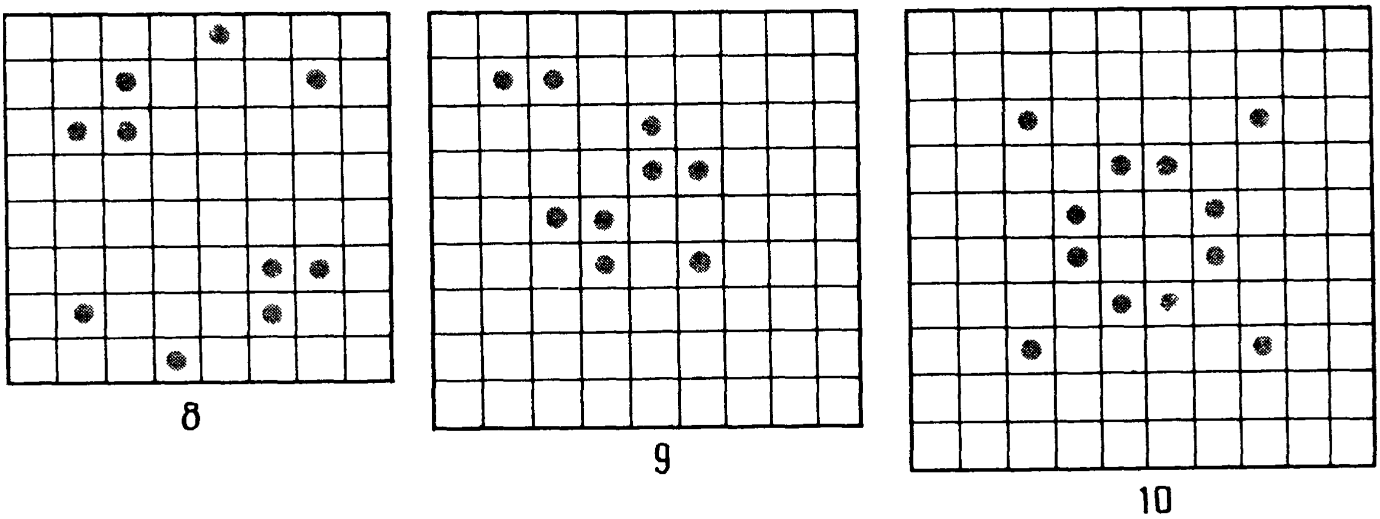


Рис. 39

Решения задачи о расстановке минимального числа шашек («прямая» понимается в узком смысле).

на доске со стороной в n клеток так, чтобы при добавлении еще одной пешки на любую свободную клетку на какой-то вертикали, горизонтали или диагонали оказались три пешки? К задаче можно подойти и с другой стороны, рассматривая ее как игру, в которой два игрока поочередно выставляют по одной пешке на квадратную доску до тех пор, пока кто-то из игроков не оказывается вынужденным поставить третью фишку на какую-то горизонталь, вертикаль или диагональ. Сколько ходов может быть в самой короткой партии при такой игре? Задача, в которой требовалось найти решение для доски порядка 8, была опубликована (в июне 1967 г.) в журнале «Technology Review» (в разделе «Уголок головоломок», который с таким блеском ведет Аллан Дж. Готтлиб).

Решения, представленные на рис. 38 для порядков от 3 до 7, являются также решениями минимальной задачи, когда «прямая» определяется в узком смысле. Минимальные решения для порядков 8, 9 и 10 представлены на рис. 39. На последней конфигурации показаны также решения для порядков 11 и 12. Они далеко не единственны. При $n = 8$ существуют десятки решений, многие из которых обладают осью симметрии, а остальные центром симметрии второго порядка. В случае минимального решения при $n = 10$ симметрия с центром четвертого порядка отпадает, так как 10 не делится нацело на 4.

Ответы и решения

Решение Сэма Лойда задачи «Возвращение из Клондайка» становится единственным, если «камень преткновения» пометить не числом 2, а числом 1. Нетрудно показать, что при любом другом, отличном от нуля однозначном числе в этой клетке возникает альтернативный маршрут побега. Цифры 4, 5, 6, 8 и 9 приводят к побегу прямо от «камня преткновения», цифра 3 – к побегу после двух шагов на юго-запад и цифра 7 – к побегу после двух шагов на запад.

Десять шариков при игре в китайские шашки можно перевести в противоположный угол («загон») за 27 ходов следующим образом:

1. 115–106
2. 120–115–93
3. 116–105–82
4. 82–72
5. 118–105–82–63
6. 121–116–105–82
7. 114–94–71–73–53
8. 53–42
9. 112–114–94–71–73–53–30
10. 119–114–94–71–73–53
11. 106–81–83–62–43–41–18
12. 18–9
13. 113–114
14. 117–106–81–83–62–43–41–18–5
15. 9–8
16. 114–106
17. 106–81–83–62–43–41–18
18. 72–54–52–31–9–2
19. 93–72–54–52–31–9–7
20. 82–72
21. 72–54–52–31–9
22. 42–17–6–4–1
23. 63–42–17–6
24. 53–42
25. 42–17–4
26. 30–10–3
27. 18–10.

Это решение – палиндром: его вторая половина зеркально симметрична первой половине.

Дополнение

Многие читатели отметили в своих письмах, что предложенное Сэмом Лойдом решение его задачи «Возвращение из Клондайка» имеет альтернативный последний ход такой же длины: «дерзкий побег» на северо-запад также ведет на свободу. Харольд Ф. Беннетт напомнил мне, что еще в 1966 г. он сообщил о найденном им остроумном методе, позволяющем «вручную» находить десятки альтернативных решений. Я действительно подшил его письмо в папку с корреспонденцией и забыл о нем. Максим Дж. Смит также прислал мне превосходный метод построения альтернативных маршрутов без помощи компьютера.

Все альтернативные маршруты в конце концов достигают клетки с цифрой 4, в которую можно попасть из центра за один ход. Следовательно, найденное Лойдом решение самое короткое. Возможно, Лойд именно это имел в виду, когда утверждал, что его решение единственное.

Уилл Шортц, старший редактор журнала „Games", указал место первой публикации задачи «Возвращение из Клондайка» в номере «New York Journal and Advertizer» от 24 апреля 1898 г., где задача занимает целую страницу. В двух клетках стоят другие цифры, а не те, которые приведены в «Энциклопедии» Сэма Лойда. В седьмом ряду десятая цифра слева двойка, в девятом ряду шестая цифра восьмерка. Журнал предложил премию в десять долларов «за лучшее решение», найденное в течение двух недель». «Лучшее» означает в данном случае самое короткое. В ответе, опубликованном 15 мая 1898 г., Сэм Лойд сообщал, что редакцией журнала было получено 10 000 писем, но «лишь немногим из проницательных открывателей новых маршрутов удалось найти наилучшее решение, состоящее из 17 шагов».

К сожалению, Лойд упустил из виду последствия, к которым приводит цифра 8 в упоминавшейся выше клетке. Некий «мистер Колер» из Плейнфилда (штат Нью-Джерси) получил премию, предложив решение из 5 ходов: 3 шага на юг, 1 шаг на северо-запад, 4 шага на северо-запад, 1 шаг на восток

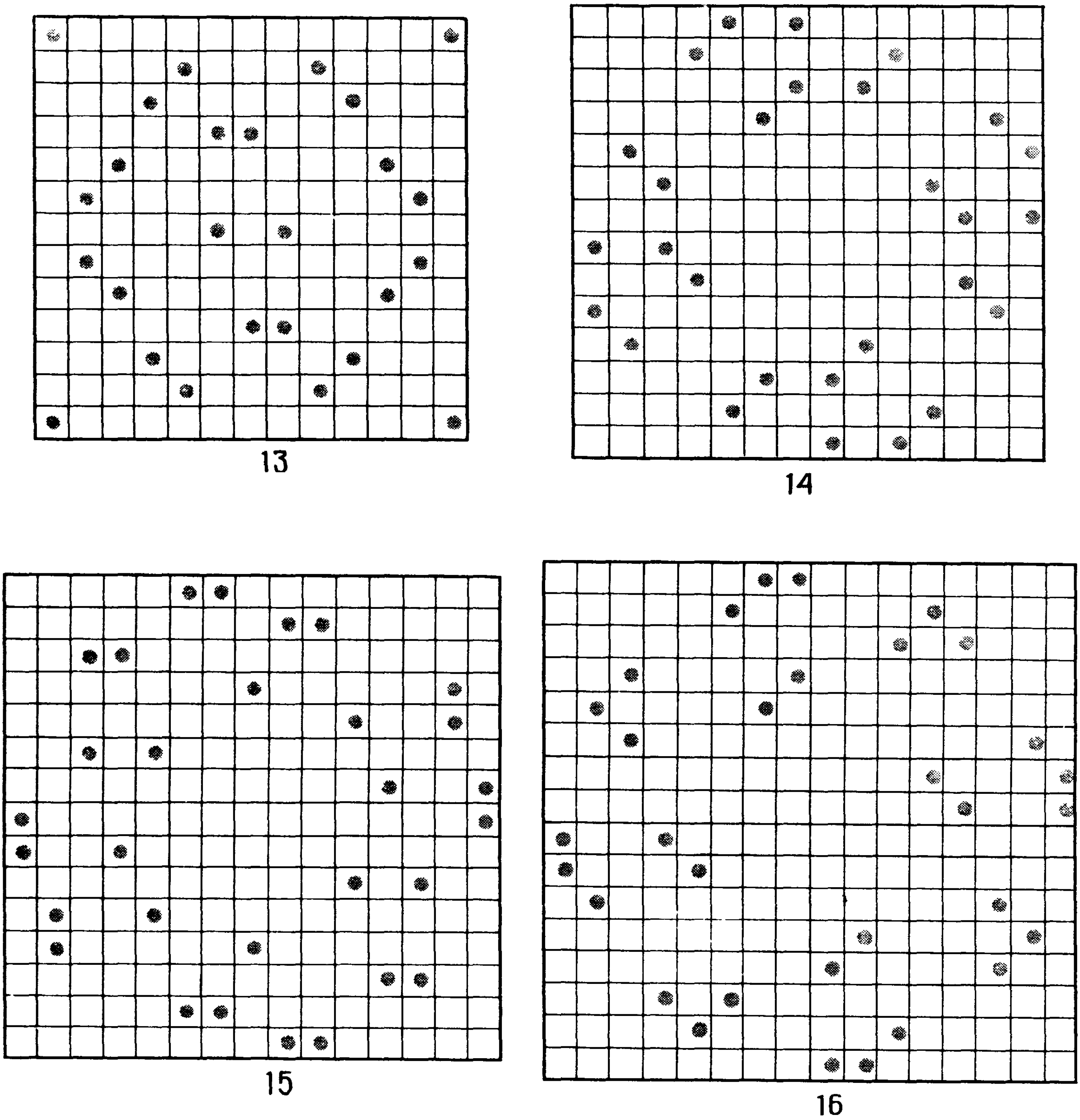


Рис. 40

Новые решения задачи о расстановке максимального числа шашек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

и 8 шагов на север. Чтобы исключить это решение, Лойд впоследствии заменил 8 на 1. Я не знаю, почему в другую клетку он вписал 3 вместо 2. Возможно, цифра 2 приводила к еще одному нежелательному решению.

Вирджиния Ф. Уолтерс, Октав Левеншпиль и миссис М. Рейнольдс понизили рекорд по переводу шести шариков на доске 4-го порядка для игры в китайские шашки с 18 ходов до 17. Разумеется, при игре на досках меньших размеров запрещается пользоваться лунками, лежащими за пределами доски (которые были бы использованы при игре на доске стандартных размеров).

Задача о размещении фишек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, вызвала поток писем. Многие читатели неправильно поняли условия задачи, не обратив внимания на замечание о том, что под прямой надлежит понимать не только горизонтали, вертикали или диагонали. Впрочем, тем из читателей, кто правильно понял условия задачи, также не удалось достичь особых результатов.

Ричард Байфилд, Ричард Джекобсон, Энн Де Лампер и Роберт Ван Клампитт независимо друг от друга нашли решение для доски 13 × 13. Майкл Мейеррут составил неисчерпывающую компьютерную программу, позволившую найти 29 решений для доски 13 × 13 и одно решение для доски 15 × 15. Впоследствии он нашел одно решение для доски 14 × 14 и четыре решения для доски 16 × 16. Эрик Жамен обнаружил вручную четыре решения для доски 14 × 14 и одно решение для доски 16 × 16. На рис. 40 показаны образцы конфигураций для досок порядка 13, 14 и 16 и единственная известная конфигурация для порядка 15.

В настоящее время известны решения для порядков до 26 (включительно). Обсуждение проблемы с некоторыми интересными гипотезами и библиографией см. в книге Ричарда Гая «Нерешенные проблемы в теории чисел» [5, 11] (проблема F4).

Относительно задачи о расстановке минимального числа фишек на шахматной доске с таким расчетом, чтобы никакие

«Я заметил, что среди облаков нет трех одинаковых».

три фишки не были расположены на одной «прямой», понимаемой в широком смысле. Пусть n – порядок квадратной доски, p – минимальное число фишек. Джону Харрису удалось показать, что число p меньше числа n за исключением того случая, когда $n \equiv 3 \pmod 4$ (тогда p может быть равно $n - 1$). Может ли число p быть нечетным? Насколько я знаю, ответ на этот вопрос пока не известен.

Глава 6
Улипо

Rhodes roams leads to all?
Roads lead all to Rome,
Lead all Rhodes to Rome.
Rome-roads lead to all?
All roam roads to Leeds!
Rome rode all to Leeds.

«Поминки по Финнегану» Джеймса Джойса поныне остаются наиболее выдающимся примером того, что серьезные литературные замыслы вполне успешно могут сочетаться с блистательной и дерзкой игрой слов. Другими примерами могут служить эксцентрический типографский набор «э э каммингса», стихи-нонсенс Гертруды Стайн и непрерывная игра слов в произведениях Владимира Набокова.

Наиболее изощренные и вместе с тем занимательные примеры литературной игры со словом, появившиеся за последние 15 лет, принадлежат причудливой, быть может, даже слегка «сумасшедшей» французской группе, которая называет себя Улипо. Название это происходит от французских слов „Ouvroir de Littérature Potentielle“ (Мастерская потенциальной литературы). Хотя в этой главе речь пойдет о группе Улипо, я все же буду довольно часто обращаться к аналогичным работам англоязычных авторов.

Большинство из приводимых ниже примеров заимствовано из трех источников: (1) издания «Потенциальная литература» (креации рекреационных ре-креаций) [7, 5]; (2) замечательной статьи о группе Улипо [7, 8], написанной ее единственным американским участником Гарри Мэтьюзом и опубликованной в журнале занимательной лингвистики „Word Ways“ («Жизнь слов»), редактируемом и издаваемом А. Россом Экклером; (3) моей переписки с Мэтьюзом, который часть времени живет и работает в Париже.

Группа Улипо была основана в 1960 г. двумя блестящими французами: Франсуа Лелионне и ныне покойным Раймоном Кено. Лелионне по профессии математик, автор многих книг, в том числе шести книг по шахматам. Кено, скончавшийся в 1976 г. в возрасте 73 лет, был одним из наиболее авторитетных французских писателей. Наибольшую известность ему принес опубликованный в 1956 г. роман «Зази в метро» о похождениях 14-летней парижской нимфетки. (Впоследствии Луи Малль снял по этому роману известный фильм.) Сюжет другой известной книги Кено «Упражнения по стилистике» незамысловат: человека, едущего в переполненном автобусе, толкают, и он замечает своему приятелю, что было бы неплохо пришить к пальто еще одну пуговицу, но это событие автор умудряется изложить 99 различными способами, в том числе и на «кухонной» латыни. В юности Кено изучал математику. Интерес к ней он сохранил на всю жизнь, что отчетливо ощущается в его романах, поэзии и критике. Хороший обзор творчества Кено дал другой писатель, также немного знакомый с математикой и склонный к игре со словом,– Джон Апдайк [7, 1*].

В число французских участников группы Улипо входят Ноэль Арно, Марсель Бенабу, Клод Берж, Поль Браффор, Жак Дюшато, Люк Этьенн, Поль Фурнель, Жан Лескюр, Мишель Метай (единственная женщина среди участников группы), Жорж Перек, Жан Кеваль и Жак Рубо. Иностранными членами группы являются Андре Блавье (Бельгия), Итало Кальвино (Италия) и Мэтьюз (США). Все участники группы – математики или писатели (либо математики и писатели в одном лице).

Мэтьюз родился в Нью-Йорке в 1930 г. В 1952 г. он окончил Гарвардский колледж со степенью бакалавра искусств по музыке и с тех пор живет в Европе. Помимо поэтических сборников перу Метьюза принадлежат три весьма необычных и интересных прозаических произведения: «Беседы» [7, 2*], «Тлус» [7, 3*] и «Оседание стадиона Одрадека и другие истории» [7, 4*]. «Другие истории» представляют собой перепечатку двух более ранних произведений. Все три книги блистают игрой слов в духе Улипо, в особенности четырехстраничная сцена в «Тлусе», в которой порнография затемняется все более сложными перестановками букв в словах.

«Тлус» – произведение весьма красочное, исполненное грустного, порой непристойного, черного юмора. Нефтис Мэри Аллант – «кэтчер» [1] баптистской бейсбольной команды в Джексонграде – исправительно-трудовом лагере в Сибири. Мы не знаем ни имени героя, ни даже кто он – мужчина или женщина, и остаемся в неведении на протяжении всего повествования. Лишь за 10 страниц до конца книги все выясняется. (С аналогичной ситуацией мы сталкиваемся и в «Беседах» Мэтьюза, где читатель лишь в самом конце произведения узнает, что повествование ведется от лица мулата.) Мэри была скрипачкой, пока ее бывшая подруга, хирург Эвелин Роук, без всякой на то надобности не ампутировала ей два пальца на левой руке. Доктор Роук также находится среди заключенных в Джексонграде. Свой срок она получила за то, что продавала ампутированные у пациентов части тела в качестве деликатесов. Роук играет за другую бейсбольную команду, оспаривающую у команды Мэри первенство лагеря. Мэри учится на зубного врача, но инфекция, поразившая обрубки ампутированных пальцев, вынуждает ее оставить избранную профессию.

По окончании срока Эвелин выходит из лагеря на свободу, а через некоторое время Мэри удается бежать из заключения. После долгих странствий по странам Азии и Европы в поисках Эвелин Роук Мэри (к тому времени успевшая вылечить обрубки пальцев средствами народной медицины) открывает зубоврачебную клинику близ Лиона. К ней на прием неожиданно заявляется Эвелин. К очаровательному браслету Эвелин в качестве брелоков подвешены фаланги некогда ампутированных у Мэри пальцев. При виде своего заклятого врага Мэри решает было прикончить Эвелин в зубоврачебном кресле, но, взглянув на ее десны, обнаруживает, что та смертельно больна оспой. Мэри прописывает Эвелин лекарство и отпускает ту на все четыре стороны, предоставляя ей «следовать своим звездам».

Название книги – загадочное слово. Его прошептал оракул – теплая грязь волшебной трясины – после того, как Мэри, следуя ритуалу, погрузила в нее при свете вечерних звезд на 68 секунд ногу до самого бедра, а затем быстро

---

[1] Игрок, ловящий мяч за чертой или за «лагерем» при игре в бейсбол.– *Прим. перев.*

выдернула назад. В слове «тлус» слышны созвучия со словами „Tooth“ (зуб), „Truth“ (истина) и с именем художника Тулуз-Лотрека. По словам одного критика, читать эту книгу Мэтьюза – все равно, что «продираться на автомашине по словарю, в котором все слова напечатаны наискось».

Сейчас Мэтьюз работает над своей четвертой книгой, в основу которой положена процедура, известная среди членов группы Улипо под названием *алгоритма Мэтьюза*. Состоит она в следующем. Элементы текста подвергаются циклическим перестановкам двумя способами и располагаются в виде двух матриц, которые затем считываются по столбцам. При этом элементы одной матрицы считываются сверху вниз, а элементы другой – снизу вверх. Элементами текста могут быть буквы, слова, предложения, главы – что угодно. К сожалению, мне не известны хорошие примеры такого рода текстов на английском языке.

Первая публикация Мэтьюза в журнале „Word Ways“ содержала список слов, которые пишутся одинаково по-французски и по-английски, но имеют различное значение. Мэтьюз составил краткий словарь „L'Égal Franglais“ («Равнофранглийского языка»), чтобы помочь другим участникам группы Улипо сочинять амбивалентные англо-французские тексты. Для тех из наших читателей, кто захотел бы испробовать свои силы в составлении фраз, имеющих один смысл, если считать их написанными по-английски, и другой, если считать их написанными по-французски, мы приводим словарь Мэтьюза полностью (разумеется, этот словарь нельзя считать исчерпывающим (рис. 41)).

Первым манифестом, выпущенным группой Улипо, стала книжечка Кено «Сто тысяч миллиардов сонетов», опубликованная издательством Галлимар, в котором Кено работал старшим редактором.

Книжечка состояла из 10 основных сонетов, напечатанных на правой стороне разворота, которая была разрезана на 14 полос (по одной полосе на каждую строку сонета). Перебрасывая полосы направо и налево, читатели могли получить 10^{14} (100 000 миллиардов) сонетов, безупречных по стихотворной форме и вполне осмысленных. (В детских книжках тот же прием использован для получения различных комбинаций рисунков с изображением людей и животных. Иногда на такие полосы попадают отдельные слоги напе-

a
ache
ail
allege
amends
an
ante
appoint
are
as
at one
attend
audit
averse
axe

Bade
bail
ballot
barber
bard
baste
bat
be
beat
bee
Ben
bide
bled
blinder
bond
bore
borne
bout
bribes
bride
but
butter

can
cane
canner
cap
car
carrier
carter
case
cause
caution
chair
champ
chat
choir
chose
coin
collier
comment
con
confection
corner
cote
courtier
crane
crisper
cure

dam
D' ane
d' are
d' art
defiance
defile
dent
derive
design
d' etain
dime
dire
dive
don
don' t
dot
dresser
drill
d' un
d' une

edit
emu
engraver
enter
entrain
ere
fade
fat
fee
fend
fin
fit
fond
font
for
forage
fore
fort
four
fur

gale
gate
gave
gaze
gene
gent
gourd
gout
grief
grime
groin
guise

hair
hale
harder
hate
have
here
hurler

if

jars

labour
lad
laid
l' air
lame
l' ane
layer
lecher
lecture
l' egal
legs
Lent
lice
lie
l' imitation
l' ion
lit
l' izard
location
loin
longer
l' oser
love

ma
mail
main
mange
manger
mare
mariner
men
mien
mince
mire
miser
moult
mute

n' est
net
Nil
noise
n' ose
n' ote

oil
on
once
or
ours

pain
pair
pal
palace
pan
pane
par
pare
pat
pate
pays
pester
pet
Peter
pie
pied
pin
pincer
pine
plains
plate
plier
plies
plôt
pour
pries
prone

rang
range
ranger
rape
rate
rave
rayon
rebut
reel
regain
regal
rein
relent
rend
report
ride
ripe
river
robin
rogue
Roman
rot
rude

sale
sang
saucer
scare
signet
singe
son
sort
sot
spire
stage
stance
store
sue
suit
super
supplier

tale
tape
tenant
the
these
tiers
tin
tine
tint
tire
ton
toper
tort
tot
tout
tries

van
vent
venue
verge
verse
vie
viol

Рис. 41

Краткий словарь «франглийского языка», составленный Гарри Мэтьюзом.

чатанных по вертикали названий, и тогда при перебрасывании полос возникают названия таких причудливых животных, как слонопотам и кенгураф.) Перебрасывая полоски в книжечке Кено, вы сможете прочитать сонет, который (вполне вероятно) не приходилось читать никому до вас и не придется читать никому после вас.

Липограмма, одна из стариннейших разновидностей словесных игр, представляет собой предложение или более длинный текст, в котором *не встречается* одна или несколько букв алфавита. В английской литературе самым выдающимся примером липограммы по праву считается роман Эрнеста Винсента Райта «Гэдсби», опубликованный в 1939 г. в Лос-Анджелесе: в нем нет ни одной буквы «е», а ведь эта буква в английском и французском языках встречается чаще всех остальных.

Высшим достижением в экспериментах с липограммами группы Улипо признан роман Жоржа Перека «Исчезновение», опубликованный в 1969 г. издательством «Деноэль, Новая литература». В нем также нет ни одной буквы «е». Роман Перека превосходит «Гэдсби» по объему и отличается более высокими литературными достоинствами. Мэтьюз охарактеризовал роман Перека как «тщательно отделанную увлекательную историю, написанную с непостижимой виртуозностью». Роман действительно написан с таким мастерством и совершенством, что некоторые критики, превознося его достоинства, не заметили в тексте ничего необычного! Перек намеревался написать вслед за «Исчезновением» еще один роман, в котором «е» будет *единственной* гласной.

В настоящее время Перек работает над романом «Жизнь: как ею пользоваться», в основу которого среди прочего положен греко-латинский квадрат 10-го порядка. Великий Леонард Эйлер высказал предположение о том, что такого квадрата не существует, но греко-латинский квадрат 10-го порядка был обнаружен в 1959 г. (этот квадрат изображен на многоцветной обложке октябрьского номера журнала „Scientific American“ за 1969 г.). Хотя Перек весьма плодовитый французский автор, в США была издана лишь одна его книга («Вещи: история 60-х годов»).

Переку принадлежит также и самый длинный палиндром, когда-либо созданный участниками группы Улипо. В нем

In Eden, I

ADAM: Madam –
EVE: Oh, who –
ADAM: (No, girl-rig on!)
EVE: Heh?
ADAM: Madam, I'm Adam.
EVE: Name of a foeman?
ADAM: O stone me! Not so.
EVE: Mad! A maid I am, Adam.
ADAM: Pure, eh? Called Ella? Cheer up.
EVE: Eve, not Ella. Brat-star ballet on? Eve.
ADAM: Eve?
EVE: Eve, maiden name. Both sad in Eden? I dash to be manned, I am Eve.
ADAM: Eve. Drowsy baby's word. Eve.
EVE: Mad! A gift. I fit fig, Adam...
ADAM: On, hostess? Ugh! Gussets? Oh, no!
EVE: ???
ADAM: Sleepy baby peels.
EVE: Wolf! Low!
ADAM: Wolf? Fun, so snuff "low".
EVE: Yes, low! Yes, nil on,no linsey-wolsey!
ADAM: Madam, I am Adam
Named under a ban.
A bared, nude man-
Aha!
EVE: Mad Adam!
ADAM: Mmmmmmmm!
EVE: Mmmmmmmm!
ADAM: Even in Eden I win Eden in Eve.
EVE: Pure woman in Eden, I win Eden in – a mower-up!
ADAM: Mmmmmmmm!
EVE: Adam, I' am Ada!
ADAM: Miss, I' m Cain, a monomaniac. Miss, I' m –
EVE: No, son.

Рис. 42

Палиндромный диалог Дж. А. Линдона.

говорится о палиндромах, и во французском оригинале он состоит более чем из 5000 букв и начинается и заканчивается так:

> Trace l'inégal palindrome. Neige. Bagatelle, dira Hercule. Le brut repentir, cet éctrit né Perec. L'arc lu pèse trop, lis à vice-versa... Désire ce trépas rêvé: Ci va! S'il porte, Sépulcral, ce repentir, cet écrit ne perturbe le lucre: Haridelle, ta gabegie ne mord ni la plage ni l'écart.

ADAM: Name's Abel, a male base man.
EVE: Name not so, O Stone man!
ADAM: Mad as it is it is Adam.
EVE: I'm a Madam Adam, am I?
ADAM: Eve?
EVE: Eve mine. Denied, a jade in Eden, I'm Eve.
ADAM: No fig. (Nor wrong if on!)
EVE: ???
ADAM: A daffodil I doff, Ada.
EVE: Tis a – what – ah, was it –
ADAM: Sun ever! A bare Venus...
EVE: 'S pity! So red, ungirt, rig-nude, rosy tips...
ADAM: Eve is a sieve!
EVE: Tut-tut!
ADAM: Now a see-saw on...
EVE: On me? (O poem!) No!
ADAM: Aha!
EVE: I won't! O not now, I –
ADAM: Aha!
EVE: NO! O God, I – (Fit if I do?) *Go on.*
ADAM: Hrrrrrh!
EVE: Wow! Ow!
ADAM: Sores? (Alas, Eros!)
EVE: No, none. My hero! More hymen, on, on...
ADAM: Hrrrrrrrrrrrrrrrrh!
EVE: Revolting is error. Resign it, lover.
ADAM: No, not now I won't. On, on...
EVE: Rise, sir.
ADAM: Dewy dale, cinema-game... Nice lady wed?
EVE: Marry an Ayr ram!
ADAM: Rail on, O liar!
EVE: Live devil!
ADAM: Diamond-eyed no-maid!
BOCH: Mmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmm!

В переводе Мэтьюза [1)] этот отрывок звучит следующим образом: «Прочтите этот палиндром, не имеющий себе равных. Снег. Пустяки,– сказал бы Эркюль.– Грубое покаяние – это написал урожденный Перек. Читать дугу слишком трудно, прочтите ее наоборот... Стоит лишь возмечтать о такой пригрезившейся кончине, и вот она наступает! Если

[1)] Точнее, в переводе с перевода Мэтьюза.– *Прим. перев.*

он несет это покаяние скрыто, то написанное не сулит прибыли: старая ведьма, твое предательство не причинит вреда ни берегу, ни пространству вдали от него».

Наиболее искусным из англоязычных составителей палиндромов (а также, по моему мнению, лучшим из пишущих на английском языке сочинителей комических стихов) считается Дж. А. Линдон. Многие из его поэм-палиндромов опубликованы в журнале „Word Ways“; другие вошли в книгу Ховарда У. Бергерсона «Палиндромы и анаграммы» [7, 6]. Лучший из палиндромов Линдона – сцена совращения Евы Адамом – приведен на рис. 42 [1]. Каждая строка и заголовок – законченный палиндром.

Знаменитый алгоритм, широко используемый участниками группы Улипо и получивший название «С + 7» («существительное + 7»), был изобретен Лескюром. Алгоритм состоит в замене каждого существительного в отрывке из какого-нибудь известного литературного произведения (в прозе) седьмым по счету после него существительным в каком-нибудь выбранном заранее словаре. Алгоритм «С + 7» является частным случаем более общего алгоритма «Сл $\pm$ *n*», где Сл – любая часть речи (любое слово), а *n* – произвольное положительное целое число. Вот, например, как выглядят первые две фразы из «Моби Дика» Германа Мелвилла после применения к ним алгоритма «С + 7» на основе «Словаря русского языка» С. И. Ожегова [2]:

> «Зовите меня изморозью. Несколько голеней тому назад – когда именно неважно – я обнаружил, что в кошмаре у меня почти не осталось депутатов, а на земстве не осталось ничего, что могло бы еще занимать меня, и тогда я решил сесть на корейку, чтобы поглядеть на мироеда и с его водного стража».

---

[1] Для того чтобы оценить мастерство Линдона, проявленное в этом шедевре, знание английского языка желательно, но не обязательно: проверить тождество каждой строки при чтении справа налево и слева направо можно, даже не зная английского.– *Прим. перев.*

[2] В оригинале Webster‘s New Collegiate Dictionary. Текст «Моби Дика» дается в переводе И. Бернштейн по изданию: Герман Мелвилл. Собрание сочинений, т. 1.– Л.: Художественная литература. Ленинградское отделение, 1987, с. 49.

Другой алгоритм Лескюра состоит в том, чтобы выстроить все однотипные части речи (например, существительные) в каком-нибудь тексте по порядку от начала и до конца, затем составить другой список, в котором те же слова идут в обратном порядке, и заменить все слова в первоначальном тексте словами, стоящими на том же месте (под тем же номером) во втором списке. Применительно к существительным из первой главы «Моби Дика» алгоритм Лескюра дает следующий результат (мы снова ограничиваемся двумя первыми фразами):

> «Зовите меня вершиной. Несколько признаков тому назад – когда именно неважно – я обнаружил, что в ките у меня почти не осталось душ, а на глубине не осталось ничего, что могло бы еще занимать меня, и тогда я решил сесть на ряд, чтобы поглядеть на цель и с ее водного образа».

В брошюре Кено «Основания литературы» читатель знакомится с несколько видоизмененными аксиомами евклидовой геометрии в том виде, в каком они изложены в «Основаниях геометрии» Давида Гильберта: слова «точки», «прямые» и «плоскости» в гильбертовском тексте у Кено заменены словами «слова», «фразы» и «абзацы». Новые, литературные, аксиомы Кено снабдил весьма глубокомысленными комментариями.

Еще один алгоритм группы Улипо состоит в замене слов их определениями из толкового словаря или менее точными определениями из кроссвордов. Полученный текст в свою очередь подвергается такому же преобразованию, и эта операция повторяется до тех пор, пока первоначальный смысл не утрачивается полностью. Особенно трудна (и интересна) следующая задача: выбрать в качестве исходных два совершенно различных по смыслу предложения и за наименьшее число шагов преобразовать их в одинаковые по смыслу предложения.

Если первую половину одной пословицы присоединить ко второй половине другой пословицы, то получится «псевдословица» – форма, используемая Мэтьюзом как в английском, так и во французском вариантах. В его книге «Избранные декларации зависимости» [7, 5*] приведены поэтические произведения и отрывки в прозе, построенные на сотнях «псевдословиц», которые Мэтьюз образовал из 46 английских пословиц. Приведем лишь некоторые примеры таких гибридов [из русских пословиц].

Ум хорошо, а счастье лучше.
Рад бы в рай, да не знает, где он.
Что посеешь, то пропало.
Стерпится – пригодится воды напиться.

Пословицы, поговорки и крылатые выражения можно изменять, подставляя омофоны – слова, звучащие одинаково, но имеющие различное значение. На такого рода подстановках основаны, в частности, все каламбуры [1]. Пословицы и поговорки можно также изменять, подвергая их усечению:

Дело мастера (о шедевре).
Слышал звон (после посещения карильонного концерта или прослушивания звонов).
Свет клином (о самофокусировке света).

Лескюр экспериментировал также с предложениями, содержащими всего четыре основных слова, перебирая все 24 перестановки. Цель такого рода эксперимента со словом состоит в том, чтобы максимизировать число осмысленных перестановок. Допускается замена слов омофонами. Перестановки типа «Неполный обзор западно-европейских миграций в выходные дни» с подзаголовками «Исход А», «Исход «В», «Возвращение А + В», «Заключение» (Все дороги ведут в Лидс), принадлежащие Мэтьюзу, приведены на рис. 43. Мэтьюз отмечает, что перечень перестановок неполон по простой причине: остальные перестановки излишни.

Строки поэтических произведений участники группы Улипо подвергают перестановкам многими, в том числе и весьма изощренными, способами. Люк Этьенн использует лист Мёбиуса, чтобы, «переплетая» строки какого-нибудь известного стихотворения, получить из него новое стихотворение. Делается это так. Напишите одну половину стихотворения на одной стороне полоски бумаги, а другую – на его оборотной стороне («вверх тормашками»). Перекрутите лист на пол-оборота и соедините концы. После этого прочтите стихотворение, которое написано на од-

---

[1] В русском языке наиболее известен, пожалуй, каламбур «Архип осип, а Осип охрип».

A Partial Survey of Western European Holiday Migrations

EXODUS A
Leed's roads roam to all?
Rome's Leeds' road to all –
All Leeds rode to Rome.

EXODUS B
All Rome leads to roads.
Rome leads all to roads,
Leads Rome all to roads·
"Roam all leads to roads!"
Roads lead Rome to all?
All leads roam to Rhodes,
Lead all Rome to Rhodes.

RETURN A + B
Rhodes roams leads to all?
Roads lead all to Rome,
Lead all Rhodes to Rome.
Rome-roads lead to all?
All roam roads to Leeds!
Rome rode all to Leeds.

SUMMARY
All roads roam to Leeds

Рис. 43

Перестановки слов в пословице (по Г. Мэтьюзу).

ной-единственной стороне листа Мёбиуса: строки половин исходного стихотворения при этом оказываются переплетенными, как пальцы сцепленных рук. Цель такого рода экспериментов состоит в том, чтобы «сочинять» стихотворения, которые имеют противоположный смысл, если читать их на двустороннем листке и на полученном из него листе «Мёбиуса» (после полуоборота).

Прием Лескюра с листом Мёбиуса можно применять и к двум стихотворениям, имеющим одинаковое число строк, но написанных различными поэтами. Стихотворение, которое при этом получается, обычно носит гротескный характер, но не всегда. На рис. 44 преобразование Мёбиуса применено мной к известным четверостишиям Эдны Сент-Винсент Милле о горящей свече[1] и начальным строкам

[1] Нисходит сон
Элинор Милле

Нисходит сон, падая с прозрачными каплями дождя
(Свеча моя горит с двух концов)
На крутые утесы города,
Свечи не хватит на всю ночь.

Нисходит сон, люди снова обретают покой,
Но, о мои враги, о мои друзья,
Когда капельки неслышно падают,
Какой мягкий свет изливает свеча.

Sleep Falls
By Elinor Millay

Sleep falls, with limpid drops of rain
(My candle burns at both ends)
upon the sleep cliffs of the town.
It will not last the night.

Sleep falls, men are at peace again.
But ah, my foes and oh, my friends,
while the small drops fall softly down,
It gives a lovely light.

My Candle
by Edna Wylie

My candle burns at both ends.
Sleep falls with limpid drops of rain
(it will not last the night)
upon the steep cliffs of the town.

Bot ah, my foes and oh, my friends,
sleep falls, men are at peace again.
It gives a lovely light
while the small drops fall softly down.

Рис. 44

Поэмы, «сплетенные» листом Мёбиуса.

прекрасного стихотворения Элинор Вайли «Колокола в дождь» [1)].

Участниками группы Улипо написано несколько рассказов и пьес, разбитых на части, в «паузах» между которыми читатели или зрители могут выбирать различные варианты переходов к последующим частям, получая различные сюжетные линии. (Такой прием не следует путать с рандомизацией различных элементов сюжета, утомительно однообразные примеры которой мы находим в «Мобиле» Мишеля Бютора или в последних романах Уильяма С. Беррафса.) К методам и целям группы Улипо близок роман «Игра в классики» аргентинского писателя Хулио Кортасара (проживающего, как и Мэтьюз, в Париже). Сто пятьдесят четыре главы этого романа можно читать двумя способами: сначала, как обычно, по порядку от первой главы до пятьдесят шестой, затем надлежит перейти к семьдесят

---

1) Моя свеча
Эдна Вайли

Моя свеча горит с двух концов.
Сон падает с прозрачными каплями дождя
(Он не будет идти всю ночь)
На крутые утесы города.

Но, о мои враги, о мои друзья,
Сон падает, люди снова обретают покой.
Какой мягкий свет изливает свеча,
Когда капельки неслышно падают.

третьей главе и «прыгать» (как при игре в классики, откуда и название книги) по всей книге, переходя каждый раз к главе, номер которой указан в конце предыдущей главы. Многие главы в романе Кортасара, следуя указаниям автора, должны быть прочитаны дважды, а одна глава – даже четыре раза.

На Всемирной выставке 1967 г. в Монреале в павильоне Чехо-Словакии демонстрировался фильм, позволявший зрителям по своему усмотрению выбирать продолжение в 5 местах (каждая «вилка» давала возможность выбрать один из двух вариантов). В действительности устроители зрелища пошли на обман зрителя, поскольку демонстрировались реально только два фильма, сюжеты которых расходились лишь для того, чтобы совпасть в следующей «вилке». По словам Теодора Х. Нельсона, описавшего «ветвящиеся кинофильмы» в «Машине снов» (половине книги из двух частей, которую он опубликовал в 1974 г. в Чикаго), киномеханик просто опускает непрозрачный затвор перед объективом того аппарата, с помощью которого демонстрируется фильм, содержащий нежелательную часть. При 5 двоичных, или бинарных, выборах без самопересечения общее число вариантов фильма достигает $2^5 = 32$. Съемка такого количества фильмов легла бы непосильным финансовым бременем на плечи кинопродюсера и означала бы дополнительную нагрузку для актеров.

«Омосинтаксизм» – один из изобретенных участниками группы Улипо терминов, означающий замену всех слов текста новыми словами с сохранением первоначальной синтаксической структуры. Нечто аналогичное делал Мортимер Дж Адлер в «Диаграмматике» – весьма интересной книжечке с прозой нонсенса, «состряпанной» Адлером и Мод П. Хатчинсон (в то время женой Роберта Майнарда Хатчинсона) в 1932 г. Автор текста Адлер, а иллюстрации принадлежат миссис Хатчинсон. Я имел удовольствие слушать лекцию (с демонстрацией слайдов), которую Хатчинсон и Адлер прочитали вдвоем о своей книге в Мандел-холле Чикагского университета. Издательство «Рэндом хаус» издало этот томик ограниченным тиражом (750 экземпляров). Один экземпляр был подарен чемпиону по борьбе Джину Танни. Подробности об этой книге и реакции на нее критиков вы можете прочитать в автобиографи Адлера «Философ в целом» [7, 6*].

Иногда в каком-нибудь отрывке из известного стихотворного текста удается переставить слова так, что получается совершенно другой стихотворный текст. Разрешается как угодно изменять пунктуацию и разбивать строки, заменять строчные буквы прописными и прописные – строчными [1]. (Результаты одного такого эксперимента, предпринятого Линдоном и мной, опубликованы под названием «Поэтический ералаш» в майском номере журнала „Word Ways“ за 1973 г.) Вот одно из таких стихотворений, созданных мной. Можете ли вы восстановить оригинал? (Фамилия поэта представляет собой анаграмму, составленную из имени и фамилии автора подлинного стихотворения.)

Росток,
Как страж,
Стоит у врат?
А чувство чистое
Здесь –
Ядовитая трава?

С. Уальдо Райк

В февральском номере журнала „Word Ways“ за 1974 г. опубликована поэма одного из постоянных авторов Мэри Янгквист, воспроизведенная на рис. 45. Что необычного в этой поэме? [2]

А что произойдет, если один поэт напишет стихотворение и передаст другому составленный в алфавитном порядке список всех слов, встречающихся в этом стихотворении, а тот, не видя самого стихотворения, напишет новое стихотворение, используя только запас слов, полученный от своего коллеги? Участники группы Улипо такого рода эксперименты не производили. Несколько результатов таких опытов были опубликованы в журнале „Word Ways“ (редактор журнала Экклер называет

---

[1] В русских текстах разрешается также изменять падежи.– *Прим. перев.*

[2] Для анализа скрытой структуры (и ответа на поставленный вопрос) знание английского языка не обязательно.– *Прим. перев.*

Winter Reigns

Shimmering, gleaming, glistening glow –
Winter reigns, splendiferous snow!
Won't this sight, this stainless scene,
Endlessly yield days supreme?

Eyeing ground, deep piled, delights
Skiers scaling garish heights.
Still like eagles soaring, glide
Eager racers; show-offs slide.

Ecstatic children, noses scarved –
Dancing gnomes, seem magic carved –
Doing graceful leaps. Snowballs,
Swishing globules, sail low walls.

Surely year-end's special lure
Eases sorrow we endure,
Every year renews shared dream,
Memories sweet, that timeless stream.

– Mary Youngquist

Рис. 45

Поэма со скрытой структурой.

такие стихотворения «клептословарными»). (См. номера журнала „Word Ways" за май 1969 г., август 1970 г. и май 1975 г., а также редактируемый Экклером раздел журнала „Games and Puzzles" («Игры и головоломки») за июль 1976 г. и гл. 4 уже упоминавшейся книги Бергерсона [7, 6].) Получающиеся по такому рецепту стихотворения могут обладать достаточно высокими поэтическими достоинствами и по духу почти ничем не напоминать исходные. Экклер опубликовал несколько интересных статистических результатов сравнения двух стихотворений – старого, исходного, и нового. Как и следовало ожидать, чем короче исходное стихотворение, тем ярче проявляется тенденция к совпадению стихотворений.

Из одиннадцати наиболее часто встречающихся букв французского языка можно составить слово ulcérations (изъязвления, появления язв). Перек для собственного удовольствия принялся сочинять стихотворения, состоящие только из этих 11 букв (такие стихотворения можно было бы назвать изограмматическими). Перек опубликовал также

CRU + ASTIONLE
+ URESTLOINCA
CUITONRASEL +
IERCLOSTANU +
ITELARCOUS + N
C + RONETULIAS
LACOURIN + EST
RUCTI + LEASON
+ LASCOURTNIE
RECULATON + IS
TOIRE + LANCSU
RLANUITEC + OS

Cru bastion, le mur est loin: ca cuit, on rase l'hier clos, ta nudité, l'arc où, synchrone, tu lias la cour indestructible à son glas court nié, reçu là.

ton histoire:
blanc sur la nuit,
échos

Рис. 46

Изограмма Жоржа Перека.

стихотворения, состоящие из тех же 11 букв плюс одной «свободной» буквы. Как «делается» такое стихотворение, показано на рис. 46. Положение каждой свободной буквы помечено крестом. Вот что получилось, когда Перек заменил все кресты буквами, выбранными по своему усмотрению:

> «Полагали, что бастион, стена, далеко. Это обжигает: ты едва касаешься чего-то закрытого вчера, твоя нагота, арка, где ты, синхронно, связываешь неуничтожимый двор с кратким, невосприемлемым похоронным звоном, достигнута. Твоя история: белый на фоне ночи, откликается эхом».

Когда в США появились первые линотипные машины, считалось, что в английском языке чаще всего встречаются следующие 12 букв (в порядке убывания частоты): etaoin shrdlu. Эти два лишенных всякого смысла слова образованы буквами, стоящими на клавишах линотипа в первом и втором столбцах. Иногда наборщик пробегает по всему столбцу клавиш, чтобы отметить место в тексте, где ему небходимо исправить букву. Если он забудет изъять лишнюю строку, каббалистические слова могут оказаться напечатанными. Можно попытаться составить стихотворения из букв etaoin shrdlu со свободной тринадцатой буквой или без нее.

Известно только одно английское слово, в которое входят все 12 букв из etaoin shrdlu. Это „outlandisher" (иностранец). Оно приведено, например, в New Standard Unabridged Dictionary. Из этих же букв можно составить два английских слова, образующих название части известной страны. Можете ли вы указать это географическое название?

Группа Улипо потрудилась и над составлением фраз, которые по-английски называются фразами типа «снежного кома»: каждое слово в такой фразе на одну букву длиннее предыдущего [1]. Мэтьюз приводит снежный ком из 22 слов, начинающийся с „o le bon sens" («о здравый смысл») и кончающийся „pseudotransfigurations" («псевдотрансфигурации»). Великолепный пример снежного кома из 20 английских слов приведен в классической книге «Язык на досуге» Дмитрия Боргмана [7, 2]:

> I do not know where family doctors acquired illegibly perplexing handwriting; nevertheless, extraordinary pharmaceutical intellectuality, counterbalancing indecipherability, transcendentalizes intercommunications' incomprehensibleness.

(«Я не знаю, где семейные врачи обретают свой совершенно неразборчивый почерк. Тем не менее необычайно высокий интеллектуальный уровень фармацевтов, уравновешивая трудности неподдающегося расшифровке текста, позволяет трансцендентным образом преодолеть непонятность».)

«Потенциальная литература» буквально набита всевозможными лингвистическими играми и забавами, но из-за недостатка места я приведу здесь лишь еще одну. Жак Бенс пишет так называемые «иррациональные сонеты»: 14 строк делятся на 5 частей, состоящих из 3 строк, 1 строки, 4 строк, 1 строки и 5 строк. Пять цифр – 31415 – не что иное, как первые пять знаков десятичного разложения иррациональ-

---

[1] «Снежный ком» можно начать, например, так: «Я не пою, жаль, песен, баллад».– *Прим. перев.*

ного числа π, отсюда и название сонетов. Схема рифм: aob, c, baob, c, cdccd. Одиночные строки должны оканчиваться одним и тем же словом.

Ноэль Арно предпочитает поэтический жанр «гетеросексуальной позиции»: в такого рода стихах строки с мужской рифмой (с ударением на последнем слоге) чередуются со строками с женской рифмой (с безударным последним слогом).

Участники группы Улипо вывели множество алгебраических формул, которые эффективно используются для конструирования сюжетов романов, рассказов и пьес. Известный специалист по теории графов Клод Берж показал, что направленные графы (графы, у которых все ребра имеют определенное направление, указываемое стрелками) могут оказаться полезными при анализе структуры литературного произведения.

В трехактной пьесе Перека «Ужасы войны» весь диалог состоит из слов, звучание которых воспроизводит названия букв французского алфавита, читаемых вслух по порядку. Журнал „Word Ways“ опубликовал остроумный англоязычный аналог такого текста, принадлежащий Экклеру, и следующий замечательный фрагмент, придуманный Мэтьюзом. Ворона обращается к огородному пугалу:

> Hay, be seedy! He-effigy, hate-shy jaky yellow man, oh peek, you are rusty, you've edible, you ex-wise he!

(«Эй, что-то ты пообтрепался! Ну и образина, чучело гороховое, погляди-ка на себя, ты весь замшел, только на корм и годишься, с ума спятил». Другие примеры столь же необычного «прочтения» английского алфавита приведены на с. 85 майского номера журнала „Word Ways“ за 1971 г.)

Предвижу ваши возражения. «Все это остроумно,– скажете вы,– но несерьезно. Жаль, что творческая энергия расходуется на пустяки». Но разве все эти опыты, пусть несколько эксцентричные, не убеждают нас в том, что язык культуры, в котором таинственным образом сочетается звучание и значение, представляет собой некое целостное образование, живущее своей собственной жизнью? «Запад безумен,– пишет Мэтьюз в своей книге «Оседание».– Я не мог бы жить без ваших слов независимо от того, как они пишутся». Разве монолог вороны, появись он где-нибудь в недрах «Поминок по Финнегану», вызвал бы недовольство Джеймса Джойса, который бы счел его неуместным или выпадающим из общей стилистики «Финнегана»? Разве Джойс не порадовался бы, обнаружив скрытую структуру этого монолога?

Ответы и решения

Отрывок из «стихотворения С. Уальдо Райка» построен из следующих строк «Баллады Редингской тюрьмы» Оскара Уайльда [1]:

Здесь ядовитою травой
Предательство растят,
А чувства чистого росток
Задушат и растлят.

Катерина Хофф сконструировала пять других превосходных вариантов стихотворений, построенных из этих же четырех строк Уайльда. Они опубликованы в разделе писем журнала „Scientific American" (апрель 1977 г.) под псевдонимами: Oswald C. Ire, Rod I. Clawse, Eric O. L. Daws, Dora S. Wilec и Rosa W. Clide [2]. Сарин Герсон выразила недоумение по поводу того, почему С. Уальдо Райк не воспользовался последними двумя строками той же строфы:

Здесь Низость царствует, а Страх,
Как страж, стоит у врат.

Она завершает строфу С. Уальдо Райка так:

Как страж,
Стоит у врат
Здесь Низость.
А Страх
Царствует.

---

[1] Пер. В. Топорова.– Цит. по изданию: Уайльд О. Избранное. М.: Художественная литература, 1986.

[2] Английское написание имени и фамилии автора оригинала Оскара Уайльда выглядит так: Oscar Wilde.– *Прим. перев.*

Скрытая симметрия поэмы Мэри Янгквист заключается в том, что последняя буква каждого слова совпадает с первой буквой следующего слова. Этим же свойством обладает даже подпись автора, приведенная в конце поэмы: имя Mary оканчивается на y, и именно с этой же буквы начинается фамилия Youngquist. Некоторые читатели предлагали изменить название поэмы так, чтобы оно начиналось на букву t, на которую оканчивается фамилия Youngquist (например, This Snow, Winter Reigns или Then, Now, Winter Reigns). Это позволило бы придать всему тексту циклическую завершенность. Оба названия принадлежат Бобу Грегораку.

Из букв, образующих «магические» слова etaoin shrdlu, можно составить географическое название South Ireland (Южная Ирландия). Джон Ригни переставил буквы так, что получился совет, данный испанцам относительно того, как достичь Южной Ирландии: „Sail due North" («Плывите на север»). Долорес Козельская, переставив буквы, получила слово antishoulder (антиплечо). Ричард Хокинс сумел составить из тех же букв высказывание агента бюро путешествий: „I handle tours" («Я продаю путешествия»). Том Дойл напомнил мне: Этаоин Шрдлу – один из персонажей пьесы Элмера Райса «Машина для сложения».

Ныне магические слова etaoin shrdlu почти полностью вышли из употребления после того, как на смену линотипам пришел компьютерный набор, но сочетание букв QWERTY и поныне с нами: это первые шесть букв на клавиатуре стандартной пишущей машинки. Кстати, знаете ли вы, что сочетание букв TYPEWRITER (пишущая машинка) может быть получено из букв верхнего ряда этой клавиатуры?

Многие читатели прислали стихотворения, строки которых составлены только из букв, образующих магические слова etaoin shrdlu. Одно из лучших таких стихотворений, принадлежащее Уолтеру Лейту, было опубликовано в разделе писем журнала «Scientific American» (апрель 1977 г.). Называлось оно «Sharon Dilute», состояло из восьми четверостиший и начиналось так:

Old hunter, as I
dash in to rule,
insult a horde
and so lie hurt,

no adult heirs,
riled, shout an
oath: „Sin lured,
had soul inert."

Глава 7

Улипо II

Девы спят с губами цвета роз.
Сон нисходит, люди почивают.
На полях, где розы увядают,
Мелкий дождь меж тем идет, идет ...

После публикации моей заметки о группе Улипо (см. предыдущую главу) в журнале «Time» (Время) (10 января 1977 г.) появилась статья об участниках этой группы с фотографией Франсуа Лелионне, перелистывающего полоски книжечки Раймона Кено с 10^{14} сонетами. В разделе писем того же журнала (31 января 1977 г.) помещены две «псевдословицы», придуманные его читателями: «Делу время – твоя неделя» и «Ученье и труд – лучший лекарь», а также два построенных ими необычных предложения типа «снежного кома».

Лелионне сообщил мне в письме о других основанных им группах: Упейнпо (живопись), Умупо (музыка), Усинепо (кино) и Улипопо (детективная литература). В 1978 г. он опубликовал словарь по математике, а в 1983 г. – антологию замечательных чисел, в которую вошли (с его комментариями) сведения о 500 необычных числах. На фото 3 вы видите фотографию участников группы Улипо, сделанную в 1985 г. у Лелионне в саду. Лелионне сообщил также о том, что Клод Берж, специалист по теории графов из группы Улипо, написал сонет с «исчезающей строкой», наподобие парадокса исчезающего гнома, о котором рассказывается в гл. 12 моей книги «Крестики-нолики» [7, 7*]: если сонет разрезать на 3 части и расположить их в другом порядке, то вместо 15 строк получится 14, причем в обоих вариантах текст вполне осмыслен.

Жорж Перек, скончавшийся от рака (в возрасте 46 лет) в 1982 г., родился в еврейской семье в Париже. Его родители эмигрировали в 20-х годах из Польши. Отец погиб во время вторжения немцев во Францию, мать умерла в концентрационном лагере. Из более чем дюжины книг, принадлежащих перу Перека, его шедевр «Жизнь: как ею пользоваться» заслуживает некоторых комментариев. Пятьсот девяносто одна страница этого произведения разбита на 99 глав и эпилог, содержащие подробное описание каждой комнаты доходного дома в Париже и жизни каждого из его обитателей. Сто комнат соответствуют клеткам греко-латинского квадрата 10×10 (подробнее о таких квадратах см. гл. 1 моей книги [7, 8*]). Мы обходим все комнаты ходом шахматного коня, «прыгающего» с одной клетки квадрата на другую. Интерьер всех комнат изображен на огромной картине, нарисованной старым художником, который прожил в доме 55 лет.

Французский оригинал романа блещет непереводимой игрой слов, занимательными математическими головоломками и шахматными задачами и скрытыми цитатами из произведений знаменитых авторов. Пол Остер, автор рецензии на роман Перека, опубликованной в книжном обозрении газеты «Нью-Йорк Таймс» (15 ноября 1987 г.), назвал ловушки и аллюзии, которыми изобилует книга, «в высшей степени занимательными». Рецензент пришел в восторг, узнав, что когда Перек упоминает о мелодии композитора Артура Стенли Джефферсона, то он заимствует это имя у реально существующего лица – комического актера Стена Лоурела. «Жизнь» Перека снабжена указателем собственных имен, хронологией основных дат и перечнем сюжетных линий.

99 глав романа искусно «подогнаны» друг к другу, как фрагменты игры-головоломки на составление картинки, служащей центральным символом всего произведения. Один из персонажей, состоятельный англичанин и обитатель парижского доходного дома Персиваль Бартлебут, 10 лет учится искусству акварели. Следующие 20 лет Бартлебут проводит в странствиях по свету, решив сделать акварельные зарисовки видов 500 различных портов мира. Каждую акварель Бартлебут посылает другому жильцу доходного дома Гаспару Винклеру, который превращает акварель в головоломку, разрезая ее на 750 кусочков. По возвращении из странствий Бартлебут проводит следующие 20 лет за решением этих головоломок. Составив очередную картину, он

погружает ее в раствор, который полностью смывает изображение. Пытаясь решить очередную 439-ю головоломку, Бартлебут умирает. В руке у него остается фрагмент, напоминающий по форме букву *W*, хотя очертания оставшегося отверстия напоминают букву *X*. Реальность одерживает победу над жизнью. Как заметил в своей рецензии, опубликованной 8 февраля 1988 г. в газете "New Republic" (Новая республика), Свен Биркертс, концовка романа представляет собой «тонко завуалированную иронию Перека по поводу своего замысла». По словам одного из коллег Перека по Улипо Итало Кальвино, «Перек был одним из самых необычных литераторов в мире, писателем, абсолютно ни на кого не похожим».

Кальвино и сам принадлежит к числу необычных писателей. Активный участник группы Улипо, он приобрел наибольшую известность в Соединенных Штатах. (Кальвино и Гарри Мэтьюз были избраны в Улипо в Валентинов день [1] 1973 г.) К концу своей жизни (Кальвино умер в 1985 г. в возрасте 65 лет) он, по общему признанию, был одним из наиболее выдающихся романистов Италии. Как и проза его друзей из группы Улипо, романы и рассказы Кальвино отличались юмором, фантазией и причудливостью сюжета. Три сказки в сборнике «Наши предки» повествуют о рыцаре, страдавшем раздвоением личности (в одной ипостаси он был хорошим, добрым человеком, в другой отличался жестокостью). У другого рыцаря, как (увы!) у многих политических деятелей, за бронированными доспехами не было ничего. Еще один персонаж благородного происхождения обитал на деревьях. В другом произведении Кальвино «За́мок пересекающихся предначертаний» (американское издание опубликовано в 1977 г.) случайно сдаваемые карты таро (их изображения приведены на полях книги) образуют то, что Кальвино назвал «машиной для конструирования историй». (См. тонкие комментарии Джона Апдайка «Карточные фокусы» в сборнике его эссе «Биясь о берег», с. 463–470.)

Последняя большая работа Кальвино «Как путник в зимнюю ночь» (американское издание вышло в 1981 г.) – роман о самом романе. Читатель (персонаж) покупает роман и обнаруживает, что купленный им экземпляр книги дефектен:

---

[1] День Св. Валентина, 14 февраля.– *Прим. перев.*

страницы романа по ошибке переплетены вместе со страницами другого романа какого-то польского автора. Продавец книжного магазина обменивает дефектный экземпляр на книгу этого польского автора, но и в этой книге оказывается дефект: напечатанные страницы переплетены вперемежку с чистыми. Так начинается сюжет романа Кальвино, с каждым шагом становящийся все более запутанным и сложным. В романе объединены 10 различных сюжетов, каждый из которых приводит к захватывающе интересному повествованию. В рецензии на роман, опубликованной в «Ньюйоркском книжном обозрении» (25 июня 1981 г.), Мэри Маккарти назвала произведение Кальвино «десятью тщательно продуманными случаями прерванного полового акта в искусстве и практике художественной литературы».

Самым близким по духу к группе Улипо из американских писателей (хотя я не знаю, в какой мере творчество участников группы оказало непосредственное влияние на него), несомненно, следует считать Джона Барта, а вплотную за ним идут Томас Пинчон, Роберт Кувер и Дональд Бартелм. «Письма» Барта изобилуют игрой слов и математическими идеями, но сколько-нибудь подробный обзор этого сложного произведения увел бы нас далеко в сторону.

Сама по себе идея сюжета, который разветвляется и имеет две или более концовок, не нова и эффективно использовалась в пьесах лорда Дансэни и Дж. Б. Пристли, а в более позднее время Джоном Фаулесом в конце его романа «Любимая женщина французского лейтенанта». Группа Улипо довела эту идею до её логического завершения, предоставив читателю выбирать по своему усмотрению альтернативы развития сюжета в определенных местах повествования. «Сказка по вашему выбору» Кено начинается так: «Хотите послушать историю о трех беспокойных фасолинах? Если да, то переходите к номеру 4, если нет, то к номеру 2». Если вы выбрали номер 4, то сказка продолжается так: «Жили-были три фасолинки... Если это описание вам понравилось, то переходите к номеру 5. Если вам больше нравится другое описание, то переходите к номеру 9». И т. д.

Этот жанр, получивший название «интерактивной литературы», приобрел популярность в американской литературе для детей и взрослых и использовался в нескольких кинофильмах и спектаклях. В конце семидесятых годов издательство «Бантам» начало выпускать пользовавшуюся большим успехом серию книг для детей под названием «Выберите себе приключение по вкусу». В каждой истории читатель мог по своему усмотрению изменять сюжет примерно в двух десятках мест, что порождало достаточно большое число возможных концовок. В восьмидесятые годы по аналогичному пути пошли и другие издатели. Издательство «Сигнет» назвало свою серию «Жизненные игры для взрослых». Каждая книга имела после 64 ветвлений 64 возможные заключительные главы – одни со счастливым концом, другие – с несчастливым. Издательство «Покет букс» приступает к выпуску серий «На ваш вкус»: «Душещипательные истории на ваш вкус», «Спортивные книги на ваш вкус», «Книги о супергероях на ваш вкус», «Книги о шпионах на ваш вкус». Издательство «Саймон энд Шустер» предлагает вниманию читателя серию «Сочините вашу собственную историю ужасов», а издательство «Лернер Пабликейшнз» выпускает серию «Вы тренер».

Ни одна из этих книг не обладает сколько-нибудь выдающимися достоинствами. Нет ничего проще, чем выбирать ветвящиеся пути с помощью компьютера. Неудивительно поэтому, что интерактивные «романы» начали появляться на рынке в виде компьютерных игр. Первая игра «Приключение» представляла поиск сокровищ в подземных темницах и пещерах. Расследование загадочных убийств – характерный сюжет такого рода компьютерных игр. Раскрытие преступлений проводится тысячью различных способов, и на разгадку тайны иногда требуется до нескольких месяцев. Затем все шире пошла в ход научная фантастика. Рэй Брэдбери оказал помощь в создании интерактивного варианта своей повести «451° по Фаренгейту». Наибольшим спросом пользовались «Встреча с Рамой» Артура Кларка и «Руководство для любителей путешествовать по Галактике на попутных ракетах» Дагласа Адамса. Майкл Кричтон написал новый роман «Амазон» о поисках затерянного города в джунглях Южной Америки. Разовьются ли эти компьютерные «романы» в нечто, заслуживающее название литературы, покажет будущее.

В конце восьмидесятых годов появилось несколько кинофильмов и пьес, позволяющих зрителям строить предположение относительно того, что произойдет дальше. «Загадка Эдвина Друда», поставленная в 1985 г. в Манхэттене, позволяла зрителям с помощью голосования решить, как будет развиваться действие пьесы после того места, где обрывается сюжет незаконченного Диккенсом романа.

Вдохновленные игрой слов и со словом, культивируемой группой Улипо, читатели прислали множество «псевдословиц». Читательнице Кэролин Вейант принадлежит псевдословица «В одно ухо входит, вылетит – не поймаешь». Пословицы можно изменять, переставляя ключевые слова, например, «Дальше едешь – тише будешь». В 1969 г. жена мэра Нью-Йорка Джона Линдсея, выступая по телевидению с извинениями по поводу того, что ее муж поддерживает выдвижение Спиро Агню на пост вице-президента, обронила замечание о том, что «политика делает с людьми странные вещи, заставляя ложиться в одну постель неподходящих партнеров». Узнав о выступлении жены, мэр Линдсей прокомментировал его так (газета «Нью-Йорк Таймс» от 31 декабря 1969 г.): «Даже подходящие партнеры по постели делают странную политику». «Они только и ждут, кто первый встанет и окажет им все услуги», – подхватывает эту тему Роберт Дженкс в своей открытке. Леонард Моргенстерн указал на каламбуры как на одно из средств изменения пословиц (например, «Тела, как сажа бела», «Болтливой корове бог рог не дает»). По мнению Джона Гуммера, «охота пуще рыбалки».

Эл Гранд предлагает дополнить словарь франглийского языка, составленный Мэтьюзом, словом bras[1]. По его наблюдениям, американские шестиклассницы на уроке французского языка во время исполнения «Марсельезы» начинали хихикать при словах “Mugir ces féroces soldats, ils viennent jusque dans nos bras ...” («Эти яростные солдаты с ревом попадают в наши руки»). Оказалось, что в умах девочек эти строки трансформируются в нечто вроде следующих: «Когда эти стенающие солдаты наслушаются всякой чепухи, они

[1] Bras по-французски означает «рука». В разговорном английском это множественное чило от bra – усеченной формы французского слова brassière (лифчик, бюстгальтер).– *Прим. перев.*

a	do[2]	is	post
acre	dole	it	quid[4]
age	dote	late	re[2]
ages	ducat	male	rear
ago	eat	mallet	rue
an	era	mane	sere
at	ere	mare	sex
boa	fare	mi[1]	si[1]
bone	ferret	miles	sic[5]
cadet	fit	mire	sol[1]
cane	flare	more	sole[6]
cave	flat	net	stare
clam	for	nix	sue
cur	fore	no	sum
dare	fur	pace	tale
date	graves	pane	tam
dens	hem	pellet	time
die	his	pone[3]	tot
do[1]	I	possum	violet

(NOTES: 1 – musical note; 2 – to act; 3 – corn pone; 4 – a chew; 5 – urge to attack; 6 – the fish)

Рис. 47

Латино-английский словарь Джона Гуммере.

идут и пытаются вгрызться в наши лифчики».

Гуммера, заслуженного директора школы имени Вильяма Пенна в Хейверфорде (штат Пенсильвания), словарь франглийского языка Метьюза подвиг на составление аналогичного латино-английского словаря. Опубликованный в номере журнала “The Classical Outlook” («С точки зрения классики») за март – апрель 1981 г., этот словарь с разрешения Гуммера воспроизведен на рис. 47[1].

Билл Шортц в статье о Национальной лиге составителей и любителей головоломок, опубликованной в номере журнала «Games» («Игры») за январь – февраль 1979 г., приписывает авторство следующего великолепного примера предложения, в котором начальные буквы слов расположены в алфа-

[1] Подстрочные примечания поясняют, о каком из значений слов-омонимов (одинаковых по написанию, но различных по значению) идет речь: 1 – музыкальная нота, 2 – действовать, 3 – кукурузный початок, 4 – жвачка, 5 – стремление напасть на кого-нибудь, 6 – рыба.– *Прим. перев.*

витном порядке, женщине, публикующей свои головоломки под псевдонимом Мона Лиза:

"A brilliant Chinese doctor exhorted four graduating hospital interns, 'Just keep looking, men – no other prescription quickly relieves sore throats, unless veterinarians willfully x-ray your zebras". (Блестящий врач из Китая наставлял четырех ординаторов, проходящих практику в больнице: «Взгляните, джентльмены. Ни одно другое назначение не исцеляет боли в горле, если только ветеринары не согласятся облучить ваших зебр рентгеновскими лучами».)

Альберт Л. Элай-мл. «сплел» стихи Элинор Вайли и Эдны Сент-Винсент Милле со стихотворением А. Э. Хаусмана «Шропширский парень» (Парень легконогий...). Вот что у него получилось:

With rue my heart is laden –
My candle burns at both ends
For golden friends I had.
It will not last the night
For many a rose-lipt maiden,
But, ah, my foes, and oh, my friends,
And many a lightfoot lad,
It gives a lovely light.
By brooks too broad for leaping
Sleep falls with limpid drops of rain.
The lightfoot boys are laid
Upon the steep cliffs of the town;
The rose-lipt girls are sleeping;
Sleep falls; men are at peace again
In fields where roses fade
While the small drops fall softly down.

Дик Ринглер, вдохновленный диалогом Дж. А. Линдона между Адамом и Евой (см. рис. 42), сочинил 2 четверостишия, каждое из которых совпадает с другим, прочтенным от конца к началу:

Диптих

Тезей не найдет Минотавра

Нить покоряет хаос, покоряет отчаянье план.

Тени угрюмы и страшны,
Мертва надежда, пусты небеса,
Голы луга... Страшна и верна перспектива.

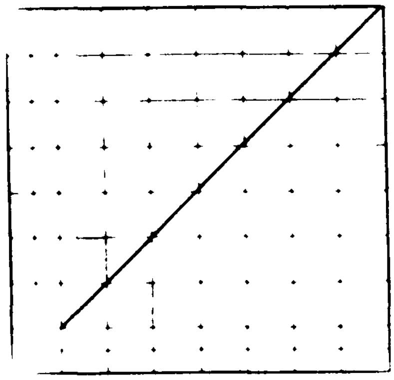
Пенелопа будет ткать всю осень

Перспектива верна и страшна... Луга голы,
Небеса пусты, надежда мертва,
Страшны и угрюмы тени.
План отчаянье покоряет, хаос покоряет нить.

Сборник коротких рассказов Гарри Мэтьюза «Кулинария по-деревенски и другие истории» был опубликован в 1980 г. издательской фирмой «Burning Deck» в Провиденсе (штат Род-Айленд). Журнал "The Review of Contemporary Review" посвятил осенний выпуск 1987 г. Мэтьюзу [7, 16], а с 4 по 6 ноября того же года состоялся литературный семинар, посвященный группе Улипо (спонсором выступило отделение романских языков Колледжа Баруха в Нью-Йорке). Некоторые авторы из группы Улипо выступили с чтением своих произведений. Были прослушаны доклады о деятельности Улипо. Состоялось обсуждение некоторых последних работ ее участников, в том числе романа Мэтьюза «Сигареты» (1987). Это увлекательное повествование с хитроумно завязанным сюжетом, необычно полным отсутствием скрытых структур, тонких загадок и непрестанной игры слов, столь характерных для прежней позиции и прозы Мэтьюза. В рецензии на роман «Сигареты», опубликованной в «Нью-йоркском книжном обозрении» 21 января 1988 г., Роберт Тауэрс охарактеризовал это произведение как «холодное и изящное», «необычное и увлекательное».

Глава 8

Ним Витхоффа



Анализ простой игры для двух лиц иногда может завести в интереснейшие уголки теории чисел. Мы начнем с одной очаровательной, но малоизвестной игры, в которой действие развертывается на шахматной доске с одним-единственным ферзем, а затем рассмотрим несколько замечательных теоретико-числовых следствий, тесно связанных с золотым сечением и обобщенными последовательностями Фибоначчи.

Игра, о которой идет речь, не имеет общепринятого названия. Изобрел ее в начале 60-х годов нашего столетия Руфус П. Айзакс, математик из Университета Джона Гопкинса. Краткое описание ее (без упоминания о шахматах) желающие могут найти в гл. 6 книги «Теория графов и ее применения» французского математика Клода Бержа. (Мы встречались с Бержем в предыдущих двух главах как с членом группы Улипо.) Условимся называть эту игру «Королеву – в угол».

Игрок А ставит ферзя на любое поле верхней горизонтали или самой правой вертикали (на рис. 48 «разрешенные» поля закрашены в темный цвет). Ферзь ходит, как обычно, но только на запад, юг или юго-запад. Игрок В делает первый ход. Последующие ходы игроки делают поочередно. Выигрывает тот из игроков, которому удастся загнать ферзя на поле в левом нижнем углу доски, помеченное звездочкой.

Ничья в этой игре невозможна, поэтому игроки А и В могут рассчитывать на выигрыш, если будут придержи-

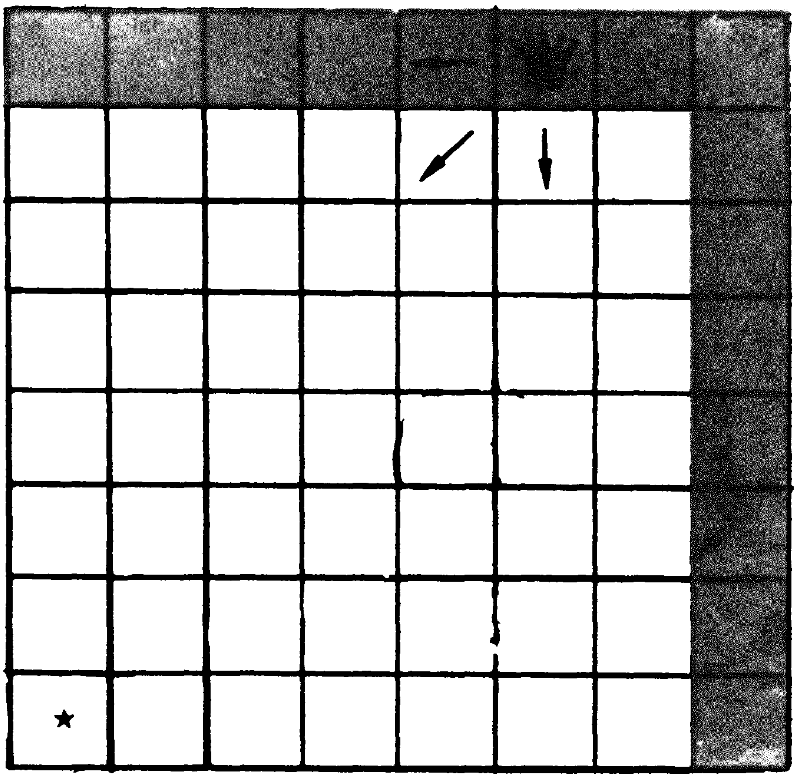


Рис. 48

Игра «Королеву – в угол» Руфуса П. Айзакса

ваться рациональной стратегии. Игру нетрудно запрограммировать на калькуляторе с печатающим устройством фирмы Хьюлетт-Паккард HP-97 или на карманном калькуляторе HP-67, что позволит вам играть на «гроссмейстерском» уровне. Более того, такая программа имеется на магнитной карточке, прилагаемой к пакету игровых программ HP-67/HP-97 Games Pac 1, выпускаемому фирмой Хьюлетт-Паккард.

Айзакс нашел выигрышную стратегию, рассматривая ферзя на шахматной доске неограниченных размеров, стоящего на помеченном звездочкой поле, и проводя ретроспективный анализ – от конца к началу. Если ферзь находится на горизонтали, вертикали или диагонали, содержащей звездочку, то тот из игроков, кому принадлежит право очередного хода, сразу же выигрывает. Пометим выигрышные поля тремя прямыми, как показано на рис. 49А. Ясно, что поля темного цвета «вполне надежны»: если вы попадаете на любое из них, то ваш противник вынужден пойти на поле, откуда вы следующим ходом заведомо выигрываете.

На рис. 49Б показан следующий этап нашего ретроспективного анализа: к трем прежним линиям добавлено еще

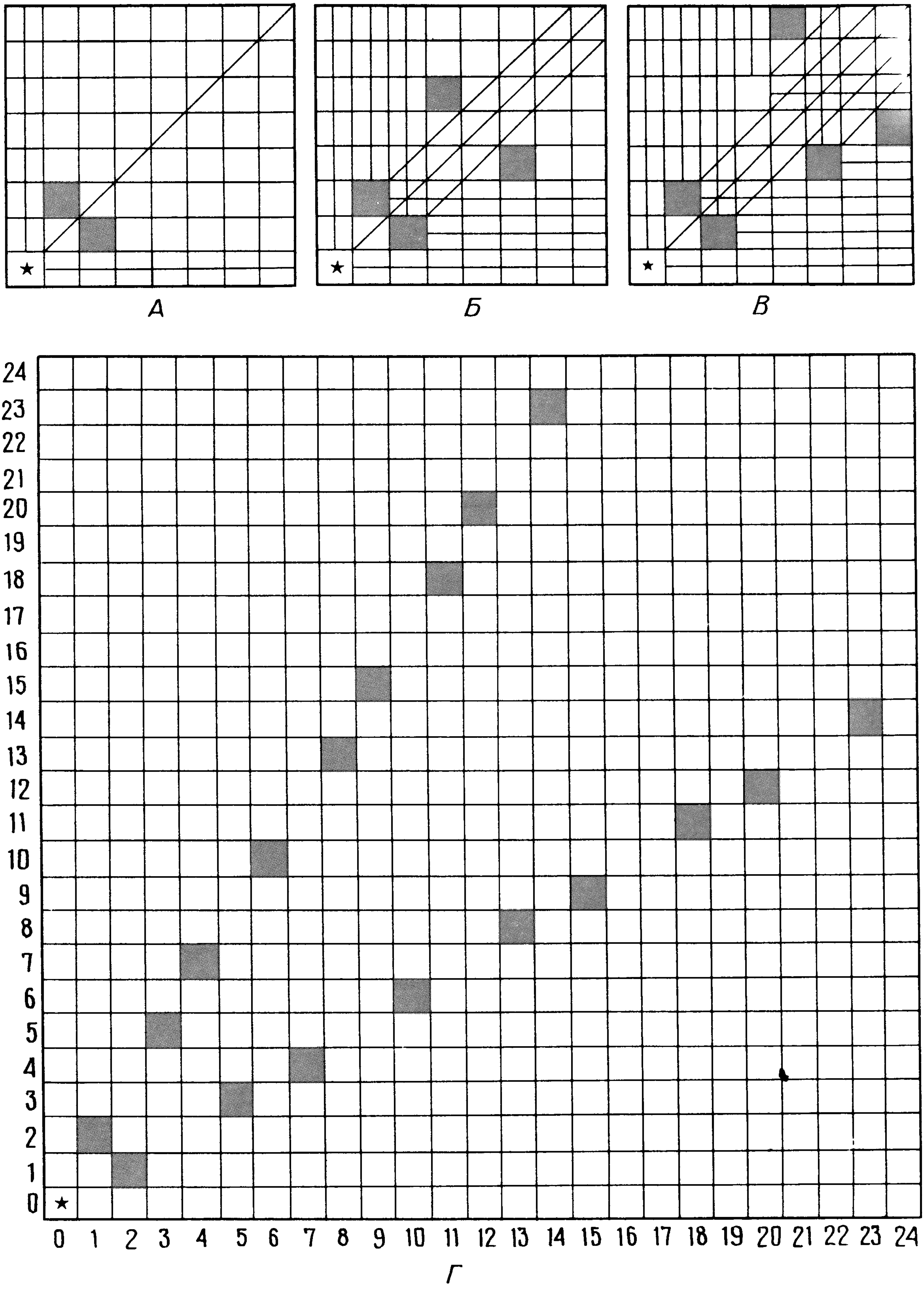


Рис. 49

(А – В) Рекурсивный анализ игры «Королеву – в угол». (Г) Первые 9 пар безопасных клеток.

шесть линий (горизонталей, вертикалей и диагоналей), которым принадлежат два найденных ранее «надежных» поля. В результате этой процедуры мы получаем возможность закрасить в темный цвет еще два надежных поля. Заняв любое из них, вы вынудите вашего противника сделать такой ход, после которого вы следующим ходом либо выигрываете, либо занимаете одну из надежных клеток, расположенных ближе к полю, помеченному звездочкой.

Повторяя эту процедуру, как показано на рис. 49В, вы завершаете анализ шахматной доски и находите третью пару надежных клеток. Ясно, что игрок А всегда может выиграть, сделав ход ферзем на любое поле верхней горизонтали или самой правой вертикали. Далее его стратегия состоит в том, чтобы ходить ферзем на надежные поля, а такой ход для него всегда возможен. Если же игроку А не удается занять надежное поле, то игрок В всегда может выиграть, придерживаясь той же стратегии. Обратите внимание на то, что выигрышные ходы не обязательно единственные. Иногда выигрывающий партию игрок может выбирать один из двух возможных ходов, причем один ход может ускорить победу, а другой несколько оттянуть ее.

Наш ретроспективный анализ допускает обобщение на прямоугольные матрицы любых размеров и соотношений числа строк и столбцов. На рис. 49Г показана квадратная доска размером 25×25, на которой темным цветом показаны все надежные поля. Обратите внимание: они располагаются парами симметрично относительно главной диагонали и лежат почти на двух лучах, простирающихся в бесконечность. Что же касается их распределения вдоль этих лучей, то оно (по крайней мере на первый взгляд) представляется весьма причудливым и нерегулярным. Существуют ли формулы, позволяющие вычислять положения надежных клеток нерекуррентным способом?

Прежде чем ответить на этот вопрос, обратимся к более древней игре, известной в Китае под названием цзянь-шидзы, что означает «взятие камней» (игроки по очереди забирают камни, или фишки, из двух кучек). Голландский математик В. А. Витхофф переоткрыл эту игру и в 1907 г. опубликовал ее анализ. С тех пор эта игра известна в западной математике как ним Витхоффа.

Играют в ним Витхоффа следующим образом. Берут две кучки фишек. Число фишек в каждой кучке произвольно. Как и в обычном ниме, шаг состоит в том, что игрок забирает любое число фишек из любой кучки, но не меньше одной фишки. Если угодно, то игрок может забрать целиком одну из кучек. В отличие от обычного нима игрок может забирать фишки из обеих кучек, но непременно поровну. Выигрывает тот, кто забирает последнюю фишку. Если обе кучки содержат одинаковое количество фишек, то тот, кто делает следующий ход, выигрывает, забирая обе кучки одновременно. По этой же причине игра в ним Витхоффа тривиальна, если в исходной позиции в обеих кучках фишек поровну.

Теперь уже все готово для того, чтобы мы сделали для себя первое удивительное открытие. Ним Витхоффа изоморфен игре «Королеву – в угол»! Когда Айзекс изобрел свою игру, он ничего не знал о ниме Витхоффа и был очень удивлен, узнав впоследствии, что его игра была решена еще в 1907 г. В изоморфизме обеих игр нетрудно убедиться. Перенумеруем 25 вертикалей вдоль оси x числами от 0 до 24, как на рис. 49Г, и аналогичным образом перенумеруем 25 горизонталей вдоль оси y. Каждому полю поставим в соответствие пару чисел x/y. Эти числа соответствуют числу фишек в кучках x и y. При движении ферзя («королевы») на запад уменьшается число x. При движении ферзя на юг уменьшается число y. При движении ферзя по диагонали на юго-запад количества фишек в обеих кучках уменьшаются на одно и то же число. Занятие ферзем поля 0/0 означает, что число фишек в каждой из двух кучек уменьшается до нуля.

Выигрышная стратегия для игры в ним Витхоффа состоит в том, чтобы уменьшать количества фишек в кучках до чисел, образующих пару x/y – номер надежного поля в игре «Королеву – в угол». Если количества фишек в кучках перед началом игры соответствуют «координатам» надежного поля в игре «Королеву – в угол», то делающий первый ход проигрывает: сделав первый ход, он заведомо «ходит ферзем» на ненадежное поле, и его противник в ответ ходит ферзем на надежное поле. Если же игра начинается с чисел, соответствующих ненадежному полю, то игрок, делающий первый ход, всегда может выиграть, уменьшив количества фишек в кучках до чисел, соответствующих координатам надежного поля, и оставляя после каждого следующего хода кучки, соответствующие только надежным полям.

Порядок чисел в паре, образующей «координаты» надежного поля, несуществен из-за симметрии надежных полей относительно главной диагонали: «координаты» симметричных полей в каждой паре образованы одними и теми же числами, но в обратном (друг относительно друга) порядке. Расположим надежные пары чисел по порядку, начиная с пары, ближайшей к 0/0, и располагая всякий раз меньшее число над бо́льшим, как на рис. 50. Над каждой парой напишем их «позиционное число» (номер). Верхние числа пар образуют последовательность, которую мы обозначим A. Нижние числа образуют последовательность, которую мы обозначим B.

Обе эти последовательности – монотонно возрастающие и обладают столь многими замечательными свойствами, что им посвящены десятки статей в математических журналах. Заметим, что каждый член последовательности B равен сумме своего партнера в последовательности A и его позиционного числа. Если к любому члену последовательности A прибавить его партнера из последовательности B, то сумма совпадет с членом последовательности A, позиционный номер которого равен партнеру из последовательности B выбранного члена по последовательности A. (Например, $8+13=21$. Тринадцатый член последовательности A равен 21.)

Обе последовательности A и B были получены геометрически: мы проводили линии на шахматной доске и закрашивали поля в темный цвет, пользуясь рекуррентным алгоритмом. Можно ли построить те же последовательности с помощью рекуррентного алгоритма, но не геометрического, а чисто численного?

Оказывается, можно. Начнем с числа 1 как верхнего числа первой надежной пары. Прибавив это число к его позиционному номеру, получим число 2 в качестве нижнего числа той же пары. Верхнее число следующей пары есть наименьшее

Положение (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A. $[n\phi]$	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24
B. $[n\phi^2]$	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39

Рис. 50

Первые 15 безопасных пар чисел при игре в ним Витхоффа.

положительное целое число, которое не было использовано раньше. Оно равно 3. Под ним должно стоять число 5 – сумма числа 3 и его номера. В качестве верхнего числа третьей пары снова выбираем наименьшее положительное целое число, которое еще не было использовано. Оно равно 4. Под ним подписываем число 7 – сумму чисел 4 и 3. Продолжая в том же духе, получаем последовательности A и B.

Наш численный алгоритм таит в себе еще одну приятную неожиданность: мы открыли одно из наиболее необычных свойств надежных пар. Из приведенного выше описания процедуры ясно, что каждое положительное целое число должно встречаться один и только один раз в одной из двух последовательностей A и B.

Существует ли нерекуррентный алгоритм построения этих последовательностей? Да, существует. Витхофф первым открыл, что члены последовательности A представляют собой не что иное, как целые кратные золотого сечения, округленные до целых чисел! (Витхофф говорил, что «выудил» это открытие «из шляпы».)

Как известно большинству читателей этой книги, золотое сечение – одно из наиболее знаменитых иррациональных чисел. Подобно другому знаменитому числу π, оно возникает в самых невероятных местах. Древнегреческие математики называли его «крайним и средним отношением» по следующей причине. Разделим отрезок на части A и B так, чтобы длина A относилась к длине B так же, как длина всего отрезка к длине A. Выполнив это построение, мы построим золотое сечение отрезка. Поскольку принято считать, что пропорции золотого сечения обладают особой эстетической привлекательностью, золотому сечению и его использованию в архитектуре и искусстве посвящена обширная литература (нередко самого фантастического свойства).

Величину золотого сечения мы можем вычислить, приняв длину отрезка B за единицу. Деление отрезка в среднем и крайнем отношении приводит к равенству $(A + 1)/A = A/1$. Это простое квадратное уравнение относительно A. Решив его, получаем для A положительное значение $(\sqrt{5} + 1)/2 = 1{,}61803398\ldots$ – величину золотого сечения. Обратная величина равна $0{,}61803398\ldots$. Золотое сечение – единственное положительное число, совпадающее с обратным после вычитания единицы и со своим квадратом после прибавления единицы. Теми же свойствами обладает число, обратное золотому сечению со знаком минус. В Англии золотое сечение приняго обозначать греческой буквой τ. Мы будем следовать американской традиции и обозначать золотое сечение греческой буквой ϕ.

Числа, образующие последовательность A, определяются по формуле $[n\phi]$, где n – позиционное число (номер члена последовательности), а скобки означают отбрасывание дробной части числа. Числа, образующие последовательность B, могут быть получены при сложении соответствующих членов последовательности A с их позиционными числами, но оказываются равными округленным до целого числа целым кратным квадрата золотого сечения. Таким образом, члены последовательности B могут быть вычислены по формуле $[n\phi^2]$. Утверждение о том, что каждое положительное целое число встречается один и только один раз среди чисел, образующих надежные пары, можно сформулировать в виде следующей теоремы: множество целых чисел, заключенных между последовательными целыми кратными золотого сечения и последовательными целыми кратными квадрата золотого сечения, совпадает с множеством натуральных чисел.

Две последовательности возрастающих положительных целых чисел, содержащие (вместе) каждое положительное целое число один и только один раз, называются дополнительными. Золотое сечение ϕ – не единственное иррациональное число, порождающее такие последовательности, хотя только ϕ порождает надежные пары чисел для игры в ним Витхоффа. В 1926 г. канадский математик Сэм Битти опубликовал свое поразительное открытие: он установил, что любое иррациональное число порождает дополнительные последовательности.

Пусть k – иррациональное число ($k > 1$). Последовательность A состоит из целых кратных числа k, округленных до целого числа, или из чисел $[nk]$, где n – порядковый номер члена последовательности, а квадратные скобки означают отбрасывание дробной части. Последовательность B состоит из округленных до целого числа целых кратных отношения $(k-1)/k$, или из числа $[nk/(k-1)]$. Порождаемые таким способом последовательности называются последовательностями Битти. Если $k = \phi$, то вторая формула дает округленные до целого числа целые кратные числа 1,618.../0,618... = 2,618..., которое в силу причудливой природы золотого сечения ϕ совпадает с ϕ^2. Читатели могут сами убедиться в том, что формулы Битти действительно порождают дополнительные последовательности, полагая k равным числам $\sqrt{2}$, π, e или любому другому иррациональному числу, но не порождают дополнительные последовательности, если k – рациональное число.

Всякий раз, когда где-нибудь возникает золотое сечение, можно с уверенностью заключать пари, что где-то поблизости находятся числа Фибоначчи. Напомним, что последовательность Фибоначчи образуют числа 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Каждый последующий член этой последовательности равен сумме двух предыдущих. Обобщенная последовательность Фибоначчи определяется так же, но может начинаться с любых двух чисел. Отличительное свойство любой обобщенной последовательности Фибоначчи положительных чисел состоит в том, что с увеличением номера отношение двух соседних членов все более стремится к ϕ и в пределе совпадает с ϕ.

Разбив первоначальную (традиционную) последовательность Фибоначчи на пары 1/2, 3/5, 8/13, 21/34, ..., можно показать, что каждая такая пара Фибоначчи совпадает с одной из надежных пар в ниме Витхоффа. Первая надежная пара, не принадлежащая последовательности самого Фибоначчи, есть пара 4/7. Начав другую (обобщенную) последовательность Фибоначчи с чисел 4 и 7 и разбив ее на пары 4/7, 11/18, 29/47, ..., мы снова получим надежные пары в ниме Витхоффа. Эти пары принадлежат последовательности Фибоначчи, образованной так называемыми числами Люка, которая начинается так: 2, 1, 3, 4, 7, 11, ...

Представим себе, что мы проходим бесконечную последовательность надежных пар и (на манер решета Эратосфена, служащего для отсеивания простых чисел от составных) вычеркиваем из нее все надежные пары, принадлежащие последовательности Фибоначчи. Наименьшая из невычеркнутых пар есть пара 4/7. Получив ее, мы можем вычеркнуть вторую бесконечную последовательность Фибоначчи, все пары которой надежны. Процесс вычеркивания никогда не обрывается. Математик из Университета штата Северная

Каролина Роберт Силбер называет надежную пару «первичной», если это первая надежная пара, порождающая последовательность Фибоначчи. Он доказывает, что существует бесконечное множество первичных надежных пар. Так как каждое положительное целое число встречается среди надежных пар один и только один раз, Силбер заключает, что существует бесконечная последовательность последовательностей Фибоначчи, которая точно покрывает множество натуральных чисел.

Рассмотрим по порядку первичные пары 1/2, 4/7, 6/10, 9/15, ... и запишем их номера 1, 3, 4, 6, ... Не кажется ли вам, что эту последовательность вы уже где-то встречали? Как показывает Силбер, перед вами не что иное, как последовательность A. Иначе говоря, надежная пара первична в том и только том случае, если ее номер совпадает с одним из членов последовательности A.

Предположим, что вы играете в ним Витхоффа с очень большим количеством фишек или на шахматной доске колоссальных размеров. Как лучше всего определить, надежна или ненадежна ваша позиция, и какой стратегии следует придерживаться, чтобы выиграть?

Разумеется, можно воспользоваться формулами с ϕ и составить достаточно большую таблицу надежных пар, но сделать это без калькулятора довольно трудно. Не существует ли более простого способа, сравнимого с методом нахождения оптимальной стратегии игры в ним с помощью двоичной записи числа фишек в кучках? Оказывается, что такой способ действительно существует, но основан на использовании более экзотической, так называемой фибоначчиевой, системе счисления, которую интенсивно изучали Силбер, его коллега Ральф Геллар и другие математики, например Леонард Карлитц из Университета Дьюка.

Выпишите числа Фибоначчи справа налево, как показано на рис. 51. Над каждым числом укажите его номер в последовательности. Располагая такой двухрядной таблицей, мы можем представить, причем единственным способом, любое положительное целое число в виде суммы чисел Фибоначчи. Предположим, что мы хотим записать в фибоначчиевой системе счисления десятичное число 17. Находим в таблице наибольшее число Фибоначчи, которое не превышает числа 17 (оно равно 13), и ставим под ним

...10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		
...55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
			1	0	0	1	0	1	0	=	17

Рис. 51

Число 17, записанное в фибоначчиевой системе.

цифру 1. Затем, двигясь вправо, находим наибольшее число, которое, если его прибавить к 13, дает сумму, не превышающую 17. Это число равно 3, поэтому мы ставим 1 под 3. Продолжая двигаться вправо, мы находим следующее число (оно равно 1, стоящей на втором месте справа) и ставим под ним 1. Под «неиспользованными» числами Фибоначчи ставим 0.

В результате мы получаем 100 1010 – единственное представление десятичного числа 17 в фибоначчиевой системе счисления. Чтобы перевести его снова в десятичную систему, необходимо сложить те числа Фибоначчи, которым в записи соответствуют единицы: $13 + 3 + 1 = 17$. Самая правая (первая) единица никогда не используется, поэтому в фибоначчиевой системе счисления все числа оканчиваются на нуль. Нетрудно также убедиться в том, что в этой системе счисления две единицы в записи числа никогда не стоят рядом. Действительно, если бы в записи встретились две единицы подряд, то, сложив соответствующие числа Фибоначчи, мы получили бы следующее число Фибоначчи, стоящее слева, и по нашим правилам должны были бы и под ним поставить 1, а под двумя начальными единицами поставить нули.

В фибоначчиевой системе счисления сумма чисел, образующих надежную пару, есть число из последовательности B, к которому справа приписан нуль. Это означает, что последовательность Фибоначчи мы получим, начав с числа 10 и приписывая к нему справа нули: 10, 100, 1000, 10000, ... Та же процедура позволяет получить любую последовательность Фибоначчи, порожденную какой угодно первичной парой. Например, последовательность Люка, которая начинается с пары 4/7, выглядит так: 1010, 10100, 101000, 1010000, ...

В записи любого числа из последовательности A в фибоначчиевой системе счисления самая правая единица стоит на четном месте справа. Каждое число из последовательности B получается путем приписывания к его партнеру из последовательности A одного нуля справа. Значит, в записи любого числа из последовательности B самая правая единица стоит на нечетном месте справа. Так как каждое натуральное число принадлежит либо последовательности A, либо последовательности B, мы получаем простой способ определения надежности (или ненадежности) любой данной позиции при игре в ним Витхоффа. Запишем два числа, образующие координаты позиции в фибоначчиевой системе счисления. Если меньшее из чисел принадлежит последовательности A и приписывание к нему нуля справа порождает другое число, то позиция надежна; в противном случае позиция ненадежна.

В качестве примера продемонстрируем этот метод на позиции 8/13 = 100000/1000000. Единица в числе 100000 стоит на шестом месте справа, т. е. на четном месте, поэтому число 100000 принадлежит последовательности A. Приписывая справа еще один нуль, получаем число 1000000 = 13 – партнера числа 8. Значит, мы можем быть уверены в том, что позиция 8/13 надежна. Если очередной ход принадлежит вам, то выигрывает ваш противник. Если вы полагаете, что он не может играть на «гроссмейстерском» уровне, то попытайтесь сделать какой-нибудь случайный ход и подождите, пока ваш противник не допустит ошибку.

Предположим, что пара ненадежна и очередной ход принадлежит вам. Как можно определить ту надежную позицию, на которую вам следует пойти? Необходимо рассмотреть три случая. Условимся записывать ненадежную пару в каждом случае в виде x/y, где x – меньшее из двух чисел и оба числа приведены в фибоначчиевой системе счисления.

В первом случае число x принадлежит последовательности B. Сделайте такой ход, чтобы уменьшить число y до числа, получающегося из x при вычеркивании последней цифры справа. Например, пусть $x/y = 10/15 = 100100/1000100$. Так как в числе 1000100 самая правая из единиц стоит на нечетном месте справа, оно принадлежит последовательности B. Зачеркнув последнюю цифру справа, получим число

10010 = 6. Таким образом, вы должны получить (взяв лишние фишки из большей кучки) надежную пару 10 и 6. На шахматной доске это соответствует ходу ферзем по диагонали.

Во втором случае число x принадлежит последовательности A, но число y больше числа, получающегося при приписывании нуля справа к числу x. Сделайте такой ход, чтобы уменьшить число y до этого числа. Например, пусть $x/y = 9/20 = 100010/1010100$. Так как самая правая единица в записи числа x стоит на четном месте справа, число x принадлежит последовательности A. Приписывая нуль справа, получаем 100010 = 15. Это число меньше 20. Таким образом, вы должны очередным ходом занять надежную позицию 9/15. На шахматной доске этому ходу соответствует ход ферзя по вертикали.

Если числа не относятся ни к случаю 1, ни к случаю 2, то вам надлежит поступать так:

1) найдите абсолютную величину разности между x и y;

2) вычтите из нее единицу, запишите полученный результат в фибоначчиевой системе счисления и замените последнюю цифру справа единицей;

3) приписав к полученному числу нуль справа, вы получите одно число, а приписав справа два нуля, узнаете второе число. Эти два числа образуют ту самую надежную пару, которую вы ищите, хотя числа могут быть «неканоническими» (в их записи единицы могут идти подряд).

Примером третьего случая может быть пара чисел $x/y = 24/32 = 10001000/10101000$. Оптимальные стратегии первого и второго случаев здесь неприменимы. Абсолютная величина разности чисел 24 и 32 равна 8. Вычитаем единицу: $8 - 1 = 7$. В фибоначчиевой системе счисления 7 имеет вид 10100. Заменяя последнюю цифру единицей, получаем: 10101. Приписывая справа 0 и 00, получаем требуемый «адрес» – надежную пару $101010/1010100 = 12/20$. Такие количества фишек останутся в кучках, если из обеих кучек взять по 12 фишек. Это соответствует ходу ферзем по диагонали.

Мы не можем входить в объяснения по поводу того, чем обусловлен тот или иной шаг в стратегии Силбера. Тех, кому это интересно, мы отсылаем к статье Силбера «Ним Витхоффа и представления Фибоначчи» [8, 12]. Я вынужден также обойти молчанием различные обобщения игры Витхоффа, но хотел бы сказать одно или два слова об обратной, или мизерной, форме этой игры: тот, кто делает последний ход, проигрывает. Как показывает Т. Х. О'Бейрн в своей книге «Головоломки и парадоксы» [8, 6], мизер в ниме Витхоффа (так же, как и мизер в обычном ниме) требует тривиального изменения в перечне надежных пар: необходимо лишь вычеркнуть первую пару 1/2 и заменить пары 0/1 и 2/2. Мизерная стратегия во всем повторяет стандартную стратегию, за исключением того, что в конце вы должны сыграть 2/2 или 0/1 вместо 1/2.

Изменим ним Витхоффа следующим образом. Предположим, что игрок, делая очередной ход, может брать фишки либо из одной кучки (но любое число фишек), либо одну фишку из одной кучки и две фишки из другой. Можете ли вы построить модель такой игры на шахматной доске и указать выигрышную стратегию?

Ответы и решения

Требовалось проанализировать вариант игры (аналогичной игре в ним), в которой игрокам разрешается брать либо произвольное число фишек из какой-нибудь одной кучки, либо одну фишку из одной кучки и две фишки из другой. Выигрывает тот, кто делает последний ход. На шахматной доске неограниченной протяженности, о которой мы упоминали в основном тексте, первое правило эквивалентно ходу ладьей на запад или на юг, а второе – ходу конем на юго-запад. Следовательно, предлагаемый нами вариант игры, состоящей в поочередном взятии фишек из двух кучек, изоморфен игре, состоящей в том, чтобы загнать в угол на шахматной доске фигуру, которая ходит как ладья и конь. Среди любителей необычных, или «сказочных», шахмат такая фигура иногда известна под названием канцлера или императрицы.

Если фигура ходит только как ладья, то игра на шахматной доске соответствует стандартному ниму с двумя кучками фишек. Надежными являются пары любых двух равных положительных целых чисел. На шахматной доске они соответствуют полям на главной диагонали, проходящей через угловые поля 0/0 и 7/7. Игрок, который ставит ладью (на верхнюю горизонталь или на правую вертикаль),

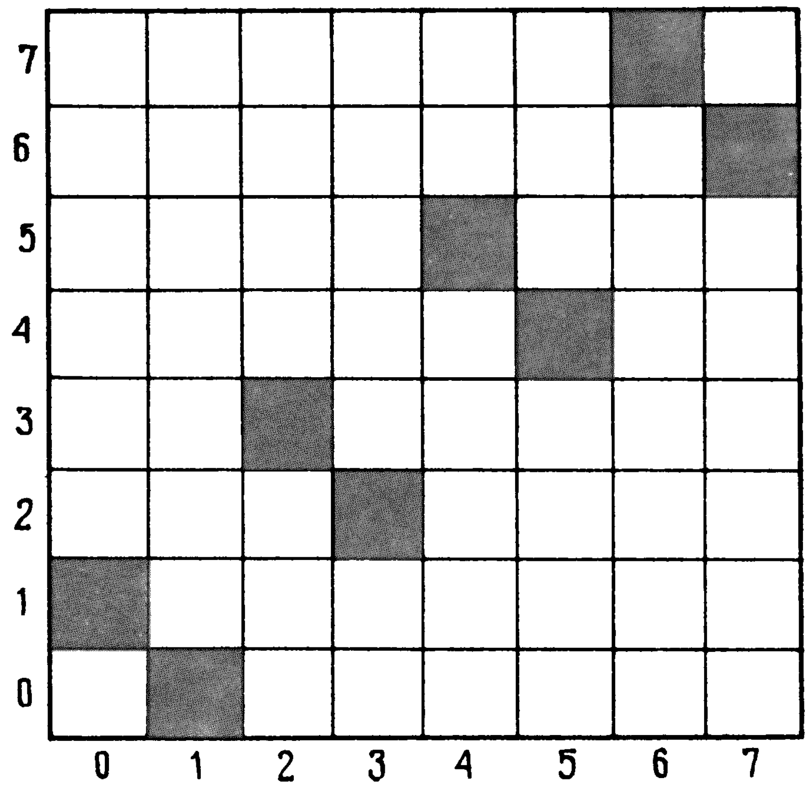


Рис. 52

Безопасные клетки при игре в обратный ним с ладьей и королем.

выигрывает только в том случае, если он занимает угловое поле 7/7. Его последующая стратегия состоит в том, чтобы двигаться всегда по диагонали. В игре с взятием фишек это соответствует тому, что после каждого хода число фишек в обеих кучках остается одинаковым. Надежные пары – это просто пары 1/1, 2/2, 3/3, ...

Как ни удивительно, но стратегия совершенно не изменяется от того, что ладья обретает дополнительную возможность ходить, как конь. Применяя уже известный нам метод ретроспективного анализа, мы устанавливаем, что пары надежных клеток остаются такими же, как в игре с обычной ладьей.

Более интересна мизерная форма игры в ним ладьей-конем (тот, кто делает последний ход, проигрывает). Надежные пары в этом случае образуют множество 0/1, 2/3, 4/5, 6/7, ... На шахматной доске этим неупорядоченным парам соответствуют поля, изображенные на рис. 52 темным цветом. Тот, кто ставит фигуру на доску, выигрывает, но для этого ему необходимо занять поле, примыкающее к угловому (в верхнем правом углу). Придерживаясь такой стратегии, игрок в конце концов занимает поле 0/1 или 1/0 и оставляет последний ход за своим противником.

Возможно, читателю доставит удовольствие анализ игры на стандартной шахматной доске, когда выставляемая на доску фигура может ходить как другие шахматные фигуры, но только на запад, юг или юго-запад. «Суперкоролева» («суперферзь») или «амазонка» (комбинация ферзя и коня) сулит проигрыш тому, кто открывает игру, и в обычном варианте, и в мизере. Король приводит к проигрышу того, кто делает первый ход, в стандартном варианте и к выигрышу в мизере. К таким же результатам приводит анализ игры и в случае короля-коня или короля-ладьи. В случае короля-слона делающий ход выигрывает и в обычном, и в мизерном вариантах.

Дополнение

На рис. 53 в темный цвет закрашены надежные поля для игры в ним королем, ладьей и слоном. Игра слоном тривиальна, так как по правилам слон не может попасть в нижний левый угол из любого поля, не лежащего на главной диагонали. Если же мы ограничим перемещения слона главной диагональю, то второй игрок, как нетрудно видеть, выигрывает в обычном варианте игры и проигрывает в мизере.

Такими сочетаниями фигур, как ферзь-король, ферзь-слон, ферзь-ладья или ладья-слон, можно пренебречь, поскольку все эти комбинированные фигуры эквивалентны ферзю. На рис. 54 показаны надежные поля для игры в ним суперферзем, или амазонкой (ферзем-конем), суперкоролем (королем-конем), королем-ладьей (в японских шахматах шоги такая фигура называется риа-оу) и королем-слоном (в шоги – риу-ма). Предполагается, что во всех случаях фигура может двигаться только на запад, юг или юго-запад.

Комбинация слона и коня порождает фигуру, известную одним поклонникам сказочных шахмат под названием аббата, а другим под названием принцессы. Кристофер Арата прислал мне подробный анализ игр типа нима, проводимых на неограниченной доске такой фигурой по различным правилам. Если ограничить игровое поле теми полями, из которых можно попасть в нижнее угловое поле, то на рис. 55 (вверху) показаны закрашенные в темный цвет надежные поля как для обычного, так и для обратного (мизерного) варианта игры. Арата допускает также ходы аббатом не

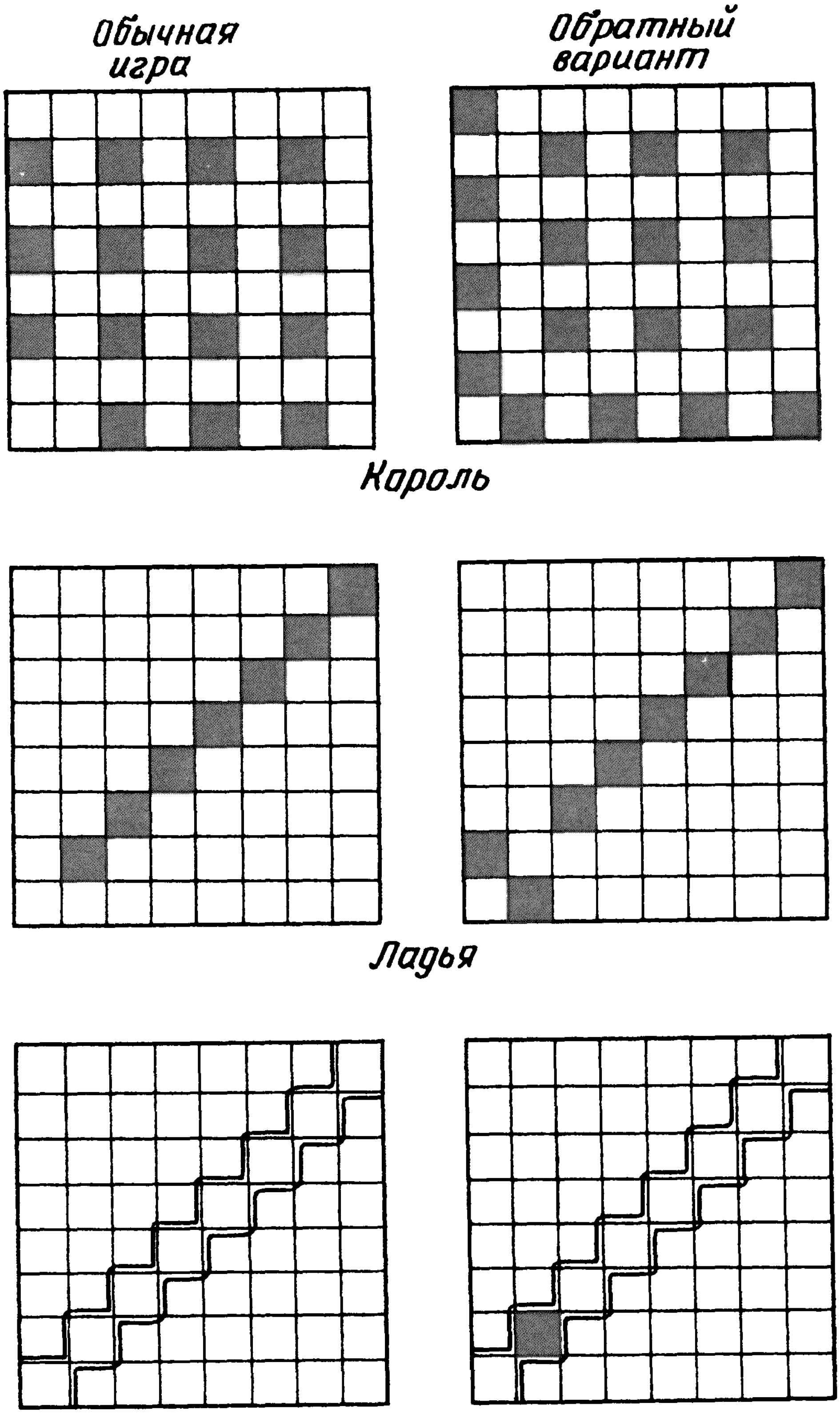


Рис. 53

Игра в ним с королем, ладьей и слоном.

только на юго-запад, но и на юго-восток. В этом случае выигрышные поля оказываются такими, как показано в нижней части рис. 59. Неизвестно, как следует сформулировать правила игры, чтобы схему расположения надежных полей можно было перенести на неограниченные доски.

Разумеется, правила всех этих игр соответствуют игре

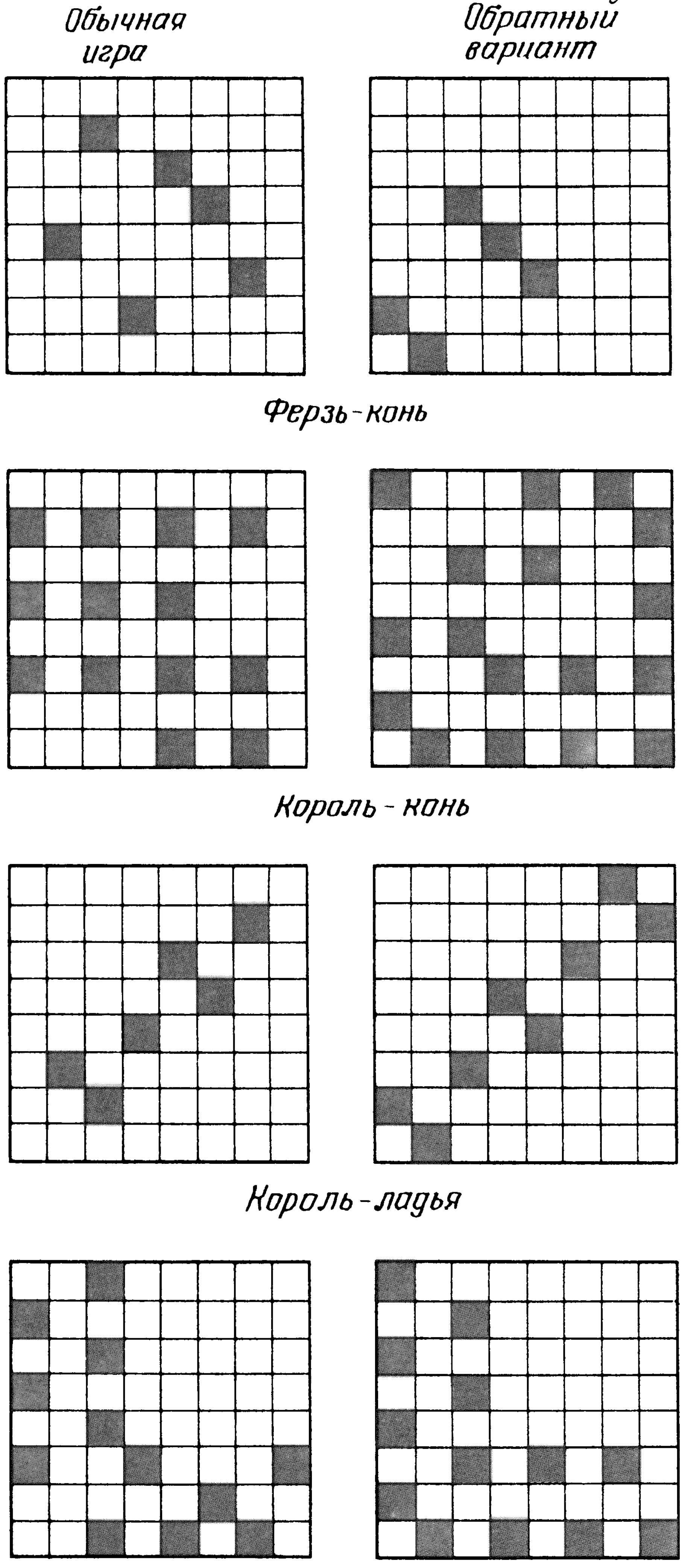


Рис. 54

Комбинированные шахматные фигуры.

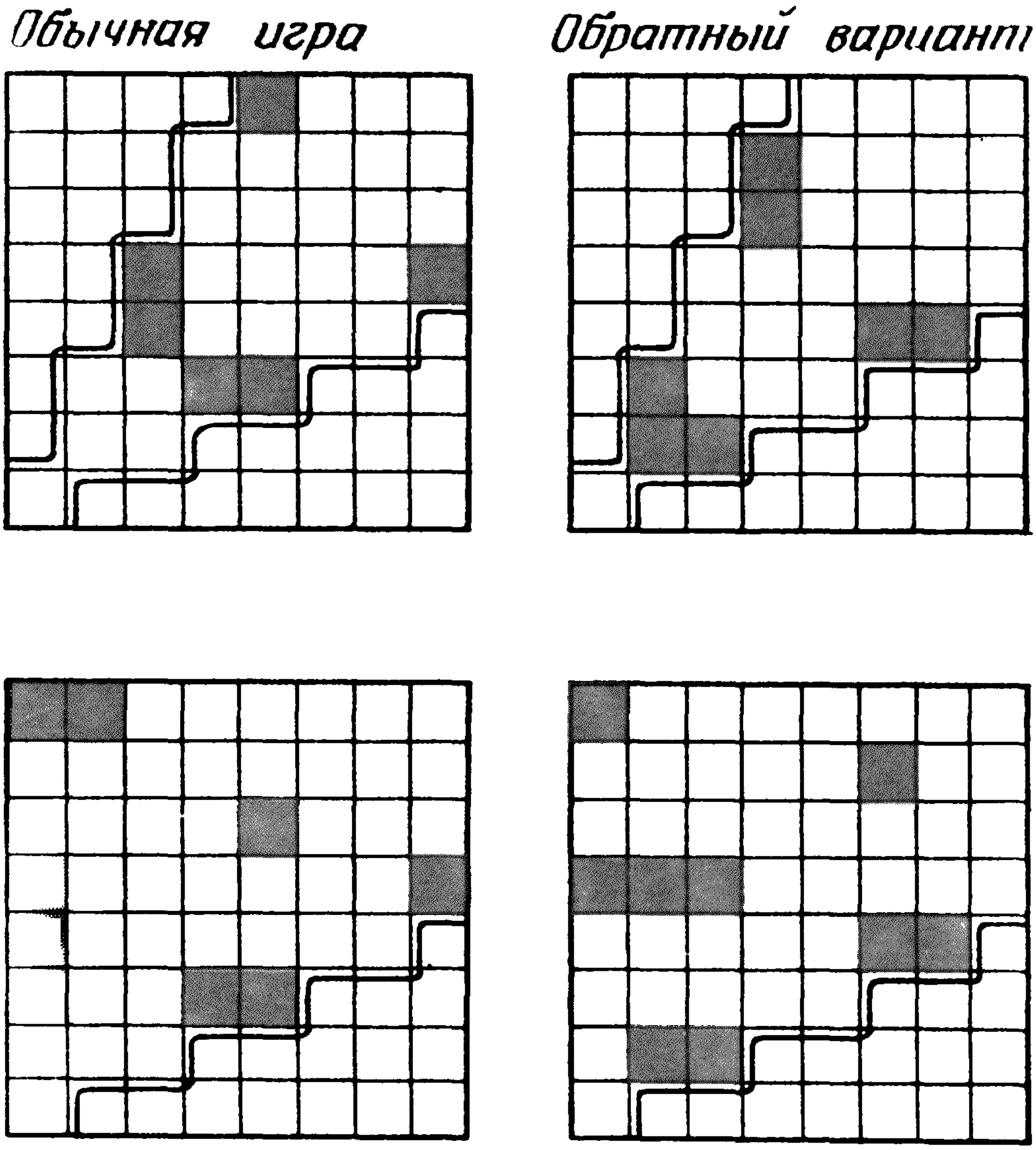


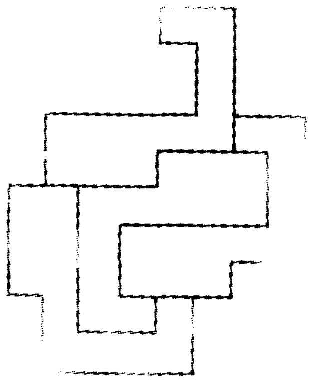
Рис. 55

Аббат (слон – конь) – комбинированная фигура, которая может совершать ходы на Ю, З и ЮЗ (вверху). Аббат с дополнительной возможностью совершать ходы на ЮВ.

в ним с двумя кучками фишек. Тех, кто интересуется другими обобщениями игры Витхоффа, мы отсылаем к статьям, приведенным в списке литературы. Многие читатели предлагали способы упрощения алгоритма Силбера для вычисления выигрышной стратегии при игре в ним Витхоффа, приспособленные к реализации в компьютерных программах.

Глава 9

Треугольники из бильярдных шаров и другие задачи



1. Треугольники из бильярдных шаров

Полковник Джордж Зихерман из Буффало рассказал мне о том, что лет десять назад, когда он наблюдал за одной партией в бильярд, ему пришла в голову следующая задача: нельзя ли из 15 шаров, выстраиваемых перед началом партии в треугольник, составить так называемый разностный треугольник? В разностном треугольнике числа от 1 до 15 расставлены так, что каждое число, стоящее в любом ряду, начиная со второго сверху и ниже, расположено между двумя числами предыдущего ряда и равно абсолютной величине их разности.

Как видно из рис. 56, для трех шаров с числами 1, 2 и 3 задача тривиальна и допускает два решения. Из того же рис. 56 видно, что для шести шаров число решений достигает четырех и что четыре решения допускает задача с десятью шарами. К удивлению Зихермана, в случае пятнадцати бильярдных шаров существует только одно (с точностью до отражения) решение. Можете ли вы найти его?

Поиск решения существенно упрощается, если предварительно рассмотреть треугольные конфигурации из четных и нечетных чисел и выяснить, сколько из них допускают 8 нечетных и 7 четных чисел. Не составляет особого труда обнаружить, что существует лишь 5 вариантов размещения

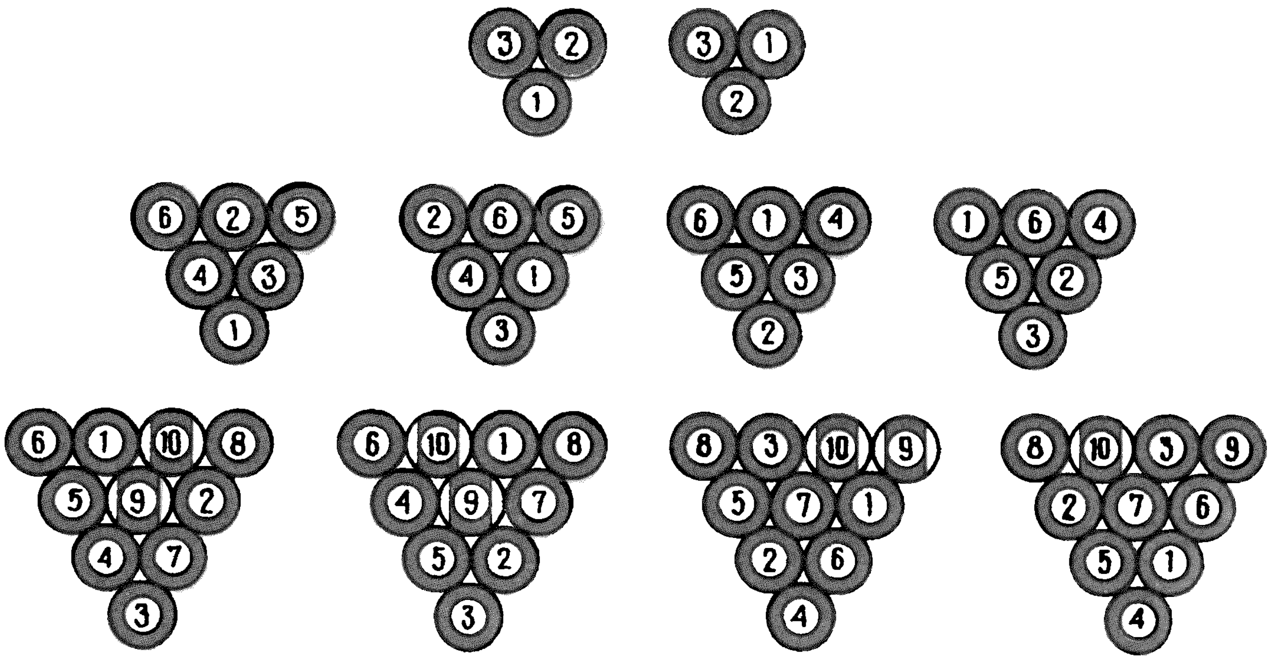


Рис. 56

Разностные треугольники для 3, 6 и 10 бильярдных шаров.

четных (Ч) и нечетных (Н) чисел в верхнем ряду треугольника: ЧЧНЧН, НЧЧЧН, НННЧЧ, ННННЧ и ННЧЧН. Ясно, что шар с числом 15 должен находиться в верхнем ряду, а шар с числом 14 – либо в верхнем ряду, либо во втором ряду сверху между шарами с числами 15 и 1.

Задача Зихермана тесно связана с одной из задач, приведенных в книге известного польского математика Гуго Штейнгауза «Сто задач» [9, 1*]. Суть ее сводится к следующему. Дана треугольная комбинация из четного количества чисел. Всегда ли можно превратить ее в разностный треугольник из четных и нечетных чисел, чтобы количество четных чисел было равно количеству нечетных чисел? Более десяти лет задача Штейнгауза оставалась нерешенной, пока Хейко Харборт не доказал, что ответ на вопрос задачи должен быть утвердительным [9, 2*].

Насколько мне известно, никто не пытался исследовать то, что можно было бы назвать общей задачей о бильярдных шарах: дано любое треугольное число шаров, перенумерованных последовательными натуральными числами, начиная с единицы. Всегда ли можно построить из этих шаров разностный треугольник? Если нет, то существует ли наибольший треугольник, для которого задача имеет решение? Если наибольший треугольник существует, то какой он? Как мы теперь знаем, четно-нечетные конфигурации для таких решений существуют для всех треугольников из четного числа шаров. Существуют ли аналогичные решения для всех треугольников из нечетного числа шаров?

Позвольте мне в заключение привести задачу-шутку для тех читателей, кому удалось справиться с решением задачи о 15 бильярдных шарах. Предположим, что на шарах проставлены последовательные четные числа от 2 до 30. Можно ли составить из таких шаров разностный треугольник?

2. Каннибализм среди торов, или торы-тороеды

Тором называется поверхность, имеющая форму бублика. Представим себе, что тор сделан из тонкой резины. Хорошо известно, что если в таком торе проделать маленькую дырочку, то тор можно вывернуть через нее наизнанку.

Математик из Университета Монаш в Австралии Джон Стиллуэлл предлагает следующую задачу. Два тора A и B сцеплены между собой так, как показано на рис. 57.

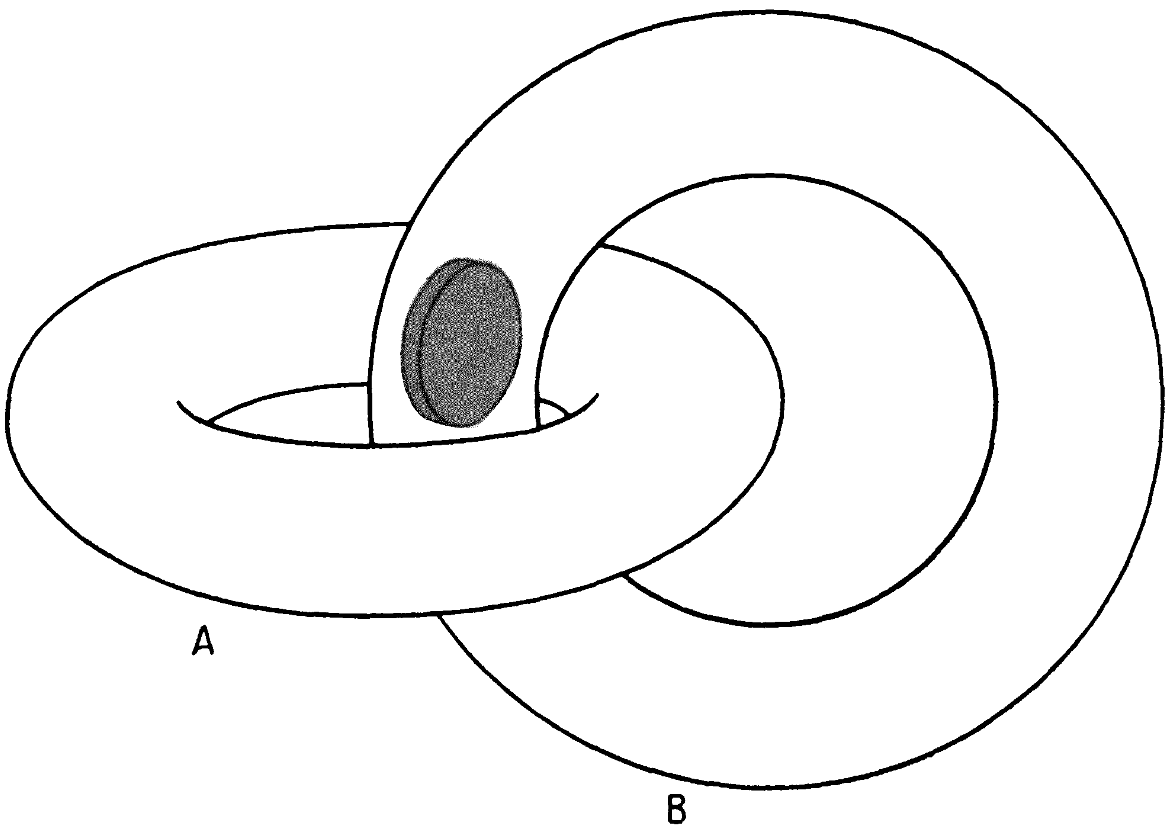


Рис 57

Может ли тор *B* проглотить тор *A*?

В торе В имеется дырочка – «рот». Любой из торов разрешается как угодно растягивать, сжимать и деформировать, но нигде не разрывать и не склеивать. Может ли тор В проглотить тор А? В конце каннибальского акта тор В должен принять свою исходную форму, хотя и несколько раздуться в объеме, а тор А целиком очутиться внутри тора В.

3. Исследуя тетрады

Наиболее сенсационной новостью для любителей занимательной математики в 1976 г. стало сообщение двух математиков из Иллинойсского университета о том, что им удалось доказать гипотезу о четырех красках. Эту знаменитую гипотезу часто путают с более простой теоремой из топологии, доказать которую совсем нетрудно. Она утверждает, что общую границу на плоскости могут иметь не более четырех областей. Майкл Р. У. Бакли в «Журнале занимательной математики» [9, 3*] предложил называть тетрадой четыре односвязные плоские области, из которых любые две имеют общую границу ненулевой протяженности.

В тетраде, изображенной слева на рис. 58, нет дыр – она «сплошная». Конгруентны лишь три области. Тетрада, изображенная на рис. 58 справа, составлена из четырех конгруентных областей, а в середине у нее большая дыра. Можно ли, спрашивает Бакли, построить тетраду из четырех конгруентных областей и без дыры?

Утвердительный ответ на этот вопрос дал студент Стэн-

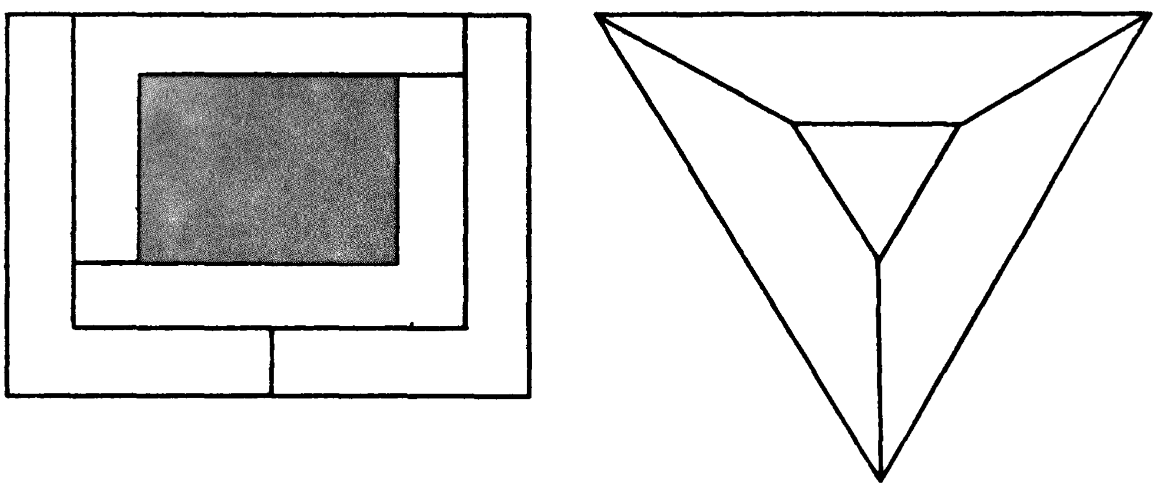


Рис. 58

Пара тетрад.

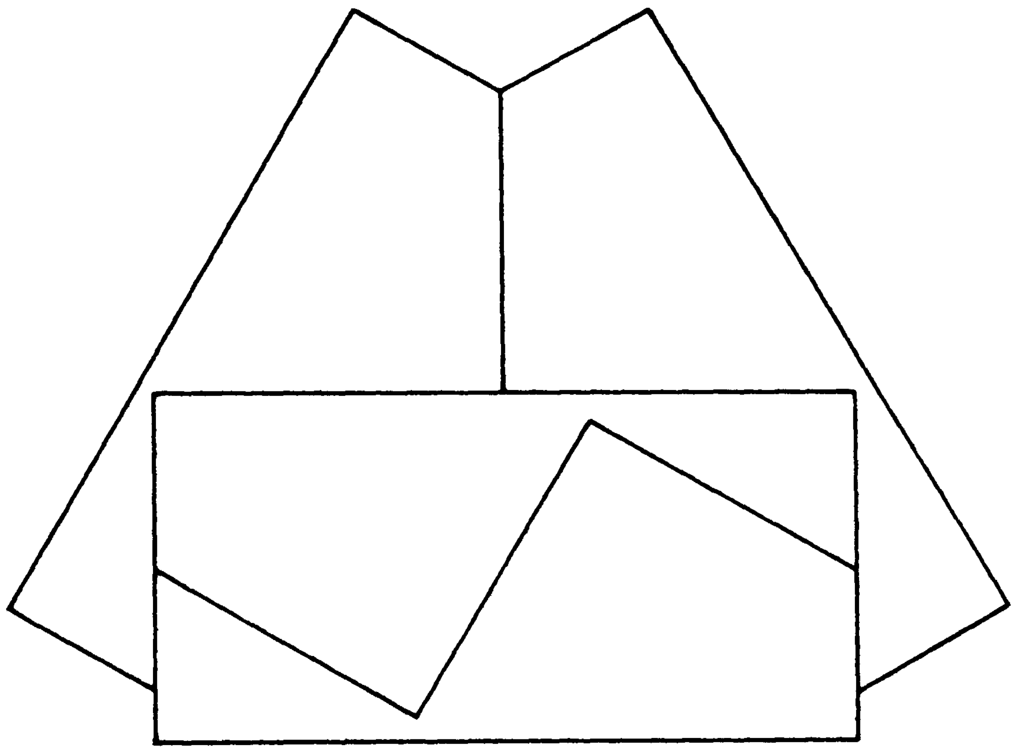


Рис. 59

Тетрада из конгруентных шестиугольников.

фордского университета Скотт Ким. Полученные им результаты не опубликованы, и я признателен ему за разрешение привести здесь некоторые из них.

На рис. 59 вы видите решение из четырех конгруентных шестиугольников. Неизвестно, можно ли получить решение из конгруентных многоугольников с меньшим числом сторон или решение с выпуклой внешней границей тетрады.

На рис. 60А вы видите решение, составленное из четырех конгруентных полигексов порядка 4. (Полигексом называется объединение конгруентных правильных шестиугольников.) Нетрудно показать, что составить тетраду из полигексов более низкого порядка невозможно.

На рис. 60Б показано решение из конгруентных полиамондов порядка 10. (Полиамондом называется объединение конгруентных равносторонних треугольников.) Неизвестно, существует ли тетрада, составленная из полиамондов более низкого порядка.

На рис. 60В представлено решение из конгруентных полимино порядка 12. (Полимино называется объединение конгруентных квадратов.) Неизвестно, существует ли решение из полимино более низкого порядка.

На рис. 60Г вы видите решение из конгруентных фигур, обладающих двусторонней (осевой) симметрией, и сама

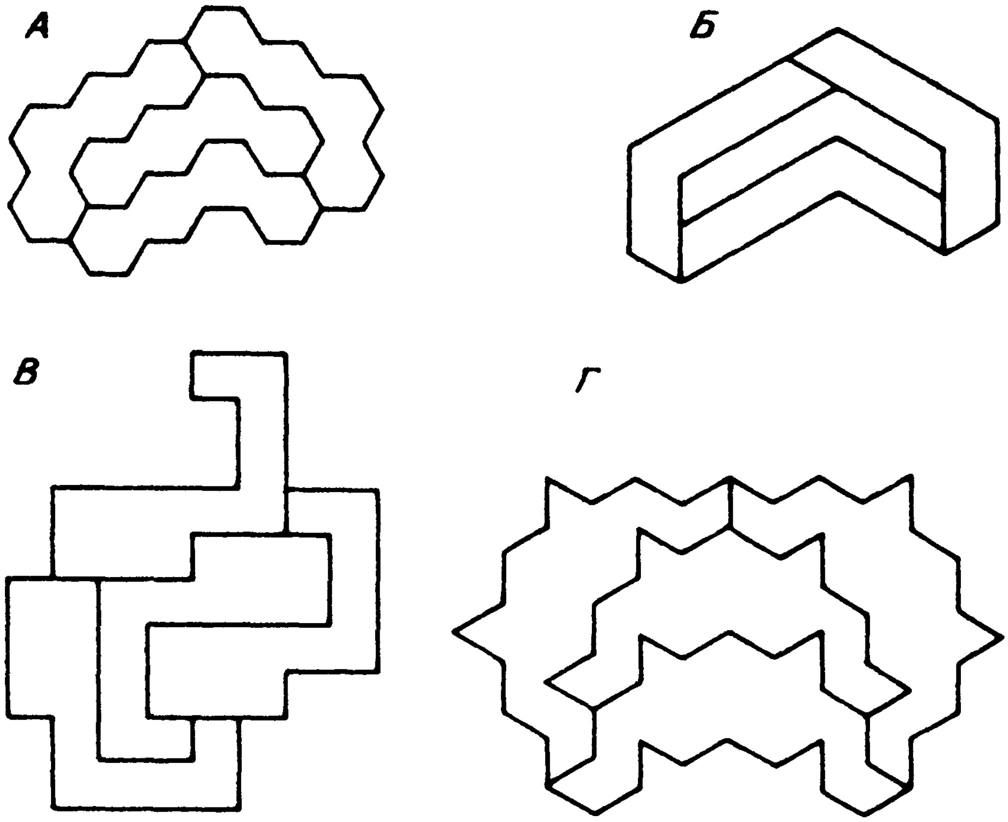


Рис. 60

Решения для различных тетрад.

тетрада также обладает двусторонней симметрией. Существует ли аналогичное решение из многоугольников с меньшим числом сторон?

С 70-х годов прошлого века известно, что в трехмерном пространстве бесконечно много конгруентных тел можно составить так, чтобы каждые два из них имели общую часть поверхности. Читателям, которым этот результат неизвестен, я предлагаю попытаться решить аналогичную задачу с поликубами. (Поликубом называется объединение конгруентных кубов.) Покажите, как можно составить пространственное тело без внутренних пустот из конгруентных поликубов так, чтобы у любых двух поликубов часть поверхности была общей. Существование такой «пространственной мозаики» свидетельствует о том, что для раскраски любой трехмерной «карты» понадобилось бы бесконечно много красок.

4. Рыцари и лжецы

Математику из Нью-Йоркского городского университета Рэймонду Смаллиану, чьи замечательные шахматные задачи известны постоянным читателям раздела «Математические игры» журнала «Scientific American», который я редактировал на протяжении многих лет, принадлежат следующие четыре превосходные логические задачи о рыцарях, лжецах и, возможно, некоторых других людях. Во всех четырех задачах рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет.

A говорит: «*B* – рыцарь».
B говорит: «*A* – не рыцарь».

Докажите, что один из них говорит правду, но он не рыцарь.

A говорит: «*B* – рыцарь».
B говорит: «*A* – лжец».

Докажите, что один из них говорит правду, но он не рыцарь, или что один из них лжет, но он не лжец.

В приведенных выше задачах нам необходимо учитывать возможность того, что говорящий не рыцарь и не лжец. В следующих двух задачах каждый из трех участников либо рыцарь, либо лжец.

C говорит: «*B* – лжец».
B говорит: «*A* и *C* – одного поля ягоды, т.е. либо оба рыцари, либо оба лжецы».
Кто *A*?

A говорит: «*B* и *C* – одного поля ягоды».
У *C* спрашивают: «*A* и *B* – одного поля ягоды?»
Что ответит *C*?

5. Маршруты исчезнувшего короля

Несколько лет назад Скотт Ким предложил задачу, которую он назвал «Маршрут исчезнувшего короля». Речь идет об обходе королем шахматной доски по маршруту, удовлетворяющему следующим условиям.

Во-первых, король должен побывать на каждом поле доски один и только один раз.

Во-вторых, после каждого хода король должен двигаться в другом направлении, т.е. он не может совершить два последовательных хода в одном и том же направлении.

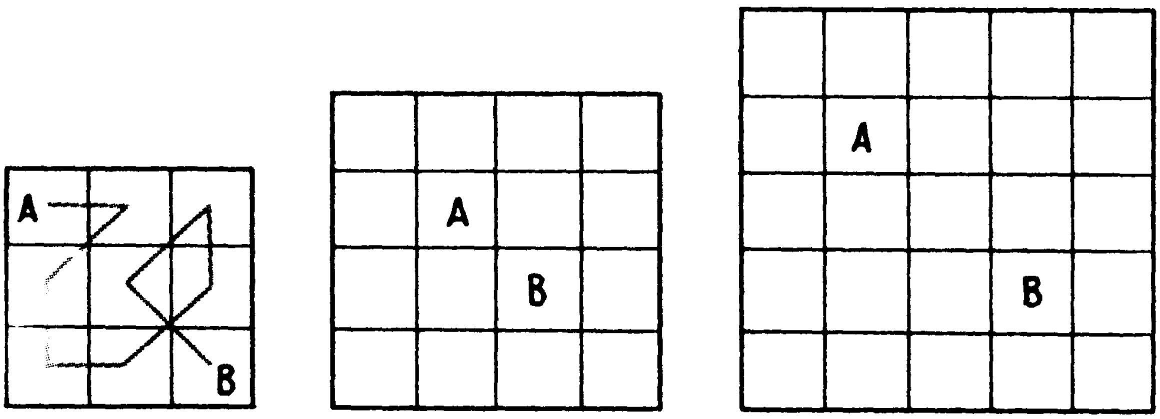
В-третьих, число точек самопересечения королевского маршрута должно быть минимальным.

На рис. 61А показан единственный возможный маршрут на доске 3 × 3 с поля *А* на поле *В*. Он имеет одну точку самопересечения и единствен (с точностью до отражения относительно главной диагонали). Замкнутый маршрут на такой доске невозможен. Замкнутые маршруты без самопересечений нетрудно найти на доске 4 × 4. На доске 5 × 5 замкнутый маршрут, по-видимому, требует двух самопересечений. На досках бо́льших размеров задача менее интересна, поскольку считается, что всегда возможны замкнутые маршруты без самопересечений и незамкнутые маршруты без самопересечений.

А вот две красивые задачи о маршрутах исчезнувшего короля, придуманные Кимом.

На доске 4 × 4, изображенной на рис. 61Б, найдите маршрут исчезнувшего короля, ведущий из *А* в *В* и имеющий всего три самопересечения. Решение единственно.

На доске 5 × 5, изображенной на рис. 61В, найдите маршрут исчезнувшего короля, ведущий из *А* в *В* и имеющий всего два самопересечения. Это необычайно трудная задача. Ким не знает, единственно ли найденное им решение и допускает ли эта задача решение лишь с одним самопересечением.



А *Б* *В*

Рис. 61

Маршруты исчезнувшего короля на трех шахматных досках различных размеров.

6. Эллипсы Штейнера

Эта старая задача восходит к знаменитому швейцарскому геометру XIX века Якобу Штейнеру. В качестве извинения за попытку реанимировать ее я хочу сослаться на то, что она принадлежит к числу лучших из известных мне образцов задач, трудно решаемых методов математического анализа или аналитической геометрии, но становится до смешного простой и легкой при определенном подходе и некоторых знаниях из области планиметрии и проективной геометрии.

Дан треугольник со сторонами 3, 4 и 5 единиц. Площадь его равна 6 квадратным единицам. Требуется вычислить наименьшую площадь эллипса, описанного вокруг такого треугольника, и наибольшую площадь эллипса, вписанного в него.

7. Различные расстояния

На шахматной доске 3×3 легко расставить три фишки так, чтобы расстояния между фишками были попарно различными. Мы считаем, что каждая фишка имеет точечные размеры и находится в геометрическом центре того поля, на котором она стоит, а расстояние между двумя фишками измеряется по прямой, проходящей через центры занятых фишками полей. С точностью до поворотов и отражений задача допускает 5 решений, которые приведены в верхней части рис. 62.

Нетрудно расставить и четыре фишки на доске 4×4 так, чтобы расстояния между фишками были попарно различными. Эта задача допускает 16 решений. На доске 5×5 число решений аналогичной задачи увеличивается до 28.

В январском выпуске «Journal of Recreational Mathematics» («Журнала занимательной математики») за 1972 г. Сидней Кравитц сформулировал эту задачу для досок 5×5 и 6×6. Решение задачи для досок 6×6 оказалось трудным, так как здесь впервые вступает в игру прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 (наименьший пифагоров треугольник). То, что на такой доске целочисленное расстояние в 5 единиц возможно между фишками не только по горизонтали или вертикали, но и по диагонали, резко ограничивает число решений. Как установили читатели журнала, для доски 6×6

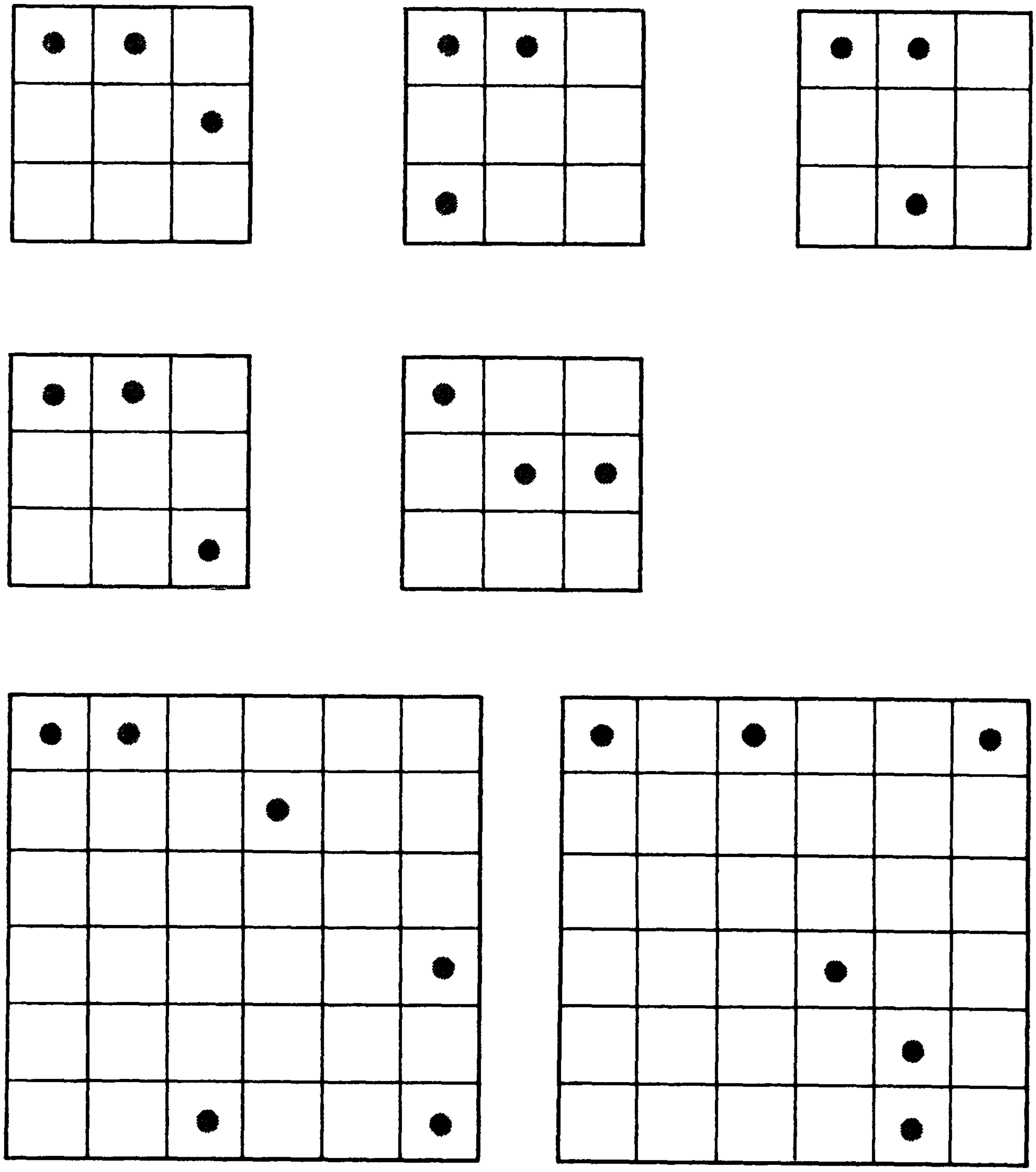


Рис. 62

Задача о размещении точек.

существуют только 2 решения. Они приведены в нижней части рис. 62.

При каких n на шахматной доске размером $n \times n$ можно расставить n фишек так, чтобы расстояния между ними были попарно различны? Как сообщалось в осеннем выпуске того же журнала за 1976 г., Джону Х. Мусону удалось доказать (с помощью принципа Дирихле), что для кваратных досок размером 16×16 и выше решений не существует. Гарри Л. Нелсону удалось понизить предел до шахматных досок 15×15. Милтон У. Грин, опираясь на компьютерную программу, осуществлявшую полный перебор всех возможных вариантов, доказал неразрешимость задачи для досок 8 × 8 и 9 × 9, а также нашел единственное решение для доски 7 × 7. Дэвид Бэбкок, редактор журнала «Popular Computing» («Популярное программирование»), подтвердил результаты Грина для досок размером 8 × 8 включительно. Окончательное решение задачи было получено в 1976 г. Майклом Билером. Составленная им компьютерная программа подтвердила полученные ранее результаты и доказала неразрешимость задачи для досок размером от 10 × 10 до 14 × 14.

Таким образом, шахматная доска 7 × 7 – наибольшая из досок, для которых существует решение задачи. Решение для доски 7 × 7 единственно и найти его без помощи компьютера необычайно трудно. Тем не менее читателям будет интересно испробовать свои силы и попытаться найти это решение.

8. Парадокс в лимериках

Забавный вариант древнего парадокса лжеца был опубликован в английском ежемесячном журнале «Игры и головоломки». Приводим его в последнем из следующих четырех «лимериков».

Юное дарование из Японии
Сочиняло лимерики и симфонии,
Правда, лимерики – особенно плохо.
На вопрос: «Почему?» – отвечало со вздохом:
«Потому, что я всегда стремлюсь
    втиснуть в последнюю строку
    как можно больше слов».

Юный поэт из Китая
Сочинял лимерики, играя.
    Их читая, все улыбались:
    Его лимерики обрывались
    Так неожиданно.

Юная дева стоит чуть жива:
Лимерик оборвался на строчке номер два.

Вот в полном отчаянье стоит господин.

Ответы и решения

1. Треугольники из бильярдных шаров

Единственное (с точностью до отражения) решение задачи с 15 бильярдными шарами представлено на рис. 63. Придумавший эту задачу полковник Джордж Зихерман из Университета штата Нью-Йорк в Буффало обнаружил с помощью компьютера, что решений для аналогичных треугольников 6-го, 7-го и 8-го порядков не существует[1]. Зихерману принадлежит также простое доказательство невозможности построения разностного треугольника для всех порядков вида $2^n - 2$, где $n > 2$.

Вот как выглядит это доказательство при самом маленьком (шестом) порядке ($2^3 - 2 = 6$). Обозначим числа, стоящие в верхнем ряду треугольника, a, b, c, d, e и f. Так как сложение по модулю 2 совпадет с вычитанием по модулю 2, мы можем выразить остальные числа треугольника (по модулю 2) через числа, стоящие в верхней строке, с помощью сложения. Вторую строку образуют числа $a + b$, $b + c$, $c + d$, $d + e$, $e + f$. Следующая (третья сверху) строка начинается с чисел $a + 2b + c$, $b + 2c + d$, ... Продолжая сложение по модулю 2, мы в конце концов доходим до самого нижнего числа (стоящего в нижней вершине треугольника), которое равно $a + 5b + 10c + 10d + 5e + f$. Всего треугольник содержит 6 чисел a, 20 чисел b, 34 числа c, 34 числа d, 20 чисел e и 6 чисел f. Все коэффициенты четны, следовательно, сумма всех чисел, входящих в треугольник, четна. Но, с другой стороны, треугольник содержит 11 нечетных чисел и 10 четных чисел, следовательно, сумма всех входящих в него чисел нечетна, и мы приходим к противоречию.

Приведенная выше последовательность коэффициентов перед числами верхнего ряда, встречающимися в треугольнике (6, 20, 34, 34, 20, 6), совпадает с уменьшенными на единицу числами, образующими седьмую строку треугольника Паскаля. Общее доказательство Зихермана опирается на известную теорему о том, что в треугольнике Паскаля

[1] Под порядком треугольника автор понимает число шаров, укладывающихся вдоль стороны треугольника.– *Прим. перев.*

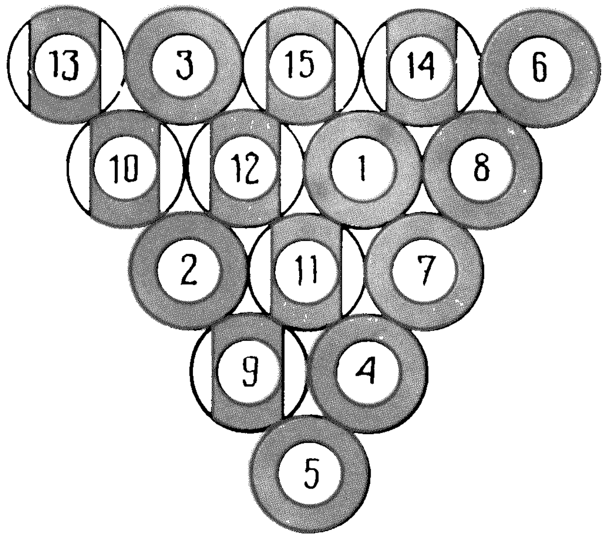


Рис. 63

Решение задачи о бильярдных шарах.

лишь строки с номерами $2^n - 1$ состоят только из нечетных чисел.

Чарлз У. Тригг доказал среди прочего, что в любом треугольнике из абсолютных величин разностей наименьшее число равно единице. Тригг предполагает, что других таких треугольников, кроме одиннадцати приведенных на рис. 56 и 63, не существует. В качестве шутки читателям было предложено построить разностный треугольник из 15 шаров, на которых стоят четные числа от 2 до 30. Единственное решение получается сразу, стоит только умножить на 2 каждое число в треугольнике, приведенном на рис. 63.

2. *Каннибализм среди торов, или торы-тороеды*

Один тор может расположиться внутри другого двумя топологически различными способами: внутренний тор может охватывать отверстие наружного тора («дырку от бублика»), а может не охватывать его.

Если два тора сцеплены наподобие звеньев цепи и у одного тора имеется «рот», то он не может проглотить другой тор так, чтобы съеденный тор расположился внутри него, не охватывая отверстия («дырки от бублика»). Убедиться в этом можно, начертив на поверхности каждого тора замкнутую линию так, чтобы эти две кривые оказались сцепленными, как торы. Никакая, даже самая сильная, деформация не в состоянии расцепить эти две линии. Если бы тор-каннибал мог проглотить тор-жертву так, чтобы съеденный

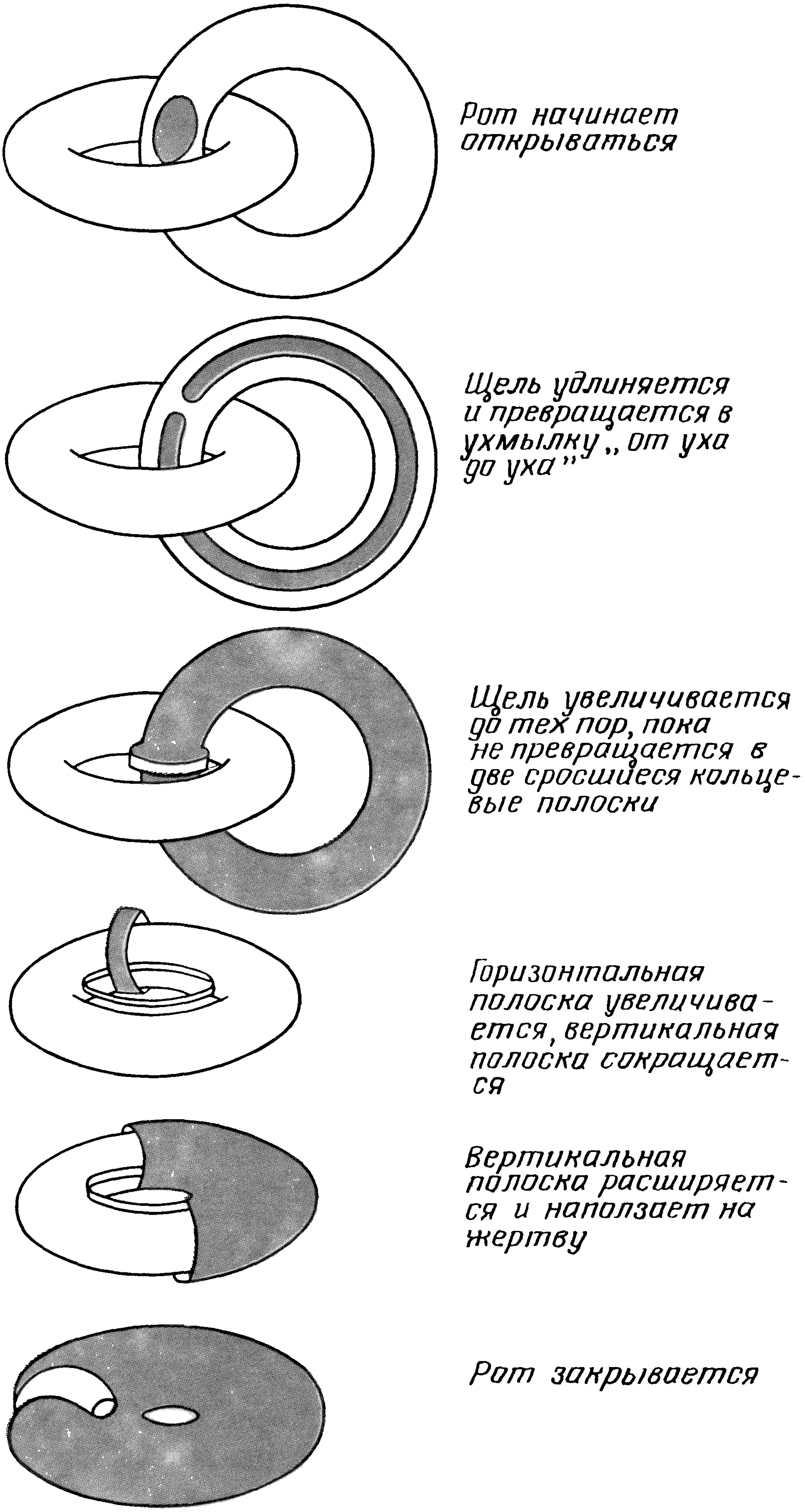


Рис. 64

Как один тор поедает другой.

тор расположился внутри него, не охватывая центрального отверстия, то тогда тор-каннибал мог бы извергнуть съеденный тор через ротовое отверстие и торы расцепились бы. Но тогда расцепились бы и две замкнутые линии, которые первоначально были сцеплены между собой. А поскольку никакой деформацией расцепить сцепленные замкнутые кривые невозможно, такая (вторая) разновидность каннибализма среди торов не встречается.

Однако тор с ротовым отверстием может проглотить другой тор так, чтобы съеденный тор охватывал изнутри его центральное отверстие. Все стадии процесса поедания одного тора другим изображены на рис. 64. Нетрудно заметить, что, поедая тор-жертву, тор-каннибал выворачивается наизнанку.

Представить себе, как это происходит, можно, если вообразить, что тор *A* сжимается до тех пор, пока от него не останется лишь полоска краски, охватывающая тор *B*. Выверните тор *A* через рот наизнанку. Полоска краски оказывается внутри, но при этом перестает охватывать центральное отверстие тора *B*. Расширив полоску до всего тора, вы получите финал процесса поедания тора тором.

3. Исследуя тетрады

На рис. 65 показано, как можно подогнать друг к другу два конгруентных поликуба (один прозрачный, а другой окрашенный в темный цвет). Пристраивая к концам изображенных на рис. 65 поликубов новые конгруентные поликубы, мы можем уложить любое конечное число поликубов, любые два из которых «соприкасаются», т. е. имеют ненулевую площадь общей поверхности, причем в построенном теле нет полостей, или пустот. Продолжая построение неограниченно, мы получаем бесконечное множество поликубов, уложенных так, что они «соприкасаются» друг с другом.

Если отбросить требование конгруентности, но наложить дополнительное требование выпуклости, то примерно с начала нашего века известно, что бесконечно много неконгруентных выпуклых тел могут «соприкасаться». Неизвестно, могут ли соприкасаться бесконечно много конгруентных выпуклых тел, но Скотт Ким показал недавно (результат не опубликован), как можно расположить любое сколь угодно большое число таких тел, чтобы они соприкасались.

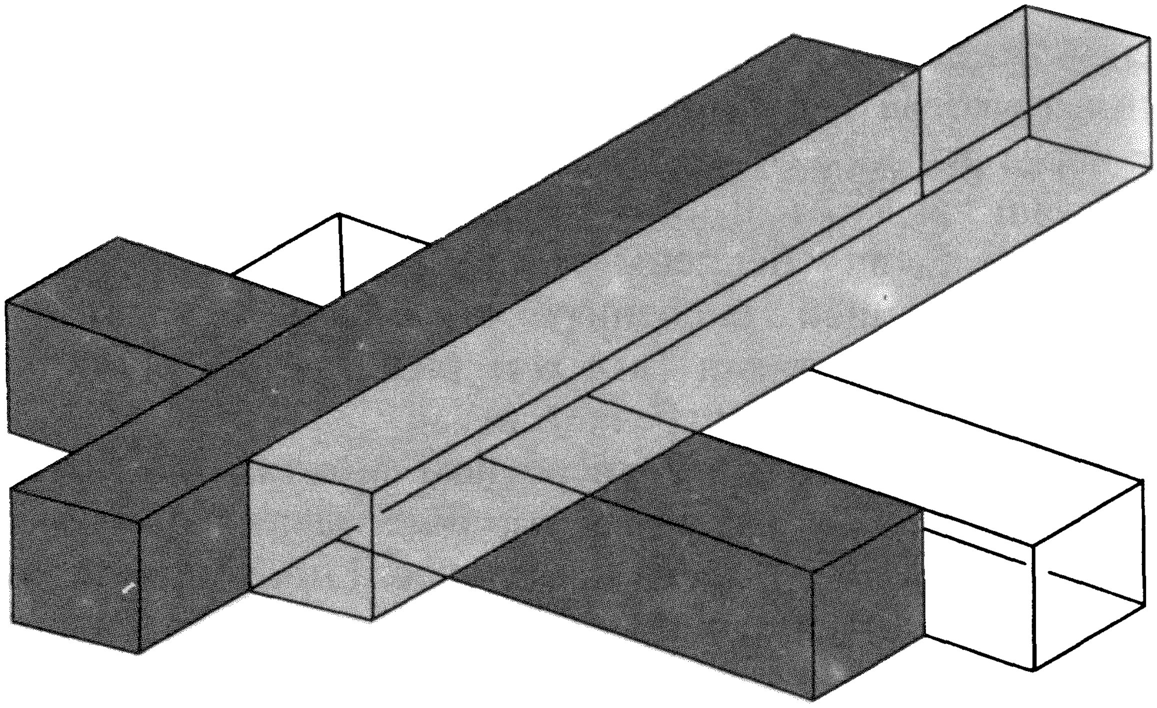


Рис. 65.

Решение задачи о поликубе.

4. Рыцари и лжецы

Четыре логические задачи Рэймонда Смаллиана решаются следующим образом.

1. *A* говорит либо правду, либо неправду. Предположим, что *A* говорит правду. Тогда *B* – рыцарь и говорит правду, когда утверждает, что *A* – не рыцарь. В этом случае *A* говорит правду, но он не рыцарь.

Предположим, что *A* лжет. Тогда *B* – не рыцарь. Но *B* говорит правду, когда утверждает, что *A* – не рыцарь. Следовательно, в этом случае *B* говорит правду, но он не рыцарь.

2. *B* говорит либо правду, либо неправду. Предположим, что он говорит правду. Тогда *A* – лжец и говорит неправду, когда утверждает, что *B* – рыцарь. В этом случае *B* говорит правду, но он не рыцарь.

Предположим, что *B* лжет. Тогда *B* – заведомо не рыцарь. Следовательно, *A* лжет, когда увержает, что *B* – рыцарь. Так как *B* лжет, *A* – не лжец. В этом случае *A* лжет, но он не лжец.

3. *B* – либо рыцарь, либо лжец. Предположим, что он рыцарь. Тогда *A* и *C* должны быть людьми одного типа (либо оба рыцари, либо оба лжецы), как утверждает *B*. *C* лжет, когда утверждает, что *B* – лжец. Следовательно, *C* – лжец. Но если *C* – лжец, то и *A* должен быть лжецом.

Предположим, что B – лжец. Тогда A и C должны быть людьми различного типа. C говорит правду, когда утверждает, что B – лжец, поэтому C должен быть рыцарем. Так как A и C – люди различного типа, A должен быть лжецом. И в том и в другом случае A – лжец.

4. Приводимое Смаллианом решение несколько длинно, и я ограничусь лишь схемой рассуждений. A и B образуют одну из следующих пар: рыцарь-рыцарь, лжец-лжец, рыцарь-лжец или лжец-рыцарь. В любом из этих случаев, как показывает анализ, C независимо от того, рыцарь он или лжец, должен ответить утвердительно.

5. Маршруты исчезнувшего короля

Два маршрута исчезнувшего короля вы видите на рис. 66. Первый маршрут единствен, второй почти единствен (другой маршрут может быть получен, если представленный на рис. 66 маршрут изменить в левом нижнем углу так, как показано штриховой линией).

6. Эллипсы Штейнера

Задача с эллипсами сформулирована для пифагорова треугольника со сторонами 3, 4 и 5, но мы решим ее для произвольного трегольника.

Самый большой эллипс, который можно вписать в равно-

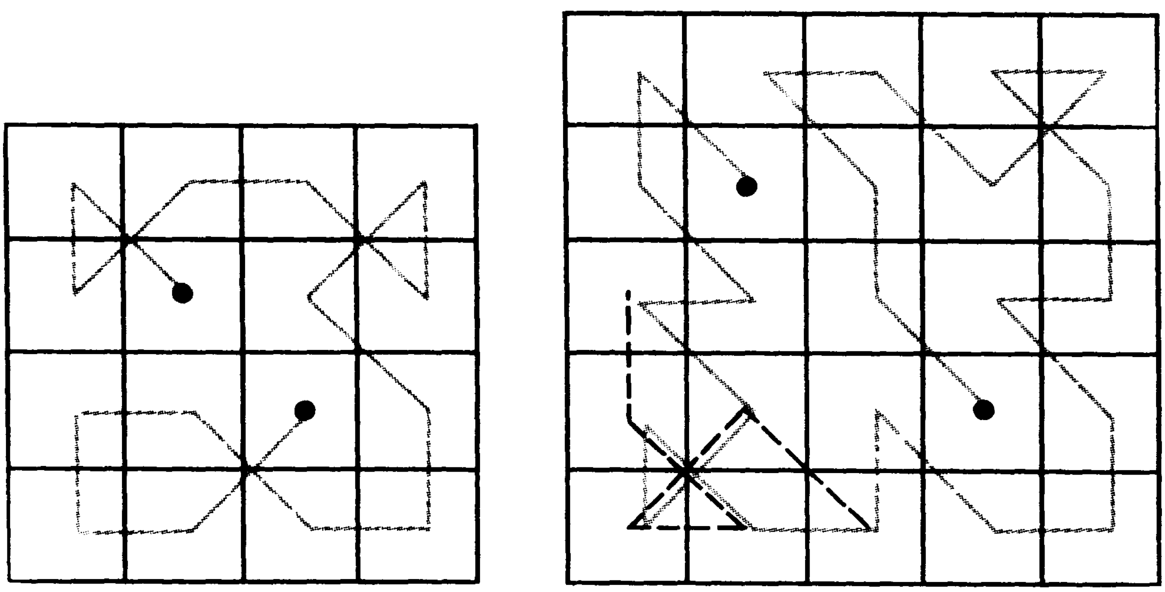


Рис. 66

Решения задачи о маршрутах исчезнувшего короля.

сторонний треугольник, – это круг. Самый маленький эллипс, который можно описать вокруг равностороннего треугольника, – это также круг. С помощью параллельной проекции мы можем преобразовать равносторонний треугольник в треугольник любой формы. Вписанная и описанная окружности переходят при таком проектировании в эллипсы (отличные от окружностей).

Параллельная проекция не изменяет отношений площадей треугольника и внутренностей двух замкнутых кривых, вписанной и описанной. Следовательно, для любого треугольника вписанный эллипс имеет наибольшую, а описанный наименьшую площадь. Иначе говоря, отношение площади наименьшего эллипса, описанного вокруг произвольного треугольника, к площади этого треугольника равно отношению площади круга к площади вписанного в него равностороннего треугольника. Аналогично, отношение площади наибольшего эллипса, вписанного в произвольный треугольник, равно отношению площади круга к площади описанного вокруг него равностороннего треугольника.

Нетрудно показать, что отношение площади вписанного круга к площади равностороннего треугольника равно $\pi/3\sqrt{3}$, а отношение площади описанного круга к площади равностороннего треугольника в четыре раза больше этого числа. Применяя этот результат к пифагорову треугольнику со сторонами 3, 4 и 5, получаем, что площадь наибольшего вписанного в него эллипса равна $2\pi/\sqrt{3}$, а площадь наименьшего описанного вокруг него эллипса равна $8\pi/\sqrt{3}$.

7. Различные расстояния

На рис. 67 показан единственный (с точностью до поворотов и отражений) вариант расстановки 7 фишек на шахматной доске 7×7, при котором расстояния между фишками попарно различны.

8. Парадокс в лимериках

Парадокс возникает в четвертом лимерике, когда читающий мысленно дополняет его строкой вроде: «Лимерик обрывается на строке один». Дополнить такой лимерик означает вступить в противоречие с содержащимся в нем

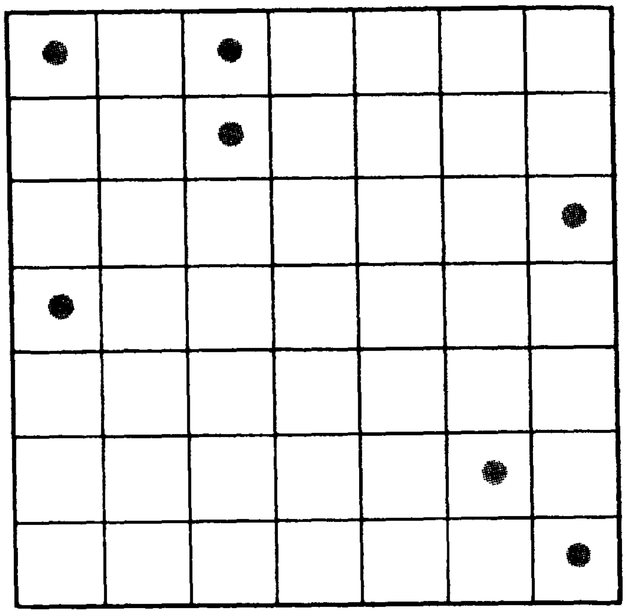


Рис. 67

Решение задачи о размещении точек.

утверждением. Известный английский автор комических стихов Дж. А. Линдон откликнулся на публикацию парадокса в лимериках серией новых лимериков, в которых обыгрывается та же ситуация.

Дополнение

Получено решение обобщения задачи о бильярдных шарах на случай треугольников порядка *n* и шаров, перенумерованных последовательными натуральными числами, начинающимися с единицы. Герберт Тейлор предложил остроумное доказательство того, что ни один ТАВР (треугольник абсолютных величин разностей) не может быть составлен из треугольников порядка 9 или выше. Компьютерные программы исключили ТАВРы порядков 6, 7 и 8. Следовательно, единственное решение для 15 бильярдных шаров является самым большим ТАВРом этого типа.

Чарлз Тригг в статье «Треугольники абсолютных разностей» [9, 4*] доказывает единственность треугольника 5-го порядка и обсуждает некоторые его необычные свойства, например пять последовательных чисел, расположенных вдоль левой стороны треугольника. На основе компьютерных экспериментов и некоторых других результатов Тригг высказывает предположение (как оказалось, правильное) о том, что треугольников из абсолютных величин разностей порядка выше 5-го не существует. Единственное известное мне доказательство правильности гипотезы Тригга было опубликовано в статье «Точные разностные треугольники» Г. Дж. Чена, М. К. Ху, К. В. Ли и Т. К. Ши [9, 5*].

Среди прочего Тригг показывает, что любой треугольник абсолютных величин разностей, составленный из последовательных целых чисел, должен начинаться с единицы и что никакие два из n первых последовательных чисел (где n – порядок треугольника) не принадлежат одному и тому же горизонтальному ряду, т. е. каждое из этих чисел занимает «свой» ряд. Отсюда следует, что число, стоящее в нижней вершине треугольника, не может превосходить числа n.

Гарри Нелсон, издающий с 1977 г. «Journal of Recreational Mathematics» («Журнал занимательной математики»), предложил более общую задачу. Существует ли треугольник абсолютных величин разностей 5-го порядка, составленный из целых чисел от 1 до 17? Составленная Нелсоном компьютерная программа обнаружила 15 решений. Если числа выбирать в интервале от 1 до 16, то помимо уже известного нам решения с числами от 1 до 15 возникают еще два решения: одно решение без 8 с верхним рядом 5, 14, 16, 3, 15, другое решение без 9 с верхним рядом 8, 15, 3, 16, 14.

Соломон В. Голомб предложил три кандидата для дальнейшего исследования.

1. ТАВР порядка больше 5-го составлен из различных, но не последовательных целых чисел. Как велико должно быть самое большое число в таком треугольнике? (Пример: существует ТАВР 6-го порядка, в котором наибольшее число равно 22.)

2. При составлении ТАВРа разрешается использовать все числа от 1 до k с повторениями. Как велико может быть k в ТАВРе n-го порядка? (Пример: существует ТАВР 6-го порядка с $k = 20$.)

3. Какого порядка ТАВРы (mod m)[1)] можно построить (где m – число элементов в треугольнике) из последовательных целых чисел от 1 до m? Каждая разность заменяется вычетом по модулю m. Такие треугольники можно поворачивать так, что каждый элемент, расположенный ниже

[1)] ТАВРы из остатков от деления целых чисел на m, т. е. из целых чисел $0, 1, \ldots, m - 1$. – *Прим. перев.*

первой строки, становится раным сумме (mod m) двух чисел над ним. Приведем в такой повернутой форме четыре решения для треугольника 4-го порядка:

```
1 6 9 4      2 7 8 3      6 1 4 9      7 2 3 8
 7 5 3        9 5 1        7 5 3        9 5 1
  2 8          4 6          2 8          4 6
   0            0            0            0
```

Ретроспективный анализ, проведенный Голомбом и Тейлором с помощью компьютерной программы, показал, что решений для треугольников 5-го порядка не существует. Полковник Джордж Зихерман, который придумал задачу о бильярдных шарах в ее первоначальном варианте, сообщил о компьютерном доказательстве несуществования решения для треугольников 6-го порядка. Вопрос о треугольниках более высокого порядка остается открытым.

Роберт Амманн, Грег Фредериксон и Жан Л. Лойер независимо друг от друга нашли 18-стороннюю многоугольную тетраду, обладающую осевой симметрией (см. рис. 68), тем самым улучшив опубликованное мной 22-стороннее решение.

Пал Эрдёш обратил мое внимание на статью «Различные расстояния между узлами решетки», опубликованную им совместно с Ричардом Гаем [9, 6*], в которой они привели решение для шахматной доски 7×7 и доказали, что для досок более высокого порядка решений не существует. Туран и Гай сформулировали несколько родственных проблем, например, каково минимальное число узлов решетки, расстояния между которыми попарно различны, но при добавлении хотя бы одного узла по крайней мере два расстояния совпадают?

Если точки выбирать не обязательно в узлах решетки, то мы получаем знаменитую нерешенную задачу комбинаторной геометрии: каково наименьшее число различных расстояний, определяемых n точками на евклидовой плоскости? Фан Чен приводит в своей статье «Число различных расстояний, определяемых n точками на плоскости» [9, 7*] ссылки на работы, посвященные этой проблеме, которые появились с тех пор, как Пал Эрдёш впервые сформулировал ее в 1946 г. В примечании при корректуре сообщается, что наилучшая из известных оценок нижней грани равна $n^{4/5}$. Эта оценка обсуждается в статье Ф. Чен, Э. Семереди и У. Т. Троттера, которые авторы подготавливают к печати.

Завершая журнальный вариант этой главы, я назвал лимерик из одной строки последним из четырех. Дрейпер Л. Кауффман, Джон Литтл, Джон Маккей, Томас Д. Нерер и Джеймс Ч. Виббер были первыми из многочисленных читателей, сообщивших мне, что правильнее было бы говорить о лимерике из одной строки как о предпоследнем из пяти лимериков: последний, пятый, лимерик не имеет ни одной строки, и поэтому остальные читатели его не заметили.

Том Райт из Британской Колумбии сообщил мне в письме: «Парадокс в лимериках меня очень заинтересовал. В особенности мне захотелось узнать, нельзя ли сократить лимерики из двух строк и из одной строки. Потом мне показалось, что вы поместили лимерик без единой строки, и я даже посмотрел, нет ли его на журнальной странице. Сначала мне показалось, что его там нет, так как свободного места в колонке совсем не осталось, но потом я сообразил, что для лимерика без единой строки никакого места не требуется, и подумал, что он все-таки там есть. Не в силах разрешить этот парадокс чисто логическими средствами, я вынужден обратиться к вам с покорнейшей просьбой сообщить, напечатан лимерик без единой строки в вашей заметке или не напечатан».

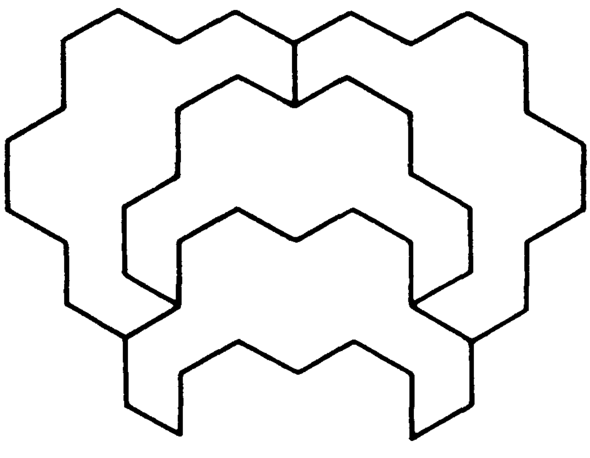


Рис. 68

Тетрада с 18 сторонами, обладающая двусторонней симметрией.

Глава 10

Математическая индукция и цветные шляпы

«Да,– сказал он,– чтобы воспринять это, человеку не нужно глаз».

Платон. «*Государство*», книга V

Взойдет ли солнце 1 января 2001 года? Ответить на этот вопрос с абсолютной уверенностью невозможно. Не исключено, что до этой даты наступит конец света (либо по воле Божьей, либо в результате какого-нибудь природного катаклизма). Например, какая-нибудь гигантская комета (как в мифологии Иммануэля Великовского) остановит вращение Земли, и Солнце застынет посредине небес, как по велению Иисуса Навина. Тот, кто бьется об заклад, что 1 января 2001 года солнце взойдет как обычно, имеет весьма высокие шансы выиграть пари, но это самое большее, что мы можем утверждать [1]. Скачок, который мы совершаем, переходя от

---

[1] «То, что оно наступит, так же верно, как то, что завтра взойдет солнце»,– говорят люди, желая подчеркнуть свою уверенность в наступлении того или иного события. «Такого рода фразы очень нравятся своей необычайной сдержанностью,– писал американский философ Чарлз Пирс [10, 1*],– поскольку утверждение о том, что завтра взойдет солнце, бесконечно далеко от достоверности». В науке нет ни одной истины, говаривал Пирс, на которую он рискнул бы «поспорить на пари, поставив больше, чем миллион миллионов к одному».

конечного множества восходов солнца в прошлом к бесконечному множеству будущих восходов или по крайней мере к конечному множеству будущих восходов с большим числом элементов, называется эмпирической индукцией.

У математиков имеется аналогичный метод, известный под названием математической, или совершенной, индукции, используя который они также совершают скачок, переходя от конечного множества случаев к большему (но по-прежнему конечному) или к бесконечному множеству случаев. В отличие от эмпирической индукции метод математической индукции чисто дедуктивный. «Доказательство через скачок», как его иногда называют, достоверно ничуть не в меньшей степени, чем любое другое доказательство в математике.

Чтобы доказать какое-нибудь утверждение методом математической индукции, необходимо, во-первых, иметь серию утверждений (обычно, но не обязательно, бесконечную), которую можно поставить во взаимно однозначное соответствие с последовательностью положительных целых чисел. Во-вторых, необходимо удостовериться в том, что эти утверждения связаны между собой «наследственным свойством» (термин Бертрана Рассела): если какое-то утверждение истинно, то «следующее» утверждение также истинно. В-третьих, необходимо показать, что первое утверждение истинно. Если эти три условия выполнены, то из принципа математической индукции с «железной» необходимостью следует, что все утверждения истинны.

Доказательство с помощью метода математической индукции можно сравнить с рядом кирпичей (или костяшек домино), поставленных на торец: стоит толкнуть первый кирпич, как один за другим падают и все последующие. Гуго Штейнгауз сравнивал математическую индукцию со стопкой конвертов, в каждый из которых вложена записка такого содержания: «Откройте следующий конверт, прочитайте, что написано на вложенном в него листе бумаги, и выполните это предписание». Если вы подчиняетесь предписанию, содержащемуся в первом конверте, то вам не остается ничего другого, как открыть один за другим все остальные конверты и выполнить все предписания.

Сотни классических задач по занимательной математике решаются в общем виде с помощью математической индукции. На сколько частей можно разделить пирог n прямолинейными разрезами? За сколько ходов можно перенести с одного колышка на другой кольца в игре «Ханойская башня»? В этой главе мы рассмотрим один класс хитроумных логических головоломок, применение к которым математической индукции в общем случае менее известно и таит в себе немало забавных ловушек.

Начнем со старинной задачи-головоломки о цветных шляпах. Три человека A, B и C зажмуриваются, а им на головы надевают черные или красные шляпы. Затем все трое открывают глаза. Каждый видит шляпы своих партнеров, но не видит своей шляпы. Если он видит красную шляпу, то поднимает руку. Как только кто-нибудь из троих сочтет, что знает, какого цвета шляпа у него на голове, он заявляет об этом вслух.

Предположим, что все три шляпы красные. Все трое испытуемых поднимают руки. Спустя какое-то время C, соображающий быстрее других, заявляет: «Моя шляпа красная». Как он пришел к такому выводу?

Рассуждает C следующим образом. «Предположим, что моя шляпа черная. Тогда A, увидев мою черную шляпу, сразу понял бы, что его шляпа красная (чего бы иначе B поднял руку?). С другой стороны, B, рассуждая таким же образом, сразу бы заключил, что у него на голове красная шляпа. Но ни A, ни B ничего не говорят. Их нерешительность может иметь лишь одно объяснение: они видят на мне красную шляпу. Следовательно, моя шляпа красная».

Рассмотрим теперь случай, когда в красных шляпах не три, а четыре человека. Если четвертый человек (обозначим его D) соображает быстрее остальных, то рассуждать он будет примерно так: «Предположим, что на мне черная шляпа. Тогда трое остальных подняли бы руки, так как каждый из них всё равно видит красную шляпу, и задача сводится к предыдущей. По прошествии некоторого времени C, соображающий в тройке быстрее двух остальных, придет к заключению, что на нем красная шляпа, и сообщит об этом». Затем D некоторое время выжидает, не скажет ли C что-нибудь. Поскольку C хранит молчание, D заключает, что его собственная шляпа красного цвета.

Ясно, что описанная выше процедура допускает обобщение. Если имеется пять человек в шляпах, то E заключает, что на нем красная шляпа, так как если бы его шляпа была черной, то ситуация сводилась бы к предыдущему случаю, и по истечении некоторого времени *D* заявил бы, что на нем красная шляпа. Так как *D* безмолвствует, *E* заключает, что все шляпы, в том числе и его собственная, должны быть красными. И так происходит при любом числе людей. Математическая индукция заставляет нас прийти к заключению, что если на всех людях (число которых равно n) красные шляпы, то по прошествии некоторого времени самый сообразительный из них догадается, что на нем красная шляпа.

Такое обобщение обычно вызывает множество возражений, так как в условиях задачи содержатся довольно туманные утверждения относительно степени сообразительности участников эксперимента с цветными шляпами и продолжительности времени, которое требуется им, чтобы прийти к заключению (если они думают долго, то задача становится «экспериментально неосуществимой»). Представьте себе, что в группе испытуемых 100 человек и что после нескольких часов размышлений самый сообразительный из них догадается, что на нем красная шляпа, затем еще через несколько часов определит цвет своей шляпы второй по сообразительности человек в группе и т. д., пока не останутся два наиболее туго соображающих участника группы.

Неопределенности можно избежать, если ту же задачу сформулировать более точно. Пусть имеются три человека *A*, *B* и *C* и 5 шляп: 3 красные и 2 черные. Предположим, что каждый из троих испытуемых честен и обладает способностью рассуждать логично (в том смысле, что может быстро приходить к заключению, сколь бы сложны ни были предшествующие рассуждения). Как и прежде, испытуемые зажмуриваются, и арбитр надевает каждому из них на голову красную шляпу. Две оставшиеся (черные) шляпы арбитр прячет. Инструкция, по которой испытуемые должны поднять руку, если видят красную шляпу, заменяется тем, что арбитр опрашивает их по очереди: «Знаете ли вы, какого цвета ваша шляпа?».

A правдиво отвечает, что не знает. *B* также отвечает, что не знает. *C* отвечает: «Да, на мне красная шляпа». Как он пришел к такому заключению?

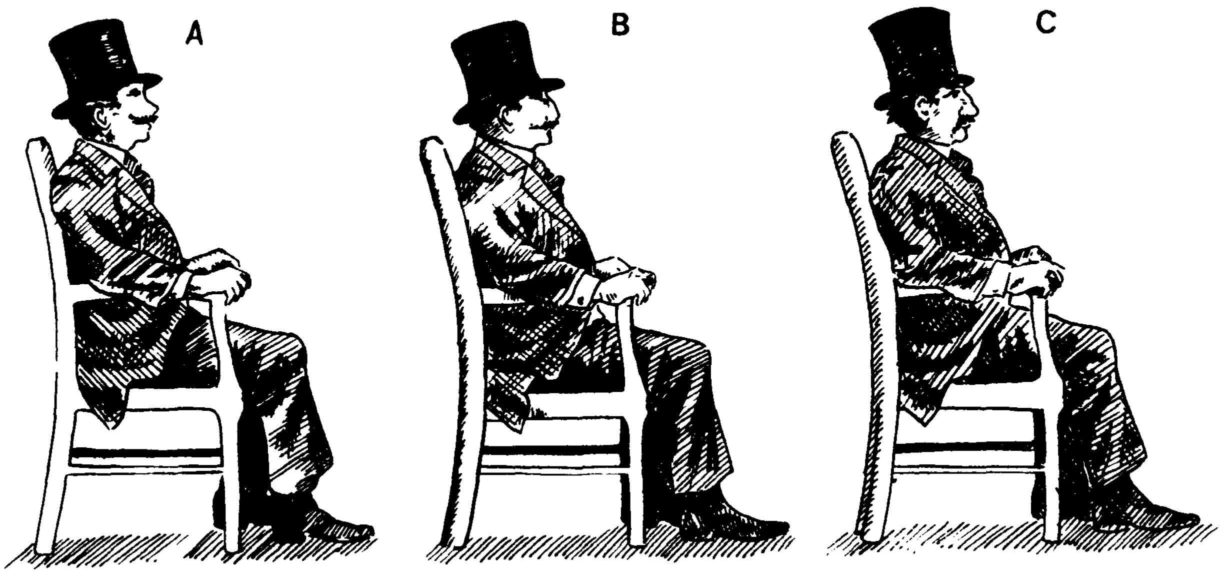


Рис. 69

Задача о цветных шляпах. (Красные шляпы изображены серым цветом.)

Самое удивительное в этой задаче состоит в том, что C может ответить на вопрос арбитра утвердительно, даже если он слеп! Кроме того, испытуемому B вовсе не нужно видеть шляпу испытуемого A. Представьте себе, что трое испытуемых сидят в затылок друг другу так, как это изображено на рис. 69. Каждый видит шляпы только тех, кто сидит перед ним. Испытуемый C, сидящий на третьем стуле, «слеп» в том смысле, что не видит ни одной шляпы.

Он рассуждает следующим образом: „A может ответить «да» только в том случае, если видит две черные шляпы. Если же A говорит «нет», то это означает, что по крайней мере одна из двух шляп (B и C) не черная. Предположим, что моя шляпа черная. Испытуемый B видит, что она черная. Следовательно, как только B слышит отрицательный ответ испытуемого A, он заключает, что его собственная шляпа красная. (В противном случае шляпы у B и C были бы черными и A ответил бы «да».) Но раз B ответил «нет», это можно объяснить только тем, что B видит мою красную шляпу. Следовательно, я могу ответить «да»".

Эта задача, как и предыдущая, легко допускает обобщение на случай n сидящих в затылок друг другу людей и запаса из n красных и $n-1$ черных шляп. Предположим, что перед C сидит четвертый испытуемый D. Все шляпы красные. D рассуждает так: «Если моя шляпа черная, то трое испытуемых, сидящих позади меня, видят ее и знают, что им на троих могут достаться лишь две черные шляпы. Следовательно, задача сводится к предыдущей, которая уже решена». После того как *A* и *B* на вопрос арбитра дают отрицательный ответ, *C* мог бы сказать «да». Но он говорит «нет», и *D* заключает, что шляпа на нем должна быть красной. Математическая индукция сразу же распространяет полученное решение на случай *n* человек: если у всех *n* красные шляпы, то на вопрос арбитра все ответят отрицательно, кроме последнего (*n*-го) испытуемого, который заключит, что у него красная шляпа.

Можно попытаться решить более трудную задачу. Представим себе снова троих людей, сидящих в затылок друг другу, и предположим, что арбитр раздает им любую комбинацию шляп из имеющихся у него пяти, а затем опрашивает испытуемых в порядке возрастания «слепоты» (*A*, *B*, *C*). Может любой из испытуемых на вопрос арбитра всегда ответить утвердительно? Допускает ли описанная ситуация обобщение на случай *n* испытуемых и множества из *n* красных и $n - 1$ черных шляп? Всегда ли утвердительный ответ последует на *n*-й вопрос или раньше независимо от того, какая комбинация шляп надета на головы испытуемых?

В большинстве задач этого типа мы сталкиваемся с любопытным парадоксом. Рассмотрим случай, когда имеются три человека, все шляпы красные и каждый из испытуемых видит двух других. На вопрос арбитра *A* и *B* отвечают отрицательно, *C* отвечает утвердительно. Почему необходимо задать вопрос испытуемому *A*? Еще до того, как арбитр задаст вопрос испытуемому *A*, оба других испытуемых знают, что он непременно ответит отрицательно (*B* знает это потому, что видит красную шляпу на *C*, а *C* знает потому, что видит красную шляпу на *B*). Но если *B* и *C* заранее знают ответ *A*, то может ли вопрос, адресованный *A*, и его ответ дать какую-нибудь новую информацию? С другой стороны, если начать опрос с *B*, то *C* не в состоянии прийти к своему заключению. Можете ли вы объяснить этот кажущийся парадокс?

Шляпы двух цветов эквивалентны шляпам, помеченным цифрами 0 и 1, т. е. целыми числами в двоичной системе. Существуют десятки задач, тесно связанных с задачами о шляпах более двух цветов. Такие задачи легче понять, если вместо цветов использовать положительные целые числа.

Следующую игру для двух лиц прислал мне в 1976 г. математик из Калифорнийского университета в Беркли Дэвид Гейл.

Арбитр выбирает любую пару последовательных положительных целых чисел. Кружок с одним из них наклеивается на лоб одному человеку, а кружок с другим числом – другому. Каждый из испытуемых честен и обладает способностью логически мыслить. Каждый видит число на лбу другого, но не видит число у себя на лбу. Каждый знает (и знает, что его партнеру это также известно), что у них на лбах последовательные числа.

Арбитр поочередно спрашивает у каждого, знает ли он, какое число написано у него на лбу, и продолжает опрос до тех пор, пока один из испытуемых не ответит утвердительно. Используя волшебный метод математической индукции, нетрудно доказать, что первым в конце концов даст ответ тот из испытуемых, у кого число n больше, и что утвердительный ответ последует на n-й или $(n - 1)$-й ответ. Приглашаю читателя проанализировать эту игру и выяснить, при каких условиях человек с бóльшим номером отвечает утвердительно на n-й и при каких – на $(n - 1)$-й вопрос. При анализе следует учитывать лишь два обстоятельства: кому из двух испытуемых (с бóльшим или с меньшим числом) задает свой первый вопрос арбитр и четно или нечетно большее число.

Парадокс игры с цветными шляпами проявляется здесь в еще более яркой форме. Перефразирую письмо Гейла. Предположим, что на лбу у двух испытуемых написаны числа 99 и 100 и что человека с числом 100 арбитр спрашивает первым. На 100-й вопрос тот ответит утвердительно. Но для чего тогда задавать первые два вопроса? Ведь каждому еще до начала опроса известно, что первые два ответа должны быть отрицательными. Могут ли в таком случае первые два вопроса принести какую-нибудь информацию? После того как они заданы, обоим испытуемым не становится известным ничего такого, что не было бы им известно раньше. Следовательно, они ничуть не приблизились к решению задачи об определении числа, которое написано у них на лбу, и поэтому игра никогда не закончится. Каким образом ритуальное повторение отрицательных ответов, неизбежность которого известна каждому из испытуемых, сокращает число вопросов, которые необходимо задать прежде, чем может последовать утвердительный ответ? Такое рассуждение кажется безупречным.

Предположим, что мы ограничим множество, из которого разрешается выбирать последовательные числа, первыми 100 натуральными числами: 1, 2, ..., 100. Каждая пара последовательных чисел (1,2; 2,3; ...; 99, 100) написана на отдельной карточке. Арбитр извлекает одну карточку наудачу (случайным образом), пишет значащиеся на ней номера на лбу у двух логически мыслящих испытуемых и предлагает им сыграть в следующую игру. Человек с меньшим номером k должен уплатить k долларов своему партнеру. Арбитр спрашивает испытуемого A, согласен ли он заплатить партнеру, а затем обращается с тем же вопросом к испытуемому B. Выплата денег производится только в том случае, если оба испытуемых отвечают на вопрос арбитра утвердительно.

Докажем теперь, что в этой игре платеж так никогда и не происходит. Если A видит на лбу B число 100, то он знает, что у него самого на лбу стоит номер 99, и поэтому на вопрос арбитра отвечает отрицательно. Если же A видит на лбу B число 99, то он рассуждает так: «У меня на лбу стоит либо номер 98, либо номер 100. Если у меня на лбу написано число 100, то B (рассуждая логично) на вопрос арбитра должен ответить отрицательно, и игра сорвется. Если же у меня на лбу стоит номер 98, то платить я не должен, и на вопрос арбитра мне надлежит ответить отрицательно». Если A видит на лбу своего партнера номер 98, то он рассуждает так: «У меня на лбу стоит либо номер 97, либо номер 99. Если бы мой номер был бы равен 99, то B не стал бы играть по причинам, изложенным выше. Если же у меня на лбу стоит номер 97, то я проиграю. Поэтому на вопрос арбитра мне следует ответить отрицательно». И так до тех пор, пока мы не дойдем до разбора того, как должен поступить A, если он видит на лбу у B номер 1. Если A видит номер 1, то он заключает, что выиграет. Однако ему известно, что если на вопрос арбитра он ответит утвердительно, то B ответит отрицательно.

Предположим, что множество карточек с парами последовательных чисел бесконечно и начальный отрезок ряда натуральных чисел неограничен справа. Докажем, что в этом случае оба испытуемых на вопрос арбитра ответят утвердительно. Испытуемый A рассуждает следующим образом: «Я вижу на лбу партнера номер k. Значит, мой собственный номер равен либо $k - 1$, либо $k + 1$. Если я проиграю, то потеряю $k - 1$ долларов. Если я выиграю, то получу k долларов. Выигрыш и проигрыш равновероятны, а так как выиграть я могу больше, чем проиграть, игра для меня выгодна. Ясно, что я согласен сыграть в нее». Разумеется, испытуемый B рассуждает точно так же. Но такая ситуация абсурдна, так как игра не может быть выгодной для обоих участников одновременно.

Парадокс можно еще более усилить, если воспользоваться одной идеей, принадлежащей Дж. Э. Литтлвуду, изложившему собственную версию парадокса в первой главе своей книги «Математическая смесь». Предположим, что каждая карточка имеется в 10^n экземплярах, где n – меньшее из двух последовательных чисел на карточке. Тогда пара (1, 2) значится на 10 карточках, пара (2, 3) – на 100 карточках, пара (3, 4) – на 1000 карточках и т. д. Игра проводится так же, как прежде. Предположим, что любой из участников видит на лбу своего партнера номер n. Ему известно, что карточек с числом $n + 1$ в 10 раз больше, чем карточек с числом $n - 1$. Следовательно, не говоря уже о том, что в случае выигрыша он получит на 1 доллар больше, чем уплатит в случае проигрыша, вероятность выигрыша в 10 раз больше, чем вероятность проигрыша! Литтлвуд приписывает авторство этой «чудовищной гипотезы» физику Эрвину Шрёдингеру.

Я не стану заниматься здесь разрешением этого парадокса, так как не вполне уверен в том, что смогу это сделать. Недостаточно доказать, что мы имеем дело с честной игрой, имеющей соответствующую матрицу платежей. Ясно, что игра честная. Необходимо объяснить, где именно кроется ошибка в рассуждениях участников игры A и B.

Джон Хортон Конуэй придал этой игре еще более трудное для анализа и глубокое обобщение. Игру нетрудно обобщить на случай n участников и n последовательных чисел, но Конуэй отвергает условие последовательности: в качестве номеров, выписываемых на лбах n участников игры (которые все без исключения честны и обладают способностью рассуждать логически), разрешается использовать любые неотрицательные целые числа (включая 0). На доске, которую видят все участники игры, мелом выписаны m различных неотрицательных целых чисел, одно (и только одно) из которых равно сумме номеров участников игры. Каждый из участников видит номера на всех лбах, кроме своего собственного. Арбитр опрашивает всех игроков по очереди, задавая им один и тот же вопрос: «Можете ли вы с помощью умозаключений определить, какой номер стоит у вас на лбу?» Опрос производится по кругу до тех пор, пока кто-нибудь из игроков не прервет игру, ответив утвердительно.

Конуэй доказал следующую замечательную теорему. Если m (число сумм на доске) не больше n, то игра заканчивается (т.е. утвердительный ответ следует после конечного числа отрицательных). Например, предположим, что у каждого из играющих на лбу стоит номер 2, а на доске написаны суммы 6, 7 и 8. Конуэй утверждает, что в этом случае игра заканчивается утвердительным ответом на 14-й вопрос.

Построение общего алгоритма для вычисления номера вопроса, на котором завершаются такие игры, – задача весьма сложная и далеко не решенная, если не считать некоторых особых наборов чисел. Конуэй пишет: «В бесконечный спуск типа «*A* знает, что *B* знает, что *C* знает, что *B* знает, что *C* знает...» оказываешься втянутым еще до того, как задан первый вопрос, поэтому очень трудно оценить количественно ту информацию, которая доступна каждому игроку. Некоторое время мне казалось, что такие соображения делают игру не вполне определенной и что мы рискуем «нарваться» на парадокс. Теперь я так не думаю. Я знаю, что при оценке доступной игроку информации фатально легко допустить ошибку.»

В игре Конуэя возникает тот же парадокс, который мы уже рассматривали. Как нетрудно показать, еще до начала игры каждый из участников может предсказать, что первые три ответа будут отрицательными, и поэтому от первых трех вопросов, казалось бы, можно отказаться, поскольку по окончании первого раунда каждый из участников игры будет информирован ничуть не лучше, чем до начала игры. Однако если исключить первый раунд, то тот же самый аргумент будет применим к следующему раунду, и игра никогда не закончится.

Поскольку математическая индукция часто облекается в форму «сведéния к предыдущему случаю», я хочу завершить эту главу старой шуткой. Первокурснику, который не может никак решить, стать ли ему физиком или математиком, предлагается следующий тест в двух частях. Часть первая. Студента вводят в комнату, где имеется раковина с водопроводным краном, небольшая плита с незажженной горелкой и пустой чайник на полу. Требуется вскипятить воду. Считается, что студент успешно прошел тест, если он наполнил чайник водой из крана, зажег горелку и поставил чайник на огонь.

Часть вторая. Того же студента вводят в ту же комнату, но на этот раз чайник налит водой и стоит на незажженной горелке. И на этот раз требуется вскипятить воду. Будущий физик просто зажигает горелку. Будущий математик сначала выливает воду из чайника и ставит пустой чайник на пол. Тем самым задача оказывается сведенной к предыдущей, которую он уже решил.

Ответы и решения

Предложенная задача касалась игры с тремя участниками и пятью шляпами (тремя красными и двумя черными). Участники игры, или испытуемые, рассаживаются на стульях так, что A видит B и C, B видит только C, а C не видит никого. Арбитр надевает на головы участников любые три из пяти имеющихся у него шляп. Всегда ли один из участников ответит на вопрос арбитра утвердительно?

Оказывается, что всегда. Как показывает анализ, если на участниках игры ABC шляпы надеты в комбинациях ККК, КЧК, ЧКК или ЧЧК (К – красная, Ч – черная), то на вопрос арбитра отвечает утвердительно участник C. Если же шляпы надеты в комбинациях ККЧ или ЧКЧ, то утвердительно отвечают B и C. Если шляпы надеты в комбинации КЧЧ, то утвердительно отвечают все трое. Проводимый анализ допускает обобщение на случай n участников и n красных и $n-1$ черных шляп. Рассмотрим случай, когда $n=4$. Четвертый («слепой») участник D рассуждает следующим образом: «Если на мне черная шляпа, то трое остальных участников игры видят это и знают, что для них осталось только две черные шляпы. Тем самым для них задача сводится к предыдущей, которая была решена. Если на вопрос арбитра ни один из них не отвечает отрицательно, то только потому, что моя шляпа красная. Следовательно, я могу ответить утвердительно». И так далее при любом n. Первым, кто даст утвердительный ответ, всегда будет тот из играющих, на ком красная шляпа и кто не видит красной шляпы.

Студент-математик Северо-западного университета Джон Эрбленд придумал следующий забавный вариант игры. Предположим, что имеются n участников, $n - 1$ черных шляп и только одна красная шляпа. Условия игры остаются такими же, как прежде. Всегда ли человек в красной шляпе на вопрос арбитра ответит утвердительно? Если нет, то в каких случаях ему удастся определить цвет своей шляпы?

Решение задачи Эрбленда весьма интересно. Если A в красной шляпе, то он, разумеется, ответит утвердительно, так как видит $n - 1$ черных шляп. Если в красной шляпе B, то он ответит отрицательно. Почему? Да потому, что A всегда вынужден отвечать утвердительно и поэтому его ответ не несет никакой информации. Если в красной шляпе C, то он ответит утвердительно, так как услышит утвердительные ответы A и B. Если красная шляпа на D, то он должен ответить отрицательно, так как утвердительный ответ участника C мог последовать в том случае, если C путем умозаключений пришел к выводу, что красная шляпа на нем (на C). Процесс допускает обобщение с помощью математической индукции и приводит к выводу, что человек в красной шляпе отвечает утвердительно в том и только в том случае, если он находится на нечетном месте, считая от «заднего ряда». Если же он находится на четном месте, то утвердительный ответ того, кто сидит непосредственно за ним, не дает достаточной информации для правильного умозаключения.

Игра с последовательными числами на лбах двух участников анализируется следующим образом. Пусть $Б$ означает испытуемого с бóльшим номером, $М$ – испытуемого с меньшим номером, а $В$ – номер вопроса.

Предположим, что в качестве номеров выбраны числа 1 и 2. Если арбитр задает первый вопрос испытуемому $Б$, то утвердительный ответ следует на $В1$. Если арбитр задает первый вопрос испытуемому $М$, то тот отвечает отрицательно. Тогда $Б$, видя на лбу $М$ номер 1, отвечает утвердительно на $В2$.

Предположим, что в качестве номеров выбраны числа

2 и 3. Если арбитр задает первый вопрос испытуемому *Б*, то тот отвечает отрицательно. Испытуемый *М* также дает отрицательный ответ. Его ответ свидетельствует о том, что он видит на лбу у *Б* номер 1, поэтому *Б* знает, что у него на лбу стоит номер 3, и отвечает утвердительно на *В*3. Если же арбитр задает первый вопрос испытуемому *М*, то тот отвечает отрицательно. Как и в предыдущем случае, из этого ответа *Б* заключает, что его номер 3, и поэтому отвечает на *В*2 утвердительно.

Предположим, что в качестве номеров выбраны числа 3 и 4. Если арбитр задает первый вопрос испытуемому *Б*, то тот отвечает отрицательно. Испытуемый *М* также отвечает отрицательно. *Б* может рассуждать следующим образом: «Если на лбу у меня стоит номер 2, то игра сводится к предыдущему случаю, когда в качестве номеров были выбраны числа 2 и 3 и первый вопрос арбитр задает испытуемому *М*. Следовательно, на *В*2 испытуемый *М* должен был бы ответить утвердительно. Так как *М* отвечает отрицательно, это доказывает, что мне достался номер 4». Следовательно, *Б* отвечает утвердительно на *В*3. Если арбитр задает свой первый вопрос испытуемому *М*, то тот отвечает отрицательно. Испытуемый *Б* отвечает отрицательно на *В*2, и ситуация сводится к предыдущей, которая уже была проанализирована. Отрицательный ответ испытуемого *М* говорит испытуемому *Б*, что его номер 4, и поэтому на *В*4 он отвечает утвердительно.

Продолжая аналогичным образом, мы каждый раз сводим ситуацию к ранее решенной задаче. Пусть n – большее число. *Б* всегда выигрывает. Если арбитр задает первый вопрос ему, то *Б* выигрывает на $B(n-1)$ при четном n и на Bn при нечетном n. Если арбитр спрашивает его вторым, то *Б* выигрывает на Bn при четном n и на $B(n-1)$ при нечетном n. Отметим любопытный факт: если правило требует, чтобы игрок отвечал утвердительно только в том случае, когда он уверен, что доставшийся ему номер – *меньшее* из чисел, то игра никогда не заканчивается!

Теперь относительно кажущегося парадокса. В случае трех человек, на которых надеты только красные шляпы, истинно утверждение о том, что и *В*, и *С*, заранее знают, что *А* ответит отрицательно. Однако (и именно это обстоятельство часто упускается из виду, хотя оно имеет решающее значение) до того, как задан первый вопрос, *C* не знает, что *B* знает, что *A* ответит отрицательно. До начала опроса *C* известно лишь, что его шляпа может быть черной. Если это так, то *B* никаким способом не может узнать, ответит ли *A* утвердительно или отрицательно. До тех пор пока *A* не ответит отрицательно, *C* не знает о том, что *B* еще до того, как был задан вопрос, знал, что *A* должен будет ответить отрицательно. Следовательно, в этом случае первый вопрос приносит новую, существенную для умозаключений *C*, информацию, хотя *C* заранее знает, как ответит *A*.

Коль скоро эта взаимосвязь установлена, нетрудно понять, как разрешается парадокс для игр Гейла и Конуэя. Предположим, что вы один из участников игры Гейла. Каждое новое «нет» в игре произвольной длины снабжает вас необходимой новой информацией в виде утверждений типа «теперь я знаю, что вы знаете, что я знаю, ..., что вы не знаете мой номер». С аналогичной ситуацией мы сталкиваемся и в игре Конуэя: каждое «нет» снабжает каждого игрока аналогичной информацией относительно того, что знают другие.

Дополнение

Я не пытался найти уязвимое место в «чудовищном» парадоксе Литтлвуда о бесконечном множестве карточек с двумя последовательными целыми числами на каждой, но более 50 читателей поспешили мне на помощь. Парадокс возникает из ложного предположения о том, что числа могут быть случайно выбраны из бесконечного множества положительных чисел с равной вероятностью. Абсурдность такого предположения может быть доказана многими способами. Выберем любое число k. С вероятностью 0 «случайно» выбранное положительное целое число равно k или меньше, чем k, и с вероятностью 1 оно больше, чем k. Иначе говоря, вероятность выбрать число достаточно малое для того, чтобы его можно было записать сколь угодно малыми цифрами на любой поверхности конечной площади, равна нулю.

Джордж Питер Вактелл выразил по существу ту же мысль следующим образом. Вы не можете перетасовать бесконечную колоду карт, на которых выписаны все положительные целые числа, так как в противном случае была бы верна следующая противоречивая теорема: для любых двух карт, вытянутых из такой перетасованной колоды, вероятность того, что стоящее на карте число больше числа на другой карте, равна нулю. Короче говоря, игра, о которой идет речь, невозможна. Среди тех, кто прислал мне особенно подробный и интересный анализ задачи, не могу не назвать Стивена Дж. Брамса, Элкана Халперна и Томаса Луиса, Роджера Б. Лазаруса, Фредерика Мостеллера и Херберта Роббинса.

Предположим теперь, что колода карточек с числами конечна и поэтому арбитр может рандомизировать числа и выбрать пару последовательных чисел, достаточно малых для того, чтобы их можно было записать на «поверхности с ограниченной площадью» (например, на лбах участников игры). Верхняя грань пар не известна. По крайней мере один из участников игры всегда откажется играть. Математик из Висконсинского университета И. Мартин Айзакс усилил и исправил мои более ранние замечания относительно игры следующим образом:

«Если на карточках выписаны пары последовательных чисел (1, 2), (2, 3), (3, 4), ... (комплект карточек не обязательно должен быть полным: одни карты могут отсутствовать, другие повторяться; колода карт может быть бесконечной, а случайный выбор – производиться с неравномерным распределением вероятностей), то любой из игроков, завидя на лбу партнера четное число, должен отказаться играть. Если же он видит нечетное число, то отказываться от игры ему не следует (как ни удивительно) даже в том случае, когда известно, что нечетный номер на лбу партнера – наибольшее число в колоде. Это противоречит вашему анализу, который требует, чтобы игрок, который видит большее число, отказывался от игры, если это число нечетно. Он может согласиться на продолжение игры, с уверенностью полагаясь на способность партнера к логическим рассуждениям: при виде четного числа, тот откажется платить.

Докажем мое утверждение. Для этого заметим, что игрок, видящий на лбу своего партнера номер 1, может только выиграть, и поэтому ему нет нужды отказываться от платежа. Таким образом, разумная стратегия состоит в том, чтобы отказываться от продолжения игры при виде любых чисел, которые больше единицы, и продолжать игру при виде единицы. (Разумеется, это не единственная разумная стратегия.) Каждый игрок, обладая способностью рассуждать логически, должен защитить себя от всех возможных разумных стратегий своего партнера. Например, если игрок видит номер 2, он должен отказаться от продолжения игры, чтобы защитить себя от разумной стратегии «Утвердительный ответ при виде единицы и отрицательный при виде любого другого числа», которую может избрать его партнер. Но тогда стратегия «Утвердительный ответ при виде тройки и отрицательный при виде любого другого числа» разумна, так как если игрок видит тройку, то знает, что выигрыш ему не угрожает, коль скоро его собственный номер равен 2 (ибо при виде двойки партнер прервет игру). В качестве меры предосторожности против стратегии «Утвердительный ответ только при виде тройки» разумный игрок должен прервать игру при виде четверки, что делает разумной стратегию «Утвердительный ответ только при виде пятерки». Продолжая в том же духе, мы доказываем мое утверждение с помощью математической индукции.

Нельзя не отметить следующее весьма интересное обстоятельство. Если в колоде недостает карты с числами (1, 2), то приведенный выше анализ остается в силе. Но стоит арбитру оповестить играющих о том, что карты с числами (1, 2) нет в колоде, как игра становится эквивалентной рассмотренной выше с единственным различием: теперь игру следует прерывать при виде нечетных чисел. С другой стороны, если игрок тайком просмотрит колоду и обнаружит, что в ней нет карты с числами (1, 2), но не будет знать, располагает ли его партнер этой информацией, то разумная стратегия требует, чтобы игрок отвечал отрицательно при виде всех четных чисел, кроме числа 2. Перед нами снова встает вопрос о том, «Знает ли *A*, что ***B*** знает, ...». Во всех приведенных выше рассуждениях я предполагаю, что каждый игрок дает отрицательный ответ с помощью какого-то устройства для тайного голосования втайне от своего партнера».

В литературе по занимательной математике имеется множество парадоксальных игр, связанных с парадоксом Литтлвуда. Упомяну лишь наиболее простую из них. Каждый из двух игроков записывает какое-то положительное целое число. Тот, кто написал большее число, выигрывает доллар.

Каждый из игроков может рассуждать следующим образом: «Какое бы число ни написал мой партнер, множество целых чисел, которые меньше выбранного им числа, конечно. Так как множество чисел, которые больше выбранного, бесконечно, я заведомо выиграю». И в этом случае парадокс основан на невозможности случайного выбора числа из бесконечного множества целых чисел. Существует очевидный предел на величину числа, которое можно выписать за конечное время на конечных (по размерам и числу) листках бумаги. Если бы в игру действительно играли, то она никогда бы не закончилась: каждый игрок исписывал бы цифрами один листок бумаги за другим.

Предположим, однако, что мы устанавливаем верхний предел для множества чисел. Например, пусть у каждого игрока имеется по волчку, запуская который игрок может выбирать числа от 1 до 100. Оба игрока запускают свои волчки, и тот, у кого выпадет большее число, должен уплатить своему партнеру некоторую сумму денег. Каждый из игроков может рассуждать следующим образом: «Я могу и выиграть, и проиграть, но так как выиграть я могу больше, чем проиграть, то игра складывается в мою пользу». Разумеется, каждый из игроков может рассуждать и так: «Если я проиграю, то проиграю больше, чем выиграл бы. Следовательно, игра складывается не в мою пользу». Игра, о которой идет речь, как нетрудно видеть, честная, но трудно сказать, что именно неправильно в каждом из приведенных выше рассуждений.

Впервые я встретил этот парадокс в книге Мориса Крайчика «Математические развлечения» [10, 2*] (с.133–134), где он приведен в форме истории о двух чудаках, вздумавших оценить стоимость своих галстуков. Тот, чей галстук окажется дороже, должен отдать его другому. В моей книге «А ну-ка, догадайся» (гл. «Чей кошелек толще» – с. 139–140) [10, 3*] я изложил парадокс в виде истории о споре двух студентов, решивших выяснить, чей кошелек толще. Хороший анализ парадокса приведен в статье Лоренса Макгилаври [10, 7].

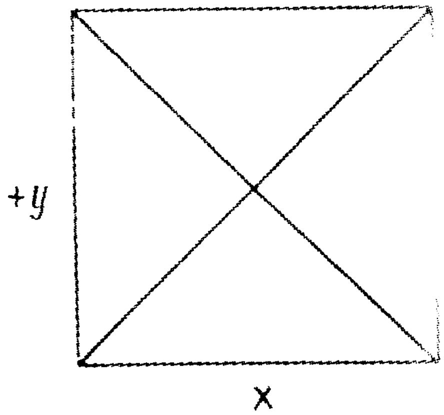
Недавно появился новый вариант парадокса, хотя мне не приходилось еще видеть его ни в одном печатном издании. Обычно его облекают в следующую форму. Имеются два игрока и две шкатулки. В одной шкатулке находится некоторая сумма денег, в другой – вдвое бо́льшая сумма. Арбитр вручает игроку одну из шкатулок и сообщает, что тот может оставить шкатулку у себя или обменять ее на другую. Игрок рассуждает следующим образом: «В шкатулке, которую я получил, находится x долларов. Если я обменяю ее на другую шкатулку, то (с равной вероятностью) получу $2x$ или $x/2$ долларов. Средняя сумма (математическое ожидание) денег, которую я получу после обмена, составляет половину от $2x + x/2$, или $1{,}25x$. Если же я оставлю шкатулку у себя, то математическое ожидание суммы денег составит x долларов. Следовательно, обмен шкатулок мне выгоден». Заключение абсурдно, но где ошибка в подобном рассуждении?

Замечательная книжка Акихиро Нозаки «Трюки Анко со шляпами» [10, 6], рассчитанная на математически одаренных ребят, целиком основана на задачах-головоломках о цветных шляпах, для решения которых требуется применение метода математической индукции. По мере того как вы продвигаетесь к концу книги, задачи все усложняются, и в завершение приводится задача о трех участниках игры и пяти шляпах, с которой мы уже успели познакомиться в этой главе.

Многие читатели отметили сходство в рассуждениях по индукции в задаче о шляпах и в «парадоксе о неверных женах». Впервые этот парадокс, насколько мне известно, был опубликован в небольшой книжке по занимательной математике И. А. Гамова и Марвина Стерна «Математика в задачах и головоломках» [10, 4] (с. 20–23). Я не могу вдаваться здесь в подробности. Достаточно полное изложение его приведено в моей книге «Головоломки из других миров» [10, 5*] (задача 87), а полный анализ дается в отчете «Лгущие мужья и другие истории» сотрудников Научно-исследовательской лаборатории фирмы ИБМ Дэнни Долева, Джозефа Халперна и Йорама Мозеса (1985), опубликованном в трудах четвертой конференции Ассоциации вычислительной математики [10, 6*].

Глава 11

Отрицательные числа



И плюс лишь завидя, кричат негоанцы:
«Боюсь!»
Их радует минус, пугает их плюс.
Гол забив, уменьшает спортсмен им свой счет,
А вот счет в магазине – увы! при покупке растет.

Ирвинг Э. Фэнг. *«Сказка о звездообразных влюбленных».*

Когда ребенок учится говорить, названия нескольких первых положительных целых чисел занимают в его словаре почти столь же важное место, как слова «собака», «кошка» и «птичка». Аналогичным был опыт, по-видимому, и наших первобытных предков. Не подлежит сомнению, что числа, обозначающие количества предметов (такие числа принято называть натуральными), были первыми, которые оказались настолько полезными, что получили «имена». В наше время математики применяют слово «число» к сотням странных абстрактных «зверей», весьма далеких от счета предметов.

Первым – небольшим – шагом в расширении понятия числа явилось введение дробных чисел. Хотя многое в окружающем нас мире (например, звезды, коровы, реки и т. д.) обычно можно пересчитать, не прибегая к дробям, смысл половины яблока или трети стада из 12 овец постигается без труда. Но следующий шаг – введение отрицательных чисел – оказался настолько трудным, что математики окончательно освоились с отрицательными числами только в XVII столетии. Многие люди до сих пор относятся к отрицательным числам с некоторым недоверием, как к чему-то загадочному, о чем свидетельствует, например, следующий стишок (У. Х. Оден вспоминает, что выучил его в школьные годы):

Минус на минус дают нам плюс.
Почему так происходит, судить не берусь.

Отрицательные числа не следует смешивать с вычитаемыми числами. Ни для ребенка, ни для необразованного скотовода не составит труда вычесть 6 коров из 10, но представить себе «отрицательную корову» ему так же трудно, как вообразить корову-привидение. Более того, корова-привидение обладает в глазах скотовода хотя бы какой-то реальностью, в то время как отрицательная корова менее реальна, чем корова, которой нет. Если корову вычесть из коровы, то не останется ничего, а если отрицательную корову прибавить к положительной, то последняя исчезнет, или аннигилирует, как частица при столкновении с античастицей. Смешно! Совсем как в старом анекдоте об одном человеке, который был настолько отрицательной личностью, что когда он приходил к кому-нибудь в гости, присутствующие озирались и спрашивали друг друга: «Кто это ушел?»

А вот что думали об отрицательных числах древние греки. Они очень любили геометрию, и им нравилось представлять математические величины в виде каких-нибудь геометрических образов. «Числа» в их понимании были натуральными числами, используемыми для счета, а дроби, или отношения положительных целых чисел, греки моделировали с помощью камешков или черточек на грифельной доске. Примитивная алгебра древних греков не знала ни нуля, ни отрицательных величин. Даже единицу древние греки неохотно признали числом потому, что, как сказано у Аристотеля, числа измеряют множественное, тогда как единица измеряет единичное, а не множественное.

Важно сознавать, что такое отношение к числам во многом было вопросом языковых предпочтений. Греческие математики знали, что $(10-4)(8-2)$ равно $(10 \times 8) - (4 \times 8) -$

$-(2 \times 10) + (2 \times 4)$. Признать такое равенство означает неявно признать то, что впоследствии стали называть правилом знаков: произведение любых двух чисел с одинаковыми знаками положительно, а произведение любых двух чисел с различными знаками отрицательно. Точно так же древние греки предпочитали не называть величину $-n$ числом. Для них она была не более чем символом для обозначения того, что подлежит вычитанию. Вы можете вычесть 2 яблока из 10, но вычитать 10 яблок из 2 древним грекам казалось бессмысленным занятием. Они знали, что уравнению $4x + 20 = 4$ удовлетворяет значение x равное -4, но отказывались записывать такое уравнение, так как его решение «не было числом». По той же причине греки не признавали $-\sqrt{n}$ «законным» квадратным корнем из n.

Трудно установить точно, когда именно в Древнем Вавилоне начали рассматривать отрицательные величины, но вавилоняне обращались с отрицательными числами несравненно свободнее, чем древние греки. Китайские математики еще до новой эры научились быстро производить вычисления с помощью счетных бамбуковых палочек, красных для положительных чисел (чен) и черных для отрицательных чисел (фу). Позднее те же цвета использовались при записи положительных и отрицательных чисел. В знаменитом математическом трактате Ханьского периода (примерно от 200 г. до н. э. до 200 г. н. э.) «Девять глав о математическом искусстве» объясняется, как производить вычисления с помощью бамбуковых палочек. Считается, что именно в этом трактате отрицательные числа впервые появились в письменном виде. Однако в трактате не упоминались отрицательные корни и правило знаков.

Систематическое использование в алгебре нуля и отрицательных чисел началось лишь в VII веке, когда индийские математики стали применять отрицательные величины в задачах на кредит и дебет. Они не только первыми применили нуль и предложили для него современное обозначение, но и записывали отрицательные числа, ставя над ними точку или кружочек. Индийцы сформулировали также в явном виде правило знаков, им было известно также, что у каждого положительного числа существуют два квадратных корня – один положительный, другой отрицательный.

Большинство европейских математиков эпохи Возрождения, следуя греческой традиции, с подозрением относились к отрицательным величинам. И в этом случае нельзя не напомнить, что речь в основном идет о языковых предпочтениях, а не о непонимании. Алгебраисты эпохи Возрождения великолепно умели обращаться с отрицательными корнями, но называли такие корни «фиктивными». Они превосходно умели также решать уравнения в отрицательных числах, однако избегали применять слово «число» к величинам меньше нуля.

В XVII столетии нашлось несколько отважных математиков, которым хватило решимости изменить словоупотребление так, чтобы отрицательные числа приобрели статус вполне «законных», «добропорядочных» чисел, но их усилия наталкивались на упорное сопротивление со стороны даже знаменитых математиков. Декарт отзывался об отрицательных корнях как о «ложных», а Паскаль считал абсурдным называть числом нечто меньшее нуля. Приятель Паскаля Антуан Арно доказывал абсурдность отрицательных значений следующим образом. Правило знаков требует, чтобы выполнялось равенство $-1/1 = 1/-1$. Если подходить к нему как к равенству двух отношений, то придется признать, что меньшее число относится к большему так же, как большее число относится к меньшему. Этот кажущийся парадокс, как отмечает Моррис Клайн в книге «Математическая мысль с древности до нашего времени», широко обсуждался математиками эпохи Возрождения. Лейбниц признавал трудности, связанные с решением этого парадокса, но отстаивал отрицательные числа как полезные символы, позволяющие правильно производить вычисления.

Некоторые ведущие математики XVII и XVIII веков (назову лишь двух – Джона Валлиса и Леонарда Эйлера) признавали отрицательные числа, но считали их величинами, которые больше бесконечности. Почему? Потому что $a/0 = \infty$. Следовательно, если разделить a на число меньше нуля, например на -100, то разве не должно получиться отрицательное частное, которое больше бесконечности?

Символы, обозначающие сложение и вычитание, в эпоху Возрождения претерпели значительные изменения. Знакомые ныне знаки плюс и минус впервые появились в Германии в XV веке как маркировочные знаки на грузах, хранимых на складах. Они указывали, больше (+) или меньше (−) стандартного веса реальный груз. В начале XVI века немецкие и голландские алгебраисты стали использовать плюс и минус для обозначения операций сложения и вычитания, и эта практика быстро распространилась на Англию. Роберт Рекорд, врач короля Эдуарда VI и королевы Марии, в учебнике арифметики, выпущенном в 1541 г., впервые в Англии использовал знаки плюс и минус, хотя и не для обозначения операций. «Сия фигура + означает, что взято слишком много, а сия черта −, простая, без поперечной линии, означает, что взято слишком мало», – объяснял Рекорд. В более поздней книге Рекорд впервые в Англии использовал современный знак равенства: «Я буду часто использовать в этом труде две параллельные... =, ибо нет двух вещей, которые были бы более равны».

В XVIII столетии применение в алгебре отрицательных чисел, идентифицируемых по знаку минус, распространилось по всему миру. Тем не менее большинство математиков испытывали некоторое беспокойство. В своих трактатах они пускались в длинные обоснования правила знаков, а некоторые авторы предпочитали использовать громоздкие преобразования, лишь бы избежать умножения двух отрицательных чисел. Вот отрывок из «Рассуждения об использовании знака минус в алгебре» (1758 г.) барона Фрэнсиса Мазереса, британского адвоката, служившего атторней-генералом в Квебеке:

> «Отдельная величина никогда не может... рассматриваться ни как утвердительная, ни как отрицательная; ибо если любая отдельная величина, хотя бы b, отмечена либо знаком +, либо знаком −, безотносительно к другой величине, хотя бы a, к которой ее надлежит прибавить или из которой ее надлежит вычесть, то знак ее не имеет ни смысла, ни

определенного значения. Например, если сказать, что квадрат числа -5 ... равен $+25$, то такое утверждение должно либо означать, что пятью пять равно 25 безотносительно к знакам, либо быть полной бессмыслицей и маловразумительным жаргоном».

Этот отрывок цитирует в своей книге «Груда парадоксов» Август Де Морган. Мазерес, сообщает нам Де Морган, был настолько честным адвокатом, что для него было невыносимо выиграть дело, если он считал своего клиента виновным. В результате, пишет Де Морган, Мазерес постепенно перестал заниматься адвокатской практикой.

Несколькими страницами раньше Де Морган предпринимает довольно язвительные нападки на «Основы алгебры» Уильяма Френда, бывшего священника, который к тому же оказался его тестем. (Шумное изгнание Френда из Кембриджа за унитарианские взгляды приобрело широкую известность. В защиту его активно выступили Сэмюэль Тейлор Кольридж и Джозеф Пристли.) Двухтомный трактат Френда был, по-видимому, самым претенциозным из когда-либо написанных учебником алгебры, в котором автор высказал по отношению к нулю и отрицательным числам такое же неприязненное отношение, какое он сам встретил в Кембридже.

Де Морган полностью перепечатывает остроумную пародию Френда на Рабле, в которой Пантагрюэль читает ни с чем не сообразную лекцию о бесполезности нуля. В несколько жалобном примечании супруга Де Моргана поясняет: «Ясность и прямота, присущая складу ума [моего батюшки], явились причиной той математической ереси, в которую он впал: отказа от употребления отрицательных величин в алгебраических операциях. Вполне вероятно, что этим он лишил себя рабочего инструмента, применение которого позволило бы ему достичь еще бóльших успехов в высших областях знания».

Как можно заниматься алгеброй, не используя отрицательных чисел? Прежде всего необходимо исключить из рассмотрения все уравнения, приводящие к отрицательному числу реальных объектов или приписывающие реальным объектам отрицательные значения. Даже если уравнение приводит к правильному положительному решению, записывать его следует так, чтобы избежать отрицательного значения неизвестного. Например, когда двадцатидевятилетняя мать *будет* вдвое старше своей шестнадцатилетней дочери? Записав задачу в виде уравнения $29 + x = 2(16 + x)$, мы, к своему удивлению, получаем $x = -3$. Этот результат приводит к правильному ответу: мать *была* вдвое старше дочери, когда матери исполнилось 26 лет, а дочери 13 лет. Алгебраист XVIII века, не приемлющий отрицательных чисел, чтобы избежать числа -3, записал бы уравнение в виде $29 - x = 2(16 - x)$. При такой записи x принимает вполне приемлемое значение 3, которое, разумеется, приводит к тому же ответу.

В прошлые века, как, впрочем, и ныне, у тех, кто только начинает изучать алгебру, главным препятствием на пути к принятию отрицательных чисел является невозможность «увидеть», как становится положительным произведение двух отрицательных чисел. С произведением двух положительных чисел аналогичной трудности не возникает. Произведение положительного числа и отрицательного числа обретает некоторую загадочность, но понять, что такое возможно, все же нетрудно, если вы уверуете в абстрактную реальность, например, отрицательного апельсина. Но что, скажите на милость, означает произведение двух отрицательных апельсинов на -3? В начале у вас имеются два отрицательных апельсина, каждый из которых меньше, чем ничего, а затем вы еще должны проделать над ними нечто отрицательное. Откуда берутся шесть настоящих апельсинов в ответе? Они как бы возникают в вазе, как в фокусе.

Попытка объяснить начинающим с помощью хождения по числовой оси (рис. 70), как правило, не уводит нас особенно далеко. Положительные целые числа нетрудно отождествить с соответствующим количеством единичных шагов вправо от нуля, отрицательные – с соответствующим количеством единичных шагов влево от нуля. Сложение соответствует продвижению вправо, вычитание – движению влево. Чтобы умножить 2 на 3, мы делаем 2 единичных шага вправо и, повторяя это трижды, приходим к отметке $+6$. Чтобы умножить -2 на 3, мы делаем 2 единичных шага влево и, повторяя это трижды, приходим к отметке -6. Но что можно сказать о числе -2, умноженном на -3? Какая

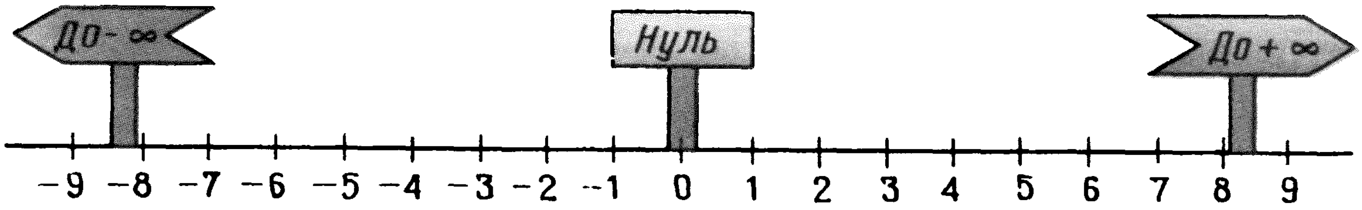


Рис. 70

Числовая ось для целых чисел.

сверхестественная сила вдруг переносит нас, отправившихся было влево от нуля, на отметку $+6$ справа от нуля?

Легко понять, что двигало математиками прошлых веков, когда они упорно отказывались от введения отрицательных чисел, считая это понятие абсурдным. Умножение отрицательных чисел было понято лишь с появлением таких абстрактных структур, как группы, кольца и поля, строгое определение которых было дано лишь в нашем столетии. Объяснять подробно, что такое группа, кольцо или поле, здесь было бы неуместно, и я ограничусь лишь следующим замечанием. Когда математики обнаружили, что желательно расширить понятие числа так, чтобы оно включало в себя нуль и отрицательные числа, они постарались по возможности сохранить свойства обычных натуральных чисел: новые числа должны (по возможности) вести себя, как старые.

Одной из фундаментальных аксиом старой арифметики был дистрибутивный, или распределительный, закон, согласно которому $a(b+c)=ab+ac$ (например, $2(3+4)=$ $=(2\times 3)+(2\times 4)$). При замене 2 и 3 отрицательными числами равенство сохранится в том и только том случае, если мы примем новое правило, по которому произведение двух отрицательных чисел положительно. Если бы произведение двух отрицательных чисел было отрицательно, то мы получили бы «равенство» $-2=-14$, т. е. пришли бы к противоречию. На языке современной алгебры можно сказать, что целые числа образуют кольцо, замкнутое относительно сложения, вычитания и умножения. Это означает, что сумма, разность или произведение целых чисел любого знака всегда есть целое число. Все старые правила арифметики положительных чисел остаются в силе, и мы никогда не встретим противоречие. (Что же касается деления, то оно возможно не всегда, так как в результате деления двух целых чисел может получиться дробь, а дроби не являются элементами кольца.)

Следовательно, неверно утверждать, будто математики могут «доказать», что произведение двух отрицательных чисел есть число положительное. Речь идет не о доказательстве, а о выборе правил, позволяющих отрицательным числам удовлетворять тем же старым правилам, которым удовлетворяют натуральные числа. Если кольцо целых чисел расширить, включив в него дроби, то получится поле, замкнутое уже относительно всех четырех арифметических операций.

Хотя «доказательства» того, что $-2 \times -3 = 6$, не существует, легко представить себе, каким образом правило знаков может быть применимо к реальным ситуациям. Оно применимо во всех случаях, когда речь идет о числах на шкале с двумя противоположными направлениями или ориентациями: на восток и на запад, вверх и вниз (как на шкале термометра), вперед и назад по времени (или по и против часовой стрелки на часах), прибыли и убытки и сотни других. Именно из-за таких приложений «числа со знаками» иногда называют направленными числами.

Во всех таких случаях, применяя правило знаков, мы должны всегда отличать величины от производимых над ними операций. Это различие особенно необходимо, когда мы рассматриваем умножение величины со знаком на отрицательное число. Нетрудно понять, что означает «взять положительную или отрицательную величину n раз», но что означает «взять эту величину $-n$ раз»? Проще всего представить себе эту таинственную операцию, разбив ее на две части:

1) n-кратное повторение величины;

2) замена полученной величины величиной, обратной ей относительно нуля (т. е. изменение знака).

На числовой прямой второй шаг означает построение зеркально симметричной точки относительно нулевой отметки. Представим себе, что в точке с отметкой -2 находится жук. Умножение его координаты на 3 не составляет никакого труда: мы просто откладываем трижды расстояние от нуля до отметки -2 влево и переносим жука в точку с отметкой -6. Но если жук находится в точке с отметкой 2 и мы хотим умножить его координату на -3, то прежде всего нам необходимо трижды отложить отрезок длиной в 2 единицы вправо, переместить жука в точку с отметкой 6, а затем – в зеркально симметричную точку. В результате наш жук окажется в точке с отметкой -6. Если жук находится «на исходной позиции», в точке с отметкой -2, то умножение на -3 сводится к аналогичной последовательности операций: троекратному откладыванию отрезка -2 влево (в результате чего жук оказывается в точке с отметкой -6) и последующему отражению (которое переводит жука в точку с отметкой 6).

На числовой прямой наш рецепт выглядит как некое волшебное заклинание, но когда мы применяем его ко многим другим ситуациям, он обретает вполне земные черты. Например, предположим, что некий человек проигрывает ежедневно в карты по 10 долларов. Условимся считать будущее положительным, а прошлое отрицательным. Через три дня наш игрок потеряет 30 долларов $3 \times (-10) = -30$. Три дня назад у него было на 30 долларов больше, чем сегодня. Аналогичные ситуации возникают на любой ориентированной, или направленной, шкале. Если уровень воды в баке понижается со скоростью 3 см в минуту, то 3 минуты назад уровень был на $(-3) \times (-2) = 6$ см выше, чем теперь. Если жук ползет на запад по числовой оси со скоростью 3 см в секунду, то 2 секунды назад он был на $(-3) \times (-2) = 6$ см к востоку от того места, где находится сейчас.

Наиболее известным свойством объектов, которое может быть измерено в отрицательных числах, является вес. Если насыпать вам в карманы одиограммовых гирек, то вы станете тяжелее, а если пристегнуть к вам воздушные шарики с подъемной силой в 1 грамм, то вы станете легче. Отпустите 3 пары шаров, и ваш вес возрастет на $(-2) \times (-3) = 6$ граммов.

«Представьте себе город, – пишет Рой Дьюбиш (в номере журнала “The Mathematical Teacher” («Учитель математики») за декабрь 1971 г.), – в который входят и из которого выходят хорошие и плохие люди. Ясно, что хороший человек – это плюс (+), а плохой – минус (–). Ясно также, что войти в город – это плюс (+), а выйти из города – минус (–). Не менее ясно и то, что появление в городе еще одного хорошего человека – это плюс (+), а уход из города хорошего человека – это минус (–), равно как появление в городе еще одного плохого человека - это минус (–), а уход из города плохого человека – это плюс (+)». Если из города отбывают три пары плохих людей, то город выигрывает $(-2) \times (-3) = 6$ очков. Сказанное можно промоделировать с помощью фишек двух цветов, начертив на листе бумаги границу города.

Для обучения детей операциям над кольцом целых чисел были предложены и другие модели. Одна из них принадлежит мне, но она настолько проста, что ее заведомо предлагали и до меня. Она представляет собой деревянную доску толщиной примерно в один сантиметр, в которой «квадратно-гнездовым» способом просверлено 10 отверстий. В каждое отверстие вставлена пробка длиной в 1 см. Пробка может находиться в трех положениях: вровень с поверхностью доски (0), выступать на полсантиметра над поверхностью доски (+ 1) и быть «утопленной» на полсантиметра в доску (– 1). Если все пробки вставлены вровень с верхней поверхностью доски, то доска находится в состоянии 0. Если над доской торчат k пробок, то доска находится в состоянии k; если k пробок утоплены в доске, то она находится в состоянии $-k$ (рис. 71).

Чтобы прибавить n к состоянию доски, нужно поднять на полсантиметра n пробок, причем начинать надо с утопленных пробок (если таковые имеются) и лишь затем переходить к пробкам, вставленным в отверстия вровень с поверхностью доски.

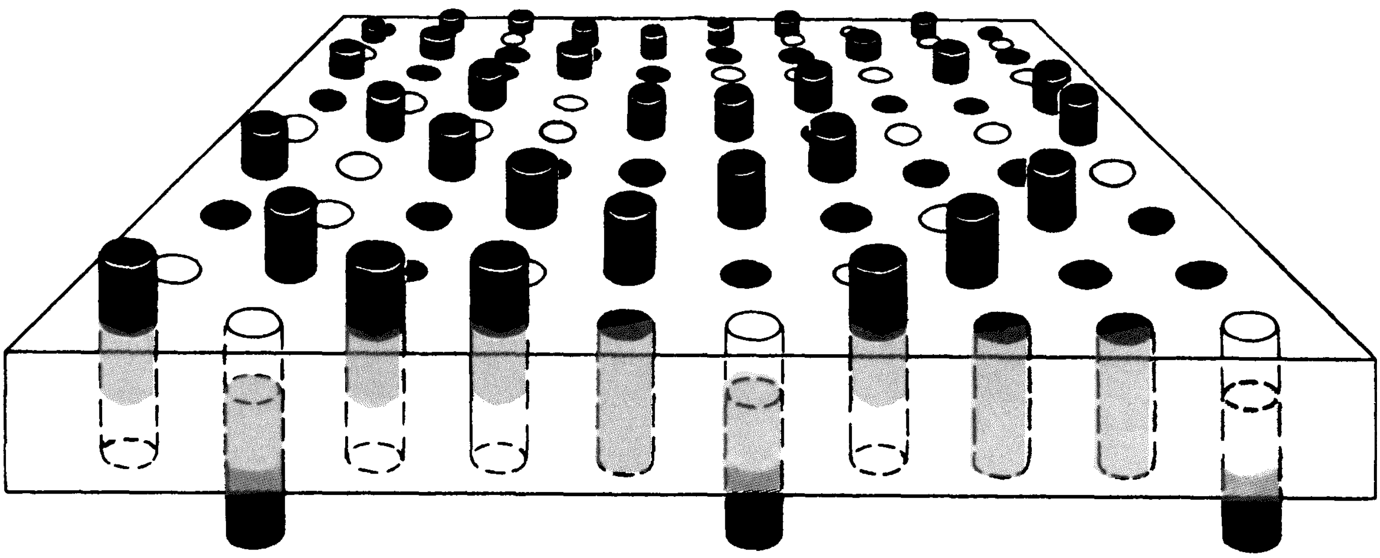


Рис. 71

Доска с отверстиями для цилиндрических пробок, позволяющая фиксировать знаки.

Чтобы умножить на n состояние доски, нужно n-кратно увеличить состояние. Если состояние равно 0, то делать ничего не нужно. Если из доски выступают k пробок, то нужно поднять над доской еще $n-1$ групп по k пробок в каждой. Если k пробок утоплены, вдавите в доску еще $n-1$ групп по k пробок в каждой. Чтобы умножить состояние доски на $-n$, нужно умножить его сначала на n (как описано выше), а затем перевернуть доску нижней стороной вверх.

Более удобна в обращении модель, изготовленная в виде доски с маленькими переключателями (тумблерами), которые могут находиться в верхнем (+), среднем (0) и нижнем (−) положениях. В этом случае умножение на отрицательное число сводится к умножению на его абсолютную величину с последующим поворотом доски на 180 градусов (рис. 72).

Если бы был жив Аристотель и имел бы возможность в течение 20 лет изучать современную алгебру, то он, несомненно, предпочел бы по-прежнему называть «числами» только натуральные числа больше единицы. (В некотором смысле все «искусственные» («ненатуральные») числа представляют собой не что иное, как различные конструкции из

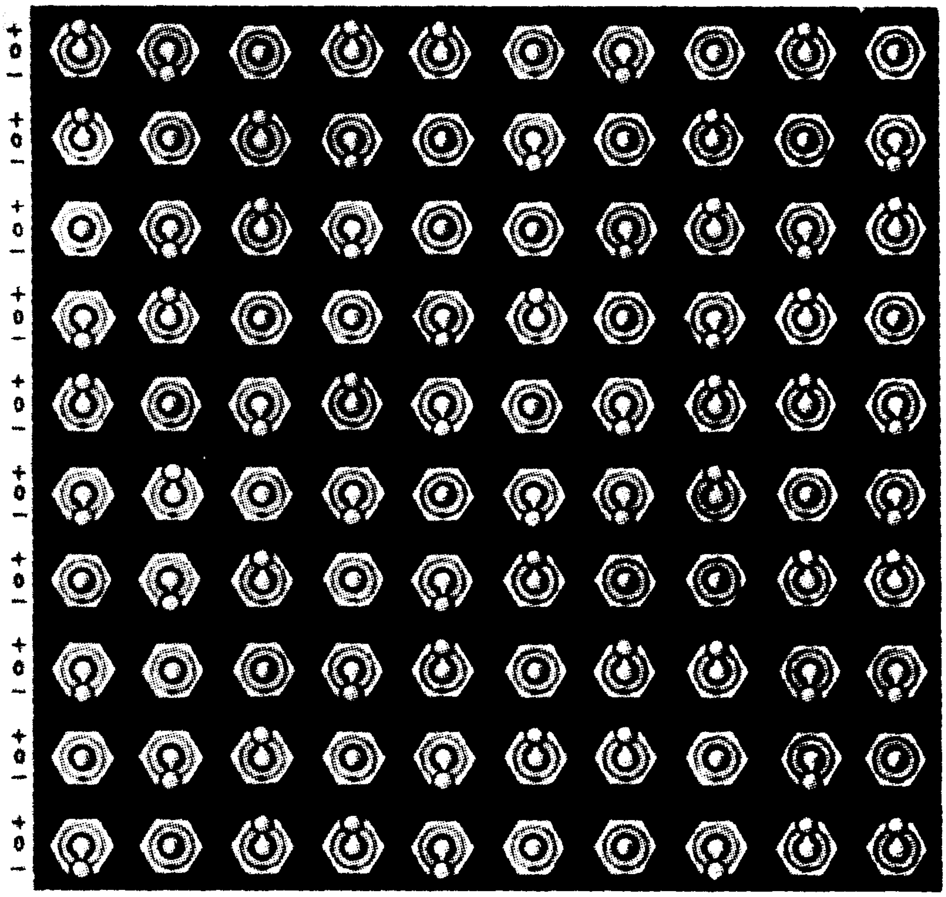


Рис. 72

Модель для изучения закона знаков с помощью переключателей.

A Positive Reminder
by J. A. Lindon

A carpenter named Charlie Brattics
Who had a taste for mathematics,
One summer Tuesday, just for fun,
Made a wooden cube side minus one.

Though this to you may well seem wrong,
He made it *minus* one foot long,
Which meant (I hope your brains aren't frothing)
Its length was one foot less then nothing.

In width the same (you' re not asleep?)
And likewise minus one foot deep;
Giving, when multiplied (be solemn!),
Minus one cubic foot of volume.

With sweating brow this cube he sawed
Through areas of solid board;
For though each cut had minus length,
Minus *times* minus sapped his strength.

A second cube he made, but thus:
This time each one foot length was plus;
Meaning of course that here one put
For volume: *plus* one cubic foot.

So now he had, just for his sins,
Two cube as like as deviant twins;
And feeling one should know the worst,
He placed the second in the first.

One plus, one minus – there's no doubt
The edges simply cancelled out;
So did the volume, nothing gained;
Only the surfaces remained.

Well may you open wide your eyes.
For these were now of double size,
On something which, thanks to his skill,
Took up no room and measured nil.

From solid ebony he'd cut
These bulky cubic objects, but
All that remained was now a thin
Black sharply-angled sort of skin

Of twelve square feet – which though not small,
Weighed nothing, filled no space at all.
It stands there yet on Charlie's floor;
He can't think what to use it for!

Рис. 73

Загадка 12 квадратных футов.

натуральных чисел.) Такого рода аргументация относительно того, что следует и что не следует называть числом, неубедительна. Главное же состоит в том, что кольца и поля, в которых каждый положительный элемент имеет идентичный ему обратный, или отрицательный, элемент, – применимы к огромному множеству природных объектов и явлений.

Пытаясь применить отрицательные числа и правило знаков к кубам и другим телам и «вещам» в реальном мире, мы можем оказаться в затруднительном положении, как столяр Чарли Браттикс, вздумавший построить куб с длиной ребра, равной -1 из стихотворения Дж. А. Линдона (рис. 73), но иногда их применение оказывается необыкновенно успешным. Если отвлечься от излучения, то доска с отверстиями и пробками может служить неплохой моделью знаменитой теории частиц и античастиц, предложенной П. А. М. Дираком,– теории, предсказавшей существование позитрона!

Дополнение

Лоуренс Гилберт и Джек Бигелоу в письме, опубликованном в журнале "The Mathematical Teacher" (том 79, февраль 1986) предложили сценарий фильма, моделирующего умножение на отрицательные числа. Представьте себе, что на экране вы видите автомобиль, который едет по дороге. Движение вперед положительно, движение назад отрицательно. Демонстрация фильма в обычном направлении – от начала к концу – считается положительной операцией, демонстрация фильма в обратном направлении – от конца к началу – считается отрицательной операцией. Если автомобиль отснят движущимся по дороге вперед, то умножение его движения на положительное число соответствует просмотру фильма в обычном («прямом») направлении, и на экране мы увидим автомобиль, едущий вперед. Умножение движения автомобиля на отрицательное число соответствует прокручиванию фильма в обратную сторону, и на экране мы увидим автомобиль, пятящийся назад. Предположим теперь, что автомобиль был отснят пятящимся назад. Тогда, умножая его движение на положительное число, мы должны пускать киноленту, как обычно, от начала к концу, и увидим на экране автомобиль, пятящийся назад. При умножении на отрицательное число, кинолента будет прокручиваться в обратную сторону, и на экране мы увидим автомобиль, едущий вперед.

Джудит Кон предложила, на мой взгляд, наилучший способ обучения школьников арифметическим операциям – с использованием фишек двух цветов и проектора для показа «прозрачек» (впоследствии она описала свою модель в статье [11, 4]).

Уолтер Пенни привел соображения в пользу точки зрения

Эйлера и Валлиса, считавших, что отрицательные числа больше, чем бесконечность. Он предложил рассматривать числовую ось как окружность бесконечно большого радиуса с бесконечностью на верхнем конце вертикального диаметра, нулем – на нижнем конце того же диаметра и положительными числами, возрастающими от нуля против часовой стрелки до бесконечности, и отрицательными числами, возрастающими (по абсолютной величине) от нуля в противоположном направлении (по часовой стрелке) до бесконечности. Если «больше» понимать как «дальше в направлении против часовой стрелки», то нельзя не признать, что «отрицательные числа больше, чем бесконечность».

Чарлз Риссанен прислал мне серию рисунков, на которых изображены события, описанные в стихотворении Дж. А. Линдона о кубе с ребром длиной -1. Столяр начинает с большого куска красного дерева. Куб с ребром длиной -1 – это кубическая дыра внутри этого куска. Когда в кубическую полость столяр вставляет куб с ребром длиной 1, то заполняет полость, т. е. положительный и отрицательный кубы как бы уничтожают друг друга, и восстанавливается исходный кусок дерева.

Недоразумения с правилом знаков часто возникают из-за того, что люди не проводят различия между величинами и производимыми над ними операциями. Можно прибавить два яблока к трем, нельзя умножить или разделить два яблока на три яблока. Например, рассмотрим следующий парадокс, который приходит мне на память. Квадрат, начерченный на плоскости с прямоугольной системой координат так, как показано на рис. 74, имеет площадь, равную $-(xy)$. По теореме Пифагора, диагональ AC есть положительное число (как и другая диагональ BD). Другая известная теорема геометрии утверждает, что площадь квадрата равна полупроизведению диагоналей. Если диагонали положительны, то и площадь квадрата должна быть положительной, что противоречит ранее полученному результату, согласно которому площадь квадрата отрицательна. Парадокс возникает из-за того, что умножение на отрицательные длины – операция ничуть не более допустимая, чем умножение на отрицательные яблоки.

Знаменитый физик из Калифорнийского технологического института лауреат Нобелевской премии Ричард Фейн-

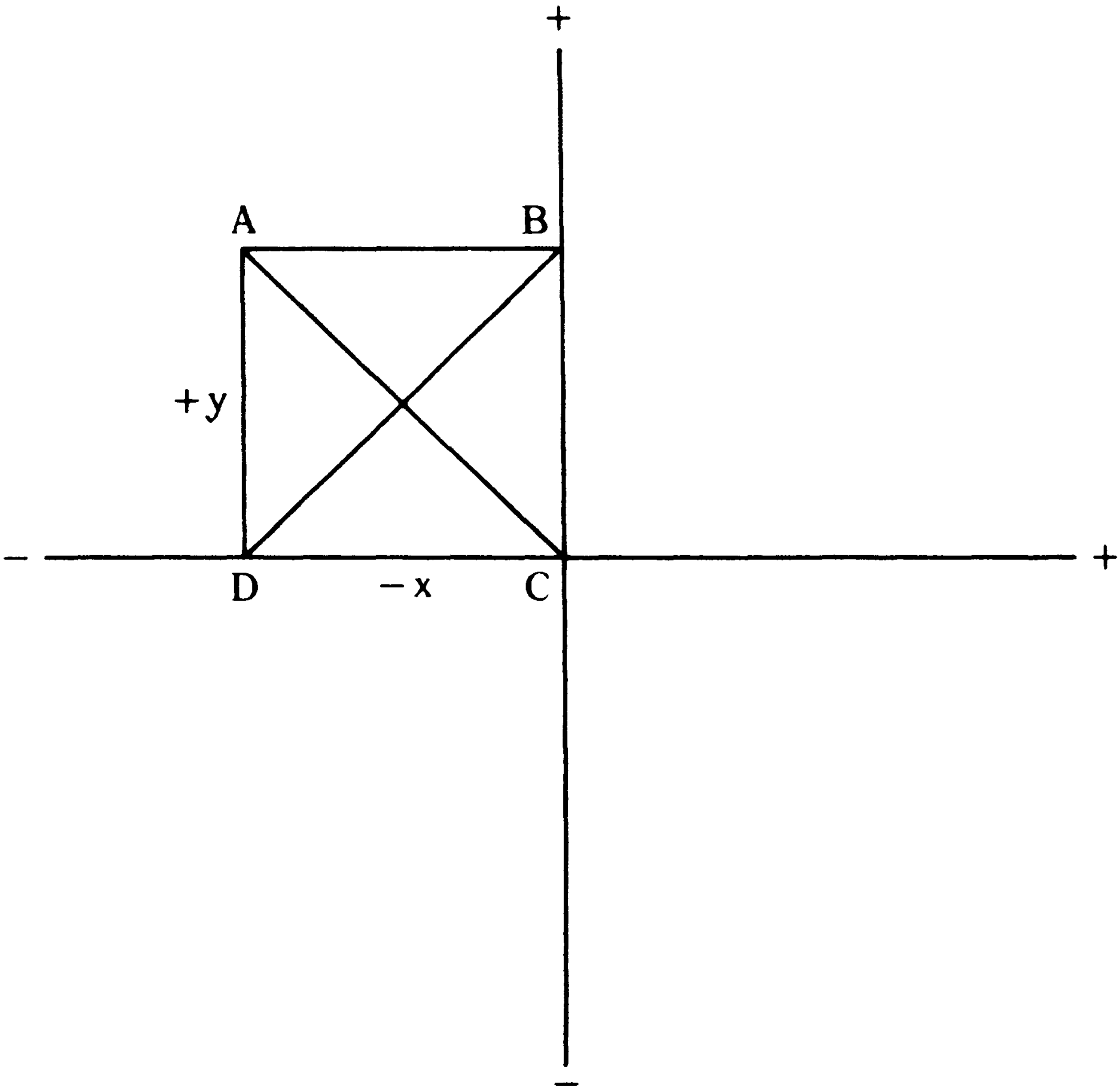


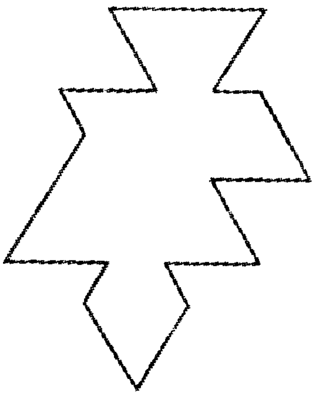
Рис. 74

Парадокс квадрата.

ман прислал мне поразительный документ, который, насколько мне известно, не был опубликован. В статье, опубликованной в свое время в разделе «Математические игры» журнала «Scientific American» я упомянул о том, что хотя в реальном мире нет таких объектов, как отрицательные коровы, отрицательные числа полезны при выполнении алгебраических операций, необходимых, в частности, при решении задач о реальных коровах (разумеется, если вы не заканчиваете свое решение утверждением о том, что столько-то и столько-то отрицательных коров пасутся на лугу). В присланной мне статье Фейнман отстаивает право на существование такого на первый взгляд парадоксального понятия, как отрицательные вероятности. Я не могу вдаваться здесь в технические подробности, но суть работы Фейнмана сводится к следующему: в физике возникают ситуации, когда вычисления с использованием отрицательных вероятностей вполне оправданны, если соблюдать известную осторожность и не утверждать, что какие-то реальные события в реальном мире могут происходить с отрицательной вероятностью.

Глава 12

Разрезание фигур на N конгруентных частей



Волшебник не стал терять времени. Сделав выпад, он поднял свой острый меч и, описав над головой один или два круга, обрушил на колдуна страшный удар, который рассек того на две равные части.

Дороти вскрикнула ...

Л. Фрэнк Баум. «*Дороти и Волшебник в стране Оз*».

Разрезание данной фигуры на две, три и более равных частей – распространенный тип задач, который часто встречается в старых сборниках головоломок. В одних случаях под «равными» понимают «конгруентные», в других – просто равновеликие (т. е. равные по площади) части. Читатели моих предыдущих книг, должно быть, помнят многие задачи такого рода: подсчет числа способов, которыми можно разрезать вдоль линий, образующих границы полей, шахматную доску на две или четыре конгруентные части, деление пополам символа инь и янь (одной прямой) на четыре равновеликие части, деление квадратного пирога на n ломтей равного объема, деление «делящихся» фигур на конгруентные уменьшенные копии их же самих и многие другие.

В этой главе мы рассмотрим несколько различных новых задач о делении фигур на равные части. Некоторые из них приведут нас к важным разделам современной математики.

Начнем с простейшей из задач–разрезания плоской фигуры на две конгруентные части. (Зеркально симметричные фигуры считаются конгруентными.) Если вы думаете, будто все такие задачи легко решаются, то глубоко заблуждаетесь: некоторые из таких задач оказываются на удивление трудными. Насколько мне известно, не существует алгоритма, который позволял бы в общем случае определять, можно ли данную фигуру разрезать на две или более конгруентные части, а интересные теоремы о таких разбиениях фигур, как ни странно, малочисленны.

Читатель может испробовать свои силы, попытавшись разрезать на две конгруентные части каждую из 12 фигур, изображенных на рис. 75. Никаких подвохов здесь нет. Каждая половина односвязна (в ней нет дыр или частей, имеющих лишь конечное число общих точек). Некоторые из этих фигур заимствованы из раздела занимательной математики, который возглавляет в одном из французских журналов Пьер Берлокен. (Издательство «Скрибнер» выпустило в английском переводе три книги Берлокена по занимательной математике.) Фигуру с дырами труднее разрезать на конгруентные части, чем сплошную фигуру. Задачи на разрезание фигур с дырами принадлежат поэтому к малоисследованной области занимательной математики.

Заметим, что четвертая фигура на рис. 75 обладает только двусторонней (билатеральной), или осевой, симметрией: ось симметрии проходит по вертикали строго посредине фигуры. Ясно, что любую плоскую фигуру или объемное тело, обладающие двусторонней симметрией, можно разрезать на две конгруентные части вдоль оси или плоскости симметрии. На рис. 76 вы видите, как Волшебник из страны Оз рассек на две конгруентные части злого Мангабу на глазах кошки Дороти по кличке Эврика. (Действие происходит в Стеклянном Городе под поверхностью земли, в котором обитают овощи.) Всегда ли для того, чтобы разделить осесимметричную фигуру на конгруентные части, ее надлежит разрезать вдоль оси симметрии? Нет, совсем не обязательно, и четвертая фигура подтверждает это. Попытайтесь разрезать ее на две конгруентные части не по оси симметрии.

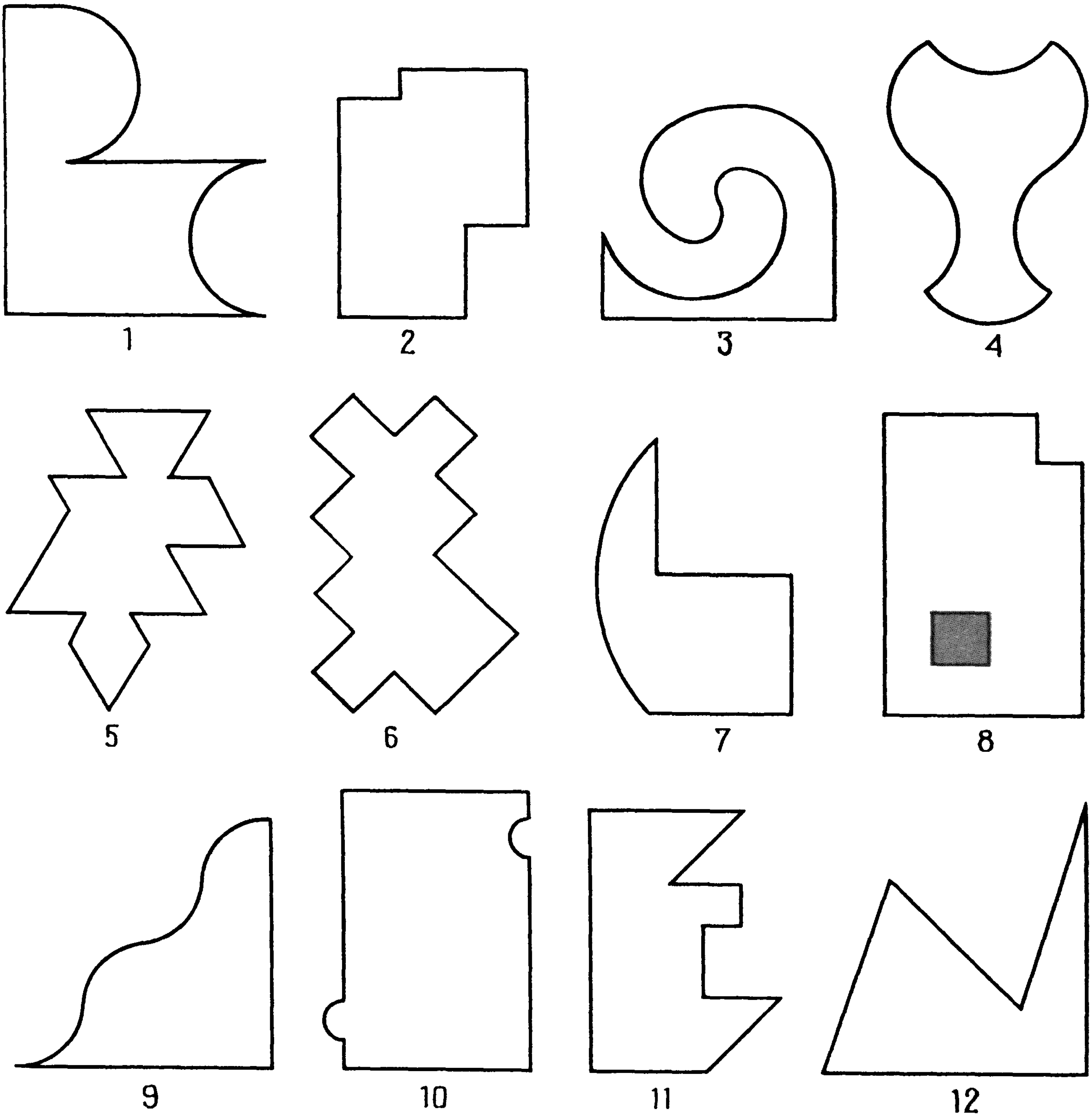


Рис. 75

Фигуры, которые требуется разрезать на конгруентные половинки.

Деление фигуры на *n* конгруентных частей обычно усложняется по мере увеличения *n*, особенно если форма частей заранее задана. Интересная задача о «четвертовании» возникает в связи с двенадцатью фигурами пентамино на рис. 77. (Считаю необходимым упомянуть о том, что в 1975 г. Соломон У. Голомб, создатель термина «пентамино», зарегистрировал этот термин в качестве торгового знака.) Сколько фигур пентамино могут быть разделены на четыре конгруентные части? Оказывается, все, за исключением трех. Я был удивлен, когда обнаружил, что девять

Рис. 76

Волшебник из страны Оз рассекает Мангабу на две половины.

фигур пентамино, допускающих «четвертование», могут быть разделены на части одной и той же формы – пентамино меньших размеров (составленное из меньших квадратов) – и что эта форма единственна. Можете ли вы определить, о каком пентамино идет речь и какие три пентамино из 12 не допускают «четвертования»?

Отбросим теперь условие конгруентности частей и потребуем, чтобы n частей имели только равную площадь. Интуитивно ясно, что любую плоскую фигуру можно разделить на две равновеликие части («половины»), разрезав по некоторой

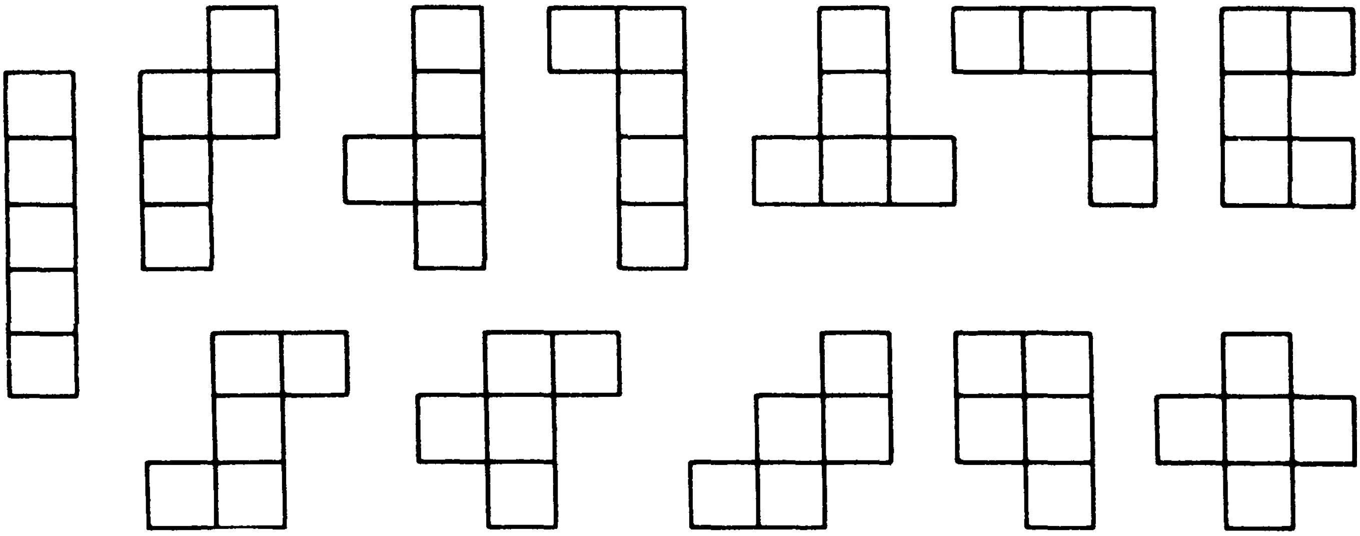


Рис. 77

Двенадцать фигур пентамино.

прямой. Не столь очевидно, что эта прямая может быть параллельна любой данной прямой вне фигуры. Для доказательства этого утверждения воспользуемся знаменитой теоремой: функция одного переменного, непрерывная на замкнутом отрезке [A, B], достигает своего наименьшего и наибольшего значений и принимет все промежуточные вещественные значения.

Поясню смысл этой теоремы на примере. Вы совершаете восхождение на гору по извилистому пути из A в B. Высота, на которой вы находитесь в любой момент времени, есть функция того, в какой точке маршрута вы находитесь. Теорема, о которой идет речь, утверждает, что на маршруте существует по крайней мере одна точка (их может быть несколько, если маршрут ведет то вверх, то вниз), в которой высота минимальна, и по крайней мере одна точка, в которой высота максимальна, а также по крайней мере одна точка для любой промежуточной высоты (заключенной между минимумом и максимумом). Возможно, теорема покажется вам почти тривиальной, однако при доказательстве других, отнюдь не очевидных теорем, она оказывается необычайно полезной.

Рассмотрим темную фигуру, изображенную на рис. 78 слева. Вне фигуры проведена произвольная линия X. Докажем, что можно провести прямую, параллельную прямой X, которая разделит фигуру на две равновеликие (по площади) части. Представим себе, что прямая, оставаясь параллельной прямой X, медленно движется в направлении, показанном

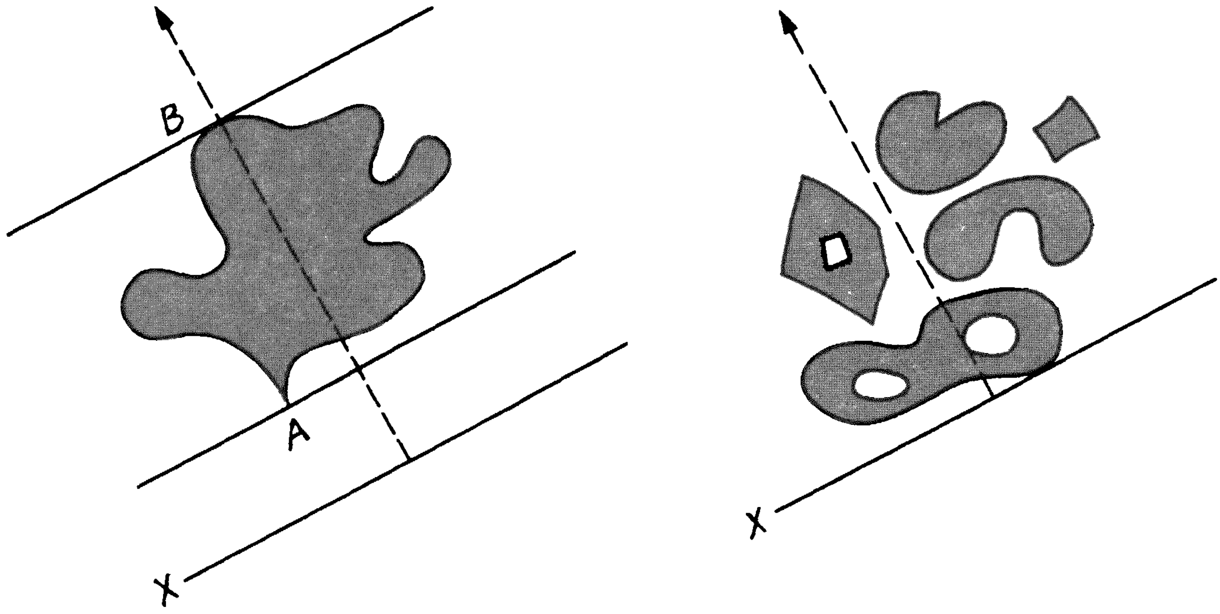


Рис. 78

Доказательство теоремы о разрезании плоских областей на две равновеликие части.

штриховой линией. Движущаяся прямая касается фигуры в точке А и «покидает» фигуру в точке В. Между этими двумя положениями прямая пересекает фигуру, и площадь той части фигуры, которая лежит ниже прямой, есть функция расстояния, пройденного прямой от точки А. Когда прямая проходит через точку А, эта площадь равна нулю. Когда прямая проходит через точку В, площадь максимальна. По нашей теореме, где-то между этими двумя положениями прямая должна отсекать от фигуры часть, площадь которой составляет половину максимума. Именно в этом положении прямая делит фигуру пополам.

Приведенное нами доказательство носит настолько общий характер, что применимо не только к любой связной фигуре (в том числе и к фигуре с дырками), но и к несвязным областям. Взглянув на правую часть рис. 78, вы убедитесь, что через область, состоящую из любого числа несвязных кусков, можно провести прямую, параллельную данной, которая разделит эту область пополам (площадь части области по одну сторону прямой будет равна площади части области по другую сторону прямой).

Предположим теперь, что вы рассматриваете любые две области на плоскости (рис. 79). Всегда ли можно провести прямую, делящую одновременно каждую из двух областей на две равные по площади части? Мы можем доказать, что

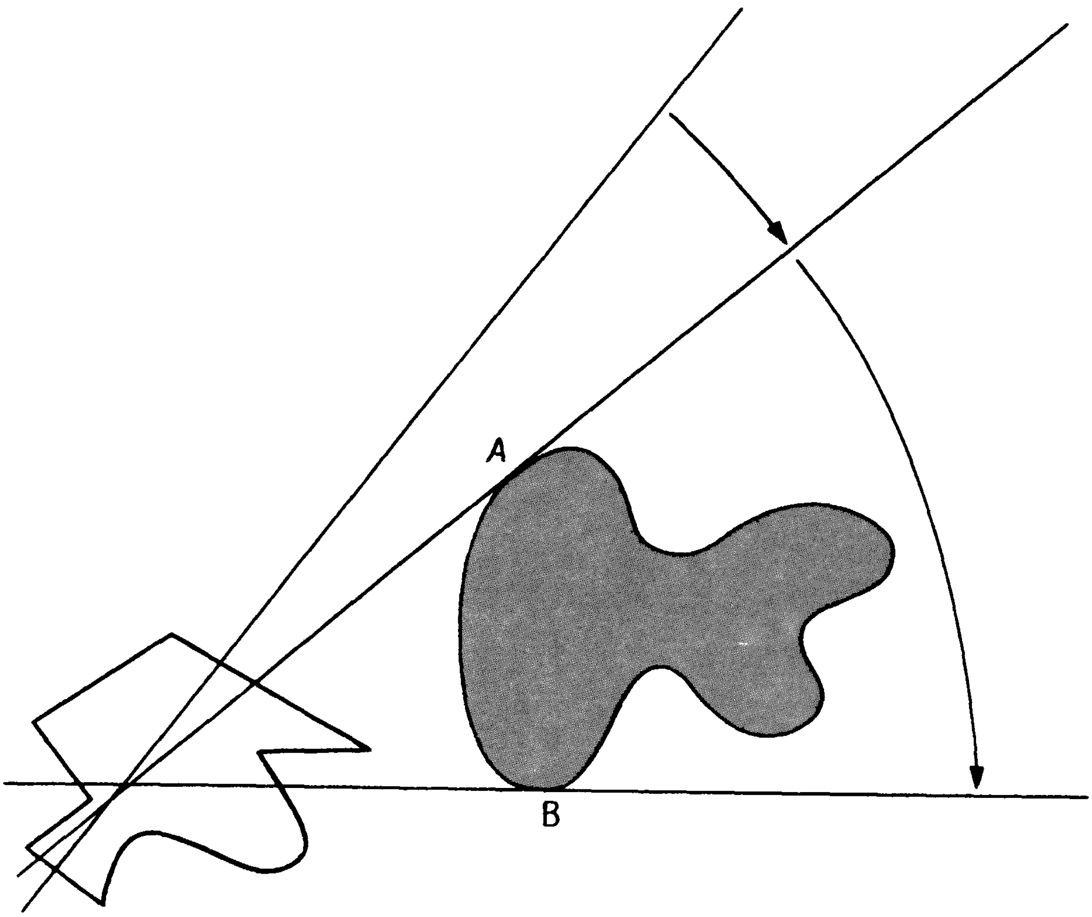


Рис. 79

Доказательство теоремы о сэндвиче с ветчиной на плоскости.

такое действительно возможно. Начнем с того, что разделим белую область прямой, которая проходит мимо темной области. Начнем поворачивать проведенную прямую, следя за тем, чтобы она в любом положении делила белую область на две равные по площади части. (По приведенной выше теореме, это всегда можно сделать.) На рис. 79 прямая изображена в двух положениях: в одном она касается темной области в точке A, вступая в область, в другом касается темной области в точке B, покидая область. В промежуточных положениях прямая отсекает от темной области со стороны точки A часть, площадь которой изменяется от нуля до максимума. Следовательно, в каком-то промежуточном положении прямая отсекает от темной фигуры со стороны точки A ровно половину всей площади.

Теорема, доказанная нами для плоскости, допускает обобщение на случай пространства любого числа измерений. В трехмерном пространстве объемы любых трех тел могут быть разделены пополам одной плоскостью. В четырехмерном пространстве гиперобъемы любого из четырех тел могут быть разделены пополам трехмерной гиперплоскостью. В N-мерном пространстве гиперобъемы любых N тел могут быть разделены пополам одной $(N - 1)$-мерной гиперплоскостью. В трехмерном случае эту теорему иногда называют теоремой о сэндвиче с ветчиной, поскольку она применима к обобщенному сэндвичу из двух кусков хлеба и ломтика ветчины. Какую бы форму ни имели куски хлеба и ломоть ветчины и как бы они ни были расположены в пространстве, существует плоскость, которая делит их пополам.

Доказательство обобщения теоремы на N-мерный случай требует более сложной математики, но для двумерного и трехмерного пространства доказательства легко следуют из нашей фундаментальной теоремы. Оба доказательства, вообще говоря, подсказывают способ построения прямой или плоскости, делящих пополам соответственно плоскую фигуру или объемное тело, но найти положение такой прямой или плоскости практически довольно трудно. Прямые (плоскости), проходящие через центры тяжести фигур (тел), не дают решения, так как прямая (плоскость), проходящая через центр тяжести плоской фигуры (объемного тела), не делит пополам площадь фигуры (объем тела).

Предположим, что дана односвязная фигура, не обязательно выпуклая. Всегда ли существует прямая, которая делит одновременно пополам и площадь, и границу фигуры? Оказывается, такая прямая всегда существует, и доказательство этого утверждения во многом аналогично приведенному выше. Проведем прямую, которая делит границу пополам в точках P и Q (рис. 80). Если эта прямая делит пополам и площадь фигуры, то задача решена.

Предположим теперь, что прямая не делит площадь фигуры пополам. Снабдим прямую стрелкой, указывающей внутрь меньшей из двух частей фигуры, и будем двигать точки Q и P вдоль границы по часовой стрелке, чтобы они по-прежнему делили границу на две равные части. При движении точек Q и P проходящая через них прямая будет непрерывно поворачиваться, а отношение площадей частей фигуры по одну и другую сторону от прямой – непрерывно изменяться. После того как прямая повернется на 180 градусов, она совпадет со своим первоначальным положением, но теперь стрелка будет направлена внутрь большей из двух частей фигуры.

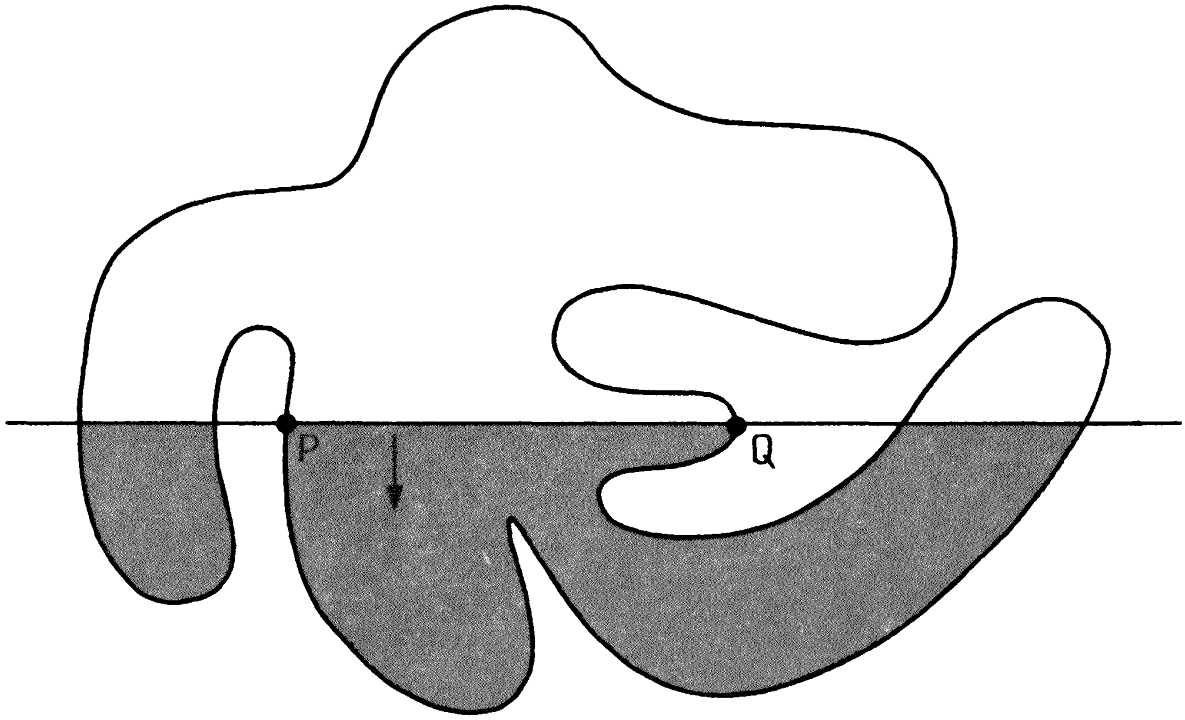


Рис. 80

Доказательство теоремы об одновременном делении пополам периметра и площади.

Рассмотрим разность между площадью той части фигуры, внутрь которой направлена стрелка, и площадью другой части фигуры. В начале эта разность положительная, в конце – отрицательная. Ясно, что значение разности – непрерывная функция угла, на который повернута прямая. Следовательно, при некотором положении прямой разность должна обращаться в нуль, т. е. площади обеих частей фигуры должны быть равны. Доказанная нами теорема допускает обобщение на случай пространств более высокой размерности. Тело может быть разделено на две равные по объему части плоскостью, делящей пополам площадь поверхности тела, а в N-мерном пространстве гипертело может быть разделено на две части равного гиперобъема $(N - 1)$-мерной гиперплоскостью, делящей пополам гиперповерхность тела.

Другая красивая (и отнюдь не очевидная) теорема утверждает, что любая, не обязательно односвязная и даже не обязательно связная, фигура может быть разделена на четыре равновеликие части двумя взаимно перпендикулярными прямыми. Стандартное доказательство этой теоремы очень изящно и основано на тонких соображениях.

Представьте себе лист прозрачной бумаги размером больше, чем фигура. Лист разделен на четыре квадранта взаимно перпендикулярными прямыми (осями) X и Y. Закрасим левый верхний квадрант в темно-серый, а правый верхний квадрант – в светло-серый цвет. Наложим его поверх фигуры так, чтобы горизонтальная ось оказалась ниже фигуры, а вертикальная расположилась справа от нее. Медленно сдвигая лист вверх, переместим ось X в такое положение, в котором она разделит фигуру пополам (на две равновеликие части), после чего, медленно сдвигая лист влево, переместим ось Y в положение, в котором она разделит фигуру пополам. Обозначим части фигуры (на ее чертеже, а не на листе прозрачной бумаги), на которые делят ее оси X и Y, через A, B, C и D. Их относительное расположение показано в верхней части рис. 81.

По построению $A + B = C + D$, $A + C = B + D$. Вычитая второе равенство из первого, получаем $B - C = C - B$, или $2B = 2C$. Следовательно, $B = C$ и $A = D$.

Если $A = B$, то фигура разделена на четыре равновеликие по площади части. Предположим, что фигура не «четвертована» и что область B больше области A. Тогда разность площадей темно-серой и светло-серой областей есть число положительное.

Повернем лист прозрачной бумаги на 90° против часовой стрелки, следя за тем, чтобы оси X и Y по-прежнему делили фигуру пополам. Точка пересечения при этом несколько «блуждает», перемещаясь то в одну, то в другую сторону. По завершении поворота точка пересечения осей непременно совпадает со своим исходным положением, как это показано в нижней части рис. 81, но оси X и Y меняются местами.

Площадь светло-серой части фигуры равна A. Площадь темно-серой части фигуры равна B, а так как $C = B$, площадь темно-серой части фигуры также равна B. Таким образом, площади темно-серой и светло-серой частей также поменялись местами. Следовательно, если теперь мы вычтем площадь большей темно-серой части из площади меньшей светло-серой части, то получим отрицательное число.

Нетрудно понять, каким образом применима в данном случае наша фундаментальная теорема. Величина разности, полученной при вычитании площади темно-серой фигуры из площади светло-серой фигуры, есть непрерывная функция угла поворота листа прозрачной бумаги, изменяющегося от 0 до 90°. Так как эта величина в исходном положении

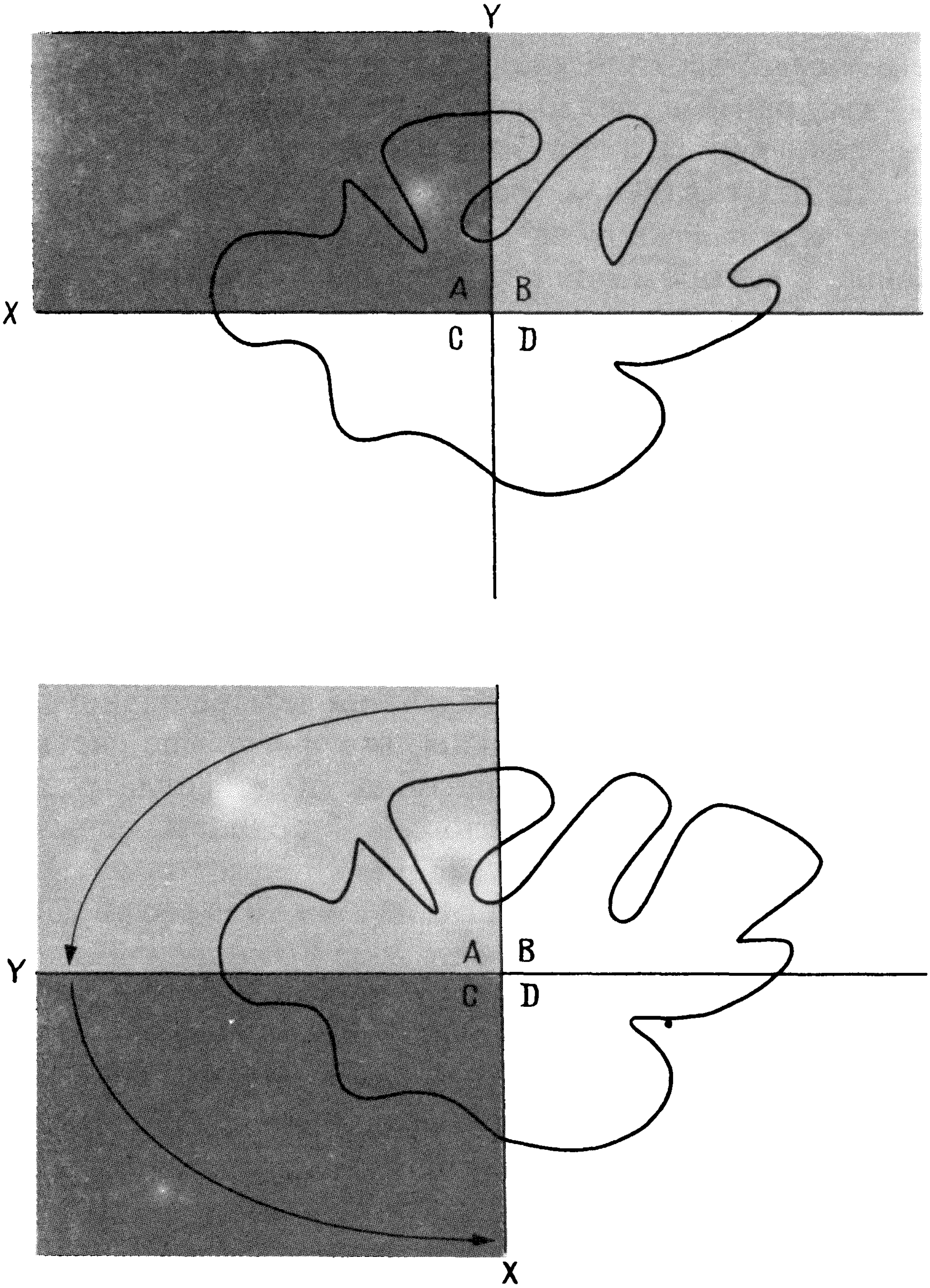


Рис. 81

Как «четвертовать» любую область двумя взаимно перпендикулярными линиями.

положительна, а в конечном отрицательна, в некотором промежуточном положении она обращается в нуль, и в этом положении площади темно- и светло-серой частей фигуры равны. Это означает, что взаимно перпендикулярные оси делят фигуру на четыре равные по площади части.

Доказанная нами теорема допускает обобщение на случай многомерных пространств. Любое трехмерное тело может быть разделено на восемь равных по объему частей тремя взаимно перпендикулярными плоскостями. В общем случае любое N-мерное тело (N – размерность пространства) можно разделить на 2^N частей равного гиперобъема N взаимно перпендикулярными плоскостями.

Как и в предыдущих примерах, теорема, о которой идет речь, принадлежит к числу так называемых теорем чистого существования и мало чем может помочь в практическом решении задачи о делении несимметричных фигур на четыре равные части. Так, мы знаем, что пифагоров треугольник со сторонами 3, 4 и 5 можно разделить на четыре равные по площади части двумя взаимно перпендикулярными прямыми, но построение этих прямых само по себе представляет другую задачу. Простой способ решения ее мне не известен.

На рис. 82 представлены 4 задачи на деление геометрических фигур на равные по площади части. Решение их гораздо менее трудно, чем «четвертование» пифагорова треугольника со сторонами 3, 4 и 5. Однако все 4 задачи

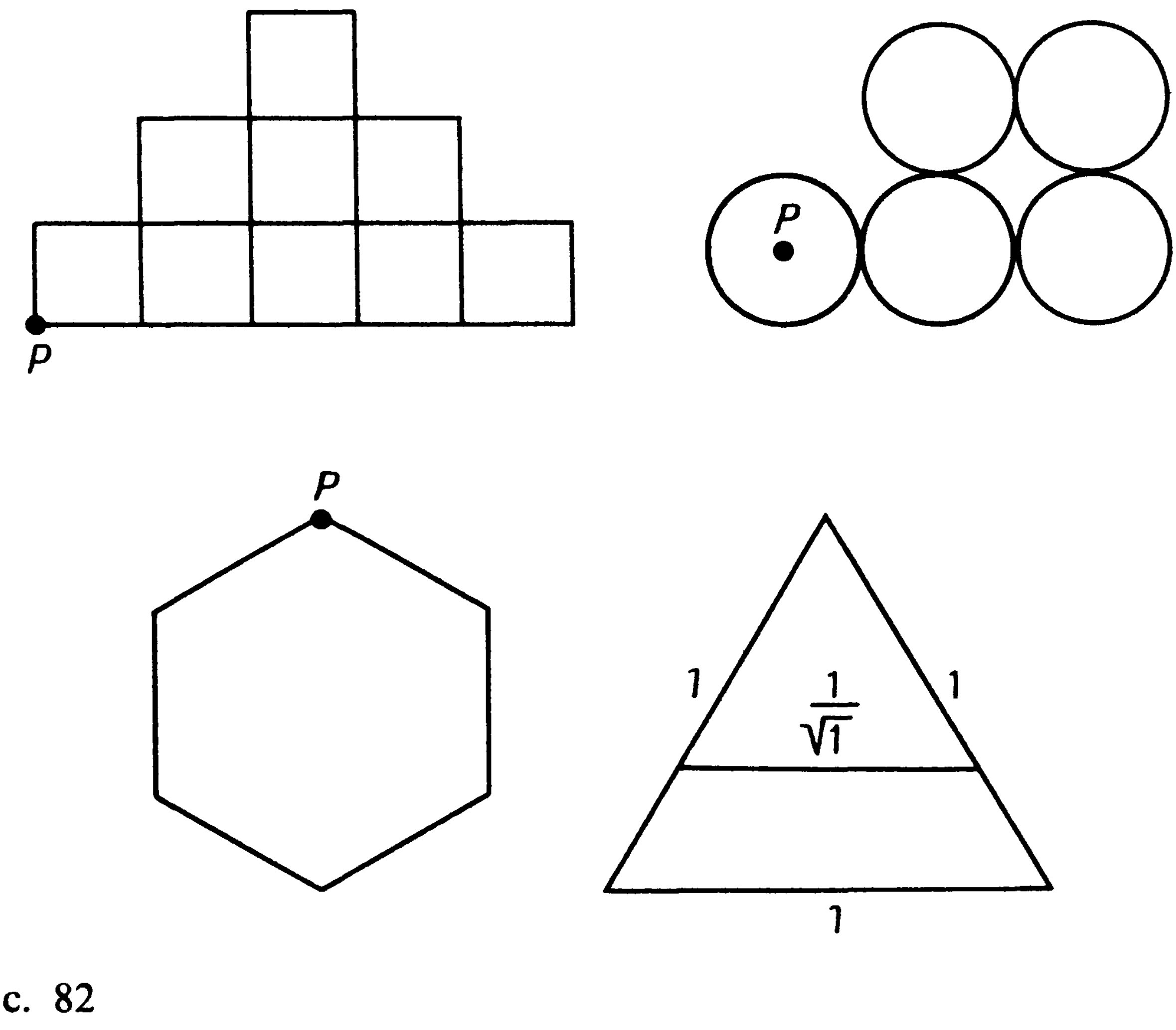


Рис. 82

Четыре задачи о разбиении на две равновеликие части.

достаточно хитроумны, и решение их требует немалой изобретательности.

В первой задаче фигуру, составленную из 9 квадратов, требуется разделить на 2 равные по площади части прямой, проходящей через вершину P.

Во второй задаче фигуру, состоящую из 5 кругов, требуется разделить на 2 равные по площади части прямой, проходящей через точку P – центр левого круга в нижнем ряду.

Третья задача состоит в трисекции площади правильного шестиугольника двумя прямыми, проходящими через вершину P.

В четвертой задаче требуется разделить пополам равносторонний треугольник кривой минимальной длины. На рис. 82 показан равносторонний треугольник, разделенный пополам кратчайшей прямой, но существует более короткая кривая, также делящая равносторонний треугольник пополам.

Ответы и решения

На рис. 83 показано, как можно разделить на конгруентные половины 12 фигур, изображенных на рис. 75. На рис. 84 показано, как можно разделить на одни и те же 4 конгруентные части 9 из 12 фигур пентамино. Три пентамино в нижнем ряду не могут быть разделены на 4 конгруентные части любой формы.

На рис. 85 приведены решения четырех задач, о которых мы упоминали в конце главы. Чтобы разделить на две равные части фигуру из 9 квадратов, дополним ее десятым квадратом (на рис. 85 он показан штриховыми линиями). Проведя прямую AB, мы найдем точку C, а затем соединим ее отрезком прямой с точкой P. Если длину стороны квадрата принять за единицу, то $CD = 1/4$. Нетрудно видеть, что прямая PC делит исходную фигуру на 2 равные по площади части. Чтобы разделить пополам фигуру из 5 кругов, пристроим к ней еще 3 круга, как показано штриховыми линиями. Ясно, что прямая, проходящая через центры левого круга в нижнем ряду и правого круга в верхнем ряду, делит пополам площадь всей фигуры. (Обе задачи заимствованы из книги Р. М. Люси [12, 1*].)

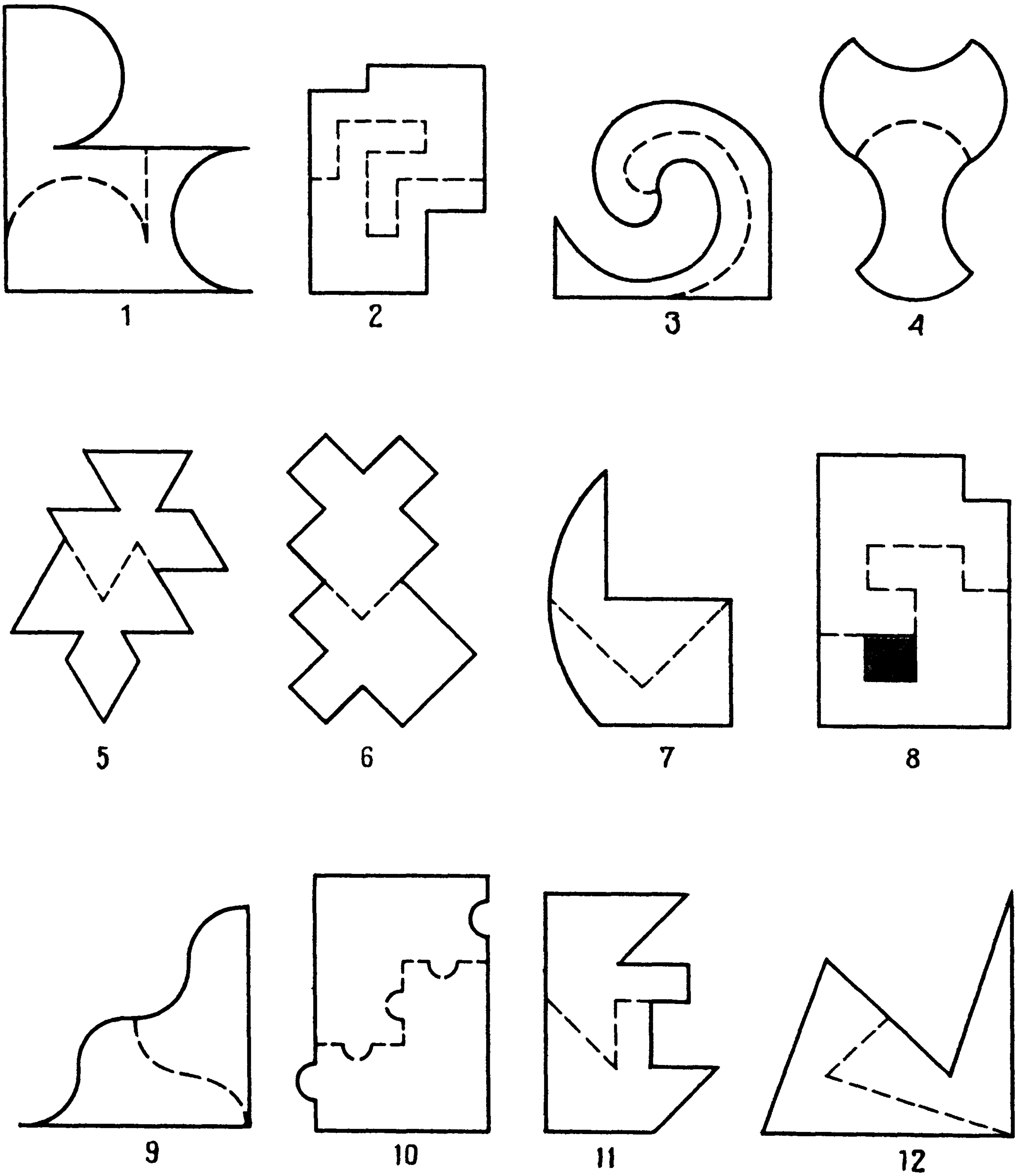


Рис. 83

Решения задач о разбиении на две равновеликие части.

Трисекцию правильного шестиугольника, изображенного в нижней части рис. 85, мы получим, соединив вершину P с серединами C и D двух его сторон. Предположим, что равносторонние треугольники, из которых составлен правильный шестиугольник, имеют единичную площадь. Тогда площадь треугольника PAB равна единице. Следовательно, площадь треугольника PBE равна 2, откуда следует все

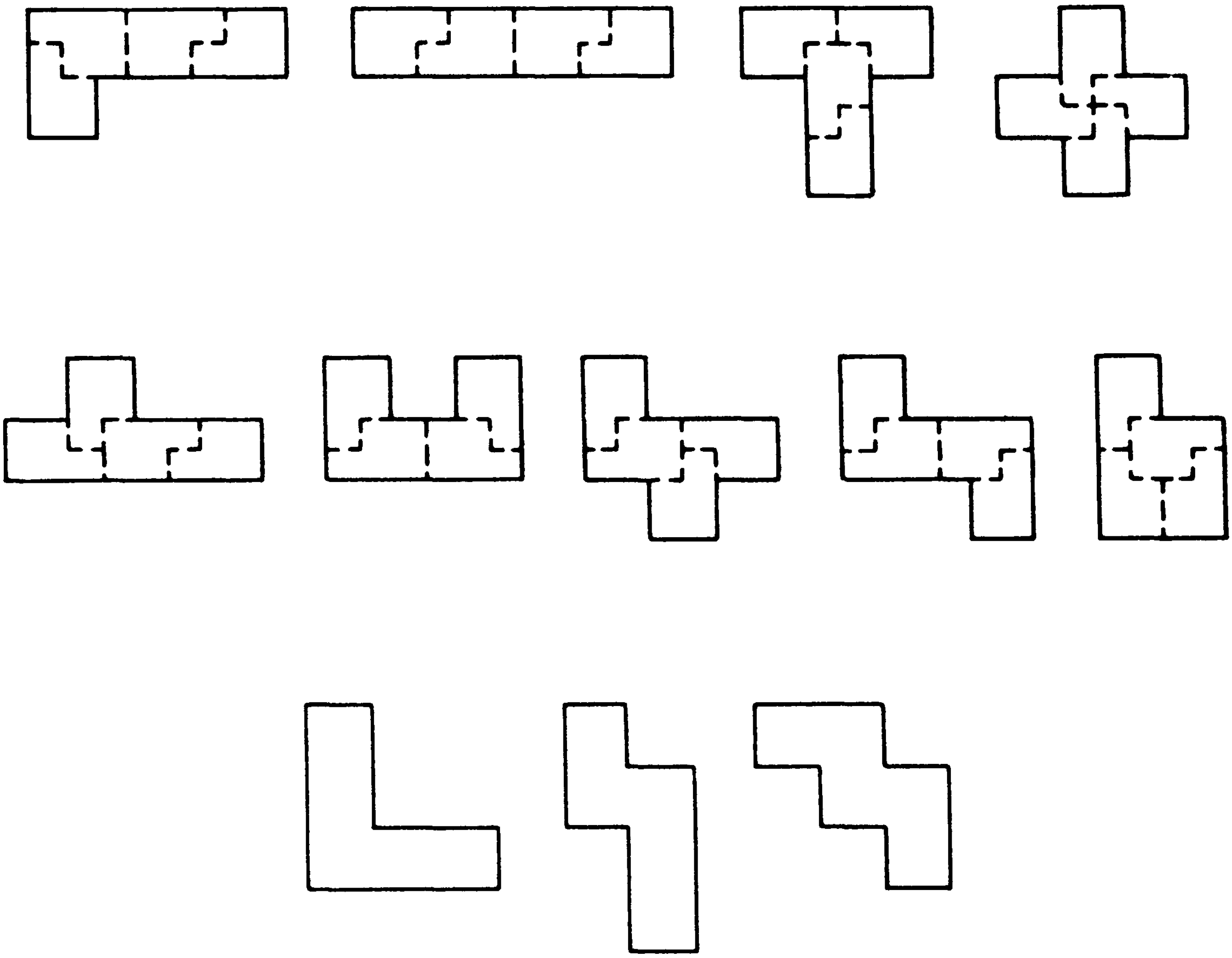


Рис. 84

Разбиение фигур пентамино на четыре конгруентные части.

остальное. Мне не удалось найти сравнительно простое решение задачи о трисекции правильного пятиугольника двумя прямыми, проходящими через одну из его вершин.

Два правильных шестиугольника в средней части рис. 85 показывают, как Лео Мозер доказал, что кривая минимальной длины, делящая пополам равносторонний треугольник, есть дуга окружности. Действительно, какой бы ни была форма кривой, делящей равносторонний треугольник пополам, при отражении треугольника относительно одной из вершин она образует замкнутую кривую, как показано на рис. 85. Такая замкнутая кривая делит правильный шестиугольник пополам и заключает внутри себя некоторую площадь. Но, как известно, среди всех фигур, имеющих данную площадь, наименьший периметр имеет окружность. Следовательно, кривая минимальной длины, делящая пополам равносторонний треугольник, есть не что иное, как дуга окружности. (Эта задача заимствована мной из книги Чарлза У. Тригга «Задачи с изюминкой» [12, 2*].)

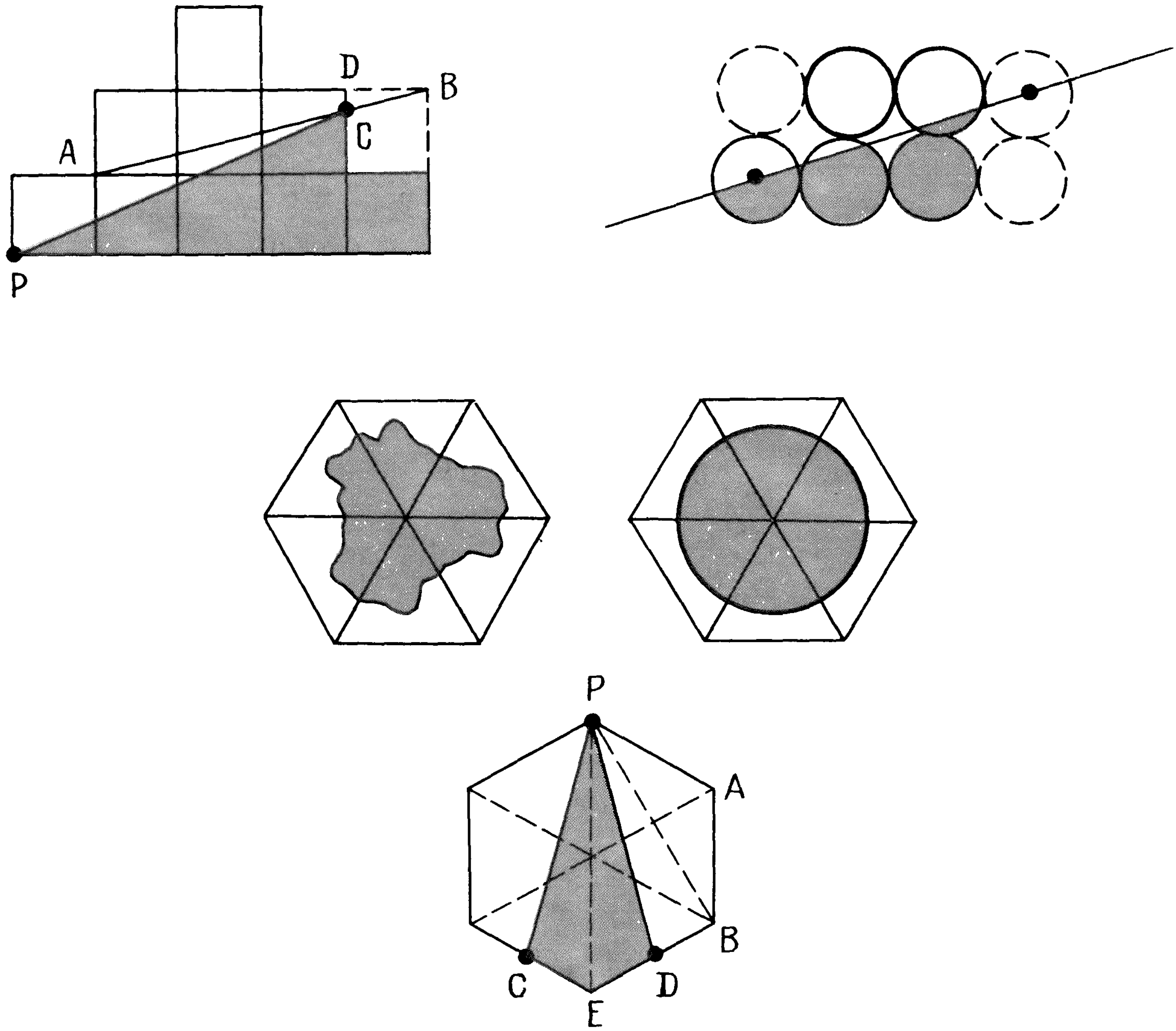


Рис. 85

Решения четырех задач о разбиении на две равновеликие части.

Дополнение

Предложенное мной решение задачи о делении пополам фигуры из 5 кружков требовало построения трех дополнительных кругов. Многие читатели прислали решения без дополнительных кругов (рис. 86). Как видно из рис. 86, жирная линия делит пополам фигуру из 5 кругов. Макс Гордон Филлипс из Саннивейл (Калифорния) прислал решение, превзошедшее все остальные: оно не требует *никаких* предварительных построений. Он заметил, что прямая, проходящая через точку касания двух кругов, делит их площадь пополам независимо от того, как она повернута. Если эта прямая к тому же проходит через центр третьего круга так, что два остальных круга лежат по разные стороны

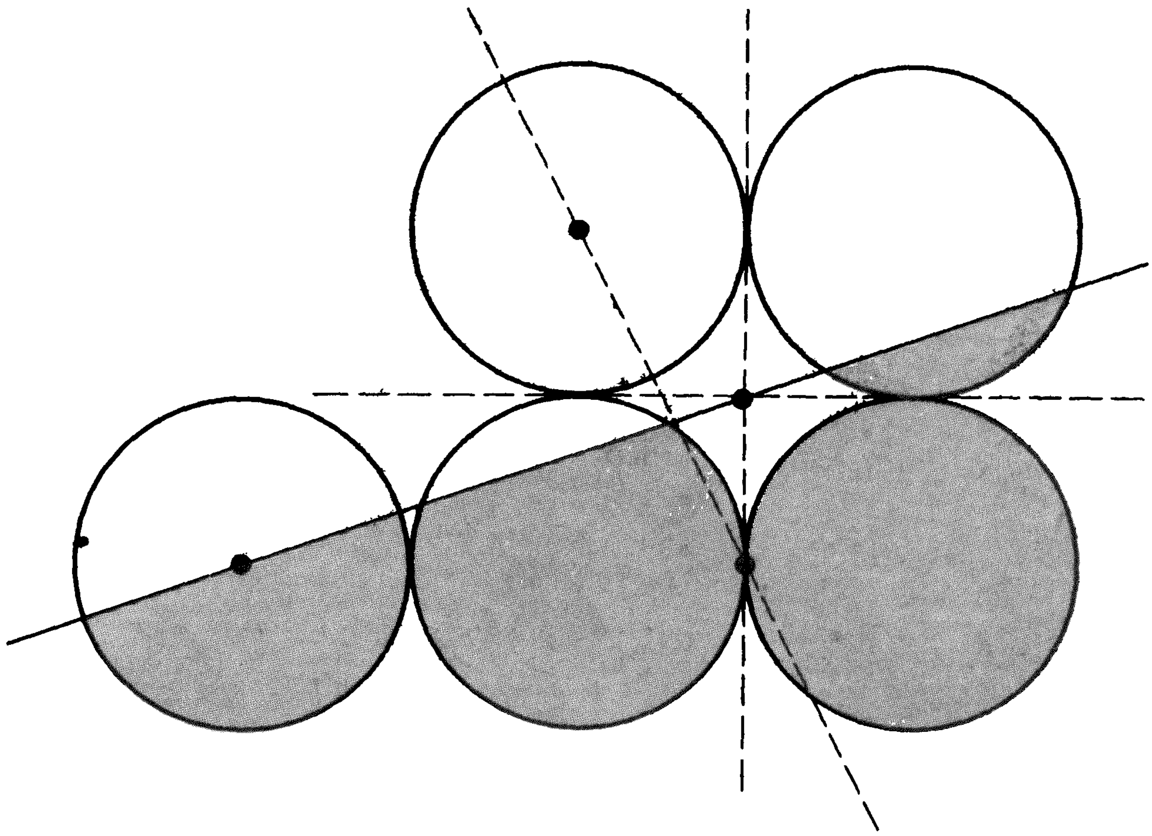


Рис. 86

Усовершенствованные решения задачи о разбиении на две равновеликие части.

от прямой, то площадь всех пяти кругов окажется разделенной пополам. Существует 5 таких прямых, каждая из которых проходит через центр одного из кругов. На рис. 86 показана (штриховой линией) одна из таких прямых.

В конце «Ответов и решений» я упомянул о том, что мне неизвестно простое решение задачи о трисекции правильного пятиугольника прямыми, проходящими через одну вершину пятиугольника. Карл Ф. фон Майенфельдт из Ванкувера предложил решение этой задачи, суть которого ясна из рис. 87. Предполагается, что сторона правильного пятиугольника имеет единичную длину.

Рассказав о делении на четыре равные части площади любой фигуры двумя взаимно перпендикулярными прямыми, я обратил внимание читателей на трудность построения таких прямых для пифагорова треугольника со сторонами 3, 4 и 5. Фон Майенфельдт первым прислал решение этой задачи и доказал его единственность. То же по существу решение, слишком сложное, чтобы его можно было привести здесь, позднее прислали Виндшитл и Сесил Дж. Филиппс.

Хотя ни одному из читателей не удалось обнаружить

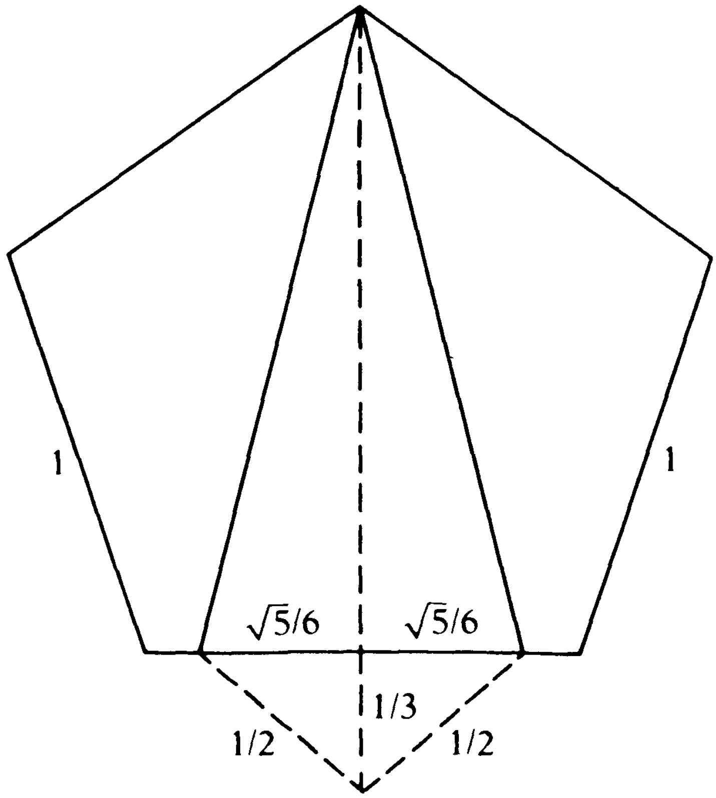


Рис. 87

Трисекция площади правильного пятиугольника.

общий алгоритм решения всех задач на разрезание любых фигур на две конгруентные половины (если такое разрезание возможно), многие читатели сумели найти алгоритмы, применимые к довольно широкому кругу таких задач. Например, в некоторых случаях такие задачи можно решать, вычерчивая фигуру, которую требуется разделить, на листе прозрачной бумаги и по-разному поворачивая контуры фигуры относительно первоначальной фигуры. Первыми такого рода подходы к решению задач на разрезание прислали Абель Бомберо, Роберт У. Дэвис, Джеймс Р. Фиенап, Дэвид Флеминг; Аллен Дж. Швенк, Дэниэл Слитор, Ласло М. Вешеи и Марсель Винокур.

Дон Тейлор предложил идею шутливого пари на основе пресловутой теоремы о неподвижной точке – той самой теоремы, на которой основаны все упоминавшиеся теоремы о возможности того или иного деления фигур. Вы заключаете пари, что сумеете провести линию длиной *ровно* в 1 см, и выигрываете, проводя линию длиной около 3 см: поскольку длина линии изменяется непрерывно от нуля (или величины меньше 1 см), непременно найдется промежуточная точка, в которой длина линии составит ровно 1 см.

Как мы уже знаем, любые две фигуры на плоскости

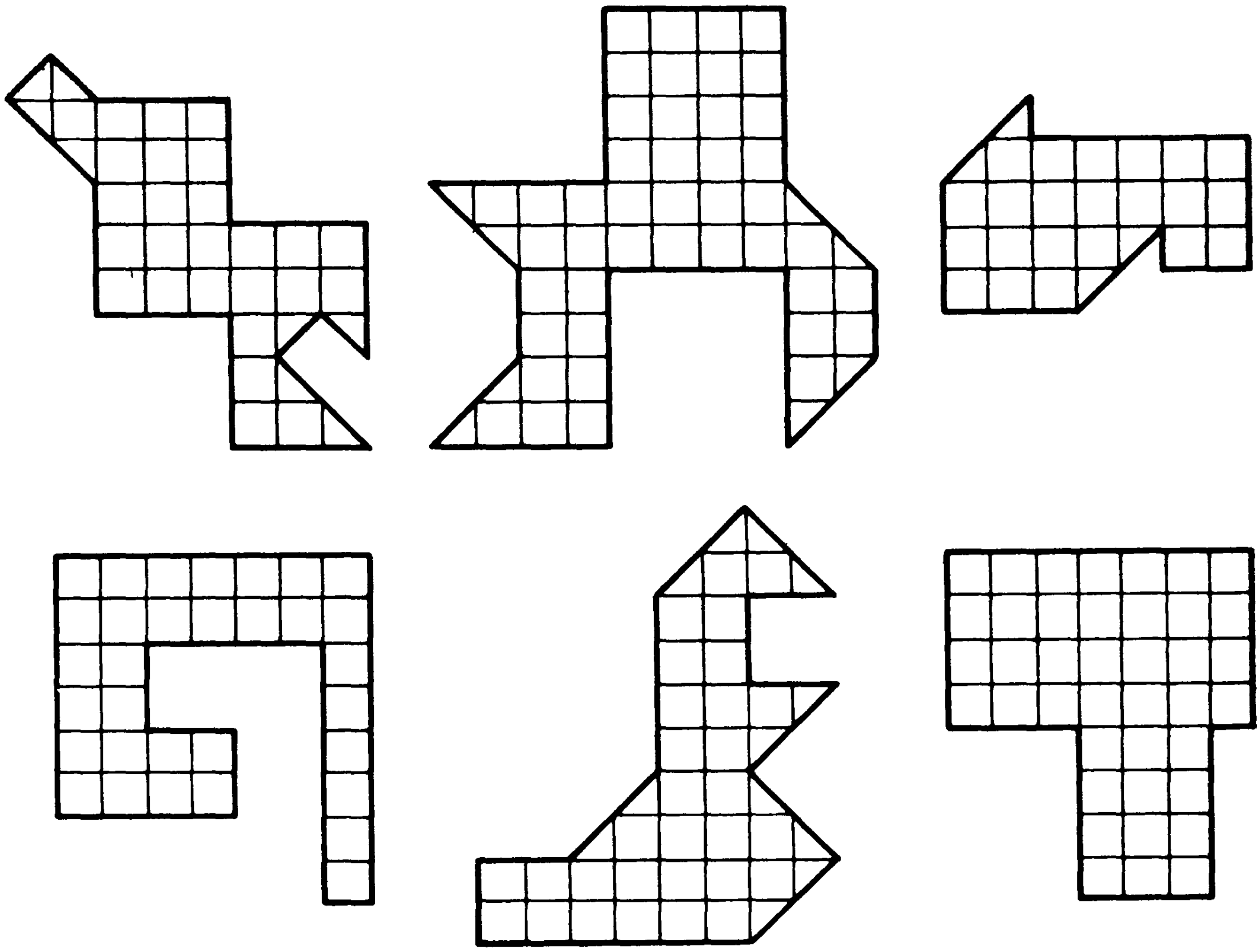


Рис. 88

Еще несколько задач о разбиении на две равновеликие части.

всегда можно разделить на две равные по площади части одной прямой. В своей книге «Математический калейдоскоп» [12, 3*] Гуго Штейнгауз утверждает, что суммарную площадь любых трех фигур на плоскости всегда можно разделить пополам с помощью подходящим образом проведенной окружности. Доказательства этого утверждения Штейнгауз не приводит, ссылаясь в примечании на собственную статью в серьезном математическом журнале [12, 4*].

С тех пор как эта глава впервые появилась в журнале «Scientific American», в математических и популярных журналах типа «Games» («Игры») и двух аргентинских журналах «Juegor» («Игры») и «Cacumen» («Проницательность») было опубликовано много задач о делении фигуры на n конгруентных частей. Выпускаемый фирмой Springer-Verlag «Математический календарь» на 1979 г. посвятил таким задачам отдельный очерк и уделил целую страницу особенно трудным задачам о делении фигур на половины.

Образец такой задачи приведен на рис. 88. Линии сетки

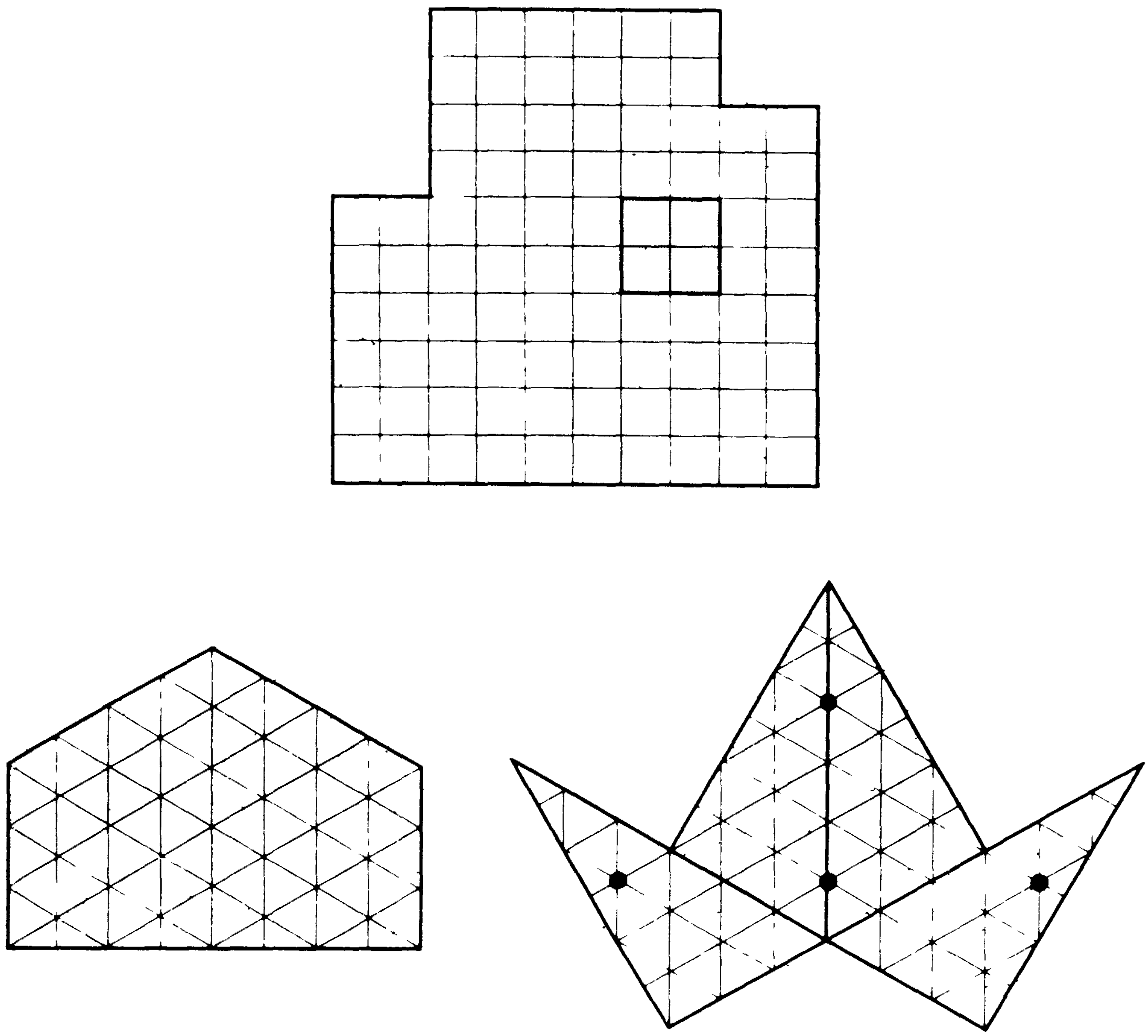


Рис. 89

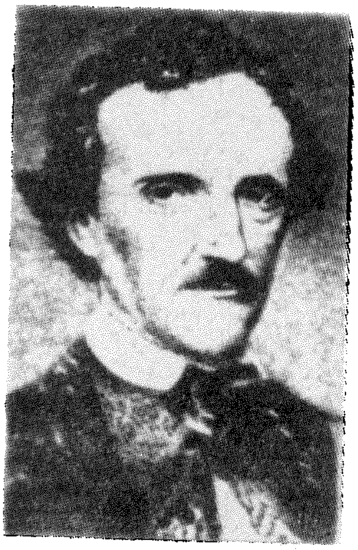
Задача о трисекции (вверху) и две задачи на «четвертование» (внизу).

приведены лишь для того, чтобы вы лучше представили себе, как построить контуры фигур, и вовсе не означают, будто и разрез следует проводить по ним. Самая трудная из задач – это разбиение на две равные части последней фигуры, придуманной С. В. Голомбом. В качестве указания к решениям (т. е., попросту говоря, подсказки) замечу, что в этом случае разрез проходит по линиям решетки.

В верхней части рис. 89 вы видите одну из задач на трисекцию фигур, опубликованных весной 1984 г. в английском журнале «Eureka» («Эврика»): требуется разрезать фигуру на 3 конгруентные фигуры полимино. В нижней части рис. 89 приведены две задачи на «четвертование», придуманные Манджунатом Хегдом из Индии. На левой фигуре жирными линиями показано, как легко она может быть разделена на четыре конгруентных треугольника. Ваша задача состоит в том, чтобы разделить ту же фигуру на четыре конгруентные части, каждая из которых содержит по одной из четырех жирных точек. Вторая задача Хегда состоит в делении четырех конгруентных частей правой фигуры. Во всех трех задачах, приведенных на рис. 89, решение достигается разрезанием исходной фигуры по линиям сетки. Если бы я привел ответы к этим трем задачам и шести задачам на деление фигур пополам, приведенным на рис. 88, то решать их было бы не так интересно.

В своем архиве я нашел газетную вырезку от 21 января 1983 г. Агентство Ассошиэйтед Пресс сообщает из Сентрал Сити (Кентукки) о том, что местный судья вынес решение, запрещающее Вирджилу М. Эверхарту делить дом пополам. По-видимому, супруга мистера Эверхарта потребовала при разводе раздела имущества пополам, и мистер Эверхарт, вооружившись пилой и дрелью, принялся резать свой дом на две равные части, одну из которых он назвал «его часть», а другую – «ее часть».

Глава 13
Надежные шифры



Найдется немного людей, которых можно заставить поверить в то, что нелегко изобрести метод тайнописи, способный устоять против усилий тех, кто попытается его раскрыть. Тем не менее можно смело утверждать, что человеческий гений не в силах составить шифр, раскрыть который оказалось бы не под силу человеческому гению.

Эдгар Аллан По

Непрестанный рост стоимости почтовых услуг, сопровождающийся повсеместным ухудшением их качества,– тенденция, которая может оказаться как устойчивой, так и неустойчивой. Если же говорить о средствах личной связи, то в ближайшие десятилетия традиционная почта утратит свое значение по той простой причине, что передача информации по электронной почте происходит гораздо быстрее и обходится гораздо дешевле, чем по обычным почтовым системам. Недалек тот час, когда каждый из нас сможет подойти к любому телефону, ввести текст в специальную приставку и набрать нужный номер. Телефон вашего адресата на другом конце провода немедленно отпечатает переданное вами сообщение.

Возможно, что на первых порах услугами электронной почты будут пользоваться правительственные агентства и крупные компании, но вскоре очередь дойдет и до небольших предприятий и частных лиц. Когда же электронная почта получит массовое распространение, возникнет все более остро ощущаемая потребность в удобных для использования и надежных шифрах, позволяющих успешно бороться с нежелательной утечкой информации. Аналогичная проблема возникает и в связи с обеспечением надежной защиты частной информации, хранящейся в компьютерных банках информации, от нескромных взоров тех, кто имеет доступ к памяти через сети обработки данных.

Неудивительно, что в последние годы некоторые математики стали задавать себе вопрос: можно ли создать шифр, позволяющий быстро осуществлять шифровку и расшифровку текста с помощью компьютера, не требующий изменения ключа при повторном использовании и способный устоять перед всеми ухищрениями криптоаналитиков? Как ни удивительно, но создание такого идеального шифра оказалось возможным. Прорыв произошел совсем недавно (не более двух лет назад) и сулит произвести переворот во всей области секретной связи,– переворот настолько революционный, что все существовавшие ранее шифры и методы «раскалывания» их могут вскоре оказаться преданными забвению.

Надежный шифр может быть надежен либо теоретически, либо всего лишь практически. Эдгар Аллан По, воображавший себя искусным криптоаналитиком, считал, что нет такого шифра, который нельзя было бы «разгадать». По глубоко заблуждался. К тому времени теоретически нераскрываемые шифры были в ходу уже почти полвека. Все они были одноразовые, т. е. предназначались для шифровки одного-единственного текста. Приведем простой пример такого шифра, основанного на сдвиге букв алфавита (иногда такой шифр называют шифром Цезаря в память о том, что им пользовался еще Юлий Цезарь).

Выпишите сначала весь алфавит, а за ним – цифры от 0 до 9. (При шифровке 0 соответствует пробелу между словами, а остальные цифры – знакам препинания.) Под выписанной последовательностью знаков расположите такую же последовательность, циклически сдвинутую вправо на произвольное число знаков, как показано на рис. 90. Шифровка состоит

Шифр, который не удалось разгадать Эдгару По

GE JEASGDXV,

ZIJ GL MW, LAAM, XZY ZMLWHFZEK EJLVDXW KWKE TX LBR ATGH LBMX AANU BAI VSMUKKSS PWN VLWK AGH GNUMK WDLNZWEG JNBXVV OAEG ENWB ZWMGY MO MLW WNBX MW AL PNEDCFPKH WZKEX HSSF XKIYANUL. MK NUM YEXDM WBXY SBC HV WYX PHWKGNAMCUK?

В 1839 г. Эдгар Аллан По обратился к постоянным читателям редактируемого им раздела в филадельфийском журнале «Alexander's Weekly Messenger» с предложением присылать ему шифротексты (зашифрованные с помощью подстановки букв того же алфавита), утверждая, что берется безотлагательно «расколоть» все шифры. Некий Дж. У. Калп откликнулся на призыв По и прислал шифротекст, приведенный выше (послание Калпа было опубликовано в номере журнала от 26 февраля 1840 г.). В следующем номере журнала По «доказал», что шифр Калпа был розыгрышем – «мешаниной случайных букв, не имеющей ни малейшего смысла».

В 1975 г. Брайн Дж. Винкель, математик из Альбион-колледжа, и Марк Листер, студент-химик, посещавший лекции Винкеля по криптологии, «раскололи» шифр Калпа. По был прав в одном – шифр Калпа не был простой подстановкой, но присланный Калпом шифротекст не был бессмыслицей. Вряд ли стоит упрекать По за допущенную им ошибку: помимо одной крупной ошибки в тексте Калпа было обнаружено еще 15 небольших ошибок (возможно, опечаток, допущенных наборщиком при считывании текста).

Винкель издает новый журнал «Cryptologia», который посвящен главным образом математическим и вычислительным аспектам криптологии. В первом номере журнала (январь 1977 г.) рассказана история шифра Калпа и приведен в качестве задачи для читателей шифротекст. До сих пор расколоть шифр Калпа удалось всего лишь трем читателям. Расшифровку текста я приведу в разделе «Ответы и решения».

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H
S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

Рис. 90

Шифр Юлия Цезаря со сдвигом латинского алфавита на 10 букв.

в считывании текста, отыскании каждого символа в верхней строке и замене его символом, стоящим под ним в нижней строке. В результате получается простой шифр, основанный на подстановке символов. Раскрыть его не составляет труда даже для любителя.

Несмотря на свою простоту, шифр, получаемый при циклическом сдвиге последовательности символов, может стать основой действительно нераскрываемого шифра. Весь трюк заключается в использовании для каждого символа в тексте «своего» индивидуального шифра: величина сдвига каждый раз выбирается случайным образом. Это нетрудно сделать, если воспользоваться, например, вертушкой, изображенной на рис. 91. Предположим, что незашифрованный английский текст начинается с определенного артикля THE. Мы запускаем вертушку, и стрелка останавливается на букве *K*. Это означает, что для кодирования буквы *T* следует воспользоваться шифром Цезаря, в котором нижний алфавит сдвинут на 10 символов вправо так, что *A* в нижнем алфавите приходится под буквой *K* в верхнем алфавите. В этом шифре Цезаря букве *T* соответствует буква *J*. Та же процедура применяется к каждому символу исходного текста: прежде чем заменять очередной символ, мы запускаем вертушку и узнаем, на сколько символов необходимо сдвинуть нижний алфавит относительно верхнего. В результате мы получаем шифротекст, начинающийся с буквы *J*, и «ключ» шифра, начинающийся с буквы *K*. Подчеркнем, что ключ шифра оказывается такой же длины, как исходный текст.

Чтобы воспользоваться таким одноразовым шифром для передачи сообщения кому-нибудь (обозначим нашего корреспондента *Z*), нам необходимо предварительно передать *Z* ключ. Это можно сделать с помощью надежного курьера.

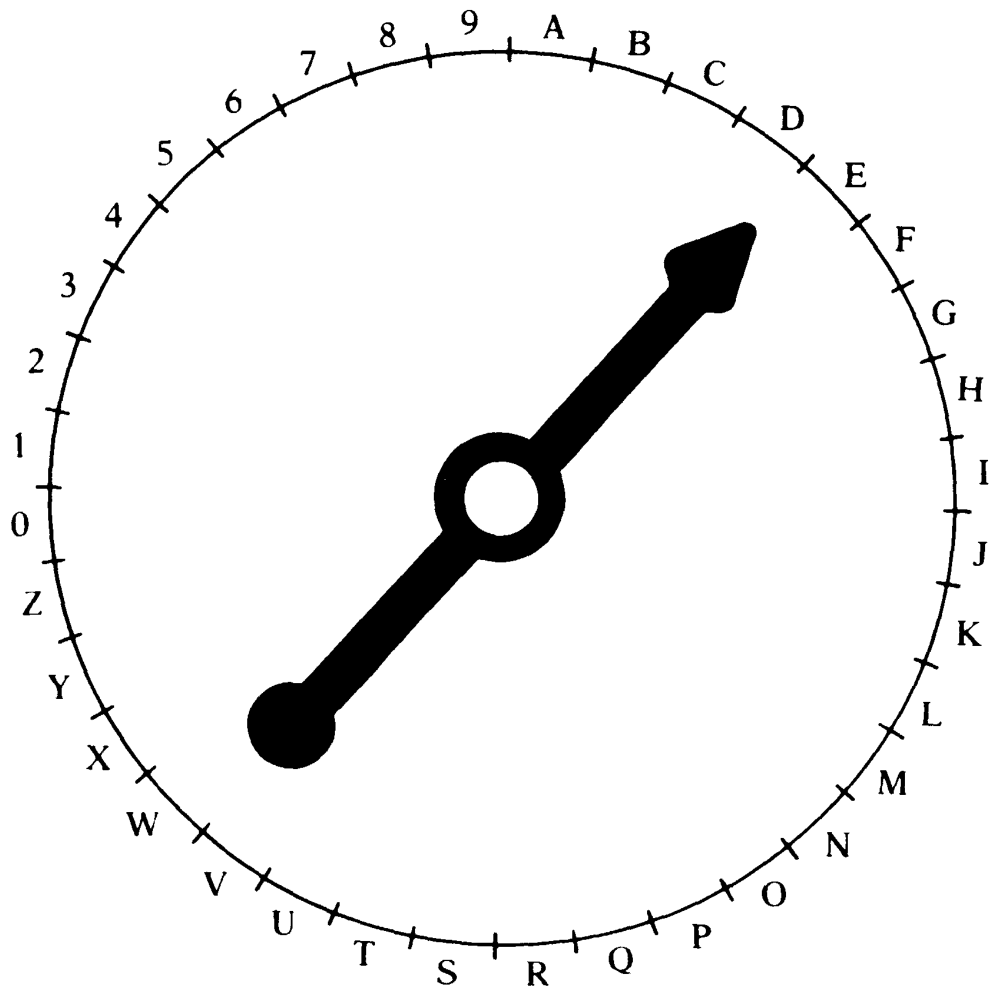


Рис. 91

Рандомизатор для «одноразового шифровального блокнота».

Затем мы посылаем Z (например, по радио) шифротекст. Получив его, Z расшифровывает сообщение с помощью ключа и уничтожает ключ. Пользоваться одним и тем же ключом повторно запрещается, так как если два полученных с его помощью шифротекста будут перехвачены, у криптоаналитика может оказаться достаточно материала, чтобы расшифровать тексты.

Нетрудно понять, почему одноразовый шифр нераскрываем даже в принципе: так как каждый символ в исходном тексте может быть заменен любым другим символом и выбор любой замены совершенно случаен, шифротекст не обладает никакой внутренней структурой. Иначе говоря, любой текст, имеющий такую же длину, как шифротекст, может рассматриваться как расшифровка последнего (наряду с любым другим текстом той же длины). Даже если бы удалось расшифровать первоначальный текст, это не очень помогло бы криптоаналитику на будущее, поскольку в следующий раз используемый при шифровке случайно выбранный ключ был бы совершенно другим.

Одноразовые шифровальные блокноты постоянно используются в наше время для обмена информацией между высшими военачальниками, правительствами и их высокопоставленными представителями. Блокнот представляет собой всего лишь длинный перечень случайных чисел, иногда напечатанный на нескольких страницах. У отправителя и получателя шифротекста должно быть по одному экземпляру такого блокнота. Отправитель использует для зашифровки передаваемого текста первую страницу блокнота в качестве ключа и затем уничтожает ее. Получатель использует первую страницу своего блокнота для дешифровки принятого текста и затем также уничтожает ее. Когда в 1957 г. в Нью-Йорке был пойман советский агент Рудольф Абель, при нем был обнаружен одноразовый шифровальный блокнот в виде книжечки размером с почтовую марку. Дэвид Кан, который рассказывает о деле полковника Абеля в своей замечательной книге «Разгадыватели шифров» [14, 2], утверждает, что одноразовые шифровальные блокноты – способ секретной радиосвязи, излюбленный советскими спецслужбами. При переговорах по знаменитой линии прямой связи («горячей линии») между Вишингтоном и Москвой также используются одноразовые шифровальные блокноты. Ключами к шифрам стороны периодически обмениваются через посольства в Москве и Вашингтоне.

Но если одноразовый шифровальный блокнот гарантирует абсолютную секретность, то почему он не используется во всех видах секретной связи? По той простой причине, что шифровальный блокнот не слишком практичен. Каждый раз когда возникает необходимость в его использовании, ключ требуется выслать заранее, и ключ этот должен быть той же длины, что и предполагаемый текст. «Проблема создания, регистрации, распространения и отмены ключей, – пишет Кан, – может показаться не слишком сложной тому, кто не имеет опыта передачи сообщений по каналам военной связи, но в военное время объем передаваемых сообщений ставит в тупик даже профессиональных связистов. За сутки могут быть зашифрованы сотни тысяч слов. Создание миллионов ключевых знаков потребовало бы огромных финансовых издержек и было бы сопряжено с большими затратами времени. Так как каждый текст должен иметь свой собственный, единственный и неповторимый ключ, применение идеальной системы потребовало бы передачи по крайней мере такого количества знаков, которое эквивалентно всему объему передаваемой военной информации».

Попробуем оценить реальность утверждения Эдгара По о возможности дешифровки любого текста применительно к шифрам, используемым неоднократно без изменения ключа. Еще недавно все шифровальные системы такого рода считались теоретически нестойкими, если криптоаналитик располагает достаточным временем и шифротекстом достаточно большого объема. Но в 1975 г. появилась новая разновидность шифра, которая радикально изменила ситуацию: возникло новое определение «надежности» кода, определение, восходящее к области компьютерной науки, известной под названием теории сложности. В отличие от шифров, основанных на использовании одноразового шифровального блокнота, новые шифры не обладают абсолютной стойкостью, но практически они гораздо более стойки, чем любой из шифров, созданных ранее для широкого пользования. В принципе новые шифры могут быть разгаданы, но для этого соответствующие компьютерные программы потребовалось бы безостановочно «гонять» несколько миллионов лет!

«Виновниками» замечательного прорыва в криптологии стали два инженера-электрика из Станфордского университета Уитфилд Диффи и Мартин Э. Хеллман, а также Ральф Меркль, бывший в то время студентом Калифорнийского университета в Беркли. В 1975 г. их работа была частично финансирована Национальным научным фондом. Результаты работы были опубликованы Диффи и Хеллманом в статье «Новые направления в криптографии» [14, 23]. В ней рассказано, как создавать надежные шифры, не требующие не только предварительной передачи ключа принимающему, но даже сохранения в тайне метода шифрования. Новые шифры позволяют легко зашифровывать и дешифровывать тексты. Их можно использовать многократно. Кроме того, они обладают еще одним преимуществом: зашифрованные тексты таят в себе «электронную подпись», которую в отличие от обычной подписи («от руки») невозможно подделать. Получив от A «подписанное» сообщение, Z может быть уверенным в подлинности шифротекста: подпись A не может быть подделана ни злоумышленником, подключившимся к каналу связи, ни даже самим Z!

Эти, казалось бы, невероятные особенности новых шифров обеспечиваются с помощью того, что Диффи и Хеллман называют односторонней функцией-ловушкой. Такая функция обладает следующими свойствами: (1) любое положительное целое число x она переводит в одно и только одно положительное целое число y; (2) для нее существует обратная функция, переводящая y в x; (3) существуют эффективные алгоритмы, позволяющие вычислять как прямую, так и обратную функцию; (4) если известны только прямая функция и алгоритм ее вычисления, то открыть обратный алгоритм вычислительными средствами невозможно.

Именно последнее необычное свойство и дало функции ее название. Это свойство действительно напоминает свойство ловушки: в нее легко попасть, но из нее трудно выбраться. Выбраться из ловушки можно, только если знать, где спрятана потайная кнопка. Эта кнопка символизирует информацию о ловушке. Без нее невозможно отворить дверцу ловушки изнутри, а замаскирована кнопка так тщательно, что вероятность найти ее практически равна нулю.

Прежде чем приводить конкретный пример, полезно выяснить, как такие функции-ловушки обеспечивают надежность новых криптографических систем. Предположим, что имеется группа бизнесменов, представляющих различные компании, которым требуется сообщать друг другу какие-то секретные сведения. Каждый бизнесмен придумывает свою функцию-ловушку с прямым и обратным алгоритмами. Участники группы издают специальный справочник, в котором приводят полностью все шифрующие (прямые) алгоритмы. Что же касается дешифрующих (обратных) алгоритмов, то их держат в секрете. К справочнику имеет доступ каждый желающий. Пользуясь им, можно направить зашифрованное послание любому участнику группы.

Предположим, что вы не принадлежите к числу участников группы, но хотите послать шифротекст участнику Z. Сначала вы заменяете первоначальный текст своего сообщения длинным числом, используя для этого стандартный алгоритм, приведенный в справочнике. Затем вы обращаетесь к прямому алгоритму бизнесмена Z, и ваш компьютер быстро превращает исходное «число» в шифротекст. Это новое число вы посылаете бизнесмену Z. Будет ли шифротекст перехвачен или подслушан, не имеет ни малейшего значения, так как секретный дешифрующий алгоритм известен только бизнесмену Z. Любопытный криптоаналитик не сможет открыть дешифрующий алгоритм, сколько бы он ни изучал шифрующий алгоритм, из которого Z (как и все остальные бизнесмены) не делает никакого секрета. Правильнее было бы утверждать, что криптоаналитик в принципе мог бы раскрыть обратный алгоритм, но для этого ему потребовался бы суперкомпьютер и несколько миллионов лет машинного времени.

Посторонний корреспондент не может «подписать» свое послание к Z: «право подписи» принадлежит только членам группы. Подпись действует необычайно остроумным образом. Предположим, что A хочет подписать свое послание к Z. Сначала A шифрует текст своего послания, используя свой собственный обратный алгоритм. Затем A шифрует получившийся текст вторично, используя прямой алгоритм бизнесмена Z. Получив шифротекст, Z сначала преобразует его, используя свой секретный дешифрующий алгоритм, а затем применяет к полученному тексту прямой шифрующий алгоритм бизнесмена A. И в результате всех этих пертурбаций Z восстанавливает исходный текст сообщения, переданного ему A.

Z знает, что только A мог послать этот дважды зашифрованный текст, так как при шифровании был использован секретный алгоритм бизнесмена A. Ясно, что подделать такую «подпись» A невозможно. Сам Z не может послать себе шифротекст от имени A, так как Z не знает секретного дешифрующего алгоритма A. Более того, если бы в будущем понадобилось доказать третьей стороне, например судье, подлинность переданного A сообщения, то сделать это можно так, что ни A, ни Z, ни кто-нибудь еще не станут его оспаривать.

В своей статье [14, 23] Диффи и Хеллман предложили несколько различных функций-ловушек, которые можно было бы использовать в криптографических системах. К сожалению, ни одна из них не была особенно удобна для практических приложений, но в начале 1977 г. произошел второй прорыв: специалисты по компьютерным наукам из

Массачусетского технологического института Рональд Л. Райвест, Ади Шамир и Леонард Адлеман разработали изящный метод, позволяющий реализовать систему Диффи–Хеллмана на основе использования простых чисел.

Райвест защитил докторскую диссертацию по компьютерным наукам в 1973 г. в Станфорде и ныне работает доцентом в МТИ. После того как его осенила блестящая идея использовать простые числа для коммерческих и общедоступных шифровальных систем, для него и двух его коллег не составило особого труда найти простой способ реализовать этот замысел. Их работа получила финансовую поддержку от Национального научного фонда и Управления научных исследований ВМФ и была опубликована в апреле 1977 г. в виде технического отчета № 82 Лаборатории компьютерных наук МТИ под названием «Метод получения цифровых подписей и коммерческих криптографических систем».

Чтобы понять, в чем состоит суть системы Райвеста, нам понадобятся кое-какие сведения из теории простых чисел. Самые быстродействующие компьютерные программы, позволяющие определять, является ли данное целое число простым или составным (т.е. произведением простых чисел), основаны на использовании знаменитой малой теоремы Ферма. Эта теорема утверждает, что если p – простое число и a – любое положительное целое число, которое меньше p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Предположим, что мы хотим проверить на простоту некоторое большое нечетное число n (все простые числа, кроме 2, нечетны). Мы выбираем случайным образом число a, возводим в $(n-1)$-ю степень и находим остаток от деления на n. Если остаток отличен от 1, то число n не может быть простым. Например, $2^{21-1} \equiv 4 \pmod{21}$. Следовательно, число 21 составное. Но какая связь существует между числом 2 (случайно выбранным числом a) и числами 3 и 7 – двумя простыми делителями числа 21? Ясно, что никакой связи между этими числами нет. Именно поэтому критерий Ферма бесполезен, если требуется найти простые множители составного числа, но позволяет быстро показать, что число составное. Более того, если некоторое нечетное число успешно выдерживает критерий Ферма с несколькими случайно выбранными числами a, то оно почти заведомо простое.

Было бы неуместно вдаваться здесь в подробности компьютерных алгоритмов проверки чисел на простоту, работающих необычайно быстро, или алгоритмов разложения составных чисел на простые множители, способных вывести из себя своей медленной работой. Ограничусь лишь следующими фактами, о которых поведал Райвест. Они наглядно показывают, сколь велика зияющая пропасть между затратами машинного времени, требуемыми для проверки чисел на простоту и разложения составных чисел на простые множители. Например, для проверки на простоту 130-значного нечетного числа на компьютере PDP-10 требуется самое большее (в том случае, когда проверяемое число действительно простое) около 7 минут. Первое простое число после 2^{200} тот же алгоритм находит всего лишь за 45 секунд (это 61-значное число $2^{200} + 235$).

С иной ситуацией мы встретимся при попытке найти два простых множителя 125- или 126-значного числа, получающегося при умножении двух 63-значных чисел. По оценке Райвеста, при использовании лучшего из известных на сегодня алгоритмов и самых быстродействующих компьютеров для этого потребовалось около 40 квадриллионов лет машинного времени! (Хороший обзор компьютерных методов разложения чисел на простые множители приведен в разд. 4.5.4 «Получисленных алгоритмов» Дональда Кнута.) Именно практическая невозможность разложения в обозримом будущем произведения двух простых чисел и делает возможным применение общедоступной шифровальной системы МТИ.

Объясняя, как работает их система, авторы из МТИ выбрали в качестве исходного текста парафраз ремарки из «Юлия Цезаря» Шекспира (акт I, сцена 2): "ITS ALL GREEK TO ME" («Для меня все это сущая тарабарщина»).

Прежде всего этот текст преобразуется в одно большое число с помощью стандартного ключа: A = 01, B = 02, ..., $Z = 26$ (00 – пробел между словами). Получается число 0920190001121200071805051100201500l305.

Полученное число шифруется путем возведения его в s-ю степень по модулю некоторого составного числа r. Составное число r получается как произведение двух случайно выбранных простых чисел p и q, каждое из которых не менее чем 40-значно (алгоритм умножения таких длинных чисел приведен в отчете МТИ [14, 24]). Число s должно быть взаимно простым с числом $p-1$ и $q-1$. Числа s и r общедоступны: они используются в шифрующем алгоритме. Операция шифрования осуществляется весьма эффективно даже при очень больших значениях r; на практике она требует менее 1 секунды компьютерного времени.

Два простых множителя числа r хранятся в памяти компьютера, поскольку они используются в секретном обратном алгоритме. Обратный алгоритм, используемый при дешифровке, состоит в возведении числа-шифротекста в другую степень t и в нахождении остатка от деления полученного числа на r, т.е. в приведении по модулю r. Как и в предыдущем случае, на это уходит менее секунды машинного времени. Но показатель t может вычислить только тот, кто знает p и q – два простых числа, которые хранятся в секрете.

Если исходный текст слишком велик для того, чтобы с ним можно было обращаться как с одним числом, то его следует разбить на блоки и каждый блок рассматривать как отдельное число. Я не буду вдаваться здесь в дальнейшие подробности. Они носят несколько технический характер и ясно изложены в отчете МТИ.

Для шифрования текста ITS ALL GREEK TO ME группа из МТИ выбрала $s = 9007$ и $r =$ 114381625757888867669235779976146612010218296721242362562561842935706935245733897830597123563958705058989075147599290026879543541.

Число r есть произведение 64-значного простого числа p и 65-значного простого числа q, каждое из которых выбрано случайным образом. Шифрующий алгоритм заменяет число, соответствующее исходному тексту (09201...), следующим числом-шифротекстом: 199935131497805100452317122740260647423204017058391463103703717406259716089489275043992096267258267501289355446135382 3769748026.

Желая поощрить тех читателей журнала «Scientific American», которые хотели бы испробовать свои силы на поприще криптоанализа, группа из МТИ зашифровала с помощью того же общедоступного алгоритма другой текст. Шифротекст вы видите на рис. 92. Его оригинал представляет собой предложение на английском языке. Сначала оригинальный текст был превращен в число с помощью стандартного метода, который был объяснен выше, полученное число возведено в 9007-ю степень (по модулю r) с помощью

9686	9613	7546	2206
1477	1409	2225	4355
8829	0575	9991	1245
7431	9874	6951	2093
0816	2982	2514	5708
3569	3147	6622	8839
8962	8013	3919	9055
1829	9451	5781	5154

Рис. 92

Шифрограмма, за расшифровку которой установлен приз в 100 долларов.

остроумного метода, изложенного в отчете. Тому, кто первым расшифрует текст, группа из МТИ обещала выплатить премию в 100 долларов.

Для доказательства того, что шифротекст действительно исходит от группы из МТИ, к нему была добавлена следующая подпись: 16717861150380844246015271389168398245436901032358311217835038446929062655448792237114490509578608 6556624965779748400040570203 73.

Подпись зашифрована с помощью секретного обратного шифрующего алгоритма. Так как читатель не располагает своим общедоступным шифрующим алгоритмом, вторая шифрующая операция была опущена. Каждый читатель, имеющий доступ к компьютеру и алгоритмам, опубликованным в отчете МТИ, может легко прочитать подпись с помощью общедоступных шифрующих алгоритмов группы МТИ, т.е. возвести приведенное выше число в 9007-ю степень и перейти к остатку от деления на *r*. Проделав эти операции, читатель получит число 06091819200019151222051800230914190015140500082114041805040004151212011819. Пользуясь стандартным ключом, читатель расшифровывает это число как FIRST SOLVER WINS ONE HUNDRED DOLLARS (первый, кто расшифрует текст, получит сто долларов). Этот подписанный шифротекст мог быть получен только от группы из МТИ, так как обратный алгоритм, которым был зашифрован исходный текст, известен только членам этой группы.

Райвест и его коллеги не располагают доказательством того, что в будущем никто не откроет быстродействующий алгоритм разложения составных чисел на простые множители или не «взломает» их шифр с помощью какой-то другой схемы, о которой члены группы из МТИ и не помышляли. И ту и другую возможности создатели системы МТИ считают весьма маловероятными. Разумеется, любая шифросистема, не обладающая абсолютной стойкостью одноразовых шифровальных блокнотов, уязвима для изощренных атак современных криптоаналитиков – искусных математиков, имеющих под рукой мощные компьютеры. Если шифр МТИ устоит против таких атак (а можно почти с уверенностью сказать, что он устоит), то отстаивать утверждение Эдгара По о возможности расшифровки любого шифротекста в любой его интерпретации становится весьма затруднительно.

Даже если произойдет маловероятное событие и система МТИ окажется нестойкой, то, по-видимому, существуют всевозможные функции-ловушки другого типа, которые могут порождать практически стойкие шифры. Диффи и Хеллман патентуют шифровальные системы, основанные на использовании функций-ловушек, которые авторы держат в секрете. Современные компьютеры и теория сложности подводят криптографию к увлекательнейшей стадии ее развития, которую криптографы встречают не без грусти. Во всем мире имеются мужчины и женщины, наделенные выдающимися и даже гениальными умственными способностями, которые отдают все силы овладению современным криптоанализом. Со времен второй мировой войны даже те правительственные и военные шифры, которые не принадлежат к типу одноразовых, оказываются настолько надежными, что таланты криптоаналитиков становятся все менее полезными. Ныне все криптоаналитики как бы стоят на ловушках, которые могут внезапно разверзнуться и бесследно поглотить их.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Несмотря на многочисленные ошибки в опубликованном варианте шифротекста, расшифровать который оказалось не по силам Эдгару По, более десяти читателей журнала

«Scientific American», в том числе 16-летний Джеймс Г. Андрес, сумели расколоть твердый орешек. Расшифрованный текст гласит:

> MR. ALEXANDER,
> HOW IS IT, THAT, THE MESSENGER ARRIVES HERE AT THE SAME TIME WITH THE SATURDAY COURIER AND OTHER SATURDAY PAPERS WHEN ACCORDING TO THE DATE IT IS PUBLISHED THREE DAYS PREVIOUS. IS THE FAULT WITH YOU OR THE POSTMASTERS?
>
> (М-р Александер!
> Каким образом "Messenger" поступает к нам одновременно с "Saturday Courier" и другими субботними газетами, хотя, судя по дате, он выходит тремя днями раньше. Кто виноват в этом: вы или почтмейстеры?)

Шифр многоалфавитный подстановочный на основе 12 алфавитов с ключевыми словами «United States» («Соединенные Штаты»). Каждая буква указывает величину сдвига для шифра Цезаря. Так, для первой буквы исходного текста (M) ключ дает $A = U$, $B = V$, $C = W$ и т. д. Для второй буквы исходного текста (R) ключ дает $A = N$, $B = O$, $C = P$ и т. д.

В опубликованной криптограмме было 16 ошибок. Третьей буквой должна быть I (напечатано J), пятая буква пропущена. Если бы вторая ошибка не была допущена, то По, возможно, догадался бы, что текст начинается с обращения «М-р Александер», после чего расшифровать остальное не составило бы особого труда.

Что касается шифротекста, за разгадку которого была назначена премия 100 долларов, то расшифровать его не удалось пока никому. В 1988 г. Райвест сообщил мне, что исходный текст и простые числа, использованные при шифровании, не сохранились. Но поскольку я привел общедоступный ключ, Райвест всегда может проверить правильность ответа, если кому-нибудь удастся расшифровать криптограмму.

Глава 14

Надежные шифры II

9686	9613	7546	2206
1477	1409	2225	4355
8829	0575	9991	1245
7431	9874	6951	2093
0816	2982	2514	5708
3569	3147	6622	8839
8962	8013	3919	9055
1829	9451	5781	5154

Публикуя в августе 1977 г. первоначальный вариант предыдущей главы в разделе «Математические игры» журнала «Scientific American», я, признаться, не ожидал того прилива ярости и гнева, который она вызвала. В частности, я упомянул о том, что Рональд Райвест предложил выслать копию отчета МТИ, содержащего детальное описание криптосистемы, получившей вскоре название системы РША (Райвеста–Шамира–Адлемана), каждому, кто приложит к запросу конверт с маркой и своим адресом. Это предложение побудило Джозефа Майера, сердитого сотрудника АНБ (Агентство национальной безопасности), направить серию угрожающих писем членам организационного комитета симпозиума по криптографии с предупреждением о том, что публичное обсуждение систем шифросвязи нарушает национальные законы о безопасности.

МТИ получил более 7000 запросов на отчет о шифросистеме со всех концов мира, но после письма Мейера рассылка отчета была прекращена. Прошел почти год, прежде чем юристы МТИ пришли к заключению, что разглашение содержащихся в отчете сведений не является нарушением законов, после чего рассылка отчета была возобновлена. Правда, отношения между АНБ и исследователями, занимающимися разработкой и анализом общедоступных криптосистем, стали довольно напряженными. И хотя это не повлекло за собой установления жесткой цензуры и никто не был отправлен в тюрьму, математики сами установили цензурные запреты весьма произвольного толка. Разумеется, проводимые в АНБ первоклассные исследования остаются строго засекреченными, и постороннему человеку (а по отношению к АНБ я типичный «аутсайдер») невозможно раздобыть те сведения, которыми располагает АНБ. Злые языки утверждают, что NSA (National Security Administration – Агентство национальной безопасности) означает «Never Say Anything» («Никогда ничего не говори») или «No Such Agency» («Такого агентства не существует»). (Второе толкование сокращения АНБ отражает стремление этого управления держаться в тени.)

Нетрудно понять, почему АНБ пришло в столь сильное возбуждение. Опубликование практически стойких шифров позволяет другим странам воспользоваться шифрами, раскрыть которые может оказаться не под силу специалистам из АНБ. До тех пор пока по законам США разрешается открытая публикация методов дешифровки, любая страна, узнав о нестойкости своего шифра, сразу же прекратит им пользоваться. Кроме того, насколько я могу судить, если во всем мире получат распространение действительно нераскрываемые шифры, АНБ практически останется не у дел [1)].

На протяжении многих лет банки и корпорации США используют для защиты своих каналов связи систему DES (Data-Encryption Standards – Стандарты шифровки данных), разработанную корпорацией ИБМ и одобренную Национальным бюро стандартов. DES – система симметричная (в отличие от асимметричной системы на основе функций-ловушек в DES для шифровки и дешифровки используется одна и та же процедура). Тем не менее раскрыть ее необычайно трудно, если ключ содержит большое число битов. По имеющимся сведениям, АНБ настояло на том, чтобы ИБМ снизило длину ключа до 56 битов: на случай, если правительства иностранных государств вздумают использовать систему DES. АНБ сможет расколоть их шифры. Хотя шифровальная система DES еще находится в употреблении, компания Bell Telephone по соображениям безопасности отказалась от ее использования, а ряд математиков, в пер-

---

[1)] Подробный анализ сильных и слабых сторон дискуссии между теми, кто отстаивает стремление АНБ к засекречиванию шифров, и теми, кто разделяет стремление математического сообщества к открытости, см. в книге Дэвида Кана «Кан о шифрах» [14, 7].

вую очередь Диффи и Хеллман, подвергли ее суровой критике и сочли слишком слабой для того, чтобы она могла удержаться долгие годы.

Основными соперниками системы РША стали так называемые системы типа «укладки рюкзака». Проблемы типа «укладки рюкзака» принадлежат к обширному семейству комбинаторных задач, которые состоят в отыскании среди данного множества чисел подмножества, которое «укладывается» в соответствии с различными ограничениями внутри гипотетического «рюкзака». Простейший пример – задача о подмножестве чисел, сумма которых равна заданной величине. Такие задачи часто встречаются в сборниках задач-головоломок Сэма Лойда и Генри Дьюдени, нередко в форме мишени, в концентрические круги которой вписаны различные числовые значения. Задача состоит в том, как следует стрелять, чтобы выбить в сумме заданное число очков. Если множество чисел не слишком велико, то такие задачи легко решаются методом проб и ошибок, но такой подход становится все более затруднительным по мере того, как множество чисел возрастает.

Комбинаторная задача называется «трудной», если можно доказать, что ни один компьютерный алгоритм не может решить ее за «полиномиальное время». Дело в том, что при возрастании некоторого параметра проблемы время, необходимое для решения задачи, растет с экспоненциальной, или «неполиномиальной», скоростью. Изучением такого рода проблем занимается новая отрасль математики и компьютерной науки, получившая название «теории сложности». Существенное продвижение было достигнуто и продолжается в одном классе проблем, получивших название NP-полных (NP – первые буквы английских слов non-polynomial – неполиномиально). Ныне существуют сотни NP-полных проблем. По общему мнению, все они трудные (хотя доказательство этого утверждения пока не известно) и все связаны между собой так, что если будет найден алгоритм, позволяющий решать одну из них за полиномиальное время, то этот же алгоритм позволит сразу же решить и все остальные задачи. Задача о подмножестве чисел, сумма которых равна заданной величине, принадлежит к числу NP-полных задач.

Ральф Меркль был первым, кто положил в основу системы «укладки в рюкзак» задачу о сумме чисел, образующих подмножество, и в течение недолгого времени предложенная им система казалась предпочтительнее, чем система РША, так как позволяла быстрее шифровать и расшифровывать сообщения. Но в 1982 г. член группы МТИ Ади Шамир, ученый из Израиля, нашел алгоритм, позволявший решать почти все системы типа «укладки в рюкзак» за полиномиальное время. Ральф Меркль предложил премию в 100 долларов тому, кто сумеет раскрыть его систему, и Шамир получил эту премию. Тогда Меркль повысил сложность своей системы, заменив ее так называемой «многократно итерированной» версией, и предложил премию в 1000 долларов тому, кто сумеет раскрыть ее. Эту вторую премию получил в 1984 г. Эрнест Брикселл из Sandia Laboratories. Однако задача о подмножествах чисел, сумма которых равна заданной величине, продолжает оставаться NP-полной, и вполне возможно, что новые шифровальные системы, основанные на этой задаче или на других задачах типа «укладки в рюкзак», выдержат наступление новых алгоритмов. Райвест и Б. Шор предложили систему типа «укладки в рюкзак» на основе логарифмов больших простых чисел. Методы Sandia Laboratories пока оказались бессильными перед их системой. Сообщалось, что специалисты Управления национальной безопасности (NSA) придумали шифровальные системы типа «укладки в рюкзак» лет на десять раньше Меркля, но, верные правилу «Never Say Anything» («Никогда ничего не говори»), хранили молчание.

Разложение больших чисел на простые множители не принадлежит к семейству NP-полных задач, но, по общему мнению, может быть отнесено к числу трудных. До сих пор никому не удалось найти способ, позволяющий факторизовать большие числа за полиномиальное время. Тем не менее методы разложения чисел на множители, равно как и методы, позволяющие проверять простоту больших чисел, непрерывно совершенствуются. В 80-е годы были открыты быстрые процедуры проверки чисел на простоту, а в 1982 г. группа из Sandia Labs под руководством Густавуса Симмонса разложила (с помощью суперкомпьютера Крэй) число Мерсенна $2^{521} - 1$ (69-значное число). Чтобы найти три простых множителя этого числа, Крэю понадобилось около 32 часов. До этого рекордного результата математики считали, что для разложения более чем 50-значного числа на простые множители Крэю потребуются миллионы лет.

Имея в виду эти новые методы факторизации чисел, никто не в праве сбрасывать со счетов возможность построения алгоритма, который позволит «расколоть» систему РША за полиномиальное время. В первых сообщениях о системе РША в качестве двух простых чисел p и q рекомендовалось выбирать 80-значные числа. Теперь рекомендуется выбирать по крайней мере 200-значные числа. Лучше всего, если бы оба числа были примерно одной «длины», каждое из чисел $p+1$ или $p-1$ и $q+1$ или $q-1$ имело по крайней мере один большой простой множитель и наибольший общий делитель чисел $p-1$ и $q-1$ был бы мал. До сих пор система РША остается стойкой. На основе ее изготавливают компьютерные чипсы для быстрой шифровки и расшифровки текстов.

Основные идеи, положенные в основу стойких шифров, дают множество боковых побегов и ответвлений. Например, специалист по компьютерным наукам из Станфордского университета Роберт Флойд сразу понял, что системы РША могут быть использованы двумя партнерами, поддерживающими между собой связь по почте (обычной или электронной), для принятия случайных решений способами, исключающими какой бы то ни было обман или мошенничество. Так, два человека, разговаривающих друг с другом по телефону, могут договориться об исходе случайного бросания монеты или игральной кости. В июне 1978 г. Флойд прислал мне письмо с подробным описанием того, как двое партнеров могут играть в триктрак по телефону или по почте. Приняв на вооружение основную идею Флойда, Райвест, Шамир и Адлеман написали статью о «покере без карт», в которой объяснили, как двое игроков, не доверяющих друг другу, могут сыграть честную партию в покер по телефону, не используя ни одной карты [1].

Еще одним побочным продуктом создания надежных шифров явилась разработка хитроумных систем обеспечения

---

[1] «Покер без карт» был впервые опубликован в качестве технического отчета Лаборатории компьютерных наук МТИ в 1979 г. Этот отчет перепечатан в сборнике [14, 1*], опубликованном Дэвидом Кларнером. О бросании монеты см. [14, 2*].

безопасности передачи научных данных по сетям электронной связи. Предположим, например, что исследование проводится с помощью приборов, доставленных с помощью космического корабля на поверхность Марса. Ученым необходимо быть уверенным в том, что, когда они выходят на связь с приборами, не происходит приема информации от каких-нибудь других источников данных и что никто не может искажать передаваемые прибором данные или изменять команды, передаваемые приборам. Короче говоря, ученые должны быть уверенными в аутентичности, целостности и секретности сети[1].

Наиболее поразительным, почти неправдоподобным побочным продуктом создания надежных шифровальных систем, по-видимому, следует считать появление так называемых «доказательств без утечки информации». Представим себе, что некий математик находит доказательство какой-то теоремы. Он хочет убедить своих коллег в том, что ему действительно удалось доказать теорему, но при этом не желает раскрывать самого доказательства. В 1986 г. было показано, что это действительно можно сделать в частных случаях NP-полных задач. Рассмотрим, например, NP-полную задачу о нахождении гамильтонова цикла – пути, проходящего через все вершины графа один и только один раз и возвращающегося в исходную вершину. Предположим, что для данного графа с большим числом вершин неизвестно, существует ли для него гамильтонов цикл. Некий математик желает убедить своего коллегу, что ему удалось найти гамильтонов цикл, но он не желает раскрыть самый цикл. Как ни трудно поверить, существуют методы, позволяющие это сделать.

В 1986 г. Мануэль Блюм, эксперт по компьютерам из Калифорнийского университета, изобрел способ, позволяющий применять доказательства без утечки информации к *любой* математической проблеме! Предложенная Блюмом процедура по существу сводится к диалогу между «дока-

---

[1] Хорошим обзором последних достижений в области «теленауки» может служить статья Питера Деннинга «Безопасность данных в сетях» [14, 3*]. Более подробную информацию желающие могут найти в книге Дороти Деннинг «Криптография и безопасность данных» [14, 4*].

зывающим» и «проверяющим», который хочет убедиться в том, что доказательство действительно существует. Проверяющий задает серию случайных вопросов, каждый из которых допускает ответ «да» или «нет». После первого вопроса проверяющий убеждается в том, что доказывающий заблуждается с вероятностью $1/2$. После второго вопроса проверяющий убеждается в том, что доказывающий заблуждается с вероятностью $1/4$. После третьего вопроса вероятность ошибки падает до $1/8$ и т. д. (знаменатели каждый раз удваиваются). После ста вопросов вероятность того, что доказывающий заблуждается или не располагает доказательством, становится настолько близкой к нулю, что у проверяющего не остается и тени сомнения в правильности утверждения доказывающего. После 300 вопросов знаменатель достигает величины 2^{300}, которая превосходит число атомов во Вселенной. Абсолютная уверенность в том, что доказательство существует, недостижима, но вероятность существования настолько близка к достоверности, что все сомнения отпадают. Некоторые неспециальные работы о доказательствах без утечки информации приведены в списке литературы к этой главе.

Имеют ли доказательства без утечки информации какие-нибудь практические применения помимо удовлетворения самолюбия математиков, желающих заявить о своем приоритете до того, как будут опубликованы детали доказательства? Оказывается, имеют. Например, Ади Шамир, работающий ныне в Институте Вейцмана в Израиле, придумал способ, позволяющий использовать методы доказательства без утечки информации в создании удостоверений личности, исключающих возможность подделки. Представьте себе, что в карточку, удостоверяющую личность, вмонтирован компьютерный чип, способный вступать в быстрый диалог с компьютерным чипом в устройстве, используемом для проверки удостоверения личности. За считанные секунды, задавая более или менее случайные вопросы и получая ответы, проверяющий может «без тени сомнения» убедиться в подлинности карточки, хотя идентификация личности не может быть произведена с абсолютной достоверностью. Методы, позволяющие доказывать, что большие числа почти заведомо являются простыми (например, методы, основанные на использовании вероятностных соображений), известны не одно десятилетие, но аналогичные методы установления подлинности удостоверения личности были встречены как большой сюрприз.

Не поддающиеся подделке удостоверения имеют столь большое значение как для военных, так и для гражданских целей, что когда Шамир подал патентную заявку в США, Министерство обороны распорядилось, чтобы все документы и материалы, связанные с такими удостоверениями, были уничтожены. Это вызвало такую бурю протеста со стороны математического сообщества, что правительство было вынуждено отменить запрет, сославшись при этом на его необязательность для математика, не являющегося гражданином США. Подробный отчет об этом скандале приведен в статье [14, 45] в газете «Нью-Йорк таймс».

Новинки в области криптосистем и методов «раскалывания» шифров, а также их приложений к обеспечению безопасности сетей связи и методам идентификации личности сменяют одна другую так быстро, что к тому времени, когда вы прочитаете эту главу, многое может оказаться устаревшим. Криптология переживает сейчас весьма интересную революцию, и никто не может сейчас предсказать, к чему приведут происходящие в ней большие перемены. Позвольте мне завершить эту главу причудливым диалогом из пьесы «Романов и Жюльетта», которую Питер Устинов впервые поставил в Нью-Йорке в 1957 г.

Сцена из конца второго акта.

Действующие лица

Генерал (его роль исполнял Устинов), президент самого маленького государства в Европе.

Хупер Моулзуорт, американский посол в этой стране.

Вадим Романов, советский посол.

Жюльетта, дочь Моулзуорта, }
Игорь, сын Романова, } любят друг друга.

В американском посольстве.

Генерал (*обращается к Моулзуорту*): Кстати, вы знаете, что они [русские] знают ваш шифр?

Моулзуорт. Мы знаем, что они знают наш шифр, но сообщаем им только то, что хотим, чтобы они знали.

Генерал отправляется в советское посольство.

Генерал (*обращается к Романову*). Кстати, они [американцы] знают ваш шифр.

Романов. Меня это ничуть не удивляет. Мы уже в течение некоторого времени знаем, что они знают наш шифр, и ведем себя соответствующим образом – делаем вид, будто им удалось нас одурачить.

Генерал возвращается в американское посольство.

Генерал (*обращается к Моулзуорту*). Кстати, вы знаете, что они знают, что вы знаете, что они знают, что вы знаете...

Моулзуорт (*искренне встревожен*). Что? Вы уверены?

Генерал. Абсолютно.

Моулзуорт. Благодарю вас! Благодарю! Я никогда не забуду об услуге, которую вы нам оказали.

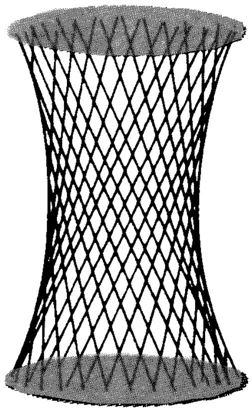
Генерал (*поражен*). Вы хотите сказать, что вы ничего не знали?

Моулзуорт. Нет!

В 1957 г. такой диалог был по крайней мере правдоподобен. Мог бы такой диалог произойти в наше время? Возможно, что АНБ знает.

Глава 15

Гиперболы



Льюис Кэрролл заметил однажды [15, 1*]: «Кто из математиков не размышлял над гиперболой, кромсая несчастную кривую прямыми, пересекающими ее здесь и там, в попытках доказать некое свойство, могущее оказаться в конце концов не более чем злонамеренной клеветой, кому из математиков не казалось по крайней мере, что замученная кривая распростерлась между своими асимптотами в молчаливом упреке или подмигивает ему одним фокусом с высокомерным состраданием?».

Поставим в темной комнате большую сферу, например баскетбольный мяч, на поверхность стола, окрашенную в светлые тона. Посветим на сферу карманным фонариком сверху вниз, как показано на рис. 93А. Тень, отбрасываемая мячом, в этом случае будет, разумеется, иметь форму круга. Центр его расположен в той точке, в которой мяч касается поверхности стола.

Передвинем фонарик «на восток», как показано на рис. 93Б. Тень от мяча вытянется в эллипс. Центр круга расщепится на две точки, в которых располагаются фокусы эллипса. Сфера покоится на фокусе, ближайшем к источнику света. Если источник света перемещать дальше «на восток», то другой фокус эллипса будет двигаться «на запад», увеличивая эксцентриситет эллипса.

Будем теперь опускать фонарик до тех пор, пока источник света не окажется на высоте верхушки мяча (рис. 93В). Мяч будет по-прежнему покоиться на восточном фокусе, но

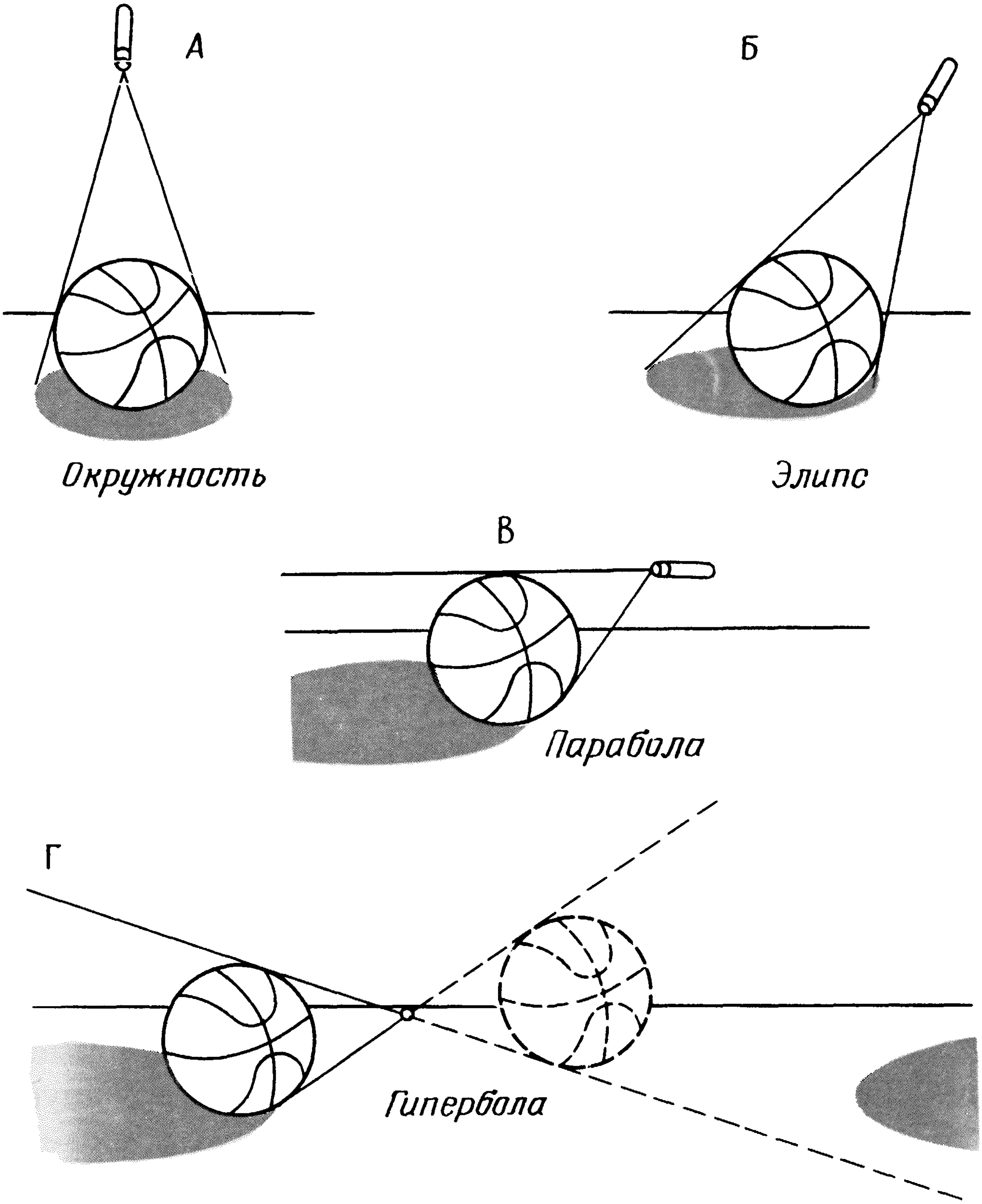


Рис. 93

Эксперименты с тенями, контуры которых имеют форму четырех конических сечений.

западный фокус переместится в бесконечность. Контур тени примет форму параболы.

Опустим фонарик ниже верхушки мяча (рис. 93Г). Контур тени примет форму гиперболы. Сфера по-прежнему будет касаться стола в одном из фокусов гиперболы, но с другим фокусом произойдет нечто удивительное.

Представим себе, что на всех четырех картинках наряду с мячом имеется «контрмяч», совпадающий со сферой, лежащей на столе по другую сторону от источника света на таком же расстоянии, как и мяч. На последней картинке контрмяч изображен штриховой линией (рис. 93Г). Заметим, что контрмяч отбрасывает такой же конус тени, как и мяч на столе, но в другую сторону. Оба конуса тени имеют общую вершину в источнике света.

На первых трех картинках тень от контрмяча лежит выше поверхности стола. Однако, когда источник света опускается ниже верхушки мяча, контртень падает на стол и образует контркривую, которая является восточной ветвью гиперболы, ограничивающей тень под мячом. Исчезнувший фокус отправился, так сказать, в бесконечность, с тем чтобы, обогнув ее, вернуться с другой стороны! Так как два «конца» бесконечности по существу представляют собой одну и ту же точку, их можно сравнить с двумя концами разрезанного и развернутого в прямую кольца. Именно такое бесконечное, не изувеченное разрезом кольцо служит геометрическим образом, стоящим за знаменитым четверостишием Анри Вогана:

И в грезах ночных во мраке сплошном
Предстала мне зримая Вечность
Чистейшего света гигантским Кольцом,
Струящим свой путь в бесконечность.

Представим себе, что контрмяч на последнем рисунке удаляется от источника света, но при этом непрерывно раздувается и поэтому всегда касается поверхности контрконуса. Когда контрмяч достаточно велик для того, чтобы касаться поверхности стола, он покоится на фокусе контрветви гиперболы. Две такие сферы неодинакового размера, вписанные в конусы и касающиеся секущей плоскости в фокусах гиперболы, приводят к старому изящному доказательству того, что кривые действительно являются ветвями гиперболы. Это доказательство очень доступно изложено в книге Давида Гильберта и С. Кон-Фоссена «Наглядная геометрия» [15, 2]. Если обе сферы поместить в один конус, то аналогичное доказательство (см. гл. 2 моей книги «Математические досуги» [15, 2*]) позволяет убедиться в том, что контур тени имеет форму эллипса.

Описанный выше эксперимент с тенями представляет собой один из способов показать, что четыре кривые (окружность, эллипс, парабола и гипербола) являются коническими сечениями. Ясно, что окружность можно рассматривать как предельный случай эллипса и гиперболы. Подобно окружности, парабола имеет только одну форму, хотя эта форма может увеличиваться или уменьшаться. Что же касается эллипса и гиперболы, то каждая из них имеет бесконечно много семейств различных форм.

Астрономам часто бывает трудно решить, движется ли комета или метеор по эллиптической, параболической или гиперболической траектории. Нетрудно понять, почему так происходит. Стоит лишь слегка изменить параболу, как она превращается в эллипс. Стоит лишь слегка изменить (несколько иначе, чем в первом случае) эллипс, как он превращается в гиперболу. Кометы, обращающиеся вокруг Солнца по неизменным орбитам, движутся по эллипсам. Кометы, попадающие в солнечную систему из космического пространства и покидающие затем солнечную систему, движутся по параболам или гиперболам.

Так как гипербола представляет собой эллипс, разделенный пополам бесконечностью, неудивительно, что между этими двумя кривыми существует множество взаимосвязей. Эллипс представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух неподвижных точек постоянна. Эти две неподвижные точки называются фокусами эллипса. Постоянство расстояний до двух неподвижных точек положено в основу древнего метода построения эллипса с помощью карандаша и нитяной петли, наброшенной на две воткнутые в фокусы булавки.

Гипербола представляет собой геометрическое место точек, расстояния от которых до двух неподвижных точек имеют постоянную разность. На рис. 94 показано устройство из нити и стержня для построения одной ветви гиперболы. Острие карандаша в точке P держит нить в натянутом состоянии и прижимается к стержню, который вращается вокруг конца, закрепленного в фокусе A. Нить закреплена в точке B и в точке C – свободном конце стержня. Длина $BP + PC$ постоянна; следовательно, разность $AP - BP$ также должна быть постоянна. Поскольку AP и BP – расстояния от точки P до двух фокусов, мы доказали, что описанная карандашом кривая – гипербола.

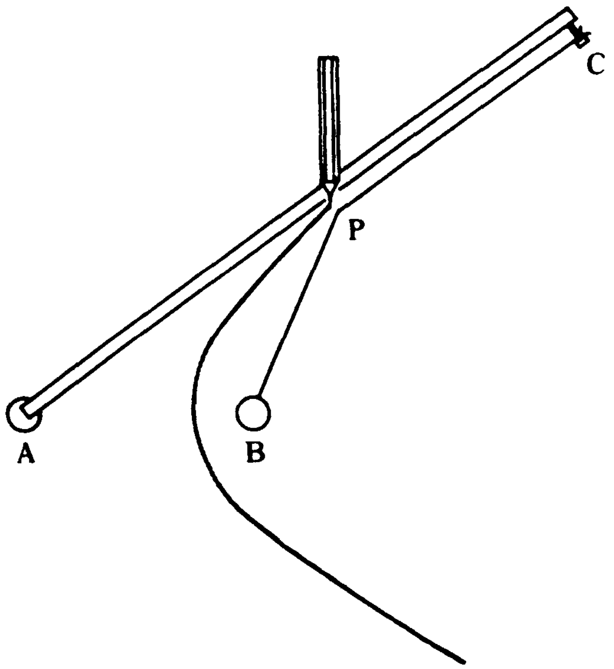


Рис. 94

Построение гиперболы с помощью натянутой нити.

Эллипсы и гиперболы могут быть легко построены с помощью метода сгибания листа бумаги, который ясно указывает на взаимосвязь этих двух кривых. Проведем окружность на листе прозрачной бумаги (кальки или специальной бумаги для вьюграфа). Выберем и отметим внутри окружности какую-нибудь точку, отличную от центра окружности. Перегнем лист бумаги несколько раз (разглаживая каждый раз линию сгиба) так, чтобы помеченная точка оказалась на окружности. Каждая линия сгиба касается эллипса. При достаточном числе сгибов эллипс «проявляется» как огибающая касательных. Отмеченная точка и центр окружности являются фокусами эллипса. Чтобы построить аналогичным способом параболу, воспользуемся той же процедурой, но с отмеченной точкой *вне*, а не внутри окружности. На рис. 95 показаны обе ветви гиперболы. И в этом случае отмеченная точка и центр окружности являются двумя фокусами кривой.

А что если мы выберем отмеченную точку на самой окружности? Получится ли при этом парабола? К сожалению, не получится. Винить за такое вероломство мы можем утраченный параболой фокус. Каждая линия сгиба проходит через центр окружности и, следовательно, касается вырожденного эллипса, длина которого равна радиусу окружности, а ширина равна нулю. Чтобы построить параболу, нам нужна окружность, простирающаяся в бес-

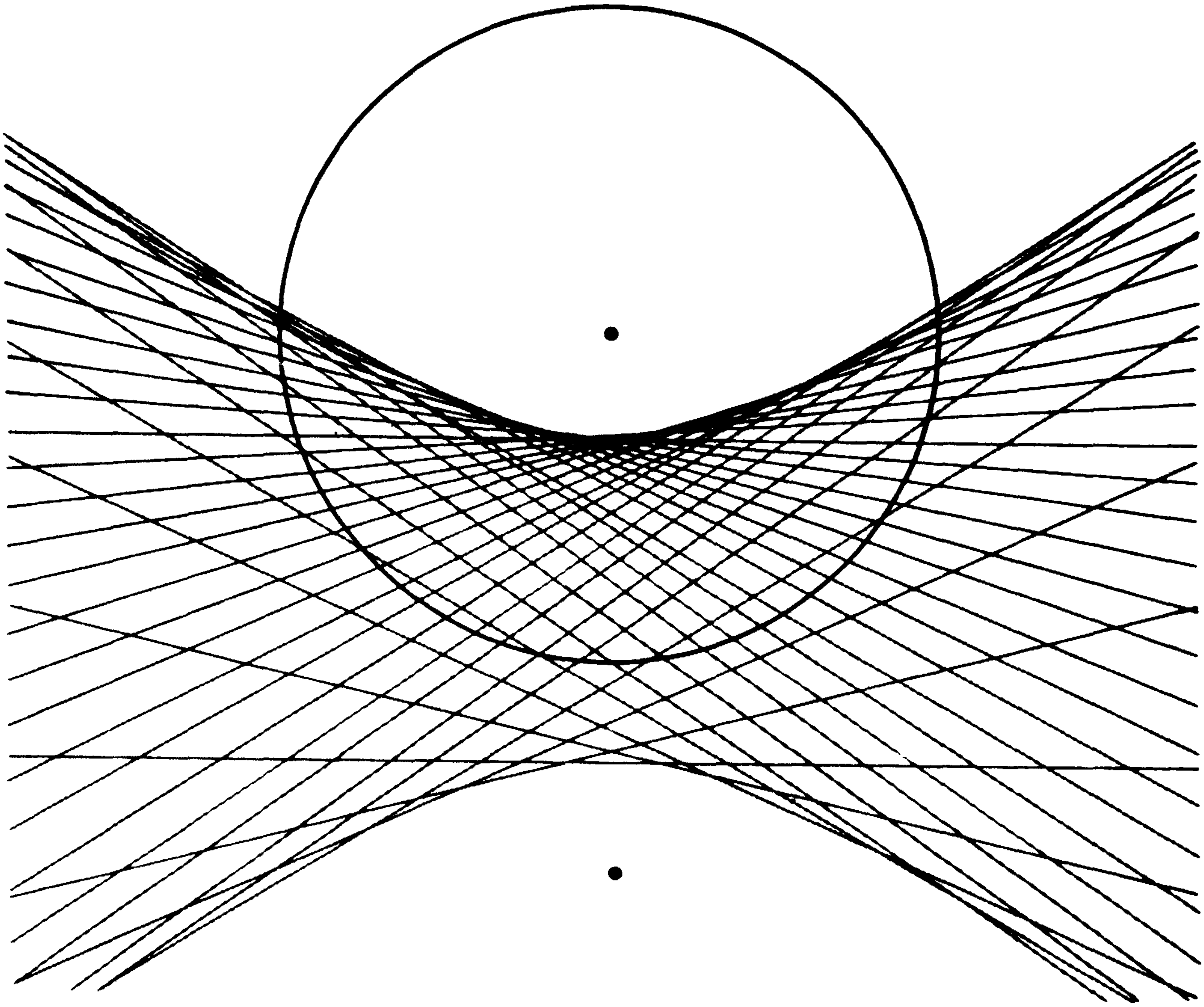


Рис. 95

Построение гиперболы с помощью сгибания листа бумаги.

конечность так, что она вырождается в прямую. Проведем на листе бумаги прямую и выберем точку, не лежащую на этой прямой. Тогда уже знакомая нам процедура позволяет построить великолепную параболу. Недостающий фокус является «центром» бесконечной окружности.

Из четырех конических сечений гипербола наименее часто встречается в повседневной жизни. Окружности и эллипсы встречаются на каждом шагу. Параболы мы наблюдаем, когда нам случается поливать газон из шланга или следить за полетом бейсбольного мяча [1]. Один из тех редких случаев,

[1] Многие читатели справедливо упрекали меня за то, что я говорил, будто брошенные предметы описывают траектории, отличные от парабол. Траектории брошенных тел очень близки к параболам, но, строго говоря (если пренебречь сопротивлением воздуха), брошенный предмет движется по эллиптической орбите вокруг центра тяжести Земли.

когда мы можем видеть полную гиперболу, предоставляется, если лампа с цилиндрическим или коническим абажуром отбрасывает тень на соседнюю стену. Наши предки наблюдали ветвь гиперболы на стене, когда подносили к ней горящую свечу в подсвечнике с круглым основанием.

Представители естественных наук и математики постоянно видят гиперболы как графики различных кривых второго порядка. Даже такое простое уравнение, как $ab = c$, где c — константа, порождает график в виде гиперболы. Такое уравнение описывает сотни физических законов (упомянем лишь два из них: закон Бойля и закон Ома), а также многие кривые, встречающиеся в экономике. Простой эксперимент, позволяющий воочию увидеть кривую, описываемую зависимостью $ab = c$, можно выполнить, имея две стеклянные прямоугольные пластинки. Совместите их вдоль длинных сторон с одной стороны, а противоположные стороны слегка разведите, вставив между пластинками короткую полоску картона или две спички. Обе пластинки стяните резинками, которые не дадут им разойтись. Образовавшийся стеклянный клин погрузите в слегка подкрашенную воду. Под действием капиллярных сил образуется гипербола, которая изображена на рис. 96.

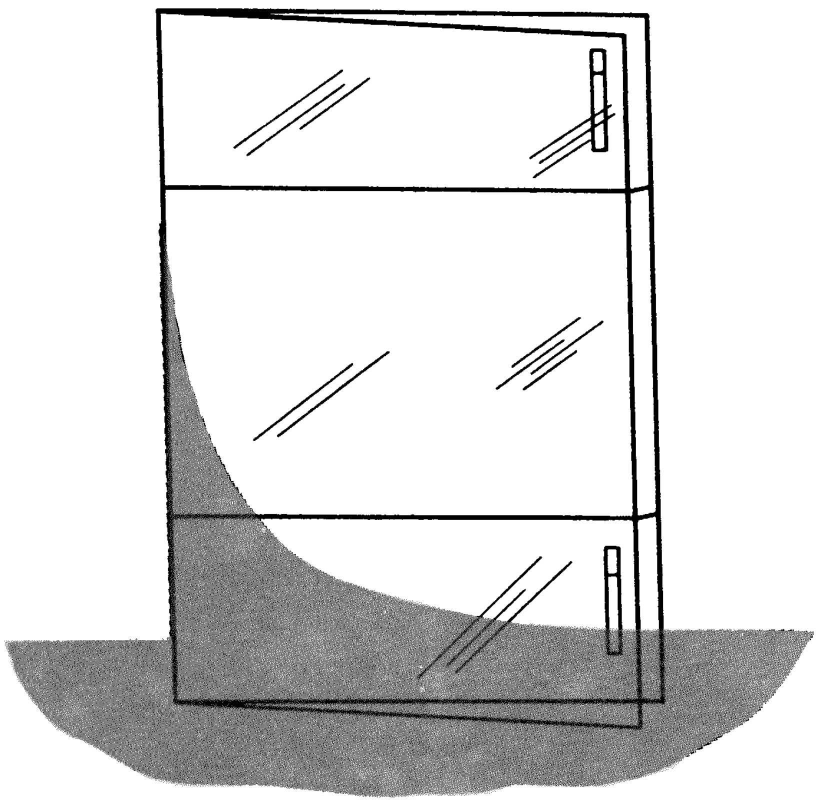


Рис. 96

Гипербола, возникающая под действием капиллярных сил.

Типичная гипербола показана на рис. 97. Две тонкие линии, образующие косой крест, являются асимптотами кривой, или недостижимыми пределами, к которым стремятся ветви кривой при неограниченном продолжении. Если асимптоты взаимно перпендикулярны (на рис. 97 они не взаимно перпендикулярны), то гипербола называется равнобочной или прямоугольной.

Ветви параболы быстро становятся почти неотличимыми от параллельных прямых. В отличие от них ветви гиперболы быстро расходятся, стремясь уйти в бесконечность, но всегда остаются заключенными внутри угла, образованного их асимптотами. Это красивое свойство гиперболы послужило источником вдохновения для многих поэтических и фило-

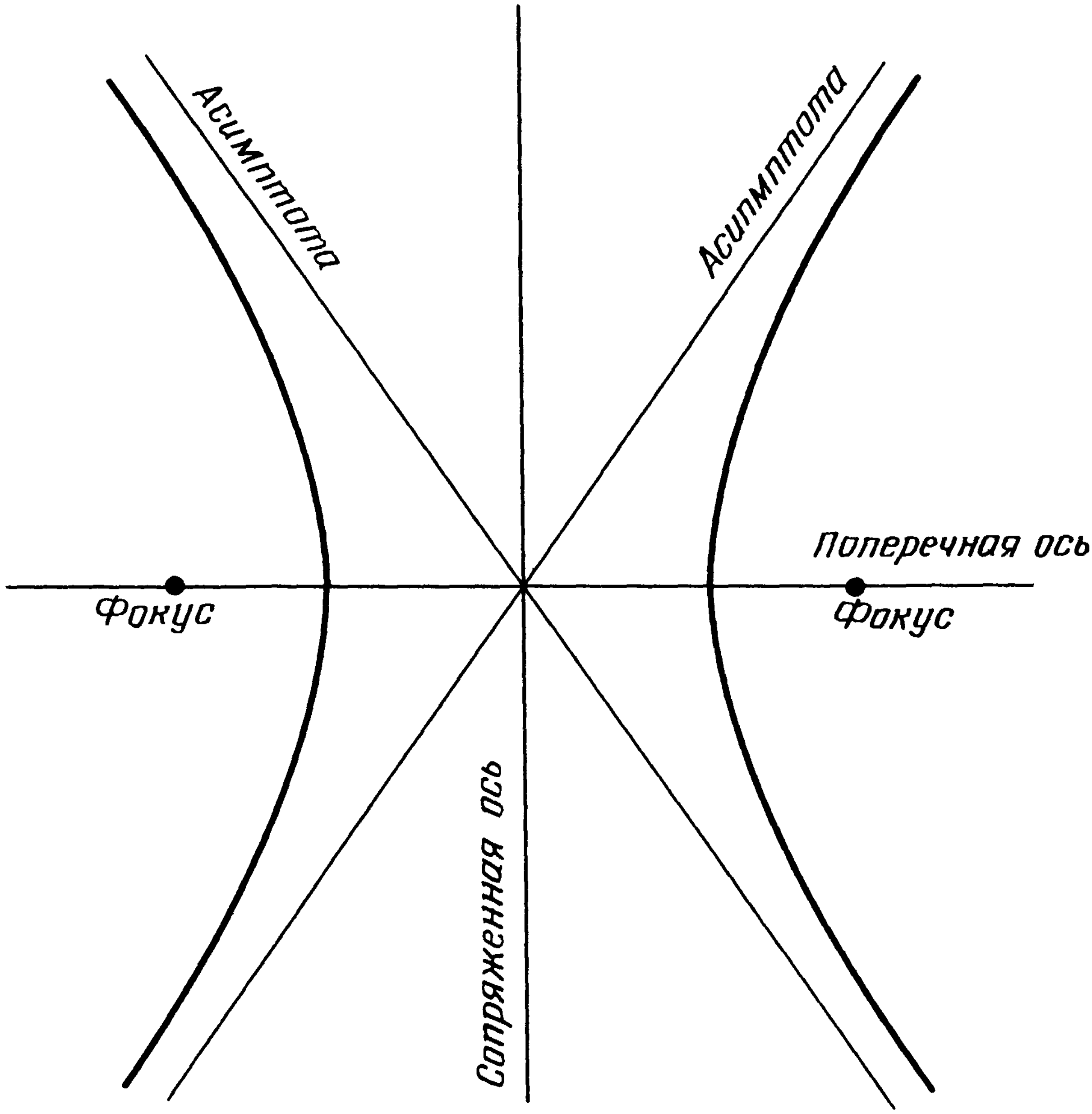


Рис. 97

Типичная гипербола.

софских метафор. Испанский философ Мигель де Унамуно назвал гиперболу трагической кривой. «Я уверен, что если бы геометр сознавал безнадежное и отчаянное стремление гиперболы соединиться со своими асимптотами,– писал Унамуно,– то он охарактеризовал бы гиперболу как живое и трагическое существо!»

Джозеф Аддисон в очерке «Бессмертие души» наделил гиперболу более оптимистической метафорой. После смерти душа устремляется к Богу, но никогда не становится Богом. «Мы не знаем еще, чем станем, и не дано нам проникнуть в сердце человека, дабы познать славу, что всегда сохраняется для него. Душа, если рассматривать ее вкупе с Творцом, подобна одной из тех математических линий, которые сближаются, простираясь в бесконечность, не имея возможности коснуться друг друга».

Гиперболы находят драматическое применение при определении расстояния до источника звука. Чтобы вам было понятнее, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть A стреляет из ружья в гонг B, находящийся от него на некотором расстоянии. Предположим, что все происходит на идеально ровной местности. Где следует стоять, чтобы услышать выстрел и звук гонга одновременно?

Пусть x – расстояние, которое проходит звук за время от момента выстрела до того момента, когда пуля попадает в гонг. Точки A и B – фокусы бесчисленных гипербол. Тот кто слышит звук выстрела и гонга одновременно, должен стоять на ветви гиперболы (ближайшей к цели), т. е. на геометрическом месте точек, разность расстояний от которых до точек A и B равна x.

Положение удаленного источника звука может быть определено с помощью двух пар постов «слухачей»: A и B, C и D Наблюдатели в точках A и B засекают момент времени, когда до них доходит звук. Часы обоих наблюдателей синхронизованы, поэтому наблюдатели могут определить точную разность между моментами прихода звука к каждому из них. Обозначим эту разность через x. Звук должен исходить от ветви гиперболы (ближайшей к источнику), т. е. от геометрического места точек, для которых разность расстояний от них до точек A и B равна x. Эта кривая вычерчивается на карте. Наблюдатели в точках C и D делают то же самое и вычерчивают на той же карте

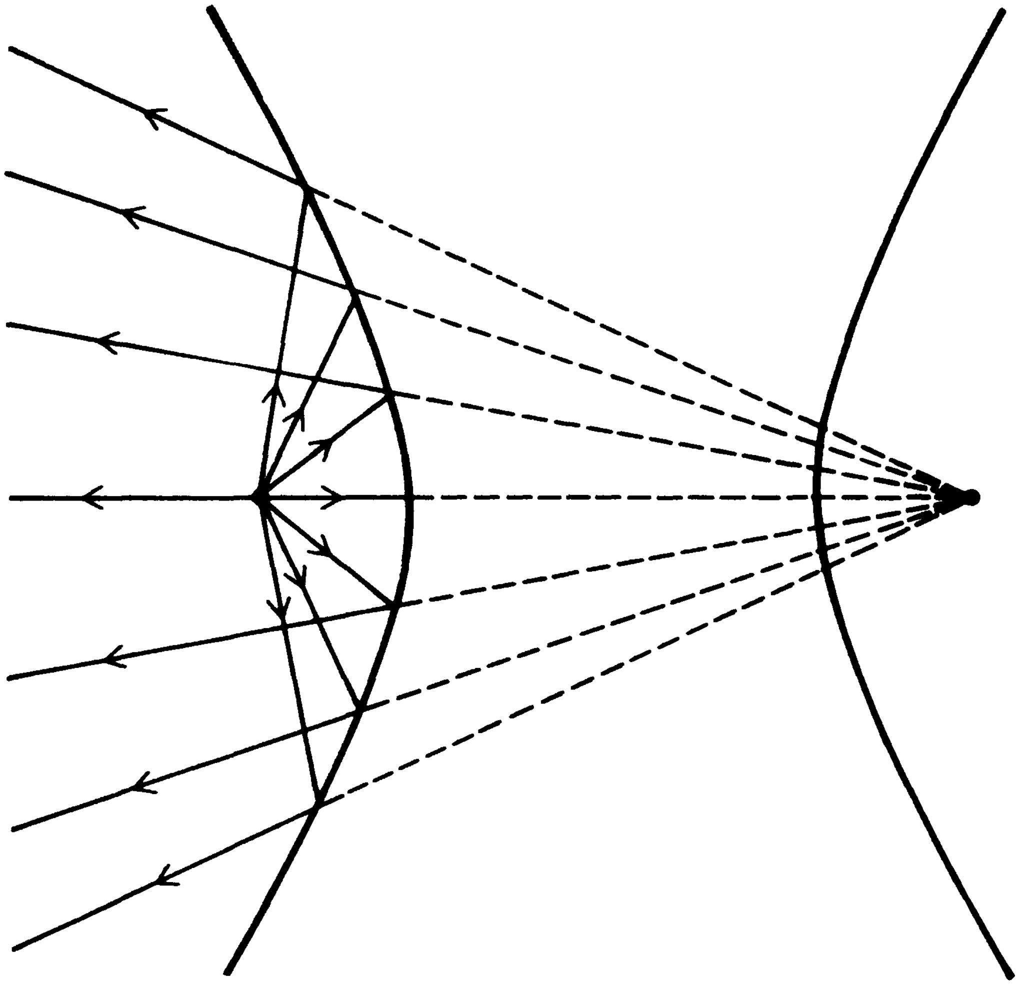


Рис. 98

Лучи, исходящие из источника света в одном фокусе гиперболы, после отражения сходятся в другом фокусе.

ветвь другой гиперболы. Точка, в которой пересекаются обе кривые (ближайшая к источнику звука), «определяет» его местоположение.

Разработанные во время второй мировой войны гиперболические навигационные системы типа лорана используют обратную процедуру. Где-то на берегу две станции *A* и *B* (одна из них называется основной, другая вспомогательной) одновременно испускают радиосигналы. То же самое делают две другие станции *C* и *D*, расположенные на берегу в другом месте. Используя разность времени между моментами приема сигналов от обеих пар станций, штурман на борту морского судна или самолета может построить две гиперболы, пересечение которых на карте позволяет определить место, где он находится.

Зеркала, имеющие в сечении форму гипербол, используются (наряду с зеркалами других типов) в некоторых телескопах-рефлекторах, камерах специального назначения, а также в качестве отражателей карманных фонарей и прожекторов. Если источник света поместить в одном из фокусов эллиптического зеркала, то все отраженные лучи сойдутся в другом фокусе. Если источник света поместить в фокусе параболы, то отраженные лучи окажутся параллельными, т. е. «сойдутся» в утраченном фокусе на бесконечности. Гиперболическое зеркало, как видно из рис. 98, заставляет отраженные лучи расходиться. Но если продолжить расходящиеся лучи в обратную сторону, как показано на рис. 98 штрихами, то они непременно сойдутся в другом фокусе. В некотором смысле эти лучи как бы прошли бесконечность и нашли утерянный было фокус «позади».

Изящной гиперболической поверхностью, обладающей многими замечательными свойствами, является впервые описанный Архимедом однополостный гиперболоид. Нитяную модель этой поверхности вы видите в середине на рис. 99. Вертикальные сечения этой поверхности имеют форму гипербол, а горизонтальные сечения имеют формы эллипсов. Если горизонтальные сечения имеют форму окружностей, то такая поверхность называется однополостным гиперболоидом вращения, поскольку она образуется при вращении гиперболы вокруг сопряженной оси. (Если гиперболу вращать вокруг поперечной оси, то образуется двухполостный гиперболоид вращения: пара куполообразных поверхностей, разделенных конечным расстоянием.)

В 1669 г. Кристофер Рен, архитектор, построивший собор Св. Павла в Лондоне, сообщил о необычайном открытии в связи с однополостным гиперболоидом. Он показал, что однополостный гиперболоид представляет собой поверхность, называемую математиками линейчатой, т. е. поверхность, состоящую из несчетно бесконечного множества прямых!

Например, цилиндр – линейчатая поверхность, образованная параллельными прямыми. Конус – линейчатая поверхность, образованная прямыми, пересекающимися в вершине конуса. Гиперболоид – линейчатая поверхность, образованная двумя различными семействами прямых. На рис. 99 (в середине) вы видите семейство прямых, имеющих одинаковый наклон, причем никакие две из этих прямых не пересекаются. Другое семейство (не показанное на рисунке) зеркально симметрично первому: образующие его прямые наклонены в другую сторону. Каждая прямая первого се-

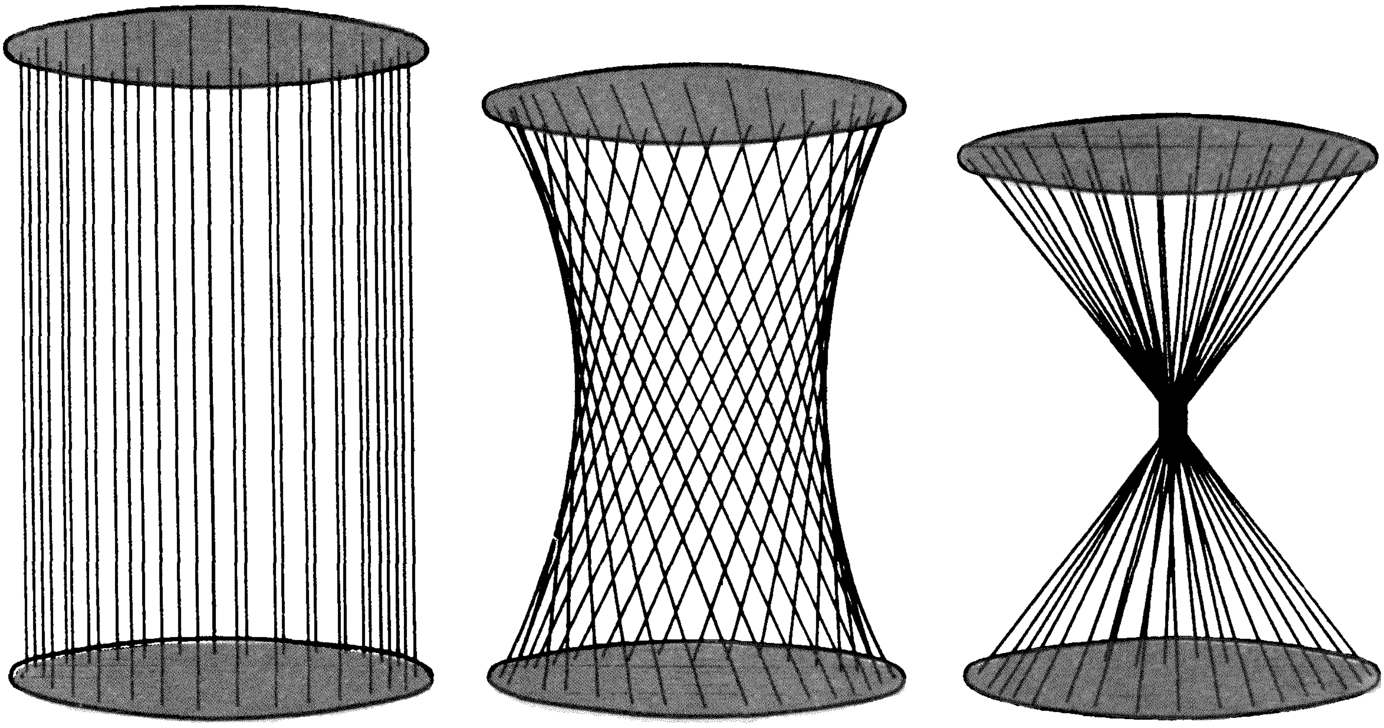


Рис. 99

Нитяная модель цилиндра (слева). При небольшом закручивании она переходит в однополостный гиперболоид (в середине), а при более сильном закручивании – в двойной конус.

мейства, если ее продолжить, пересекает каждую прямую другого семейства. Через каждую точку на гиперболоиде проходит прямая из каждого семейства. Пара прямых, проходящих через точку гиперболоида, определяет плоскость, касательную к гиперболоиду в этой точке.

Нитяная модель позволяет воочию убедиться в том, что однополостный гиперболоид порождается вращением вокруг оси отрезка прямой, скрещивающейся с осью, т. е. прямая, которой принадлежит отрезок, не пересекается с осью. (Если вокруг оси вращать отрезок, параллельный оси, то получается цилиндр. Если же продолжение отрезка пересекает ось вращения, то получается конус.) Это наводит на мысль о простом эксперименте с карандашом и распрямленной скрепкой. Согните скрепку под острым углом и проткните одной из сторон угла ластик на конце карандаша, как показано на рис. 100. (Верхняя сторона AB угла должна расположиться под острым углом к оси карандаша.) Зажав карандаш между ладонями, крутите его быстро то в одну, то в другую сторону, делая такие движения, будто вы добываете огонь трением. При правильном освещении вы

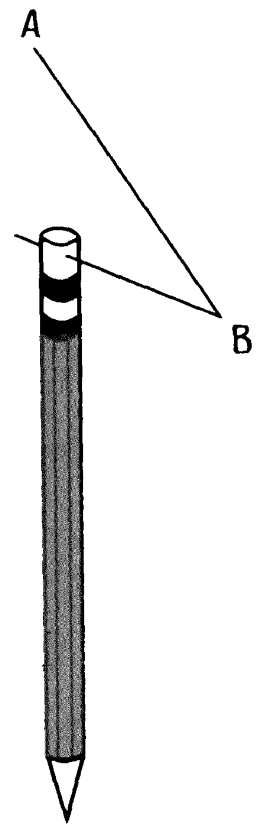


Рис. 100

Построение «призрачного» гиперболоида с помощью вращающегося карандаша и проволочки.

увидите, что вращающийся наклонный отрезок AB образует прозрачный гиперболоид.

Если вращать куб, поставленный на одну из его вершин, то шесть наклонных ребер порождают аналогичную поверхность. Немного потренировавшись, вы наловчитесь так запускать игральную кость, что она будет вращаться, стоя на одной из своих вершин. Глядя на вращающуюся кость «в профиль» (сбоку), вы увидите гиперболоид, заключенный между двумя конусами (рис. 101).

Изготовить изображенную на рис. 99 нитяную модель совсем нетрудно. Нужно лишь вырезать из картона два кольца, проделать в них отверстия, отстоящие друг от друга на равные расстояния, и аккуратно продеть сквозь них нить, пропуская ее поочередно через отверстие то одного, то другого кольца. Капнув затем клеем на каждое отверстие, вы предотвратите проскальзывание нити. Если диски разведены так, что нити натянуты вертикально, как показано на рис. 99 слева, то перед вами модель цилиндрической поверхности. Если один из дисков повернуть на 180° относительно другого по часовой стрелке, то нити будут моделировать два конуса,

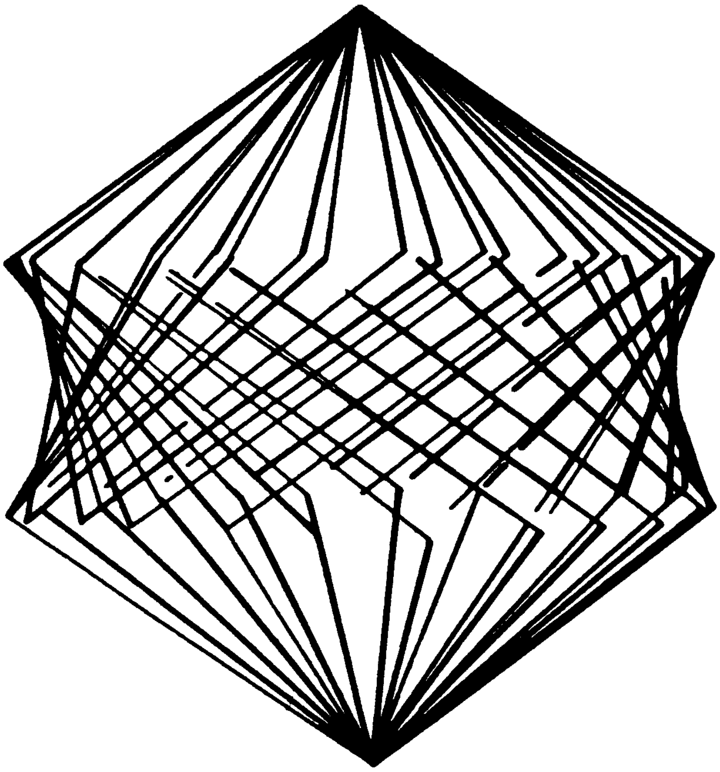


Рис. 101

Гиперболоид между двумя конусами, возникающий при вращении куба.

как показано на рис. 99 справа. Между этими двумя предельными случаями закручивание одного диска относительно другого на любой угол между 0 и 180° порождает бесконечное семейство гиперболоидов такого типа, какой изображен на рис. 99 в середине; эти гиперболоиды порождены нитями, наклоненными влево. При закручивании одного кольца относительно другого против часовой стрелки мы получим зеркальное семейство гиперболоидов, порожденных нитями, наклоненными вправо.

Гораздо труднее изготовить модель из жестких проволочек, описанную в книге Гильберта и Кон-Фоссена [15, 2]. В каждой из точек пересечения пара проволочек соединена универсальным шарниром, позволяющим проволочкам поворачиваться, но не скользить друг относительно друга. Вы ожидаете, что такая конструкция будет жесткой, но она оказывается гибкой, причем гнется самым неожиданным образом. Если модель сжать в одном направлении, то эллиптическое сечение вырождается в прямую и стержни складываются в вертикальной плоскости, образуя огибающую гиперболы. Если модель сжимать по-другому, то стержни складываются в горизонтальной плоскости, образуя

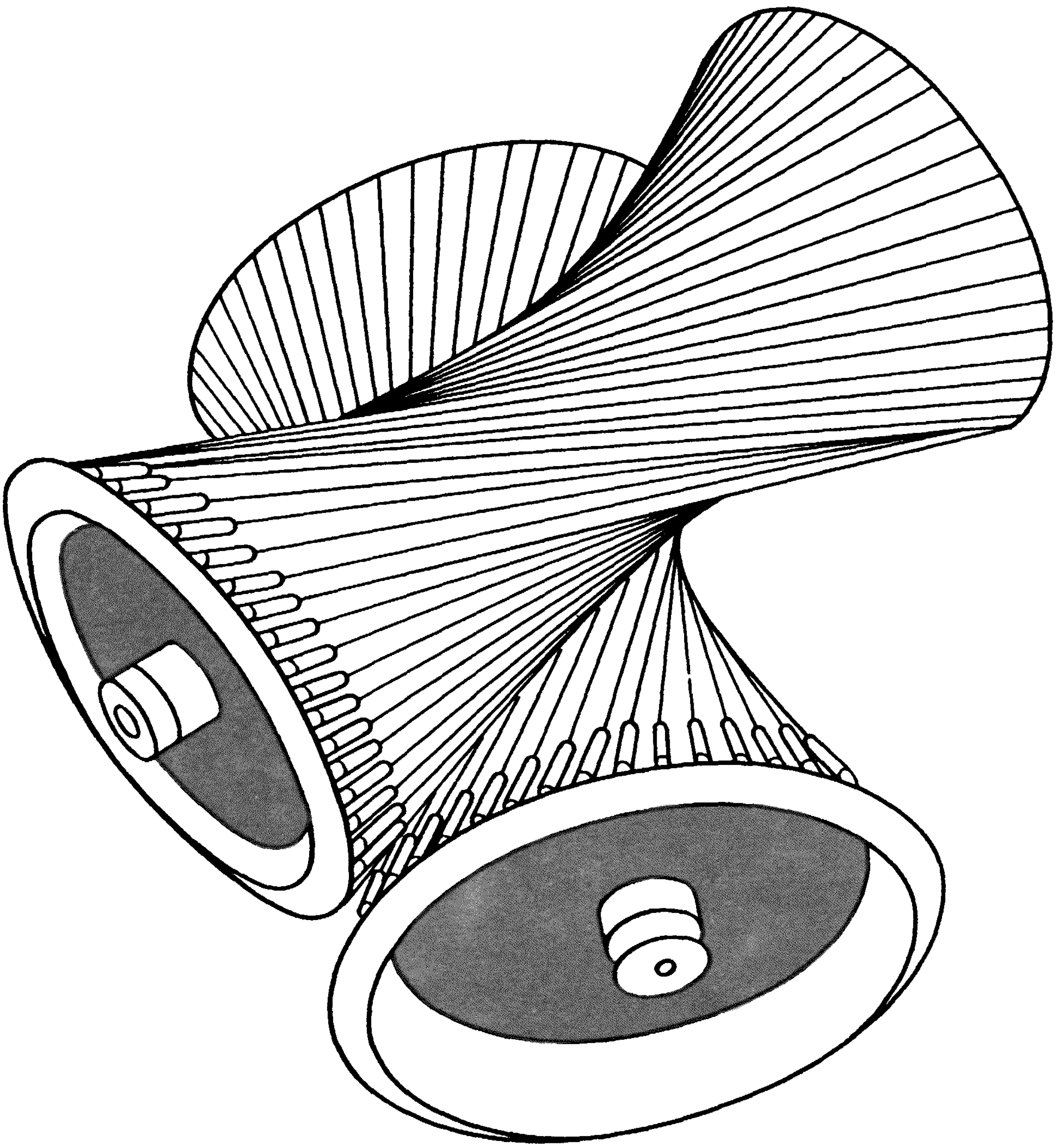


Рис. 102

Гиперболоидальные зубчатые передачи позволяют передавать движение ведомой оси, расположенной под углом, отличным от прямого, к ведущей оси.

огибающую эллипса. На рис. 102, заимствованном из «Наглядной геометрии», изображены два гиперболоида вращения, образующие зубчатую передачу с осями, расположенными под острым углом друг к другу. Это один из многих способов использования гиперболоидов в механических передачах.

Поразительным примером использования однополостного гиперболоида вращения может служить планетарий Макдоннелла в Форест-парке города Сент-Луиса (рис. 103). Выбор проектировщика Джио Обаты пал на эту поверхность потому, что, по его словам, гиперболические траектории

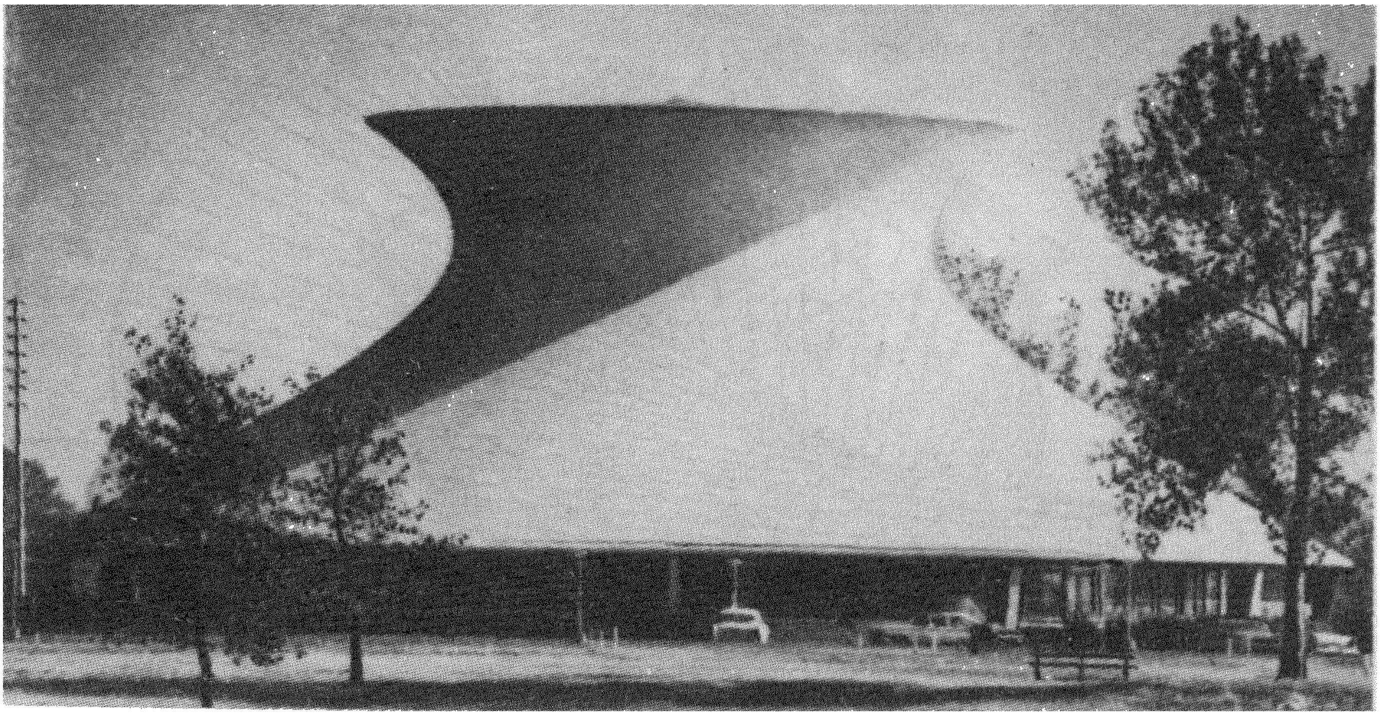


Рис. 103

Планетарий Макдоннелла в американском городе Сент-Луис (штат Миссури).

комет наводят на мысль о «драматичности и увлекательности исследования пространства». Обратите внимание на прямолинейный контур тени, отбрасываемой круглой крышей под косыми лучами солнца. Является ли эта прямая одной из образующих прямых поверхностей или это пространственная кривая, которая только кажется прямой при рассмотрении под углом?

Ответы и решения

Является ли прямолинейный контур тени на фотографии планетария Макдоннелла в Сент-Луисе одной из прямолинейных образующих линейчатой поверхности однополостного гиперболоида вращения? На этот вопрос следует ответить утвердительно. Когда прямая, которой принадлежит край тени, пересекает солнце, контур тени на стене планетария совпадает с прямолинейной образующей поверхности. Эта прямая является проекцией одной-единственной точки на краю круглой крыши планетария, а не проекцией целой окружности. Если солнце находится под другим углом возвышения, то край тени имеет форму некоторой кривой, а не прямолинейной образующей поверхности.

Дополнение

Пьер Безье из Парижа сообщил мне, что однополостные гиперболоиды часто используются в конструкциях градирных башен ТЭЦ. Поскольку бетон может быть армирован стальными стержнями (расположенными вдоль прямолинейных образующих в описанной выше модели), конструкция отличается необычной прочностью. Клайд Холвенстот сообщил мне, что орудийные башни на боевых кораблях также строились в виде однополостных гиперболоидов. Он любезно прислал мне фотографию из «New York Times Book Review» (от 2 октября 1977 г.), на которой изображены две такие гиперболоидные башни на корабле «Мичиган» ВМС США до того, как он был пущен на лом.

Дерек Болл в статье [15, 4] обсуждает неожиданное появление гипербол в геометрических построениях, связанных с прямыми, которые делят площадь равностороннего треугольника на части, составляющие $1/n$ от площади всего треугольника (n – целое число). Например, если провести все возможные прямые, делящие площадь равностороннего треугольника пополам, то огибающая этих прямых имеет форму небольшой дельтообразной фигуры, изображенной на рис. 104. Сторонами этой фигуры служат гиперболы.

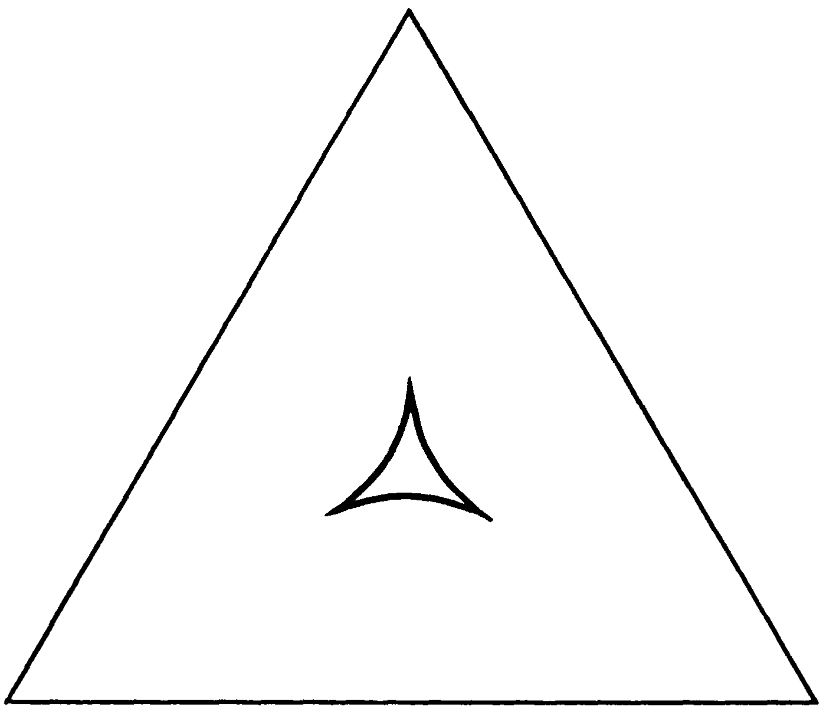
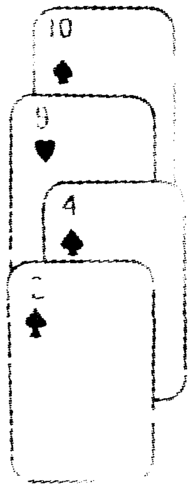


Рис. 104

Три гиперболы – огибающая семейства прямых, делящих равносторонний треугольник на две равновеликие части.

Рассказывая о том, как следует складывать окружность, чтобы получить эллипсы и гиперболы, и почему при складывании не возникают параболы, я забыл упомянуть о письмах от Уолтера Цыбульскиса из Иллинойсского технологического института, который обратил мое внимание на эти факты.

Глава 16
Новый Элевсин



«Я всегда придерживаюсь того мнения, что тот, кто лучше угадывает, является лучшим пророком».

Цицерон. *«О прорицаниях»*

«Никогда не пророчествуйте, если заранее не знаете, что произойдет».

Джеймс Расселл Лоуэлл. *«Документы Биглоу»*

В июне 1959 г. я имел честь познакомить читателей журнала «Scientific American» с замечательной индуктивной имитационной игрой «Элевсин». Для этой игры нужна обычная колода игральных карт, а свое название она получила в честь элевсинских мистерий, разыгрывавшихся ежегодно в Древней Греции,– религиозных ритуалов, во время которых вновь посвященные приобщались к тайным правилам культа. С тех пор появились сотни остроумнейших имитационных игр, моделирующих различные аспекты жизни, но «Элевсин» представляет особый интерес для математиков и представителей естественных наук, поскольку является моделью индукции – процесса, лежащего в самой основе научного метода. Моя первая журнальная публикация об

«Элевсине» была воспроизведена в книге [16, 1*][1]. С тех пор «Элевсин» превратился в гораздо более увлекательную игру, чем его первоначальный вариант, и я считаю своим долгом познакомить читателя с современной версией «Элевсина». Начну с некоторых исторических замечаний.

«Элевсин» был изобретен в 1956 г. Робертом Эбботтом из Нью-Йорка, который в то время был студентом-старшекурсником Университета Колорадо. Эбботт изучал внезапные прозрения или озарения, когда человеку вдруг становится ясно решение проблемы. Великие мгновения, подлинные поворотные пункты в истории науки нередко бывают связаны с такими загадочными интуитивными постижениями истины. «Элевсин» оказался великолепной имитацией этой грани науки, хотя Эбботт, изобретая игру, не имел в виду ничего подобного. Полные правила игры в «Элевсин» были опубликованы Эбботтом в 1963 г. в книге «Новые карточные игры Эбботта» [16, 2*].

Игрой заинтересовался известный специалист по математической физике из Принстонского университета Мартин Крускал, который предложил несколько важных усовершенствований. В 1962 г. Крускал опубликовал свои правила в монографии под названием «Дельфи: игра, требующая индуктивного мышления» [16, 1][2]. Многие преподаватели колледжей по всей стране использовали «Элевсин» и «Дельфи» для объяснения основ научного метода и объяснения феномена «прозрения». Специалисты по искусственному интеллекту составили копьютерные программы для игры в «Элевсин». Компания «System Development Corporation» из Санта-Моники провела под руководством Дж. Роберта Ньюмена исследование «Элевсина». Фирма «Litton Industries» использовала «Элевсин» в качестве основы для рекламы. Описание игры появилось в европейских книгах и журналах. К Эбботту со всех концов света стали приходить

[1] См. гл. 30 русского перевода. Прежнее название игры («Элузис») было выбрано из фонетических соображений, так как в первой публикации Гарднера не содержалось ссылки на элевсинские мистерии.– *Прим. перев.*

[2] Дельфи – уменьшительное от дельфийского оракула.– *Прим. перев.*

письма с советами и пожеланиями относительно того, как усовершенствовать «Элевсин».

В 1973 г. Эбботт обсудил игру с Джоном Яворским, молодым английским математиком, работавшим над компьютерной версией «Элевсина» для обучения индуктивным умозаключениям, после чего приступил к осуществлению трехлетнего плана переделки «Элевсина», стремясь по возможности учесть все удачные предложения. Новый вариант игры стал не только более увлекательным – расширился метафорический уровень «Элевсина». С введением ролей Пророка и Лжепророка «Элевсин» обретает возможность моделировать поиск истины любого рода. Приведем правила игры в «Новый Элевсин», полученные мной от Эбботта,– именно таких правил придерживаются наиболее ревностные поклонники новой игры. В «Новый Элевсин» следует играть по крайней мере вчетвером. Число игроков может доходить и до восьми, но при большем числе участников игра принимает излишне затяжной и хаотический характер.

Две стандартные (в 52 листа) колоды карт тасуются вместе. (Обычно раунд должен длиться достаточно долго, прежде чем возникнет необходимость в третьей колоде.) Полная игра состоит из одного или более раундов, причем каждый раунд карты сдает другой игрок. Раздающий карты может быть удостоен титула Бога, Природы, Тао, Брамы, Оракула (как в «Дельфи») или просто Раздающего.

Первая задача раздающего карты состоит в том, чтобы задумать «тайное правило». Так называется правило, которое определяет, какими картами может «на законных основаниях» сыграть каждый из участников, дождавшись своего очередного хода. Чтобы хорошо играть, все участники должны отгадать задуманное сдающим правило. Чем быстрее игрок отгадает это правило, тем больше очков он наберет.

Одна из наиболее достопримечательных особенностей «Элевсина» – тонко задуманная система подсчета очков (которую мы приводим ниже). Она поощряет того, кто раздает карты, задумывать правила, отгадать которые не слишком легко, но и не слишком трудно. Не будь этой особенности, раздающие могли бы поддаться искушению задумывать настолько сложные правила, что отгадать их не мог бы никто из играющих, игра стала бы вялой и утратила бы всякий интерес.

Примером чрезмерно простого правила может служить хотя бы следующее: «Выложить карту, цвет которой отличен от цвета карты, выложенной предыдущим игроком». Чередование цветов слишком бросается в глаза, чтобы остаться незамеченным. Гораздо лучше правило: «Выкладывать карты в такой последовательности, чтобы простые и составные значения карт чередовались». Однако для математиков и такое правило может оказаться слишком простым, но для нематематиков оно может быть непосильно трудным. Примером чрезмерно сложного правила может служить хотя бы следующее: «Перемножить значения последних трех выложенных играющими карт и разделить полученное произведение на 4. Если остаток равен 0, то выложить красную карту или карту со значением больше 6. Если остаток равен 1, то выложить черную карту или карту с картинкой. Если остаток равен 2, то выложить карту с четным значением или карту со значением меньше 6. Если остаток равен 3, то выложить карту с нечетным значением или десятку». Такое правило никто не отгадает, и придумавший его раздающий получит мало очков.

Приведем теперь три примера хороших правил для игры в «Элевсин» с неопытными игроками.

1. Если первая правильно выложенная карта имеет нечетное значение, то выложить четную карту. В противном случае выложить красную карту.

2. Если последняя правильно выложенная карта была черной, то выложить карту такого же или большего значения. Если последняя правильно выложенная карта была красной, то выложить карту такого же или меньшего значения. (Значения валета, дамы, короля и туза равны соответственно 11, 12, 13 и 1.)

3. Выложить карту той же масти или того же значения, что и последняя правильно выложенная карта.

Тайные правила должны относиться только к последовательности «законно» выложенных карт. Разумеется, искусные игроки могут использовать правила, относящиеся ко всей последовательности выложенных на стол карт, независимо от того, соблюдалось или было нарушено тайное правило, но такие правила отгадывать гораздо труднее и в обычной игре они не допускаются. Такое правило ни в коем случае не должно зависеть от посторонних («некар-

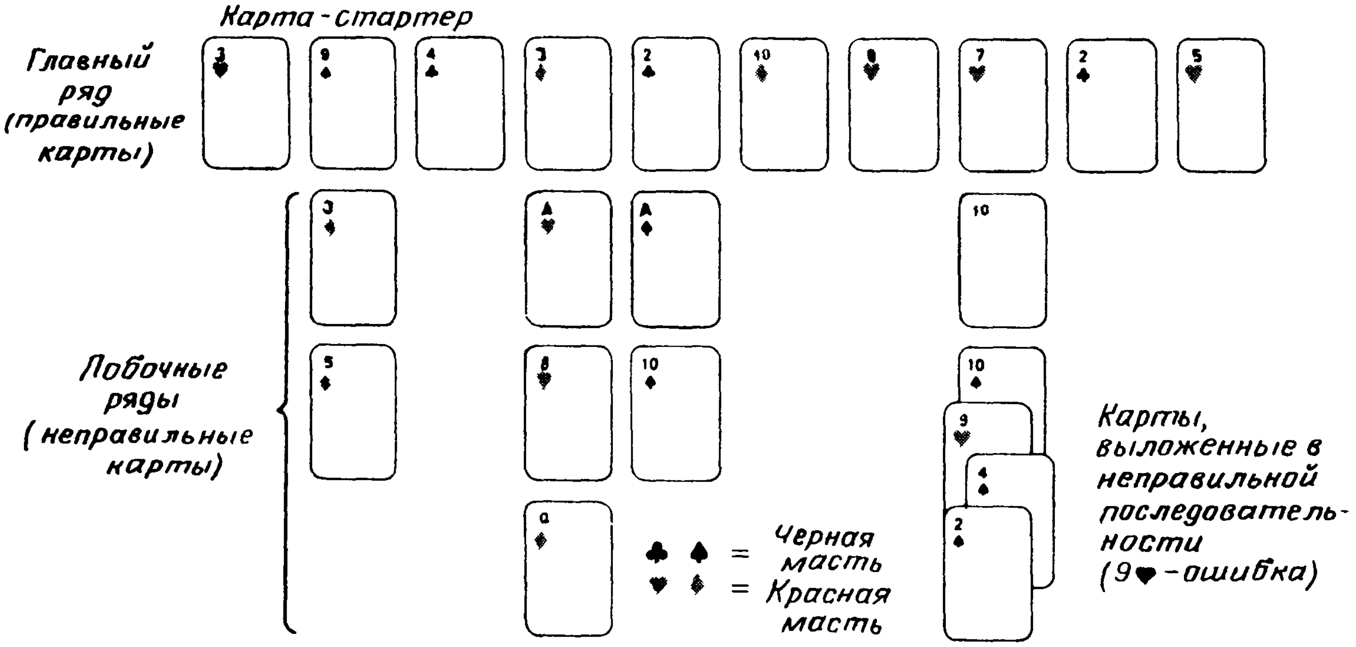


Рис. 105

Типичный раунд при игре в «Элевсин» на ранней стадии.

точных») обстоятельств. В качестве примеров таких негодных правил приведем хотя бы такие, которые зависят от пола очередного игрока, времени дня, от того, чешет ли раздающий карты («Бог») свое ухо, и т.д.

Тайное правило должно быть сформулировано ясно и однозначно и записано на листке бумаги, который откладывается в сторону для будущего подтверждения правильности отгадки. Крускал предложил, чтобы перед началом игры раздающий карты высказал правдивый намек относительно задуманного правила. Например, раздающий может заявить: «Для задуманного правила масти карт роли не играют» или «Задуманное мной правило относится к двум последним картам, выложенным на стол».

После того как тайное правило записано, «Бог» тасует двойную колоду и раздает остальным игрокам по 14 карт (не беря себе ни одной). Одну карту – так называемый «стартер» – раздающий кладет слева от «игровой площадки» (пространства, на котором располагаются в ходе игры карты), как показано на рис. 105. Чтобы определить, кто из игроков делает первый ход, раздающий считает игроков по кругу, начиная с игрока, сидящего от него по левую руку. Счет ведется по часовой стрелке. При счете раздающий себя пропускает. Счет продолжается до тех пор, пока раздающий не дойдет до числа, равного значению карты-стартера. Тот из игроков, на котором обрывается счет, делает ход, после чего игроки делают ходы поочередно по кругу (по часовой стрелке).

Игра состоит в выкладывании на стол одной или нескольких карт. Прежде чем положить карту на стол, игрок извлекает ее из находящихся у него на руках карт и показывает ее другим игрокам. Если карта согласуется с задуманным правилом, то она объявляется раздающим правильной и ее кладут справа от карты-стартера в «главном ряду» (состоящем из правильных карт, выкладываемых вправо).

Если же предъявляемая карта не согласуется с задуманным правилом, то она объявляется неправильной и ее кладут под предыдущей выложенной на стол картой. Вертикальные столбцы из неправильных карт называются «побочными рядами». (Способ раскладки карт и термины «главный ряд» и «побочный ряд» принадлежат Крускалу.) Таким образом, если подряд выкладываются неправильные карты, то они оказываются одна под другой в одном и том же побочном ряду, растущем сверху вниз. Если игрок выкладывает неправильную карту, то раздающий вручает ему еще две карты, тем самым увеличивая число карт у этого игрока на руках.

Если игроку кажется, что ему удалось разгадать задуманное тайное правило, то он может выложить сразу «связку» из 2, 3 или 4 карт. Чтобы выложить связку, игрок складывает их веером, сохраняя очередность, и показывает остальным участникам игры. Если все карты в связке соответствуют правилу, то раздающий объявляет их правильными, после чего все карты выкладываются в главный ряд так же, как если бы все они были правильными, выкладываемыми поодиночке.

Если одна или более карт в связке неправильная, то раздающий объявляет неправильной всю связку. Однако он не указывает, какие карты в связке не соответствуют правилу. Неправильные карты складываются стопкой и частично сдвигаются так, чтобы при этом не была нарушена их последовательность в связке, после чего помещаются под предыдущей картой, выложенной на стол. После этого раздающий вручает игроку вдвое больше карт, чем было в неправильной связке.

В раскладке, изображенной на рис. 105, представлены все упоминавшиеся до сих пор правила игры в «Элевсин». Задумано первое из трех приведенных выше правил.

Чтобы набрать побольше очков, играющие стремятся избавиться от как можно большего числа карт. Разумеется, лучше всего это им удается, если они отгадывают задуманное тайное правило. В начале раунда игроки не располагают информацией, достаточной для угадывания задуманного правила, и вынуждены делать случайные ходы. Но по мере того, как игра продолжается, выкладка на столе содержит все больше информации и отгадывать правило становится легче.

Может представиться такой случай, когда игрок считает, что ему удалось отгадать задуманное раздающим правило, но у него не найдется карты, которую можно было бы выложить на стол в соответствии с правилом. Тогда игрок имеет возможность заявить, что не может сделать очередной ход, и показывает всем имеющиеся у него карты. Если раздающий подтверждает правильность заявления игрока и у игрока на руках остается не более четырех карт, то карты возвращаются в колоду и раунд на этом заканчивается. Если заявление игрока подтверждается и у него на руках остается не менее пяти карт, то карты возвращаются в колоду, а игрок получает четыре новые карты с меньшими значениями, чем у карт, которые были у него перед этим.

Если игрок ошибочно заявляет о том, что не может сделать очередной ход, то раздающий берет одну из его правильных карт и кладет ее в главный ряд. Остальные карты остаются у игрока, которому в качестве штрафа за ошибку раздающий вручает еще пять карт. Игроку, считающему, что он не может сделать правильный ход, но не отгадавшему тайное правило, невыгодно объявлять о невозможности сделать очередной ход, а предпочтительнее выложить на стол случайно выбранную карту.

Если игрок считает, что ему известно задуманное правило, то ему предоставляется возможность подтвердить свою догадку и набрать большее количество очков. Для этого он объявляет себя Пророком. Пророк принимает на себя функции раздающего: объявляет правильными или неправильными ходы других игроков и вручает штрафные карты. Объявить себя Пророком игрок может только при соблюдении всех следующих условий.

1. Он только что сделал (правильный или неправильный) ход, а следующий игрок очередного хода еще не сделал.

2. Среди играющих нет другого Пророка.

3. Кроме него в раунде участвуют по крайней мере два других игрока и раздающий.

4. До этого момента игрок не был Пророком в текущем раунде.

Объявляя себя Пророком, игрок ставит какую-нибудь фишку на последнюю выложенную им на стол карту. Фишкой могут служить, например, шахматный король или ферзь. Свои карты Пророк оставляет у себя, но не выкладывает больше ни одной карты на стол до тех пор, пока не будет разжалован из Пророков. Игра продолжается по часовой стрелке, но Пророк пропускает все свои ходы.

Каждый раз, когда игрок собирается выложить карту или связку карт, Пророк объявляет ее правильной или неправильной. Раздающий либо подтверждает, либо опровергает Пророка. Если утверждение Пророка получает подтверждение, то карта или связка карт, которые игрок намеревался выложить на стол, помещаются в надлежащее место раскладки: в главном ряду, если они были признаны правильными, и в побочном ряду, если они были признаны неправильными. Затем Пророк вручает игроку требуемое количество штрафных карт.

Пророк, высказывание которого опровергается раздающим карты, немедленно низлагается и переименовывается в Лжепророка. Раздающий снимает с карты (или карт) фишку Лжепророка и вручает в дополнение к имеющимся у того на руках картам пять штрафных карт. Лжепророк не может снова стать Пророком в том же раунде, хотя за другими игроками сохраняется право стать Пророком. Религиозный символизм этого правила очевиден, но, как отмечает Эбботт, существует забавная аналогия между этим правилом и наукой: «Пророк – это ученый, публикующий свою работу преждевременно». Стремление стать Пророком и низвергнуть Лжепророка – наиболее увлекательная сторона «Нового Элевсина».

После низложения Пророка раздающий карты вновь приступает к своим обязанностям. Он завершает ход, который привел к низвержению Пророка, располагая карту или связку карт, которые намеревался выложить игрок, либо в главном, либо в побочном ряду в соответствии с тем, правильны они или неправильны. Но если карта (или связка) неправильна, то штраф не назначается. Смысл этого освобождения от штрафа состоит в том, чтобы побудить игроков делать необычные, пусть даже заведомо неправильные, ходы в надежде ниспровергнуть Пророка. Карл Поппер сказал бы, что это правило поощряет ученых к изысканию способов «фальсифицирования» сомнительной теории своего коллеги.

Если существует Пророк и игрок считает, что у него нет карт для очередного хода, то ситуация несколько усложняется. Такое случается редко, и вы можете пропустить эту часть правил с тем, чтобы вернуться к ним в случае необходимости. Если игрок заявляет о том, что он не может совершить очередной ход, то возможны четыре случая.

1. Пророк объявляет утверждение игрока правильным, и раздающий подтверждает оценку Пророка. В этом случае Пророк следует описанной выше процедуре.

2. Пророк объявляет утверждение игрока правильным, но раздающий опровергает мнение Пророка. Пророк немедленно низлагается. Раздающий карты возвращается к исполнению своих обязанностей и поступает как обычно, за исключением того что не вручает игроку штрафные карты.

3. Пророк объявляет утверждение игрока неправильным, но раздающий карты опровергает мнение Пророка. Иначе говоря, утверждение игрока правильно. Пророк низлагается, и раздающий карты ведет игру как обычно.

4. Пророк объявляет утверждение игрока неправильным, и раздающий подтверждает мнение Пророка. В этом случае Пророк выбирает из карт игрока одну правильную карту и помещает ее в главный ряд. Если он делает это правильно, то затем ему необходимо вручить игроку пять штрафных карт, после чего игра продолжается. Однако не исключена возможность того, что Пророк ошибется и выберет неправильную карту. В этом случае Пророк низлагается. Неправильная карта возвращается игроку, и раздающий продолжает вести игру как обычно, за исключением того что не вручает игроку штрафные карты.

После того как на стол будет выложено 30 карт и среди игроков не появится Пророк, игроки выбывают из игры (из раунда) за неправильную игру, т. е. если они выкладывают неправильную карту или делают неправильное заявление о том, что не могут сделать очередной ход. Выбывшему игроку раздающий вручает обычные штрафные карты за последний ход, после чего он не участвует в дальнейшей игре, но сохраняет свои карты для подсчета очков.

Если среди игроков появляется Пророк, то выбывание из игры откладывается до тех пор, пока на стол не будет выложено по крайней мере еще 20 карт после того, как Пророк выставит свою фишку. В качестве «счетчиков» карт используются шахматные пешки, по которым игроки видят, когда наступает момент выбывания из игры. Если нет Пророка, то белая пешка ставится на каждую десятую карту, выкладываемую на стол. Если есть Пророк, то черная пешка ставится на каждую десятую карту, выкладываемую на стол после того, как Пророк выставил свою фишку. Как только Пророк низлагается, его фишка и черные пешки снимаются.

Таким образом, возможность выбывания игрока зависит от того, в какой фазе находится раунд. Например, если на стол выложено 35 карт и среди игроков нет Пророка, то мистер Смит, сделав неправильный ход, выбывает из игры. Делая следующий ход, миссис Джонс выкладывает на стол правильную карту и объявляет себя Пророком. Следом за ней делает свой неправильный ход миссис Браун, но не выбывает из игры, так как после того, как Пророк (в лице миссис Джонс) выставил свою фишку, игроки не успели выложить на стол 20 карт.

Раунд заканчивается в двух случаях: (1) когда у игрока не остается карт и (2) когда все игроки (за исключением Пророка, если таковой имеется) выбывают из игры.

Подсчет очков в «Элевсине» производится следующим образом.

1. Наибольшее число карт, находящихся у одного из игроков (включая Пророка), объявляется «наивысшим счетом». Каждый игрок (включая Пророка) вычитает из высшего счета число своих карт на руках. Полученная разность равна числу очков, «заработанных» игроком. Если у игрока нет карт, то он получает премию в четыре очка.

2. Пророк, если таковой имеется, также получает премию. Она равна числу карт в главном ряду после выставленной Пророком фишки плюс удвоенному числу карт в боковых рядах, выложенных после его фишки, т. е. Пророк получает по одному очку за каждую правильную карту, выложенную после того, как он стал Пророком, и по два очка за каждую неправильную карту.

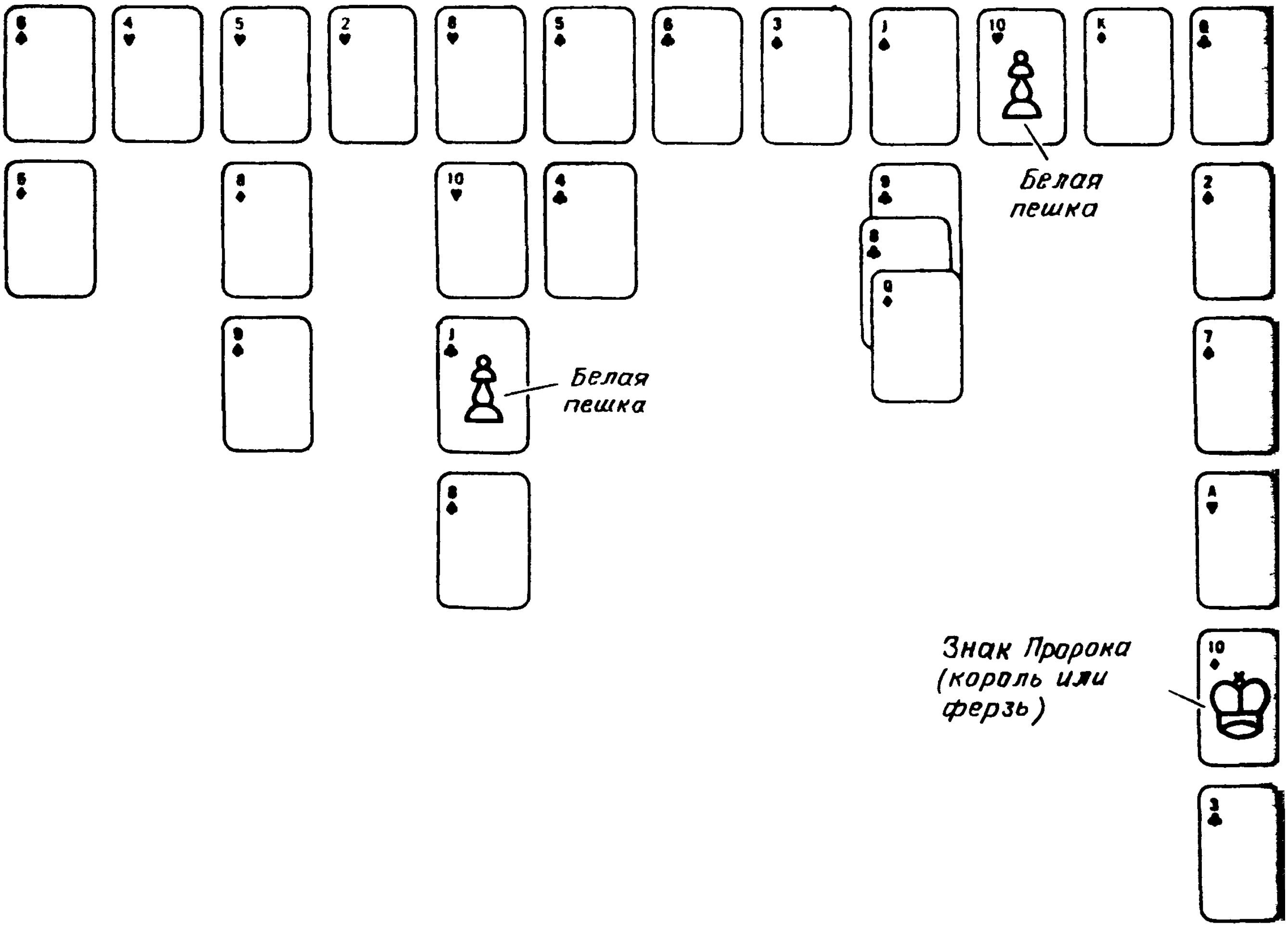
3. Число очков раздающего равно наибольшему числу очков, набранному любым из игроков, с одним исключением. Если среди игроков имеется Пророк, то производится подсчет карт (правильных и неправильных), выложенных на стол до того, как Пророк поставил свою фишку. Полученное число карт удваивается, а затем сравнивается с наивысшим счетом: раздающий получает число очков, равное меньшему из двух чисел.

Если время позволяет провести еще один раунд, то выбирается новый раздающий. В принципе игра завершается после того, как каждый из игроков побывает раздающим, но на это может уйти почти весь день. Чтобы завершить игру, не дожидаясь, пока все участники успеют побывать раздающими, каждый игрок подсчитывает сумму очков, набранных во всех сыгранных раундах, и прибавляет еще 10 очков, если он не был Пророком. Такое правило позволяет в какой-то мере компенсировать игроков за то, что раздающие, как правило, получают число очков, которое выше среднего.

На рис. 106 показана раскладка, возникающая в конце раунда с пятью игроками. Раздавал карты мистер Смит. Раунд окончился, когда миссис Джонс избавилась от своих карт. Пророком был мистер Браун. Он закончил игру, имея на руках 9 карт. Робинсон вышел из игры, сделав неправильный ход десяткой пик. У него на руках осталось 14 карт. У Адамса в конце игры было 17 карт.

Наивысший счет в этом случае равен 17. Следовательно, Адамс получает $17 - 17 = 0$ очков, Робинсон – $17 - 14 = 3$ очка, Джонс – $17 - 0 = 17$ очков плюс 4 очка премии за то, что у нее не осталось карт, т.е. всего 21 очко. Браун получает $17 - 9 = 8$ очков плюс 34 очка премии за то, что был Пророком (12 карт в главном ряду и 11 карт в побочных рядах, выложенных после фишки Пророка), т.е. всего 42 очка. Это наибольшее число очков, полученных игроком в данном раунде. Удвоенное число карт, выложенных на стол до того, как Пророк выставил свою фишку, равно 50. Раздававший карты Смит получает 42 очка, так как 42 – наименьшее из двух чисел 42 и 50.

Приглашаю читателей подробно проанализировать раскладку карт, изображенную на рис. 106, и попытаться отгадать задуманное тайное правило. Игра велась без всяких дополнительных ухищрений, и поэтому правило определяет



только последовательность карт в главном ряду. Я раскрою тайное правило в разделе «Ответы и решения».

Эбботт высказал ряд советов, которые могут оказаться полезными для начинающих игроков в «Элевсин». Так как раскладки карт часто занимают много места, лучше всего играть в «Элевсин» на полу. Разумеется, можно играть на большом столе или, если воспользоваться миниатюрными картами, то на столе меньших размеров. В случае необходимости главный ряд можно «переносить», т. е., оборвав справа, продолжить выкладывать его ниже слева.

Следует помнить о том, что в «Элевсине» раздающий карты получает наибольшее число очков, если задуманное им правило не слишком легко и не слишком трудно. Естественно, выбор правила зависит от того, насколько проницательно раздающий оценивает способности и насколько точно он судит о сложности задуманного им правила. Обе оценки требуют значительного опыта. Начинающие игроки имеют обыкновение недооценивать сложность задумываемых ими правил.

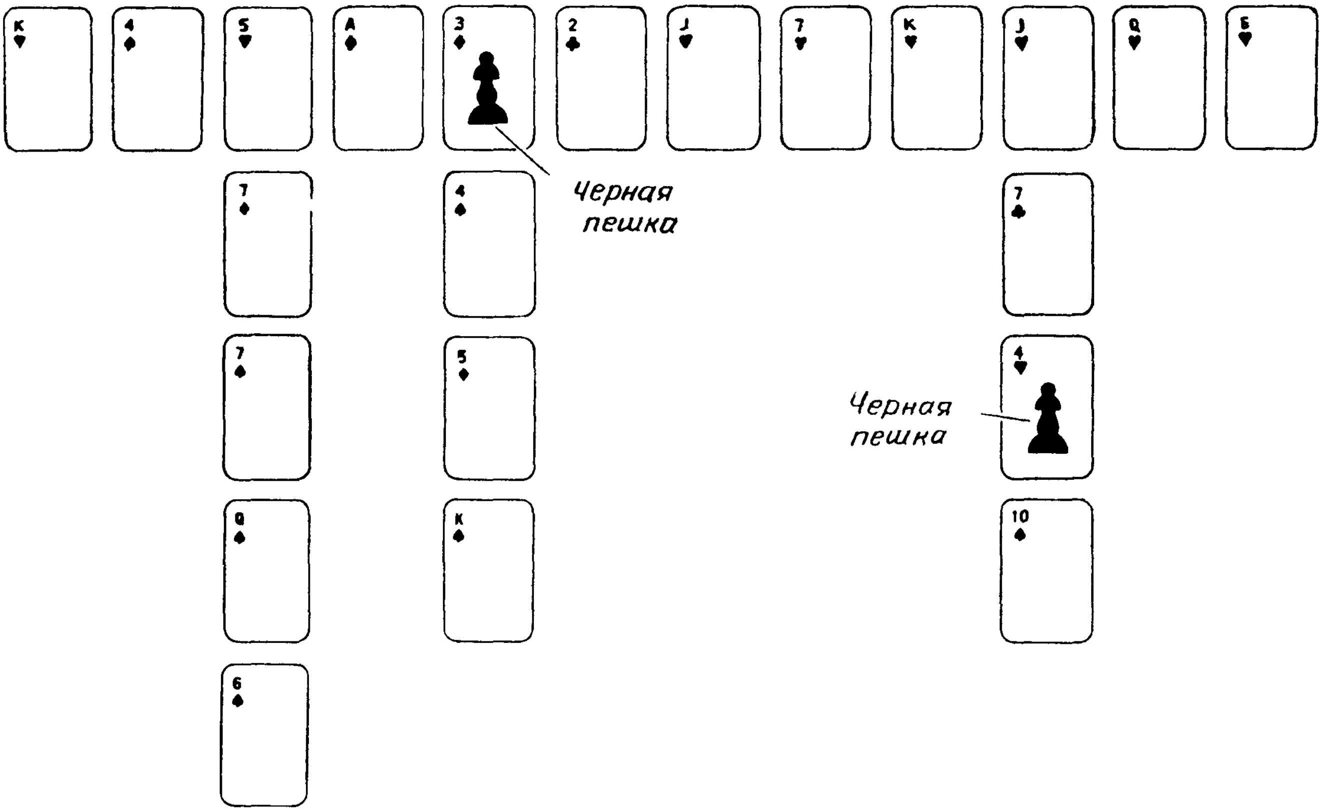


Рис. 106

Расклад карт в конце раунда при игре в «Элевсин» включает в себя основную линию, несколько побочных линий и различные метки. Белые шахматные пешки ставятся на каждую десятую карту, выложенную в течение раунда, а черные на каждую десятую карту, выложенную после метки Пророка.

Например, правило, положенное в основу первой раскладки, просто. Сравните его со следующим: «Выкладывать по одной карте за один ход, чередуя циклически красную карту с черной, черную – с картой, имеющей нечетное значение, а ту – с картой, имеющей четное значение». Хотя новое правило кажется более простым, на практике переход от красно-черной пары к нечетно-четной маскирует закономерность и затрудняет открытие правила. Эбботт замечает также, что более жесткие правила, допускающие в качестве пригодных («правильных») лишь четверть или около того карт, отгадать легче, чем менее ограничительные правила, согласно которым приемлемыми считаются половина карт и более.

Я не буду останавливаться сейчас на том, какие именно стороны поиска истины (естественнонаучной, математической или метафизической) моделирует «Элевсин», поскольку подробно обсуждал эти вопросы в моей первой публикации, посвященной этой игре. Хочу лишь добавить, что, по моему мнению, Бог или Природа вполне могут вести сеанс одновременной игры в «Элевсин» с разумными существами на мириадах планет во Вселенной, неизменно максимизируя удовольствие от игры выбором правил, отгадать которые разуму, стоящему на более низкой ступени развития, будет не слишком легко и не слишком трудно (если на игру будет отведено достаточно времени). Колода карт в этих играх неисчерпаема, и стоит одному игроку выбыть из игры, как на его место всегда заступает кто-нибудь другой.

Пророки и Лжепророки приходят и уходят, но кто знает, когда завершается один раунд и начинается другой? Поиски любой истины – игра увлекательная. Следует помнить, однако, что никакой игры не было бы, если бы правила были известны заранее.

Ответы и решения

Задача состояла в том, чтобы определить тайное правило, положенное в основу финальной раскладки одного раунда игры в «Элевсин» (рис. 106). Это правило гласит: «Если значение последней карты меньше значения предыдущей правильной карты, то выложить карту, значение которой больше, чем у последней карты; в противном случае выложить карту, значение которой меньше, чем у последней карты. Первая карта считается правильной, если она не совпадает с картой-стартером».

Дополнение

После появления «Элевсина» и «Дельфи» были изобретены еще две необычные великолепные индуктивные игры, имеющие много общего с научным методом. Игра Сида Саксона «Узоры» (для которой требуется специальная доска) приведена в гл. 4 моей книги «Математический цирк» [16, 3*]. Игру «Пенсари», для которой требуются 32 специальные карты, придумал Роберт Катц. Прилагаемое к комплекту карт руководство к игре «Пенсари» [16, 4*] насчитывает 42 страницы. Реклама игры «Пенсари» была опубликована в нескольких выпусках журнала «Science News» за 1987 г.

Несколько лет назад, читая «Жизнь и письма Томаса Г. Хаксли», изданные его сыном Леонардом ([16, 5*], с. 262), я наткнулся на следующий поразительный отрывок. Он заимствован из письма Хаксли к Чарлзу Кингсли и датирован 1963 г.

«Наша Вселенная, насколько я могу судить, подобна большой игре, которая уже идет и в которой нам, несчастным смертным, разрешается принять участие. К великому счастью, наиболее мудрым из нас удалось открыть несколько правил этой игры в том виде, в каком она существует ныне. Мы называем их «Законами Природы» и почитаем, поскольку обнаружили, что если подчиняться им, то это несколько утоляет наши печали. Картами в этой игре служат наши теории и гипотезы, а в роли трюков выступают наши экспериментальные проверки. Но кому, если только он в своем уме, придет в голову размышлять над решением такой проблемы: даны правила игры и выигрыши, определить, сделаны ли карты из картона или из листового золота? Проблема, над которой бьются метафизики, с моей точки зрения, является ничуть не более здравой».

Глава 17
Теория Рамсея

Доказать, что всякий раз, когда собирается компания из шести человек, среди них найдутся трое, которые либо знакомы друг с другом, либо видят друг друга впервые.

Задача Е 1321 из журнала *The American Mathematical Monthly*, июнь – июль 1958 г.

Эта глава была первоначально написана в 1977 г. в честь выхода в свет первого номера «Журнала по теории графов» ("The Journal of Graph Theory")–периодического издания, посвященного одной из наиболее быстро развивающихся областей математики. Основатель и главный редактор журнала Фрэнк Харари – автор широко известных во всем мире вводных курсов по теории графов. Заведует редакцией Фан Чен из компании «Bell Communications Research».

Теория графов занимается изучением множеств точек (вершин), соединенных линиями (ребрами). Две статьи в первом номере нового журнала были посвящены теории Рамсея – разделу теории графов, существенно пересекающемуся с занимательной математикой. Хотя несколько статей по теории Рамсея, принадлежащих перу венгерского математика Пала Эрдёша и некоторых других авторов, были написаны еще в 30-е годы, серьезная работа над тем, что сейчас принято называть числами Рамсея, началась лишь в конце 50-х годов. Одним из значительных стимулов в этих исследованиях стала приведенная в эпиграфе к этой главе задача, на первый взгляд выглядящая вполне невинно. В начале 50-х годов она входила как задача по теории графов в математический фольклор, и по предложению Харари была в 1953 г. включена в число задач, предложенных на математической олимпиаде памяти Уильяма Лоуэлла Патнэма.

Приведенную в эпиграфе задачу нетрудно преобразовать в задачу по теории графов. Пусть шесть вершин соответствуют шести человекам. Соединим красным ребром любые две вершины, если соответствующие им люди знакомы между собой, и синим ребром, если соответствующие вершинам люди не знают друг друга. Задача состоит в том, чтобы доказать следующее: независимо от того, как раскрашены ребра, соединяющие попарно шесть вершин графа, всегда найдутся три ребра, образующие либо красный треугольник (соединяющий знакомых между собой людей), либо синий треугольник (соединяющий не знакомых между собой людей).

Теория Рамсея, занимающаяся изучением такого рода задач, получила свое название в честь необычайно одаренного математика из Кембриджского университета Фрэнка Пламптона Рамсея. Рамсею было всего лишь 26 лет, когда он скончался в 1930 г. через несколько дней после полостной операции по поводу желтухи. Его отец А. С. Рамсей был президентом Кембриджского колледжа Магдалины, а младший брат Майкл был с 1961 по 1974 г. епископом Кентерберийским. Среди экономистов Рамсей известен своими выдающимися работами по экономической теории. Логики знают Рамсея по предложенному им упрощенному варианту весьма запутанной теории типов Бертрана Расселла (некоторые логики в шутку поговаривают о рамсификации расселловской теории), а также по предложенной им классификации логических парадоксов на логические и семантические. Философам науки Рамсей известен по предложенной им субъективной интерпретации вероятности в терминах веры и по «предложению Рамсея» – теоретической конструкции, позволившей существенно прояснить природу «теоретического языка» науки.

В 1928 г. Рамсей выступил в Лондонском математическом обществе с докладом «Об одной проблеме формальной логики». (Текст доклада воспроизведен в «Основаниях математики» – посмертном собрании трудов Рамсея, изданном его другом Р. Б. Брейтуэйтом.) В этом докладе Рамсей доказал глубокий результат о множествах, известный ныне под названием теоремы Рамсея. Свою теорему Рамсей доказал первоначально для бесконечных множеств, заметив, что этом случае доказательство проводится легче, чем в случае конечных множеств. Подобно многим теоремам о множествах, теорема Рамсея нашла множество самых неожиданных приложений к комбинаторным проблемам. В своем полном объеме теорема Рамсея слишком сложна для того, чтобы ее можно было объяснить здесь, но для наших целей достаточно выяснить, как теорема Рамсея применяется к теории раскраски графов.

Если все пары из n вершин соединить попарно ребрами, то получившийся граф называется полным графом с n вершинами и обозначается K_n. Так как нас интересуют только топологические свойства, расположение вершин или проведенных линий (ребер) не имеет значения. На рис. 107 показаны традиционные изображения полных графов с числом вершин от двух до шести. Каждому подмножеству n вершин, содержащему ровно 2 вершины, соответствует ровно одно ребро.

Предположим, что мы произвольно раскрасим ребра полного графа K_n в красный и синий цвета. Мы можем раскрасить в синий или красный цвет все ребра или раскрасить какую-то часть ребер в один цвет, а остальные ребра – в другой цвет. Такая процедура называется двухцветной раскраской графа. Разумеется, такая раскраска представляет собой не что иное, как простой способ разбиения всех подмножеств, содержащих по две вершины из n, на два взаимно исключающих класса. Аналогичным образом, раскраска ребер графа в три цвета позволяет разделить их на три класса. В общем случае раскраска ребер графа в r цветов позволяет разделить пары вершин на r взаимно исключающих классов.

Подграфом полного графа называется любой граф, содержащийся в полном графе в том смысле, что все вершины и ребра подграфа принадлежат полному графу. Нетрудно видеть, что любой полный граф является подграфом любого полного графа с бóльшим числом вершин. Многие простые графы имеют свои собственные названия. На рис. 108 представлены четыре семейства графов: маршруты, циклы, звезды и колеса. Обратите внимание на то, что колесо с четырьмя вершинами представляет собой не что

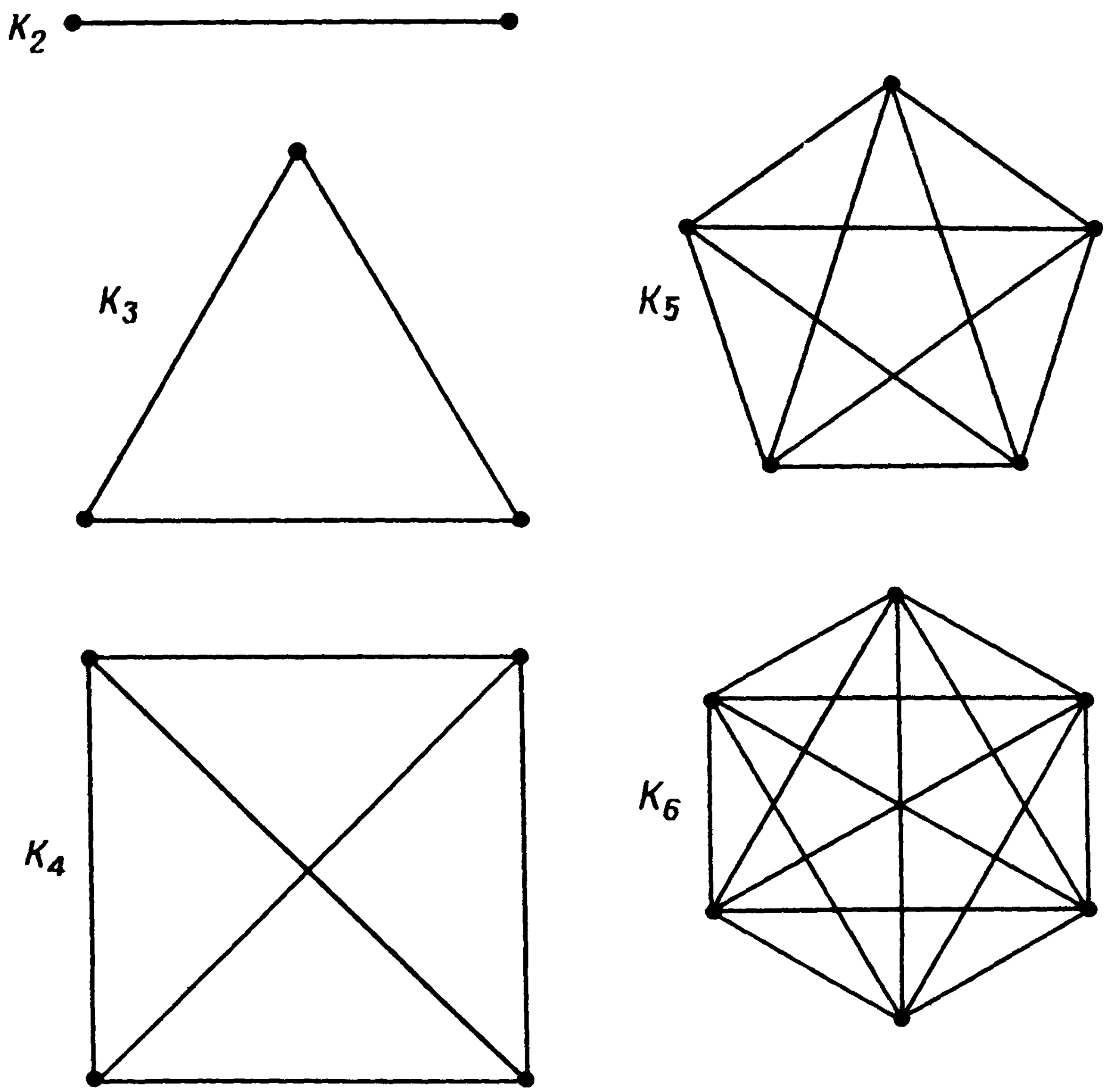


Рис. 107

Полные графы при числе вершин от 2 до 6.

иное, как другой способ представления полного графа K_4. Его часто называют тетраэдром, поскольку такое колесо можно рассматривать как проекцию на плоскость остова тетраэдра.

Рассмотрим теперь следующую задачу, для которой нам понадобятся карандаши шести различных цветов. Сопоставим каждому цвету любой граф по своему усмотрению. Например:

1) красный: пятиугольник (цикл с пятью вершинами);
2) оранжевый: тетраэдр;
3) желтый: семиконечная звезда;
4) зеленый: 13-вершинный маршрут;
5) синий: колесо с 8 вершинами;
6) розовый: галстук-бабочка (два треугольника с одной общей вершиной).

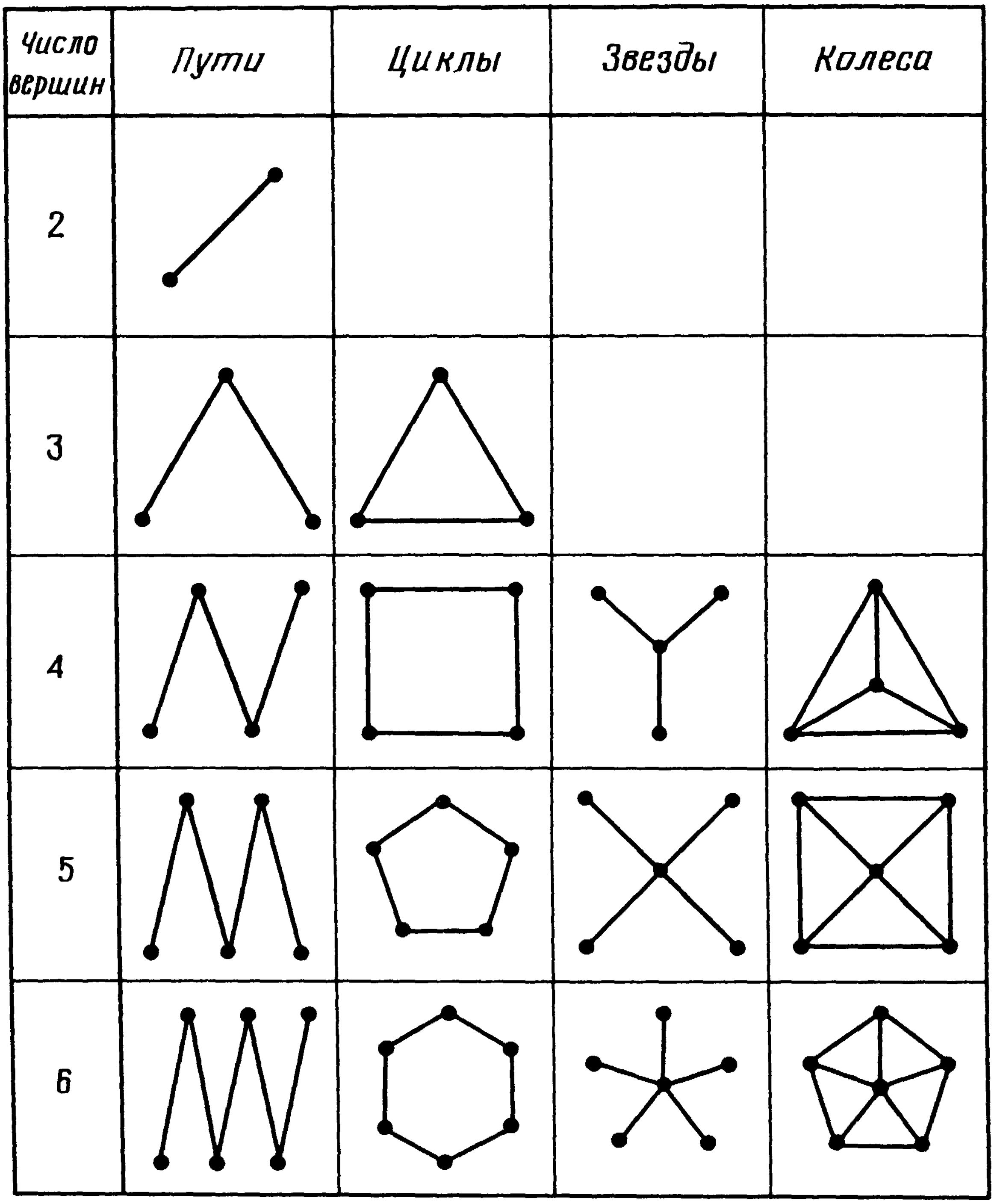


Рис. 108

Четыре важных семейства простых графов.

А теперь зададим один интересный вопрос: существуют ли такие полные графы, которые при произвольной раскраске их ребер в шесть цветов заведомо содержат в качестве подграфов один из шести перечисленных графов? Иначе говоря, независимо от того, как мы раскрасим ребра таких полных графов шестью цветными карандашами, у нас заведомо получится либо красный пятиугольник, либо оранжевый тетраэдр, либо желтая семиконечная звезда и т. д. Теорема Рамсея позволяет утверждать, что при числе вершин, большем некоторой пороговой величины, все полные графы обладают указанным свойством. Назовем наименьший граф этого бесконечного множества графом Рамсея для указанного выше множества подграфов. Число вершин графа Рамсея называется числом Рамсея этого множества подграфов.

Каждый граф Рамсея таит в себе и игру, и задачу. В нашем примере игра состоит в следующем. Два игрока поочередно берут любой из шести карандашей и раскрашивают одно из ребер графа Рамсея. Первый, кто закончит раскрашивать один из перечисленных выше подграфов, считается проигравшим. Так как игроки раскрашивают граф Рамсея, игра не может закончиться вничью. Кроме того, это наименьший полный граф, на котором ничья невозможна.

Задача, о которой мы упомянули, связана с полным графом, число вершин которого на единицу меньше числа вершин графа Рамсея. Ясно, что такой граф – наибольший, на котором описанная выше игра может закончиться вничью. Такой граф называется критической раскраской для перечисленного выше множества подграфов. Требуется так раскрасить критический граф, чтобы не возник ни один из перечисленных выше подграфов.

Я не имею ни малейшего понятия о том, чему равно число Рамсея для этих шести подграфов. Соответствующий полный граф был бы настолько большим (с сотнями вершин), что от мысли об игре на нем заведомо пришлось бы отказаться, а задача оказалась бы «не по зубам» даже современным компьютерам. Тем не менее игры Рамсея и задачи Рамсея для полных графов с меньшим числом вершин и набором карандашей всего лишь двух цветов могут быть занимательными.

Наиболее известная игра Рамсея называется «сим» в честь математика Густава Симмонса, который первым предложил ее. (Возможно, читатель знаком с этой игрой по гл. 9 моей книги [17, 1*] [1].) В «сим» играют на полном графе с 6 вершинами (K_6), который моделирует встречу 6 человек. Нетрудно доказать, что шестерка является числом Рамсея для следующих двух подграфов:

1) красный: треугольник (K_3);

---

[1] См. также гл. 33 книги Гарднера [17, 2*]. – *Прим. перев.*

2) синий: треугольник (K_3).

В «классической» теории Рамсея для обозначения полных графов обычно используется одно-единственное число. Например, приведенный выше результат в этих компактных обозначениях выглядит так: $R(3, 3) = 6$. Здесь R означает число Рамсея, первая тройка указывает число треугольников одного цвета (например, красных), вторая – число треугольников другого цвета (например, синих). Иначе говоря, наименьший полный граф, непременно порождающий «монохроматический» (одноцветный – только красный или только синий) треугольник, при раскраске ребер в два цвета содержит 6 вершин. Таким образом, если два игрока поочередно раскрашивают ребра полного графа K_6 в красный и синий цвет, то один из них заведомо проигрывает, первым заканчивая треугольник своего цвета. Соответствующая и легко разрешимая задача – раскраска в два цвета ребер критического графа K_5, при которой ни один монохроматический треугольник не возникает.

Оказывается, что при раскраске ребер полного графа K_6 в два цвета непременно возникает по крайней мере два монохроматических треугольника. (Если возникает ровно два монохроматических треугольника, один из которых красный, а другой синий, то они образуют галстук-бабочку.) В этой связи возникает интересный вопрос: сколько монохроматических треугольников непременно возникает при двухцветной раскраске ребер полного графа с n вершинами? Первым на этот вопрос в 1959 г. ответил А. В. Гудмен в своей статье «О множествах знакомых и незнакомых в любой компании» [17, 1]. Формулу Гудмена удобнее всего разбить на три части. Если число представимо в виде $2u$, то число непременно возникающих монохроматических треугольников равно $(1/3)\,u(u-1)(u-2)$. Если число n представимо в виде $4u+1$, то число непременно возникающих монохроматических треугольников равно $(1/3)\,2u(u-1)(4u+1)$. Если же число n представимо в виде $4u+3$, то число непременно возникающих монохроматических треугольников равно $(1/3)\,2u(u+1)(4u-1)$. Таким образом, для полных графов с числом вершин от 6 до 12 число непременно возникающих одноцветных треугольников соответственно равно 2, 4, 8, 12, 20, 28 и 40.

При случайной раскраске число монохроматических треугольников обычно получается больше, чем число непременно возникающих монохроматических треугольников. Если раскраска графа Рамсея порождает в точности число непременно возникающих монохроматических треугольников, то она называется экстремальной. Всегда ли существует экстремальная раскраска, при которой все непременно возникающие монохроматические треугольники оказываются одного и того же цвета? (Такие раскраски получили название сине-пустых, означающее, что множество синих треугольников пусто, т.е. число их равно нулю.) В 1961 г. Леопольд Сове показал, что при всех нечетных n за исключением $n = 7$ ответ на этот вопрос должен быть отрицательным. Результат Сове наводит на мысль о новом классе задач. Пусть, например, мы построили полный граф с семью вершинами. Можно ли раскрасить его ребра в два цвета так, чтобы не получилось ни одного синего треугольника и не более четырех красных треугольников? Решить эту задачу нелегко.

Очень мало известно о «классических» числах Рамсея. Под этими числами принято понимать число вершин в наименьшем полном графе, который непременно содержит данное множество полных графов с меньшим числом вершин. Не существует известного эффективного алгоритма для нахождения классических чисел Рамсея. Известен лишь следующий рецепт: необходимо перебрать все возможные раскраски полных графов, постепенно увеличивая число вершин до тех пор, пока не будет получено число Рамсея. Трудность решения этой задачи возрастает экспоненциально, и задача быстро становится вычислительно неразрешимой. Еще меньше известно о том, кто выигрывает,– первый или второй игрок, если в игре Рамсея придерживаться рациональной стратегии. Игру «сим» удалось проанализировать (выигрывает второй игрок), но об играх Рамсея на полных графах с бóльшим число вершин почти ничего не известно.

До сих пор мы рассматривали игру Рамсея только одного типа, который Харари называет «игрой на избегание». По утверждению Харари, возможны также игры Рамсея трех других типов. Например, в «игре на достижение» (аналогичной игре «сим») выигрывает тот из двух участников, кто первым построит свой монохроматический треугольник. В играх двух других типов игра продолжается до тех пор, пока все ребра графа не окажутся закрашенными, а выигравшим объявляется тот из игроков, у кого число монохроматических треугольников окажется больше или меньше. Игры двух последних типов наиболее трудны для анализа. Легче всего поддается анализу игра на достижение. В дальнейшем мы будем понимать под игрой Рамсея игру на избегание.

Помимо числа $R(3,\ 3) = 6$, лежащего в основе игры «сим», для двухцветной раскраски известны только следующие пять других нетривиальных классических чисел Рамсея.

1. $R(3,\ 4) = 9$. Если ребра полного графа K_9 раскрашены в два цвета, то непременно возникает красный треугольник (K_3) или синий тетраэдр (K_4). Никто не знает, за кем останется выигрыш, если раскрашивание рассматривать как игру Рамсея.
2. $R(3,\ 5) = 14$.
3. $R(4,\ 4) = 18$. Если ребра полного графа раскрашивать в два цвета, то непременно возникает монохроматический тетраэдр (K_4). Такое раскрашивание – неплохая игра Рамсея, хотя трудность идентификации тетраэдра делает ее непростой. И граф, и его раскраска соответствуют тому, что в любой компании из 18 человек всегда найдутся либо 4 знакомых, либо 4 не знакомых между собой людей.
4. $R(3,\ 6) = 18$. В той же компании найдутся либо трое знакомых, либо шестеро не знакомых между собой людей. На языке раскрашенных (цветных) графов это означает, что любой полный граф с 18 вершинами и ребрами, раскрашенными в два цвета, непременно содержит либо красный треугольник, либо синий полный граф с 6 вершинами.
5. $R(3,\ 7) = 23$.
6. $R(3,\ 9) = 36$.

Фан Чен и Ч. Дж. Гринстед в своей статье, опубликованной в посвященном Рамсею выпуске «Журнала по теории графов» («The Journal of Graph Theory») [17, 9], поместили сводку следующих известных верхних и нижних границ для чисел Рамсея:

$$28 \leqslant R(3,\ 8) \leqslant\ 29,$$
$$39 \leqslant R(3,\ 10) \leqslant 44,$$
$$25 \leqslant R(4,\ 5) \leqslant\ 28,$$

$$34 \leqslant R(4,\ 6) \leqslant\ 44,$$
$$42 \leqslant R(5,\ 5) \leqslant\ 55,$$
$$57 \leqslant R(5,\ 6) \leqslant\ 94,$$
$$102 \leqslant R(6,\ 6) \leqslant 169,$$
$$126 \leqslant R(7,\ 7) \leqslant 158.$$

Каково наименьшее число людей, среди которых непременно найдется пять знакомых или пять не знакомых между собой? Этот вопрос эквивалентен задаче о наименьшем полном графе, ребра которого не могут быть раскрашены в два цвета так, чтобы при этом не образовался монохроматический полный граф с пятью вершинами, т.е. вопросу о том, чему равно число Рамсея $R(5,\ 5)$? Сложность задачи при переходе от $R(4,\ 4)$ к $R(5,\ 5)$ возрастает скачком настолько, что Стефан Берр, ведущий специалист по теории Рамсея, преподающий ныне компьютерные науки в колледже при Университете города Нью-Йорка, полагает, что это число может навсегда остаться неизвестным. По мнению Берра, даже число Рамсея $R(4,\ 5)$ анализировать настолько трудно, что его значение может навсегда остаться неизвестным.

Известно лишь еще одно классическое число Рамсея – для случая трехцветной раскраски. Значение $R(3) = 3$ находится тривиально, поскольку если вы окрашиваете стороны треугольника в один цвет, то, разумеется, у вас получается монохроматический треугольник. Мы уже знаем, что $R(3,\ 3) = 6$. Число $R(3,\ 3,\ 3)$ равно 17. Это означает, что если ребра полного графа K_{17} раскрашивать в три цвета, то непременно возникает по крайней мере монохроматический треугольник. В действительности непременно возникает несколько монохроматических треугольников, но точное число их неизвестно.

То, что $R(3,\ 3,\ 3) = 17$, было впервые доказано в 1955 г. В игре Рамсея ребра этого графа раскрашиваются в три различных цвета. Игроки поочередно раскрашивают по одному ребру, выбирая при каждом очередном ходе любой цвет. Тот, кто первым завершит построение монохроматического треугольника, считается проигравшим. Кто выиграет, если оба игрока придерживаются оптимальных стратегий? Ответ на этот вопрос никому не известен. Соответствующая задача Рамсея состоит в том, чтобы раскрасить в три цвета ребра критического графа K_{16}, избегая при этом появления монохроматического треугольника. На фото 4, заимствованном из книги французского специалиста по теории графов Клода Бержа, показано одно из двух существенно различных решений. (Под «различными» мы понимаем здесь решения, отличающиеся не только поворотами или отражениями, но и в более глубоком комбинаторном смысле.)

А что можно сказать о $R(3, 3, 3)$ – минимальном полном графе, в котором при раскраске в четыре цвета непременно возникает монохроматический треугольник? Ответ на этот вопрос не известен, хотя верхняя граница (равная 64) для $R(3, 3, 3)$ была указана Джоном Фолкманом, блестящим математиком, работавшим в области комбинаторного анализа (в 1964 г. в возрасте 31 года Фолкман покончил жизнь самоубийством после операции по поводу обширной опухоли мозга). Лучшая нижняя граница (равная 51) для $R(3, 3, 3)$ была установлена Фан Чен, математиком из «Bell Communications Research», в ее докторской диссертации.

Классическая теория Рамсея допускает множество поистине удивительных обобщений. Наиболее очевидное обобщение мы уже усмотрели: поиск так называемых чисел Рамсея для раскраски в r цветов полных графов, порождающих появление графов, отличных от полных графов. Первопроходцами на этом пути были Вацлав Хватал и Харари, а глубоким изучением на протяжении последних 15 лет занимался Берр. Рассмотрим проблему нахождения чисел Рамсея для минимальных полных графов, которые непременно приводят к появлению монохроматической n-конечной звезды. Харари и Хватал были первыми, кому удалось решить эту проблему для случая раскраски в два цвета, а в 1973 г. Берр и Дж. А. Робертс нашли решение при любом числе цветов.

Другое обобщение задачи Рамсея состоит в нахождении чисел Рамсея для раскраски полных графов K_n, которая непременно приводит к появлению заранее заданного числа монохроматических «несвязных» треугольников. (Треугольники называются несвязными, если они не имеют общих вершин.) В 1975 г. Берр, Эрдёш и Дж. Г. Спенсер показали, что число Рамсея должно быть представимо в виде $5d$, где d – число несвязных треугольников, которое больше двух.

В случае когда цветов больше чем два, задача пока остается нерешенной.

В общем случае для колес решение не известно даже для двухцветной раскраски. Число Рамсея для колеса с четырьмя вершинами (тетраэдра), как мы уже знаем, равно 18. Колесо с пятью вершинами (колесо со ступицами и четырьмя спицами), как показал нигерийский математик Тим Мун, имеет число Рамсея, равное 15. Задача об определении числа Рамсея для колеса с шестью вершинами пока не решена, хотя известно, что оно заключено в интервале от 17 до 23 включительно. По слухам, не подкрепляемым какими-либо публикациями, это число Рамсея равно 17.

На рис. 109 представлена ценная таблица, составленная Берром и опубликованная впервые мной в 1977 г. в разделе «Математические игры» журнала «Scientific American». В ней представлены 113 графов с числом ребер не более 6 и без изолированных вершин, для которых известны обобщенные числа Рамсея. Обратите внимание на то, что некоторые из этих графов несвязны. В случае несвязного графа все его компоненты (либо сплошь красные, либо сплошь синие) непременно порождаются полным графом с указанным в таблице числом Рамсея.

Каждый граф в таблице Берра может служить основой и для игры, и для задачи Рамсея, хотя найти критическую раскраску для критического графа (т.е. решить задачу Рамсея) оказалось гораздо легче, чем найти критическую раскраску для классического числа Рамсея. Обращаем внимание читателя на то, что в таблице Берра содержатся шесть вариантов игры «сим». Двухцветная раскраска полного графа K_6 непременно порождает не только монохроматический треугольник, но и квадрат, четырехконечную звезду (иногда называемую «когтистой лапой»), маршрут с пятью вершинами, пару несвязных маршрутов с двумя и тремя вершинами (оба маршрута – одного и того же цвета), квадрат с хвостом и простое дерево (числящееся под номером 15 в таблице Берра). Треугольник с хвостом (№ 8), пятиконечная звезда (№ 12), распятие (№ 27) и рыба (№ 51) могут рассматриваться как достойные «кандидаты» для игр Рамсея на полном графе K_7.

Один из наиболее выдающихся американских специалистов по комбинаторному анализу Рональд Л. Грэхэм, ра-

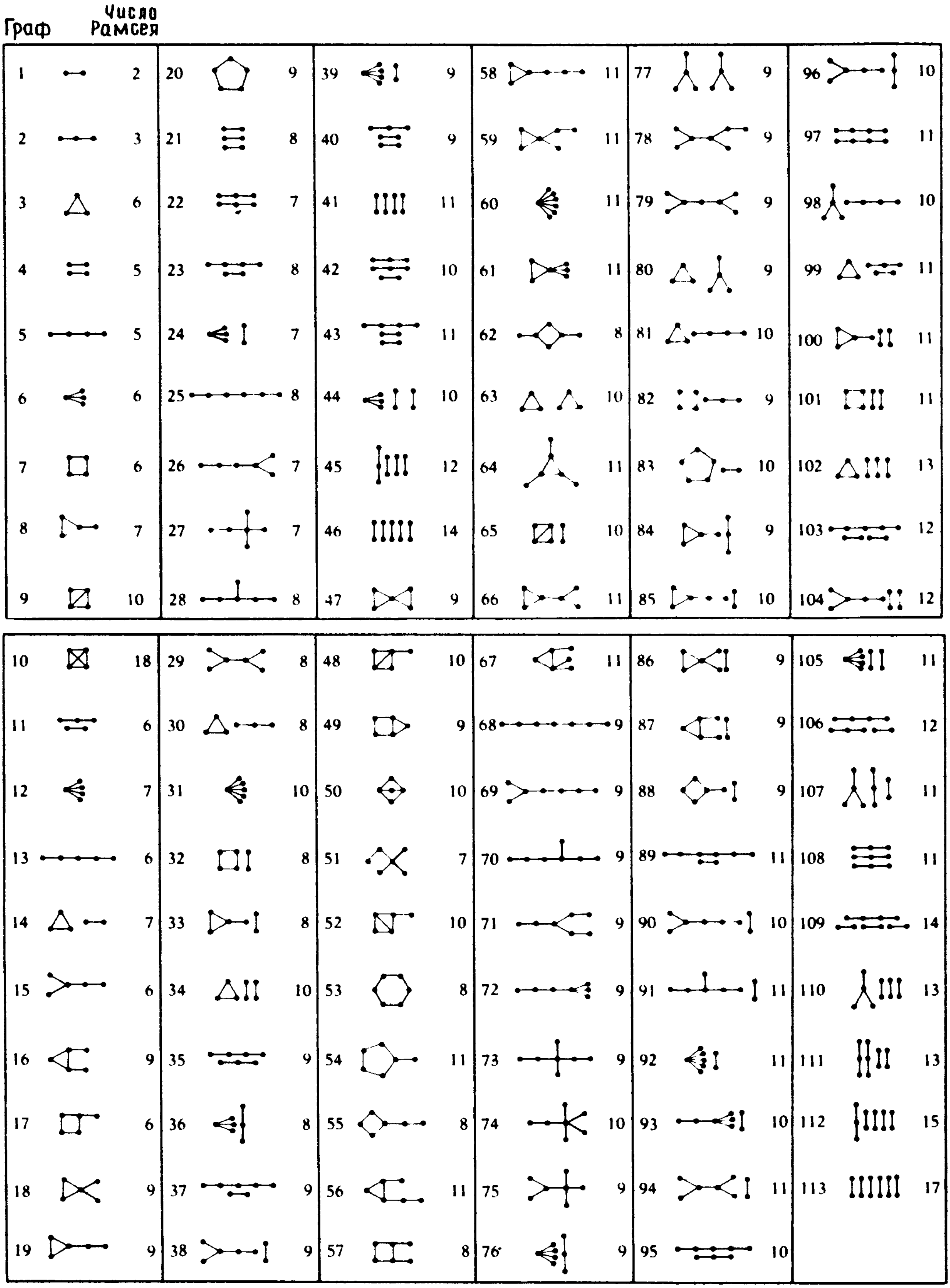


Рис. 109

Простые графы, для которых известно обобщенное число Рамсея.

ботающий ныне в компании «Bell Laboratories», внес весомый вклад в обобщенную теорию Рамсея. Трудно найти другого математика, который был бы менее похож на несколько карикатурного персонажа из кинофильмов – чудаковатого рассеянного профессора математики. В юности Грэхэм вместе с двумя друзьями выступал в цирке под псевдонимом «Прыгуны Бауэрс» в качестве профессионального прыгуна на подкидных досках. Грэхэм один из лучших жонглеров США. В недавнем прошлом он был президентом Международной ассоциации жонглерского искусства. Потолок в рабочем кабинете Грэхэма затянут сеткой, которую он может опускать и закреплять на поясе. Это позволяет ему подбирать непойманные мячи, которые скатываются по сетке во время тренировок, когда Грэхэм жонглирует 6–7 мячами.

В 1968 г. Грэхэму удалось найти весьма нетривиальное решение одной задачи типа задачи Рамсея, предложенной Палом Эрдёшем и Андрашем Хайналом. Каков наименьший граф любого типа, не содержащий граф K_6, который при двухцветной раскраске непременно порождает монохроматический треугольник? Найденное Грэхэмом единственное решение представлено на рис. 110. Это – граф с восемью вершинами. Доказательство проводится от противного.

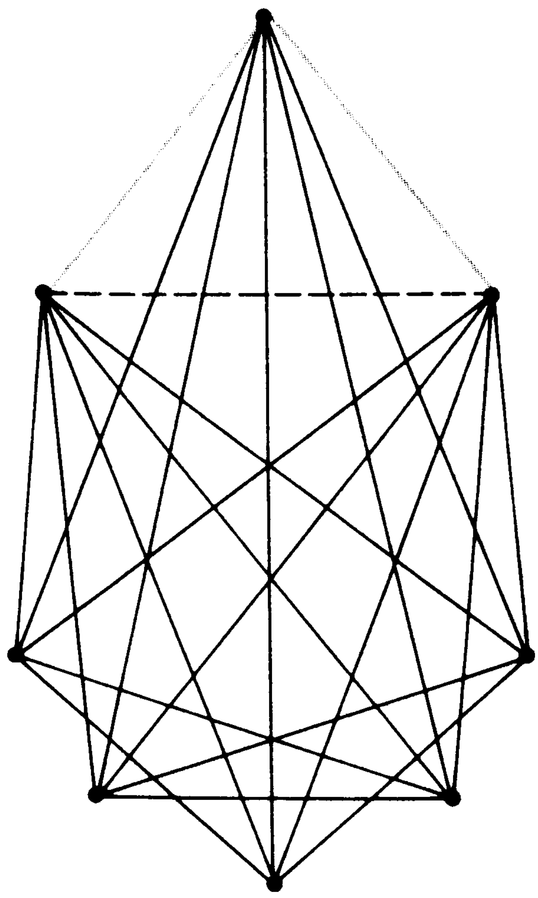


Рис. 110

Решение проблемы Эрдёша, найденное Грэхэмом.

Начинается оно с предположения о том, что возможна двухцветная раскраска, при которой не возникают монохроматические треугольники, после чего делается вывод о том, что возникновение монохроматического треугольника вопреки предположению неизбежно. По крайней мере два ребра, исходящих из верхней вершины графа, должны быть (например) серого цвета, а симметрия графа позволяет, не умаляя общности, считать серыми два наружных ребра. Противоположные верхней вершине концы этих ребер должны быть соединены цветным ребром (на рис. 110 оно показано штриховой линией), иначе получится серый треугольник. Предоставляем читателю довести доказательство до конца.

А как обстоит дело с аналогичными задачами, когда исключенным подграфом является какой-то полный граф, отличный от K_6? В случае K_3 вопрос не имеет смысла, поскольку граф K_3 – сам треугольник. В случае K_5 задача не решена. Наиболее известным решением по праву считается граф с 16 вершинами, открытый двумя болгарскими математиками. Еще дальше от решения задача с K_4. В опубликованной уже после безвременной кончины Фолкмана статье доказывается, что такой граф Рамсея существует, но предложенная Фолкманом конструкция использует более чем $2 \uparrow \uparrow \uparrow 2^{901}$ вершин. Число это столь чудовищно велико, что записать его можно, только используя специальные обозначения со стрелками. Эти обозначения были введены Доналдом Э. Кнутом в работе [17, 3*]. С тех пор число вершин удалось существенно понизить, и ныне оно представимо в более «приличном» виде.

Представьте себе, что вся Вселенная плотно упакована шариками размером с электрон. Общее число таких шариков невообразимо меньше, чем число вершин в графе Фолкмана. Эрдёш установил премию в 100 долларов (не востребованную и поныне) тому, кто сумеет построить граф Фолкмана с числом вершин меньше миллиона.

Граф Фолкмана наглядно показывает, какой чудовищно трудной может быть задача Рамсея даже в том случае, когда в постановке задачи фигурирует граф с числом вершин, не превышающим 4. Но, как любил говаривать Ал Джолсон, «вы еще не слышали самого главного»: Грэхэм обнаружил еще более головокружительный пример.

Рассмотрим куб, в котором отрезки прямых соединяют любые две вершины. Такой куб представляет собой полный граф с восемью вершинами, наделенный к тому же евклидовой геометрической структурой. Представим себе, что ребра этого пространственного полного графа K_8 произвольно раскрашены в красный и синий цвет. Можно ли раскрасить его так, чтобы при этом не возник монохроматический K_8, *лежащий в одной плоскости*? Ответ на этот вопрос утвердительный, и осуществить такую раскраску нетрудно.

Обобщим задачу на случай n-мерных кубов. Гиперкуб имеет 2^n вершин. На четырехмерном гиперкубе можно раскрасить в два цвета ребра полного графа с $2^4 = 16$ вершинами так, чтобы при этом не возник монохроматический полный плоский граф с четырьмя вершинами. То же можно сделать и в случае гиперкуба с $2^5 = 32$ вершинами. Это наводит на мысль о следующей евклидовой задаче Рамсея: какова наименьшая размерность гиперкуба, при которой двухцветная раскраска всех ребер, соединяющих попарно вершины гиперкуба, непременно приводит к появлению плоского монохроматического K_4? Теорема Рамсея дает ответ на этот вопрос только в том случае, если непременно возникающий граф K_4 не обязательно должен быть плоским.

Существование ответа в случае, когда непременно возникающий монохроматический граф K_4 должен быть плоским, было впервые доказано Грэхэмом и Брюсом Л. Ротшильдом с помощью далеко идущего обобщения теоремы Рамсея, которое они получили в 1970 г. Однако определение точного числа вершин соответствующего графа – нечто другое. В неопубликованном доказательстве Грэхэма устанавливается верхняя грань числа вершин, однако эта грань столь велика, что является своего рода рекордом – самым большим числом, когда-либо фигурировавшим в серьезном математическом доказательстве.

Чтобы вы могли составить хотя бы смутное представление о величине числа Грэхэма, попытаемся сначала объяснить обозначения Кнута со стрелками. Запись $3 \uparrow 3$ означает число $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$. Запись $3 \uparrow \uparrow 3$ означает $3 \uparrow (3 \uparrow 3)$. Так как $3 \uparrow 3 = 27$, мы можем записать $3 \uparrow \uparrow 3$ в виде $3 \uparrow 27$, т. е. 3^{27}. То же число можно записать и в виде «падающей» башни показателей:

$$3^{3^3}$$

Башня насчитывает в высоту всего лишь три «этажа», но в обычной десятичной записи она равна числу 7625597484987. По сравнению с числом 27 это большой скачок, но полученное число все же настолько мало, что мы можем напечатать его.

Если же в виде башни из троек записать огромное число $3 \uparrow \uparrow \uparrow 3 = 3 \uparrow \uparrow (3 \uparrow \uparrow 3) = 3 \uparrow \uparrow 3^{27}$, то оно достигнет в высоту 7625597484987 этажей. В этом случае башня оказывается слишком высокой, а соответствующее ей число – слишком большим для того, чтобы их можно было напечатать, не прибегая к специальным обозначениям.

Рассмотрим далее число $3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3 = 3 \uparrow \uparrow \uparrow (3 \uparrow \uparrow \uparrow 3)$. В скобках стоит гигантское число, полученное в результате наших предыдущих вычислений. Выразить сколько-нибудь просто число этажей башни из троек, записанной в виде $3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3$, не представляется возможным. Высота новой башни космически велика по сравнению с высотой предыдушей башни, соответствующей записи $3 \uparrow \uparrow \uparrow 3$. Если разложить число $3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3$ в цепочку операций с двумя стрелками, то оно примет вид $3 \uparrow \uparrow (3 \uparrow \uparrow (3 \uparrow \uparrow \ldots \uparrow \uparrow (3 \uparrow \uparrow 3) \ldots))$, где число повторяющихся шагов равно $3 \uparrow \uparrow \uparrow 3$. Как говорит Кнут, многоточия «таят в себе уйму деталей». Число $3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3$ невообразимо больше числа $3 \uparrow \uparrow \uparrow 3$, но все же мало, поскольку по мере продвижения «в глубь» конечных чисел оно оказывается много меньше большинства конечных чисел.

Теперь мы уже в состоянии указать число Грэхэма. Оно представлено на рис. 111. Наверху стоит число $3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3$. Оно указывает количество стрелок в числе, стоящем «этажом ниже». В свою очередь число, стоящее на втором месте сверху, указывает количество стрелок в числе, расположенном непосредственно под ним. Это число указывает количество стрелок в числе, находящемся «этажом ниже», и т. д. Так продолжается во всех $2^6 = 64$ слоях, или этажах. Грэхэм доказал, что число, стоящее в самом низу, служит верхней гранью числа вершин для задачи о гиперкубе.

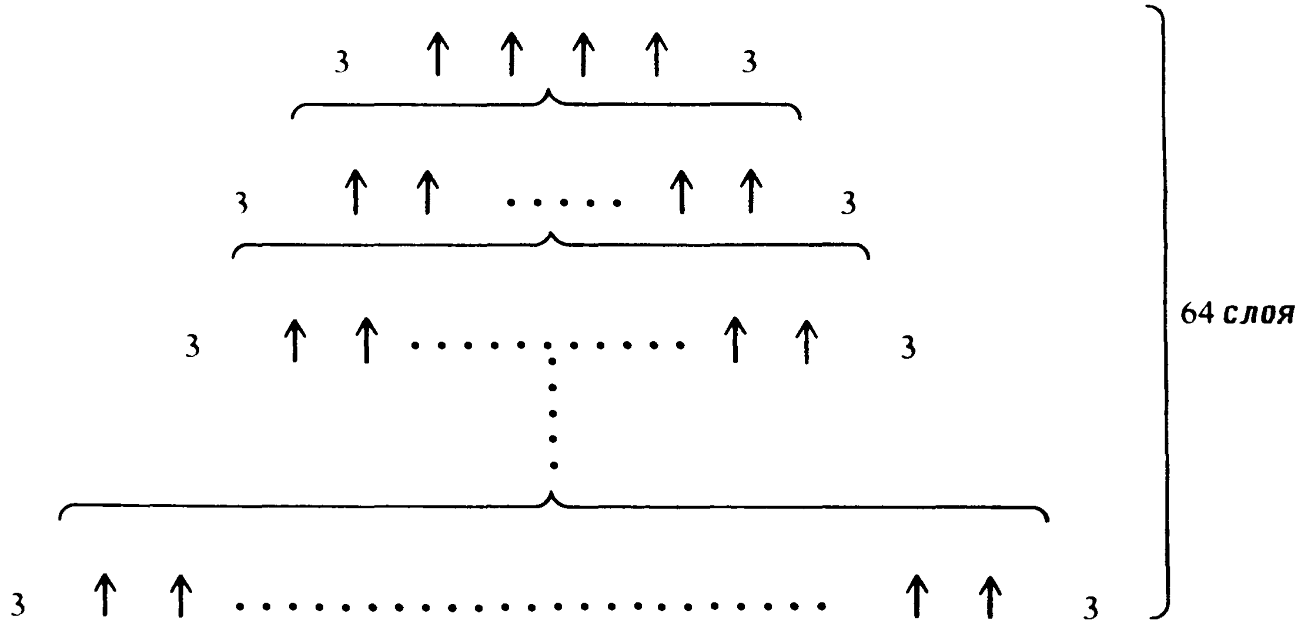


Рис. 111

Найденная Грэхэмом верхняя грань решения евклидовой задачи Рамсея.

А теперь я сообщу вам нечто поистине удивительное: по мнению специалистов по теории Рамсея, истинное число Рамсея для этой задачи, по-видимому, равно 6. Как неоднократно говаривал в своих многочисленных лекциях Станислав М. Улам, «с бесконечностью мы разобрались. Разобраться с конечным будет не так-то просто».

Ответы и решения

На рис. 112 (обратите внимание на цветовую симметрию) показано, как раскрасить в два цвета полный граф с семью вершинами так, чтобы граф был сине-пустым (серые линии) и содержал четыре (минимальное число) красных треугольника (черные линии). Если эта задача увлекла вас, то можете попробовать свои силы и попытаться раскрасить в два цвета полный граф с восемью вершинами (K_8) так, чтобы он был сине-пустым и имел восемь (минимальное число) красных треугольников.

Гарри Лорден в своей статье «Сине-пустые хроматические графы» [17, 2] показал, что такого рода задачи в действительности не представляют интереса. Если число вершин n четно, то, как показал ранее Гудмен, граф может быть сделан экстремальным сине-пустым необычайно прос-

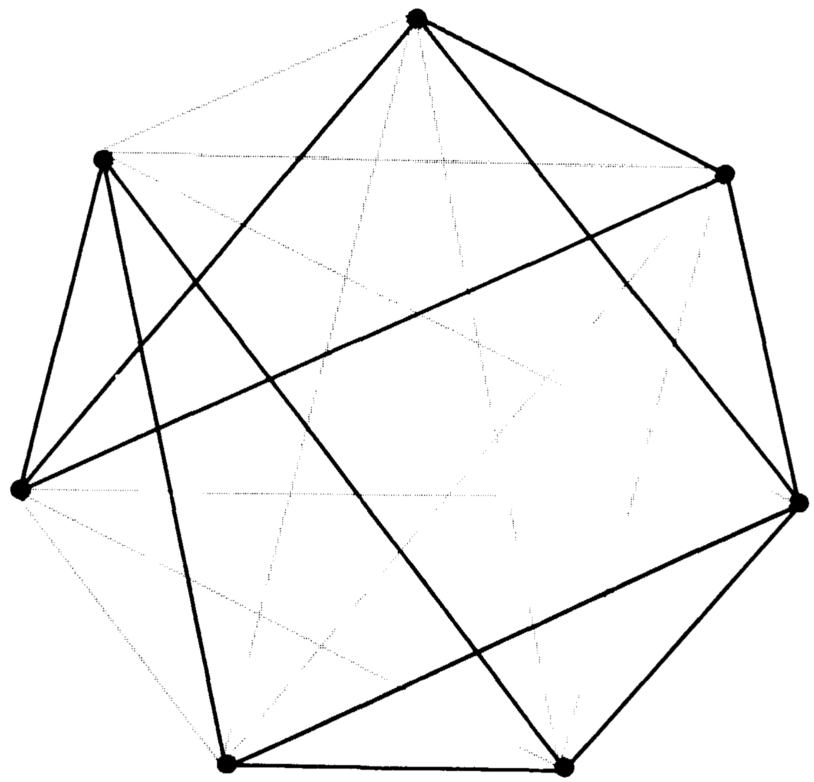


Рис. 112

Решение задачи Рамсея о графе.

то: для этого достаточно раскрасить в красный цвет два его полных подграфа с $n/2$ вершинами. Если же n нечетно, то K_7 (о чем я уже упоминал) является единственным полным графом, который может быть сделан экстремальным сине-пустым с помощью раскраски его ребер в два цвета. Представим себе теперь, что n нечетно, но не равно 7. Как построить сине-пустой граф, который не экстремален, но содержит наименьшее число красных треугольников? Лорден показал, что эта задача легко решается путем разбиения графа на два полных красных подграфа, один из которых имеет $(n+1)/2$ вершин, а другой $(n-1)/2$ вершин. Могут потребоваться некоторые дополнительные красные линии, но их добавление тривиально.

Дополнение

Эта глава впервые была опубликована в журнале «Scientific American» в 1977 г. Прогресс в теории Рамсея происходил настолько быстро, что подробная библиография статей на эту тему насчитывала бы более тысячи названий и всякая попытка перечислить хотя бы наиболее важные результаты была бы заведомо обречена на неудачу. К счастью, ныне появились две превосходные книги по общей теории, частью которой является теория графов Рамсея. Я имею в виду «Рудименты теории Рамсея» Рональда Грэхэма [17, 8] и «Теорию Рамсея» Рональда Грэхэма, Брюса Ротшильда и Джоэла Спенсера [17, 9].

Современная теория Рамсея включает в себя помимо многого другого задачи о разбиении ребер любого графа на классы или задачи о разбиении точек в любом пространстве. Евклидова теория Рамсея, основы которой были заложены в 70-е годы Грэхэмом, Эрдёшем и другими, занимается изучением задач о раскраске в k цветов всех точек данного евклидова пространства и выяснения того, какие «узоры» при этом возникают. Например, независимо от того, как именно раскрашены в два цвета точки плоскости, непременно возникнут вершины монохроматического треугольника любого заранее заданного размера и любой формы за исключением равностороннего треугольника. (Плоскость может быть раскрашена полосами двух чередующихся цветов такой ширины, что при этом не возникнет ни одного равностороннего треугольника любого размера, например со стороной 1, с тремя вершинами одного цвета.)

Представим себе, что все точки евклидова трехмерного пространства раскрашены в два цвета. Возникнет ли при этом непременно равносторонний треугольник любого размера? Ответ на этот вопрос утвердительный. Рассмотрим четыре вершины любого правильного тетраэдра. Независимо от того, как именно раскрашены в два цвета эти вершины, по крайней мере три из них должны быть одного цвета, и, разумеется, эти три вершины служат вершинами монохроматического равностороннего треугольника. Другие теоремы такого типа, доказываемые несравненно труднее, приведены в работе Эрдёша, Грэхэма и других [17, 5].

В последнее десятилетие Фрэнк Харари и его коллеги провели анализ игр Рамсея. Опубликована лишь небольшая часть полученных ими результатов, но Харари подготавливает к печати большую книгу, в которой он намеревается изложить игры на избежание и на достижение типа игр Рамсея.

В таблице Стефана Берра (рис. 109) представлены все графы с числом ребер не более шести. Нетрудно видеть, что в интервале чисел от 2 до 18 в качестве обобщенных чисел

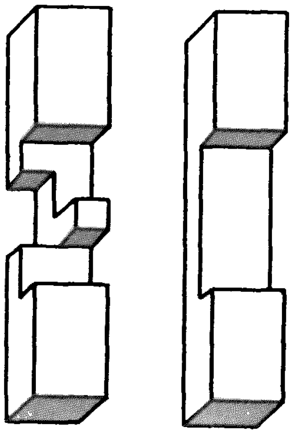
Рамсея отсутствуют только числа 4 и 16. Существуют три графа с семью ребрами, каждый из которых имеет обобщенное число Рамсея, равное 16, но нет ни одного графа, который имел бы обобщенное число Рамсея, равное 4. Всякое ли положительное число, кроме 4 (и, разумеется, единицы, что не имело бы смысла), является обобщенным числом Рамсея? В 1970 г. Харари показал, что ответ на этот вопрос утвердительный. В несуществовании обобщенного числа Рамсея, равного 4, нетрудно убедиться, рассматривая таблицу Берра. Тетраэдр (полный граф с четырьмя вершинами) не может быть наименьшим графом, порождающим подграф, поскольку любой подграф тетраэдра имеет число Рамсея, которое либо больше, либо меньше четырех.

Каков наименьший полный граф, который при окраске его ребер в два цвета непременно порождает монохроматический полный граф с пятью вершинами? Иначе говоря, чему равно обобщенное число Рамсея $R(5, 5)$? В 1975 г. Харари предложил премию в 100 долларов тому, кто первым найдет решение этой задачи, но премия до сих пор остается невостребованной.

«Теория Рамсея находится еще на стадии своего младенчества»,– пишет Харари в специальном номере «Журнала по теории графов» (The Journal of Graph Theory), посвященном памяти Рамсея [17, 9], и добавляет: «Фрэнк Рамсей не мог предвидеть, сколь глубокую теорию вызовет к жизни его работа». В другой статье (Д. Г. Меллора), помещенной в том же выпуске, есть такая весьма замечательная фраза: «Непреходящая слава Рамсея в математике ... зиждется на теореме, которая не была ему нужна и которую он доказал, пытаясь сделать нечто такое, что, как мы теперь знаем, не может быть сделано!».

Глава 18

От колючек до Беррокаля



> «Затем мы принялись рассуждать о том, есть ли на свете красота, не зависимая от пользы. Генерал утверждал, что бесполезной красоты не существует. Д-р Джонсон утверждал, что существует, и в доказательство сослался на кофейную чашку, которую держал в руке: роспись на чашке не имеет реальной пользы, так как и без нее чашка вмещала бы ровно столько же кофе, но все же роспись красива».
>
> Джеймс Босуэлл. *«Жизнь Сэмюэля Джонсона»*

В этой главе я хочу познакомить читателя с выдающимся современным испанским скульптором Мигелем Беррокалем. В Европе Беррокаль давно уже стал легендой, число поклонников его таланта неуклонно растет, но в США он известен на удивление мало. Прежде чем мы перейдем к изложению одного замечательного достижения Беррокаля и объясним, почему его скульптура заслуживает внимания любителей занимательной математики, нам необходимо рассмотреть одну из наиболее древних разновидностей механических головоломок.

Кому из читателей не случалось держать в руках головоломки, сделанные из кусочков дерева причудливой формы, которые сцеплены между собой так, что разъять их совсем не просто? Такие головоломки обычно называют китайскими. После того как они разъяты на части, их сборка может оказаться еще более трудным делом. Обычно в каждой головоломке существует деталь, называемая ключом, которую необходимо вынуть первой для того, чтобы разобрать всю остальную головоломку. Во многих головоломках описываемого типа детали необходимо собирать в определенной последовательности. Ключ вставляется последним и запирает остальные детали, не давая им сдвинуться с места. По всему миру на протяжении столетий изготавливались и поступали в продажу сотни головоломок такого типа различной структуры. Изобретатели большинства головоломок неизвестны (несмотря на сотни патентов, выданных на вариации головоломок, так и не поступивших на рынок).

Хотя о ранней истории таких головоломок почти ничего не известно, но все же можно почти с уверенностью утверждать, что название «китайские головоломки» неверно. Изготовлением подобных головоломок в странах Восточной Азии занимались по крайней мере с начала восемнадцатого века, но в европейских странах эти головоломки были известны ничуть не позже. Кроме того, многие механические головоломки – несомненно западного происхождения – также стали называться китайскими головоломками. Джозеф Нидэм пишет в третьем томе своего фундаментального труда «Наука и цивилизация в Китае» [18, 1*]: «Возможно, европейцы были склонны приписывать этим загадкам имя загадочной для них цивилизации».

Китайские головоломки могут состоять и из трех деталей, но простейшей нетривиальной моделью является широко распространенная головоломка из 6 деталей, которую вы видите на рис. 113. В нижнем ряду детали разобранной головоломки изображены в том виде, в каком они приведены в изданной в 1893 г. «профессором Хоффманом» (псевдоним Анжело Льюиса) книге о механических головоломках «Головоломки старые и новые» [18, 2*]. Гладкий, без выступов и впадин, стержень слева является ключом головоломки. Еще раньше появилась другая головоломка из 6 деталей в «Собственной книге фокусника» [18, 3*], анонимном сочинении, впервые опубликованном

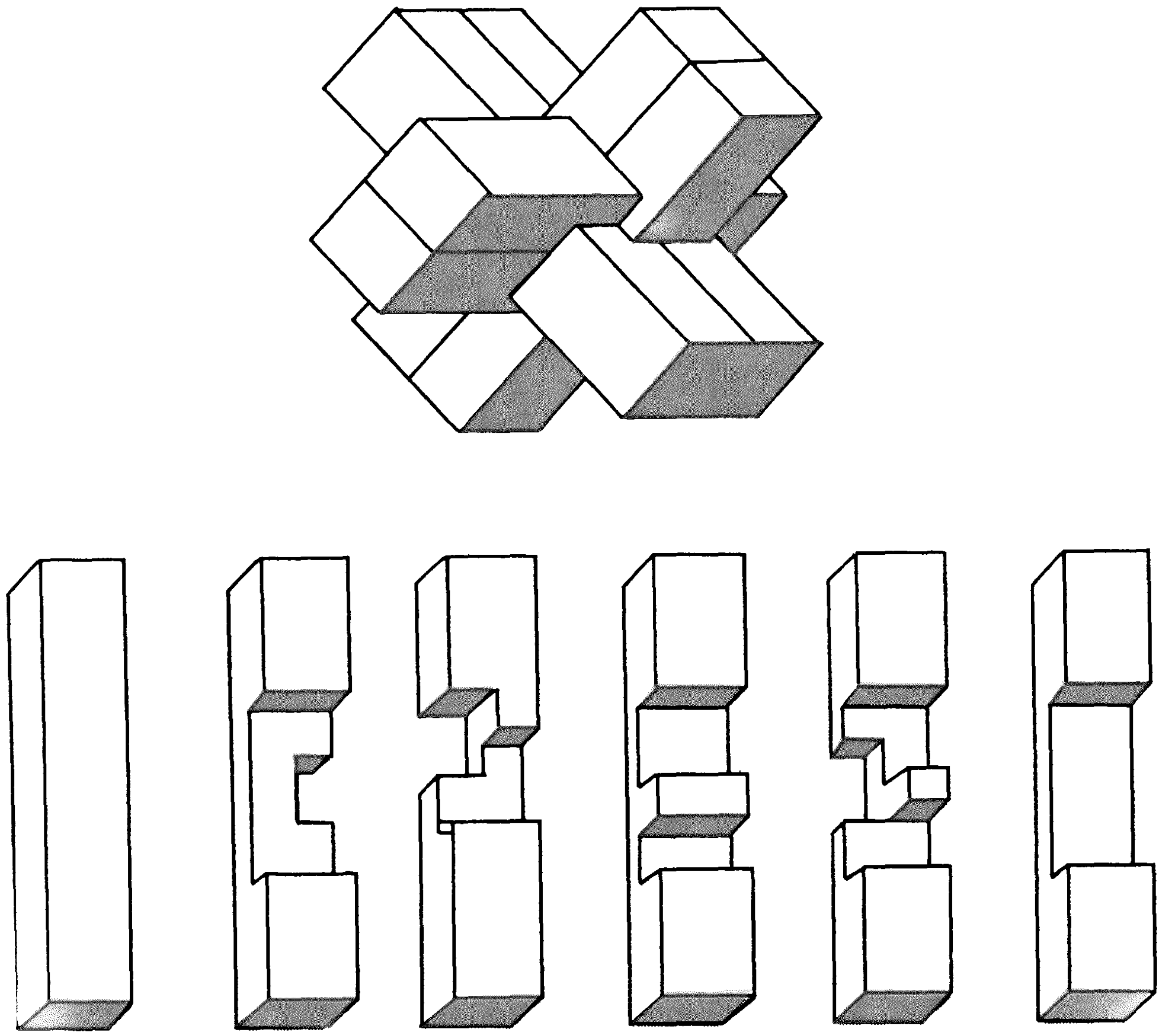


Рис 113

Головоломка-колючка из 7 деталей.

в США в 1857 г. Энтони С. Филипяк в своей книге «100 головоломок: как самому изготовить и разгадать их» [18, 4*] называет такую головоломку «колючкой чертополоха из 6 деталей», по-видимому, потому, что внешне она напоминает семя чертополоха. И теперь за такого рода механическими головоломками закрепилось название «колючка».

Выпускаемые промышленностью колючки из шести деталей редко бывают одинаковыми. Это обстоятельство навело Филипяка на мысль об удивительно трудной задаче по геометрической комбинаторике. Представим себе, что средняя часть гладкого стержня-ключа головоломки-разделена на 12 единичных кубов, как показано на рис. 114. Ребра каждого куба равны по длине половине толщины ключа. Под кубами с номерами 2, 3, 6 и 7 расположены еще четыре куба, но только два из них (11 и 12) видны на рисунке.

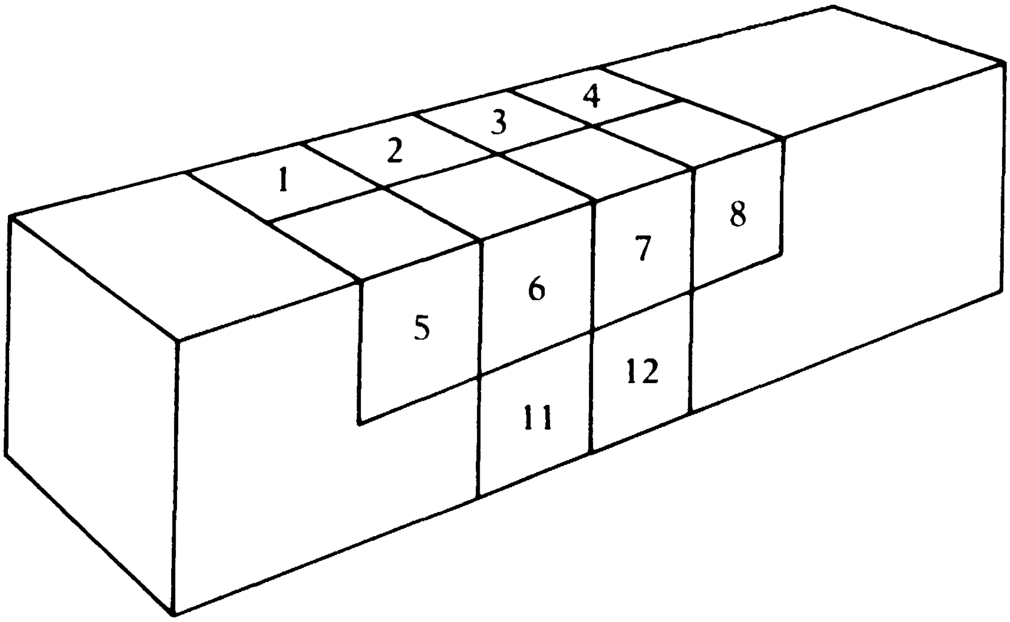


Рис. 114

Заготовка для деталей головоломки-колючки.

Каждая из шести деталей колючки может быть полностью описана, если указать, какие из 12 единичных кубов удалены.

Поскольку каждый из единичных кубов может либо оставаться на месте, либо быть удаленным, то всего существует 2^{12}, или 4096, вариантов деталей. Разумеется, следует исключить такие случаи, когда в результате изъятия кубов деталь распадается на две отдельные части. Что касается остальных деталей, то каждая из них получается восьмикратно за счет поворотов вокруг продольной оси и переворачиваний на 180° вокруг поперечных осей («совмещений концов с концами»). Следовательно, семь дубликатов каждой детали во избежание повторений можно исключить из рассмотрения. (Мы не исключаем зеркальные отражения асимметричных деталей.) Наконец, существуют такие конфигурации деталей, которые по механическим причинам не сочетаются с другими деталями – не входят в зацепление. Такие детали также необходимо исключить из рассмотрения. Возникает вопрос: сколько допустимых конфигураций остается после исключения всех перечисленных выше «запретных» случаев? Иначе говоря, сколько конфигураций из общего их числа (равного 4096) могут быть использованы при конструировании головоломок-колючек из 6 деталей? Филипяк считает, что число допустимых конфигураций равно 432.

В последние три года, вооружившись компьютерными программами, атаку на задачу о подсчете числа деталей, годных для конструирования головоломок-колючек, повели три математика: Уильям Г. Катлер из Варбургского колледжа в Ваверли (штат Айова), Роберт Маккей из Лондона и Ч. Артур Кросс из Чешира (Англия). По мнению Катлера и Кросса, число деталей для головоломок равно 369. Из них 112 деталей могут быть использованы в двух вариантах, а 2 детали – в трех вариантах. Таким образом, общее число деталей, из которых могут быть собраны головоломки-колючки, достигает 485. Из них 25 имеют выступы и впадины. Эти детали можно выпилить из ровного бруска дерева обыкновенной пилой-ножовкой. Головоломки из них получаются «сплошными», без внутренних полостей, или пустот. Если отбросить такие варианты зацепления деталей, которые невозможно ни собрать, ни разобрать (не выходя при этом в четырехмерное пространство), а также головоломки с внутренними пустотами, поскольку они непрочны и легко распадаются, то сколько различных головоломок-колючек можно составить из 6 деталей, выбранных из общего числа 485 деталей допустимых конфигураций? По подсчетам Катлера и других исследователей, произведенным с помощью компьютеров, число головоломок достигает 119979.

Мне известны лишь два адреса, по которым можно раздобыть головоломки-колючки более сложного типа. Английская фирма «Pentangle» высылает всем желающим каталог выпускаемой ею серии механических головоломок, в число которых входит и несколько изящных деревянных головоломок-колючек. Головоломка, которая называется «Дедушкина забава», состоит из 96 деталей. В США всякий, кто вышлет Стюарту Т. Коффину конверт с обратным адресом и маркой, может получить брошюру с описанием изготовляемых им оригинальных и необычных головоломок-колючек. Стоят головоломки Коффина довольно дорого, так как вырезает он их из твердых пород дерева. В течение нескольких лет Коффин выпускал выходившую по мере накопления материалов газету «Любитель головоломок», в которой помещал различные сведения по истории, конструированию и изготовлению механических головоломок.

Время от времени на рынок поступают китайские головоломки, выполненные в виде знакомых предметов (автомобиля, пистолета, корабля, самолета, пагоды, бочки, яйца) и фигурок различных животных. Большинство деревянных головоломок состоят из сцепленных между собой деревянных деталей и своими очертаниями не похожи ни на что, но созерцать их симметричную форму всегда приятно. Иное дело муляжи и модели, долженствующие изображать предмет или живое существо: они, как правило, не отличаются высокими эстетическими достоинствами. Тут я вплотную подхожу к рассказу о Беррокале. Насколько мне известно, Беррокаль первым стал сочетать в своем творчестве китайские головоломки из зацепляющихся деталей с высоким искусством.

Беррокаль родился в 1933 г. в зажиточной испанской семье в городе Малаге. Он изучал математику и архитектуру в Мадридском университете, а затем в Париже и Риме, после чего поселился в пригороде Вероны Неграре. Там на роскошной вилле он живет и поныне вместе со своей второй женой принцессой Кристиной (внучкой последнего короля Португалии). Беррокалю принадлежит литейный двор, на котором трудятся более 200 человек. Это предприятие занимается отливкой не только произведений самого Беррокаля, но и работ большинства других европейских скульпторов. «Я главарь скульптурной мафии»,– заметил однажды о самом себе Беррокаль. Подобно Пабло Пикассо и Сальвадору Дали, самым замечательным испанским живописцам двадцатого столетия, Беррокаль – виртуоз, успешно сочетающий невероятную продуктивность с безудержной рекламой, блистательная личность, не отягощенная излишней скромностью.

Вряд ли можно в должной мере оценить уникальную комбинацию достоинств работ Беррокаля: красоты форм, наслаждения от осязания поверхности его скульптур, юмор и притягательность трехмерной комбинаторной головоломки – до тех пор, пока она не будет разобрана на части и собрана снова несколько раз подряд. Рассмотрим, например, две работы Беррокаля, или, как их еще называют, две «беррокали», которые вы видите на рис. 115. Голова, называемая «Портрет Мишель», состоит из 17 отдельных элементов причудливой формы, каждый из которых задуман и выполнен как самостоятельная абстрактная скульптура, приятная на ощупь. Тело («Толстушка») – одно из нескольких

Рис. 115

«Портрет Мишель» (голова), приставленный к «Толстушке» (тело).

туловищ, к которым может быть прикреплена голова. Оно состоит из 12 элементов.

Беррокаль ввел термин «мультипли» для многочисленных копий, отливаемых им с каждой своей работы. Тираж «Портрета Мишель» типичен: 6 мультиплей из литого золота, 500 из серебра высокой пробы и 9500 из никелированной бронзы. Каждая копия имеет свой порядковый номер, подписана и безупречно отлита с инженерной точностью. Каждая беррокаль может быть разобрана на части, которые допускают сборку в другом порядке. Чтобы разобрать «Портрет Мишель», необходимо сначала вынуть элемент, находящийся в шее. Китайские головоломки-колючки обычно распадаются на части, стоит лишь вынуть из них несколько элементов, но беррокаль упорно сопротивляется «распаду» до тех пор, пока не будут разъяты две последние детали. Во многих случаях собранная модель представляет собой сплошное, т. е. без внутренних полостей, или пустот, тело, и до тех пор, пока не изъята n-я деталь, удалить $(n + 1)$-ю деталь невозможно. Детали беррокалей сцеплены между собой настолько хитроумно, что иногда невозможно изъять деталь, не пошевелив слегка другие детали. К каждому мультиплю прилагается книжка с инструкциями в твердом переплете с иллюстрациями Беррокаля. Каждый этап сборки изображен на отдельной странице, деталь, подлежащая удалению, показана в цвете. В конце в изометрической проекции показаны контуры всех деталей (как бы прозрачных), плотно пригнанных одна к другой и образующих беррокаль. Чтобы овладеть техникой разборки и сборки беррокали, может понадобиться несколько дней, даже если заглядывать при каждом затруднении в книжку с инструкциями.

Число деталей в беррокалях варьируется от 3 до почти 100. Элементами многих скульптур служат изящные кольца и браслеты, которые можно использовать в качестве украшений. Например, зрачком глаза Мишель служит аквамарин, украшающий такое кольцо. Еще одна известная беррокаль – изображенный на рис. 116 слева торс («Мини-Давид»). Одна из 22 его деталей – кольцо, которое вы видите вверху на рис. 117. Камень этого кольца скрыт за гениталиями Давида. Весь тираж этой работы Беррокаля рас-

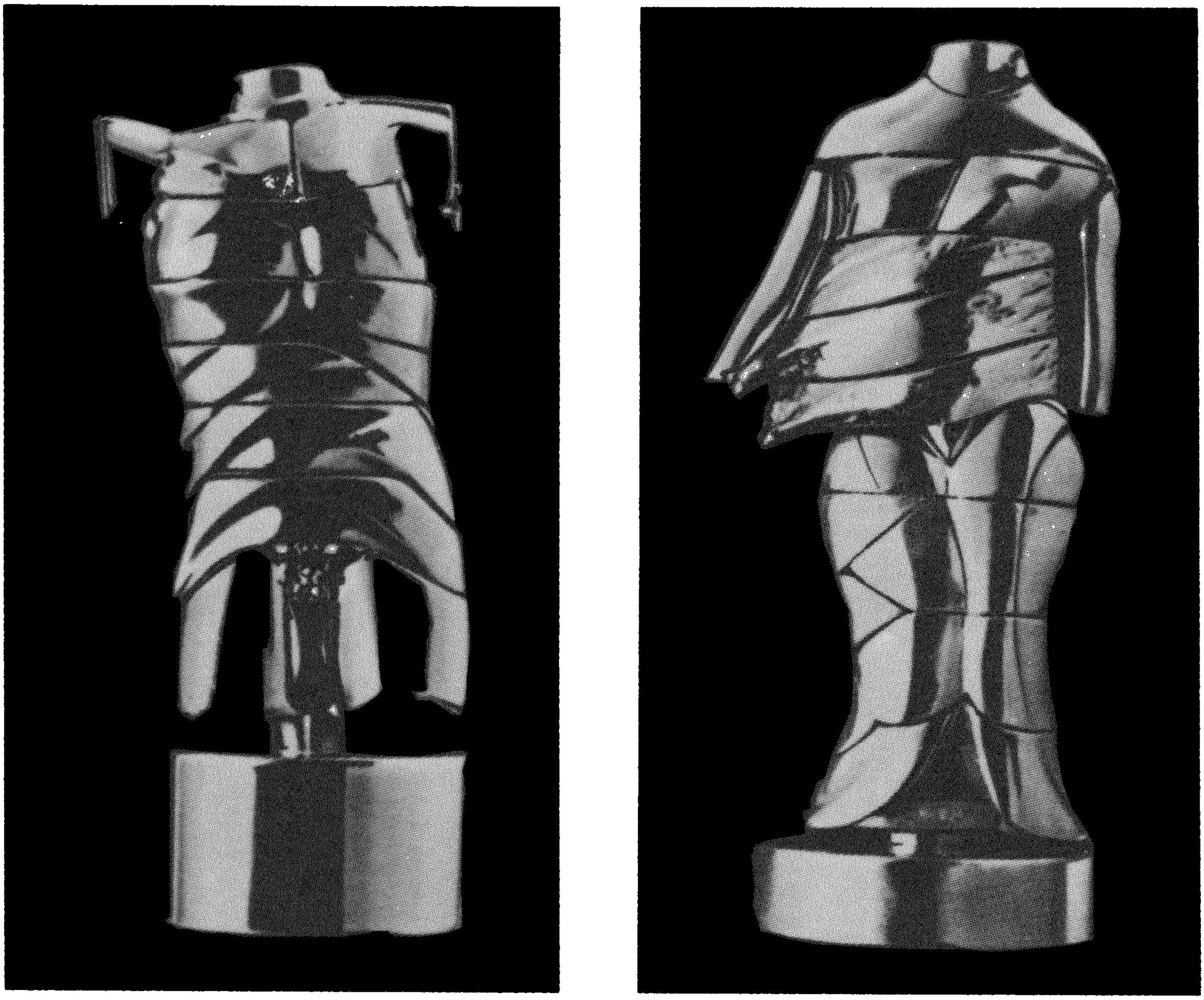
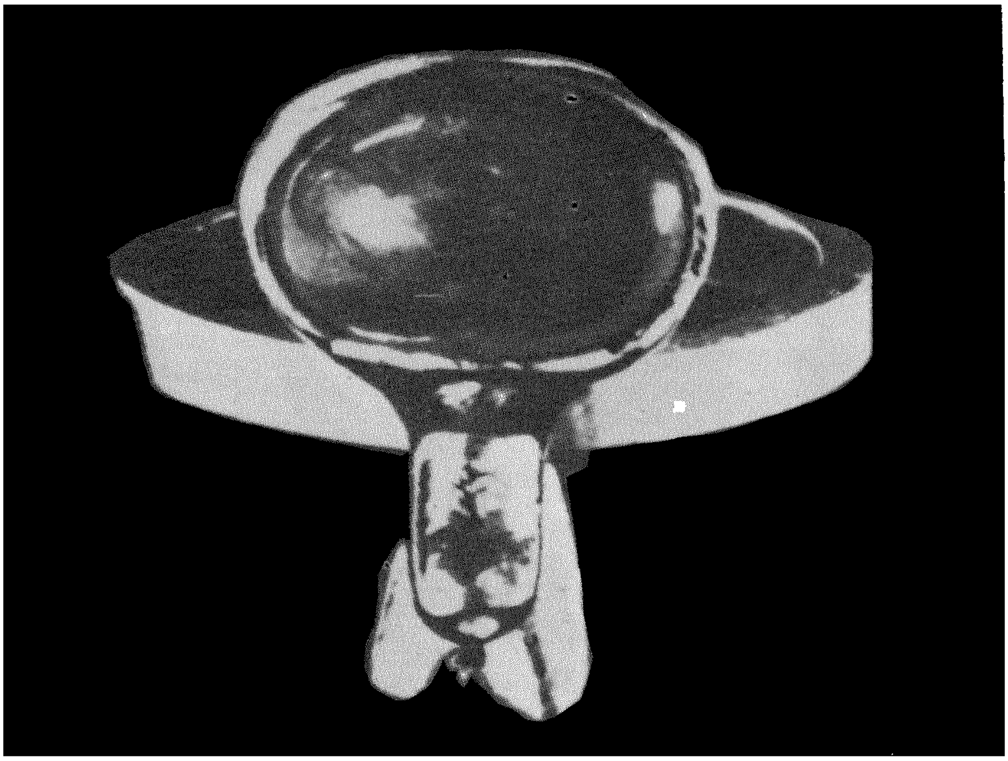


Рис. 116
«Мини-Давид» (слева) и «Мини-кариатида» (справа).

продан. Он состоял из 6 мультиплей литого золота, 500 из позолоченной бронзы и 9500 из никелированной бронзы. В позолоченных беррокалях этой серии в качестве камня использован зеленый нефрит, в никелированных беррокалях – сапфир. Беррокаль нередко изготавливает «микрокопии» своих работ в виде брелоков. Например, существует «Микро-Давид» с ячеистым кольцом, украшенным голубой ляпис-лазурью. Внутренняя структура микроверсии всегда полностью отличается от внутренней структуры мини-аналога.

«Мини-Мария» на рис. 118 разбирается на части лишь при нажатии шарика на одной из ног. Эта скульптура состоит из 23 элементов. Одним из них служит кольцо с лунным камнем, образующим одну из грудей Марии. Внутри фигуры скрыто скульптурное изображение мужского



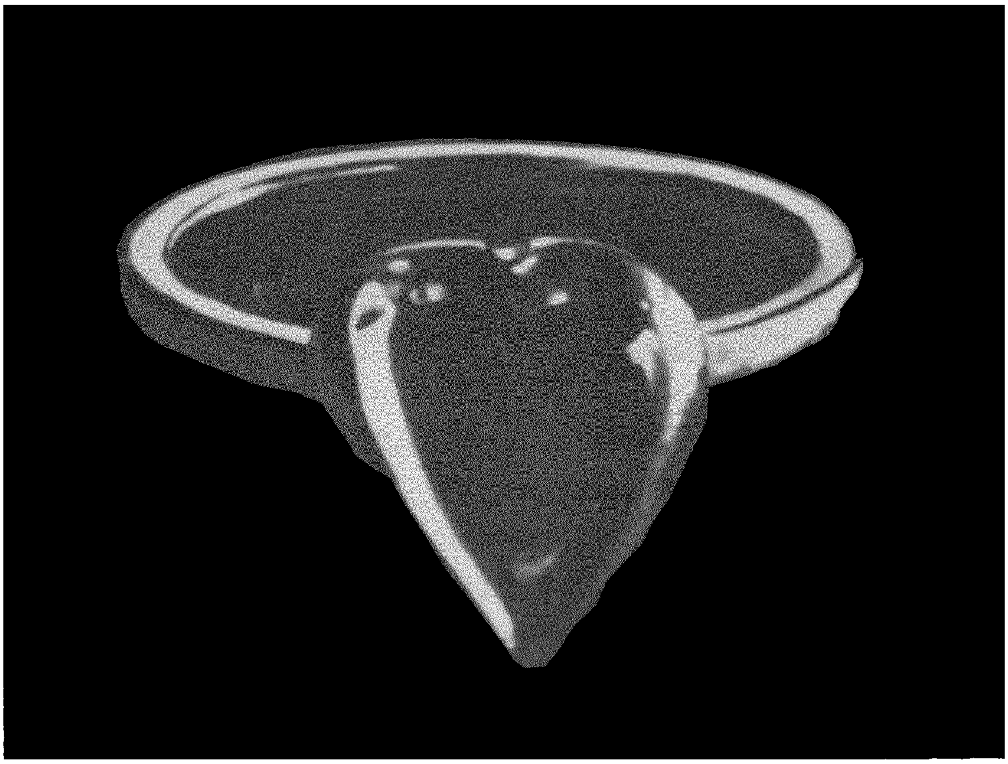


Рис. 117

Кольца из «Мини-Давида» (вверху) и «Мини-кариатиды» (внизу).

полового органа (его вы можете видеть на рис. 119 слева). Он разбирается на 5 частей, две из которых – стальные шарики. Соответствующий элемент брелока «Микро-Мария» имеет на конце крохотный аквамарин. Камень прикреплен к кольцу ячеистой полоской.

Еще одну скульптуру, также изображающую полулежащую фигуру, Беррокаль назвал «Мини-Зориадой». Она

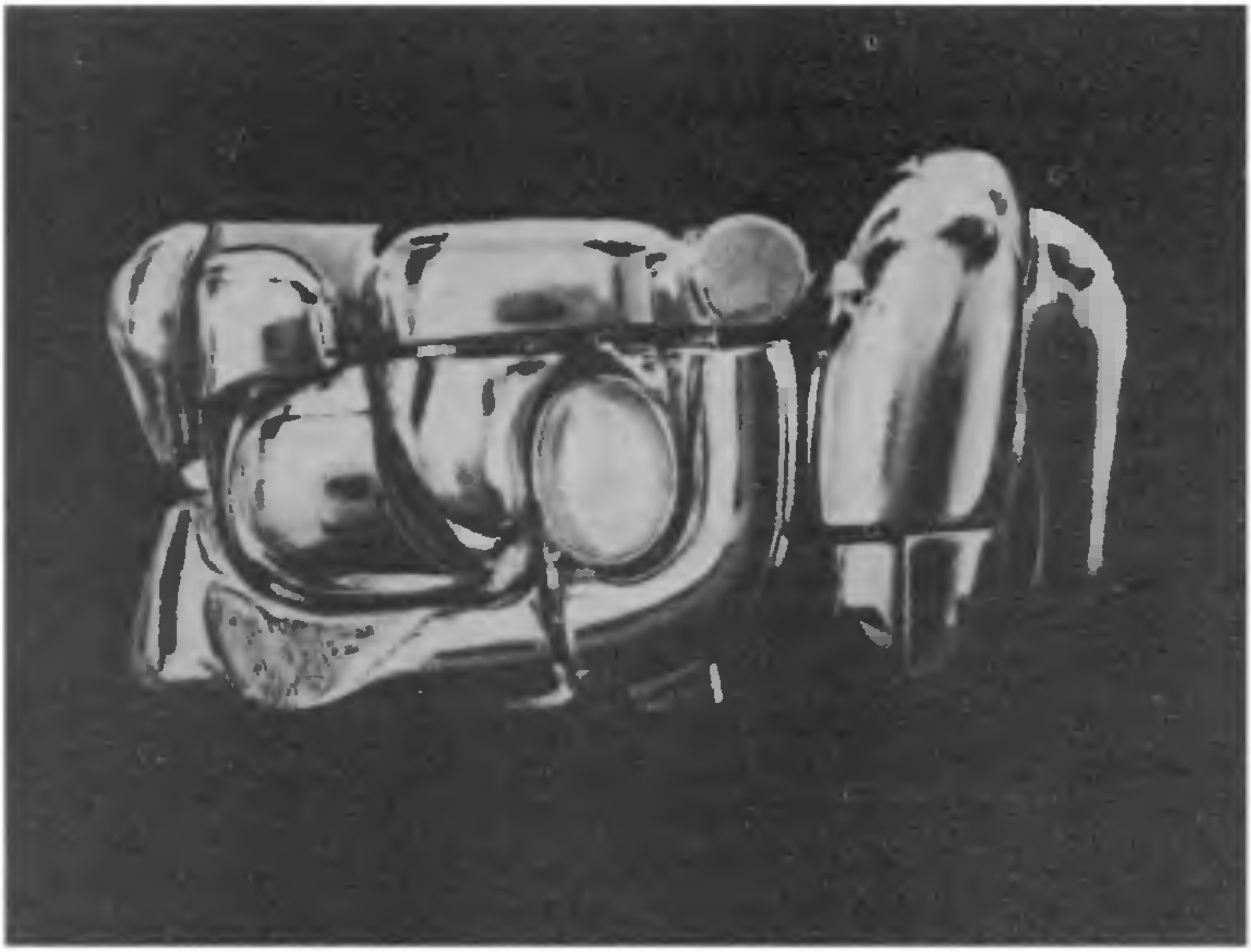


Рис. 118
«Мини-Мария» Беррокаля

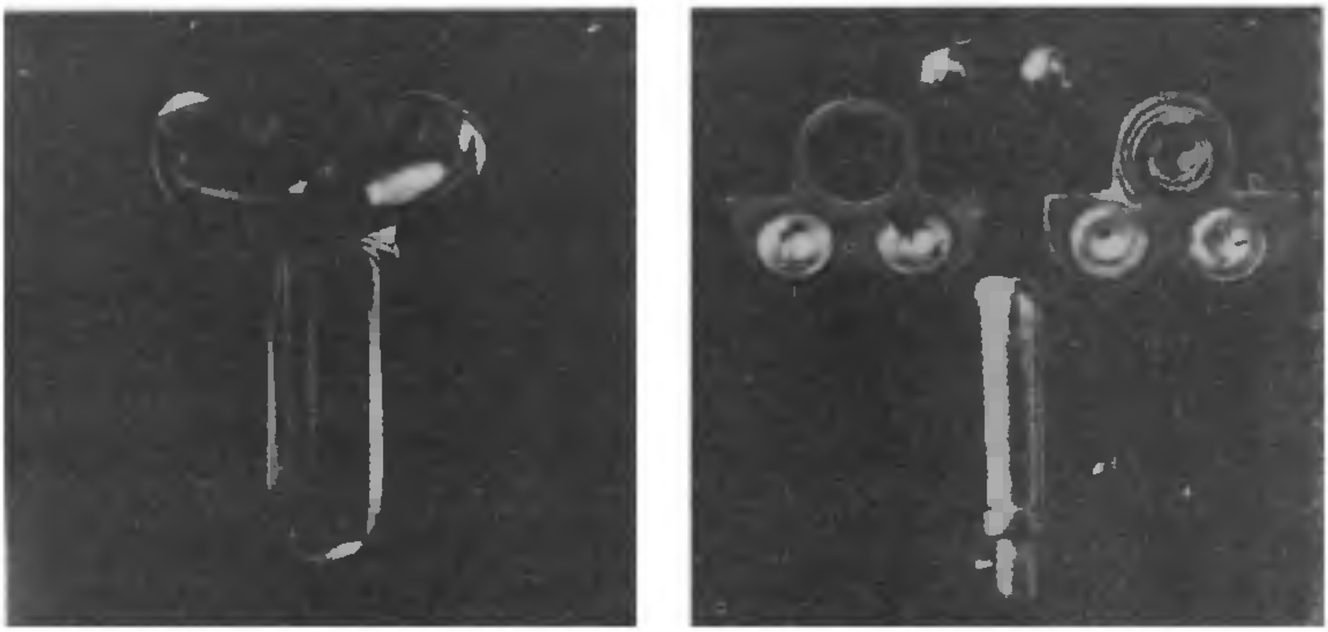


Рис. 119
Внутренний элемент «Мини-Марии» (слева) и пять ее деталей (справа).

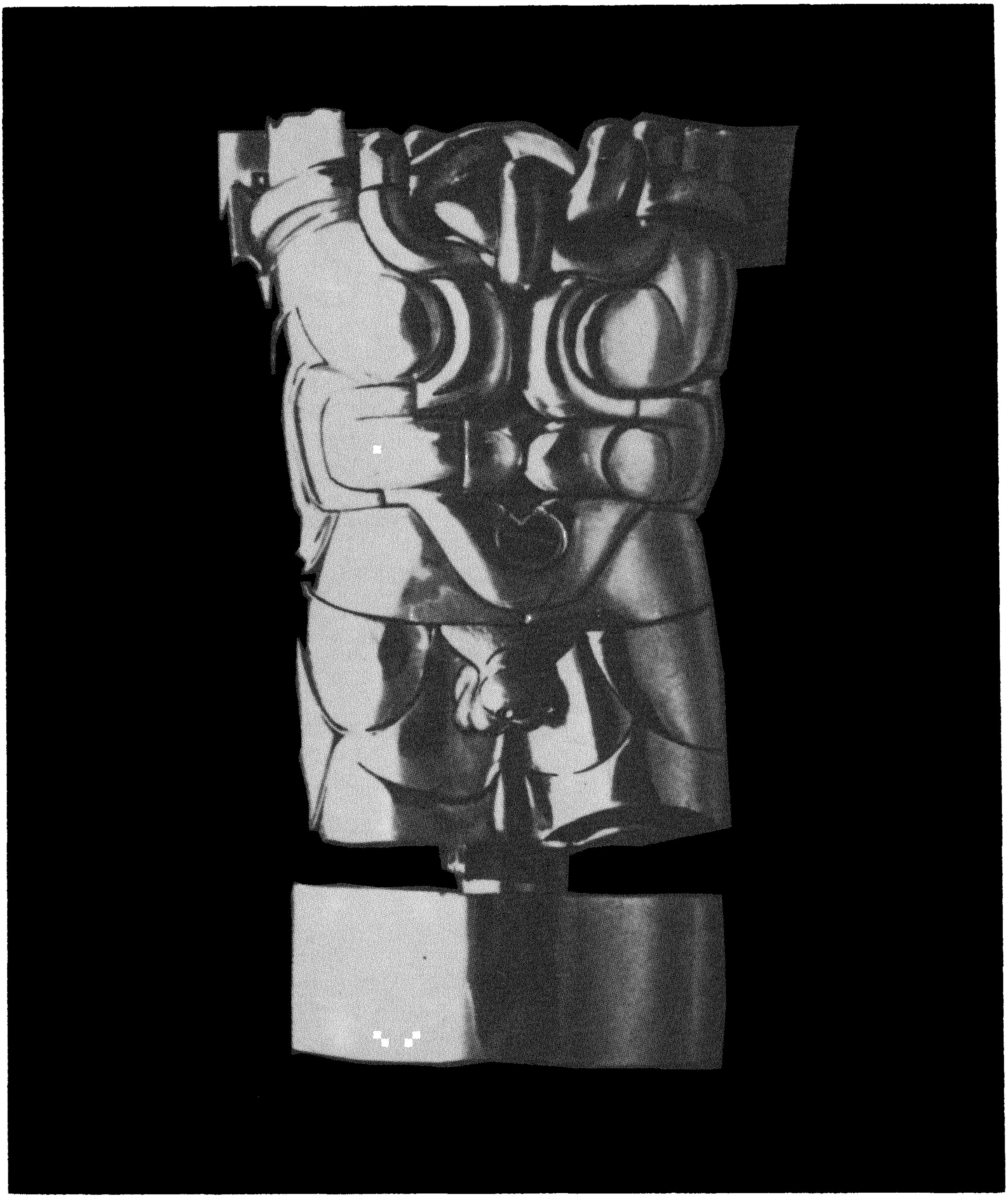


Рис. 120

«Голиаф» Мигеля Беррокаля.

разбирается, если повернуть одну из ее туфелек. Груди Зориады – два лунных камня, украшающих кольцо. Справа на рис. 116 вы видите «Мини-кариатиду». «Венерин холм» фигуры укреплен на золотом кольце, которое показано на рис. 117 внизу.

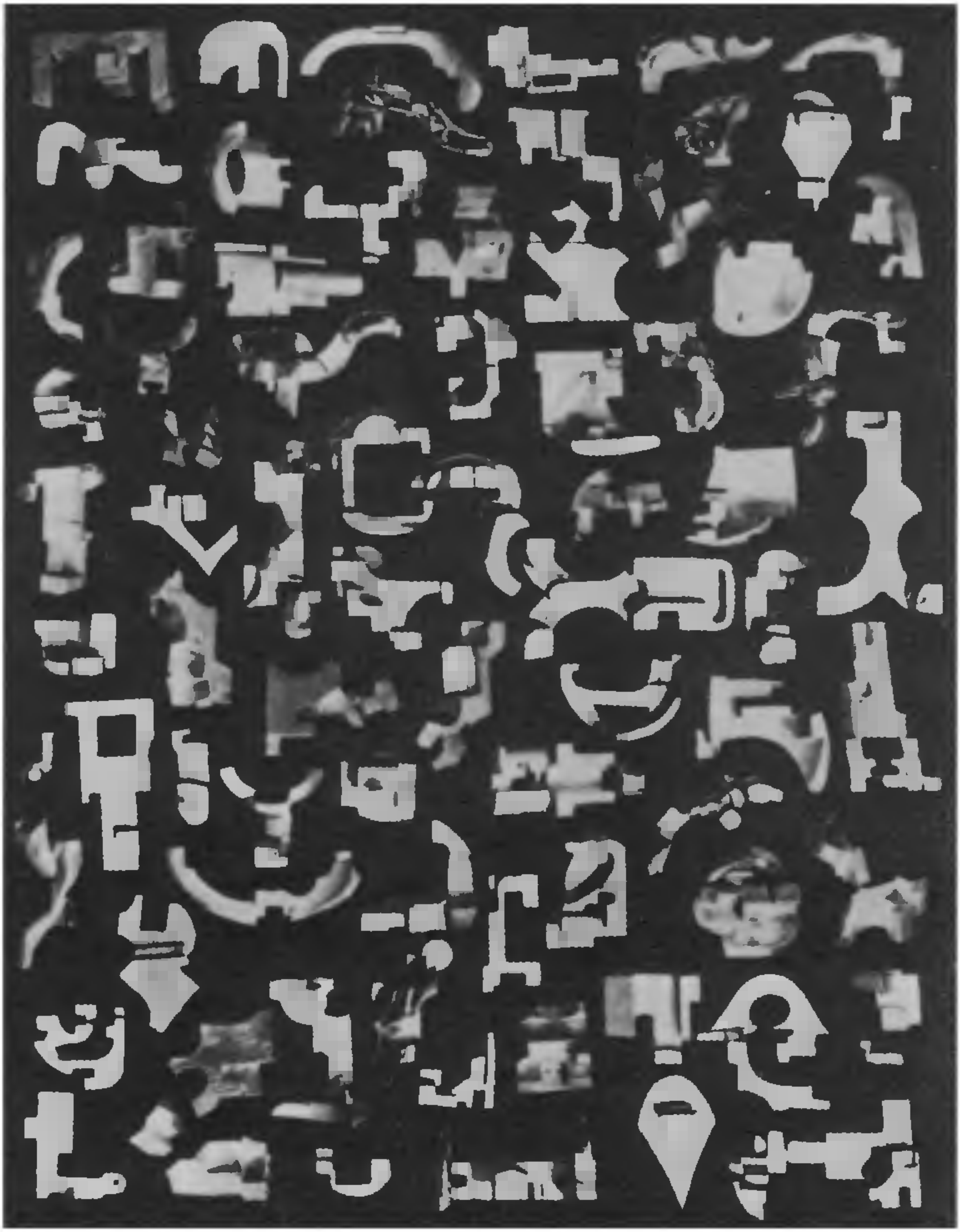


Рис. 121

Восемьдесят деталей «Голиафа».

«Голиаф» (рис. 120) – самая сложная из работ Беррокаля. Все его 80 элементов представлены на рис. 121. Частично разобранный «Ришелье» на рис. 112 показывает, что бер-

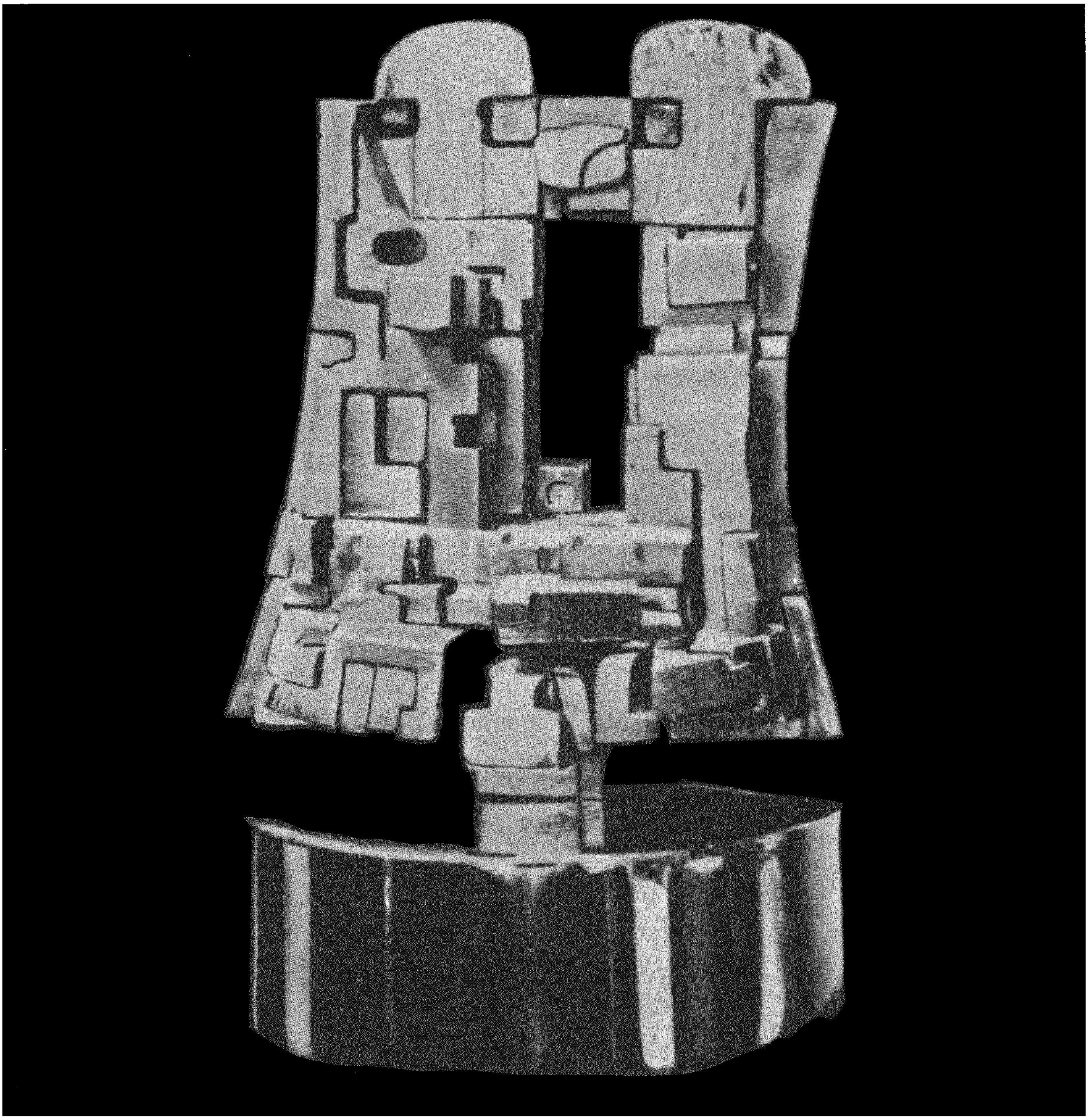


Рис. 122

«Ришелье», частично разобранный.

рокаль на любой стадии сборки можно рассматривать как поразительный пример абстрактной скульптуры. Полностью собрав «Голиафа», можно повернуть фиговый листок, скрывающий гениталии. В действительности существуют две детали, изображающие гениталии Голиафа: с обрезанием и без обрезания. Торс может быть собран с любой из них.

На рис. 123 вы видите еще две работы Беррокаля: саркофаг Ромео и Джульетты и более раннюю скульптуру, изображающую слившиеся в экстазе тела несчастных влюбленных. Внутри скульптуры скрыт сюрприз, описание которого более уместно в руководстве по технике секса. Еще более поразительный сюрприз таит конструкция саркофага: он разбирается на 84 детали, из которых можно собрать полное убранство для стола, накрытого на двоих: 23 предмета из серебра, 4 кубка для вина, 4 подсвечника, 4 пепельницы, мужское кольцо для салфетки, дамское кольцо для салфетки и жаровню, размеры которой превосходят размеры саркофага.

Скульптура «Columbia Jet» (рис. 124) выполнена Беррокалем по заказу авиакомпании «Iberia Airlines» в качестве

Рис. 123

Скульптура «Ромео и Джульетта», водруженная поверх другой скульптуры, изображающей гробницу Ромео и Джульетты.

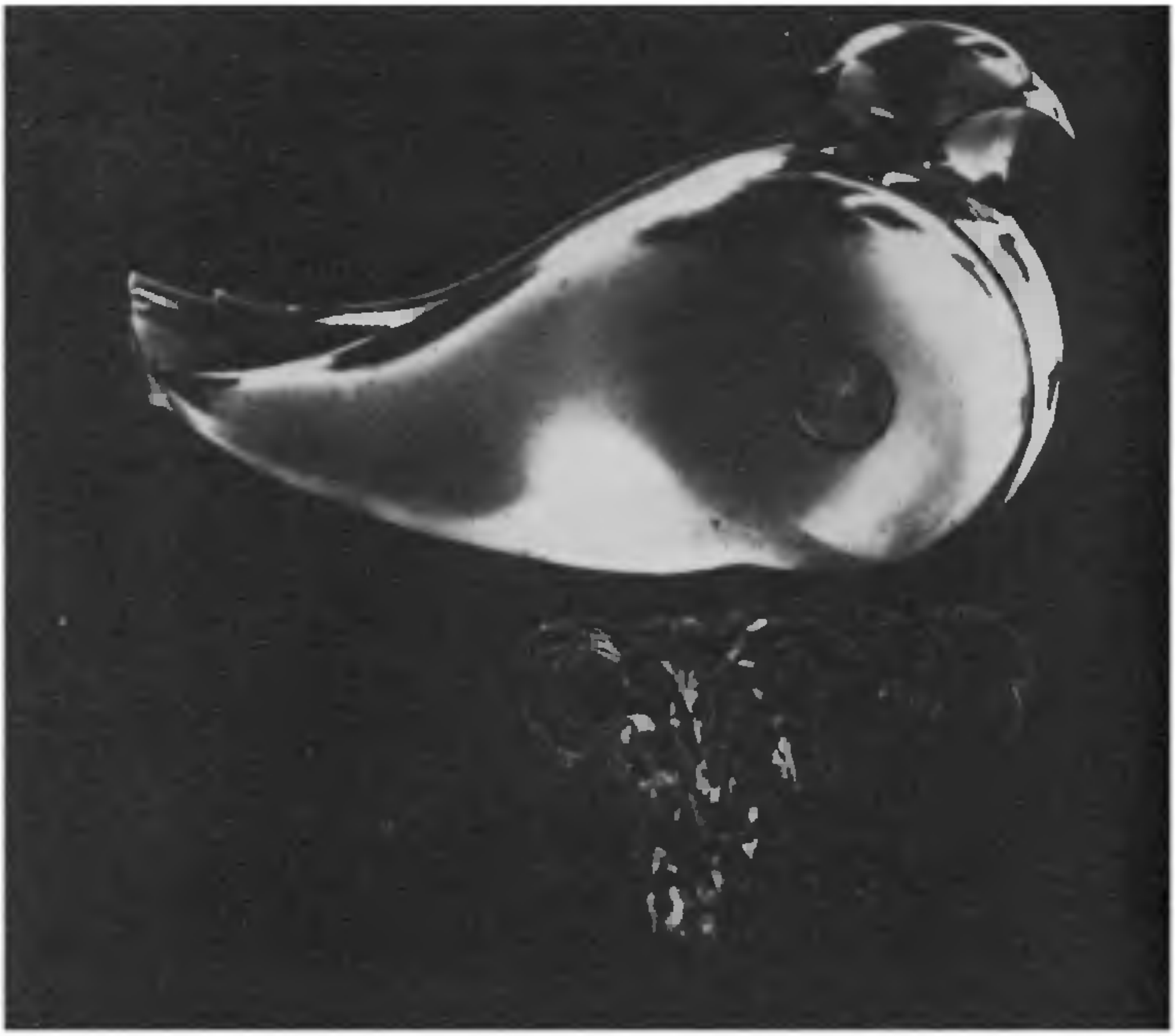


Рис. 124

Сувенир для пассажиров авиакомпании «Иберия Эйрлайнз», выполненный Беррокалем по рисунку Пабло Пикассо «Голубка».

сувенира для служащих этой компании. Птица изваяна по рисунку Пикассо «Голубь мира». Туловище птицы служит сосудом для питьевой воды, которая изливается из клюва, если поднять ручку. В качестве стакана используется пышно орнаментированный пьедестал. Если расправить крылья голубя, то из концов появятся колеса-шасси. Еще одна беррокаль также несет функциональное предназначение – «Шкатулка Паломы». Эта скульптура имеет около 30 см в высоту и ширину. Если ее открыть, то она превращается в шкатулку для драгоценностей с 16 выложенными фетром отделениями. Изнутри поднимается круглое зеркало. Оно раскрывается, и тогда вы видите скульптурный портрет дочери Пикассо Паломы. Голова Паломы собрана из двух браслетов и двух поясков. Скульптура Беррокаля „Il Cavallo" («Конь»), которую вы видите на рис. 125, обладает другой разновидностью гибкости. Скульптура коня собрана из 14 деталей. Ноги коня имеют шарнирные суставы, и им можно придавать различные положения.

Я описал лишь малую толику работ Беррокаля. Самая большая по размерам работа Беррокаля «Воздаяние Пикассо» достигает в длину около пяти с половиной метров и весит 18 тонн. Ныне она выставлена для всеобщего обозрения в «Садах Пикассо» в Малаге. Миниатюрная бронзовая версия этой скульптуры «Siextasis» состоит из 20 деталей, удерживаемых вместе 20 миниатюрными магнитами. Другая большая скульптура, которую Беррокаль посвятил своему доброму другу Дали, находится в Мадриде. Миниатюрная бронзовая версия этой скульптуры под наз-

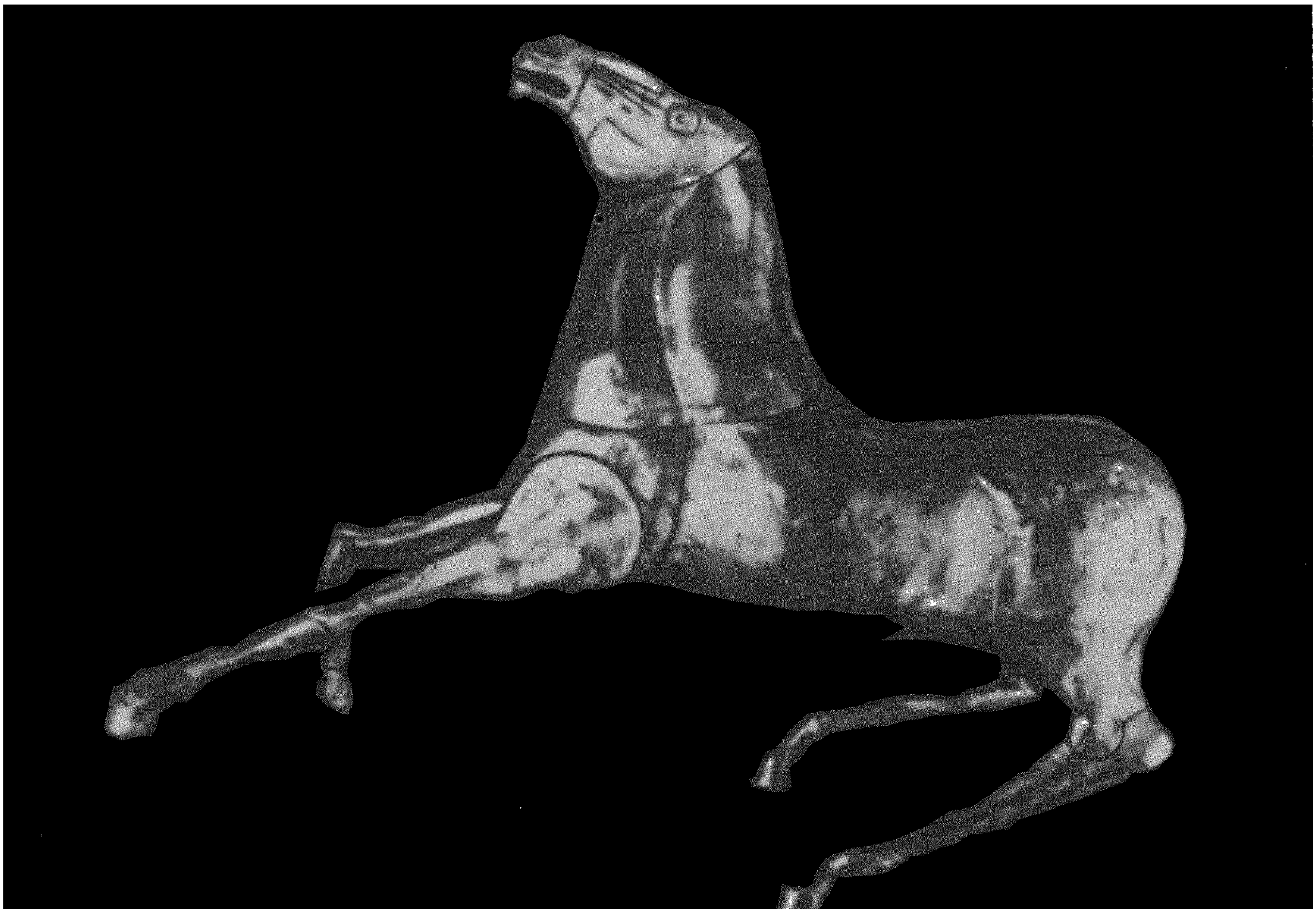


Рис. 125

«Конь» Беррокаля.

ванием «Delirium Tremens» («Белая горячка») была изготовлена позднее.

Ни в одной из беррокалей, кроме брелоков, нет никаких винтов или болтов. Брелоки подвешиваются на специальном звене-ключе, которое крепится на винте, чтобы брелок случайно не оторвался от цепочки. Все мини-мультипли из литого золота и серебра высокой пробы имеют детали-замки, которые запираются на обычный ключ. Без участия владельца скульптура не может быть разобрана.

Я предвижу ваше возражение. Какое отношение, спросите вы, имеет к высокому искусству занимательная разборка и сборка скульптур наподобие китайской головоломки? В каком-то смысле на ваш вопрос можно ответить: «Никакого», но такой ответ отнюдь не является исчерпывающим. Произведения искусства всегда вызывают бесчисленные ассоциации: обнаженная натура возбуждает эротические эмоции, ландшафты, морские пейзажи и семейные портреты создают определенное настроение, политические и религиозные произведения не чужды риторики, иллюстрации в учебнике обладают определенной дидактической ценностью, комическое искусство исполнено юмора, кресла, кровати и диваны, призванные создавать физический комфорт, не лишены эстетической привлекательности. Тысячи окружающих нас предметов – все эти столы, вазы, бутылки, чашки, блюда, столовое серебро, автомашины, дома, стеганые одеяла, суда, наручные часы, инструменты и т.д. – красивы и выполняют определенное функциональное назначение. Уникальное достижение Беррокаля состоит в том, что ему удалось найти удачное сочетание приятных визуальных и тактильных ощущений и интеллектуального наслаждения, доставляемого механической головоломкой. Если такая комбинация вам не по вкусу, то беррокали не для вас.

В области Квадлинг страны Оз (описываемой в книге «Изумрудный город страны Оз») в городе Фуддлькумджиг обитает странное племя людей, которые называют себя фуддлями. Каждый фуддль состоит из сотен кусочков покрытого краской дерева самой причудливой формы, собранных наподобие деталей трехмерной головоломки. При приближении незнакомца фуддль с грохотом рассыпается на груду отдельных частей, чтобы тот мог позабавиться, пытаясь заново собрать из них фуддля.

«Странный народ эти фуддли,– сказала Эм, тетушка Дороти, повстречав фуддлей.– Никак не возьму в толк, какой от них прок».

«Ну как же,– возразил ей Волшебник.– Они забавляли нас несколько часов. Проку от этого немало, смею вас уверить».

«Мне кажется, что собирать фуддлей интереснее, чем играть в солитер или в ножички,– добавил дядюшка Генри.– Что касается меня, то я рад, что мы посетили фуддлей».

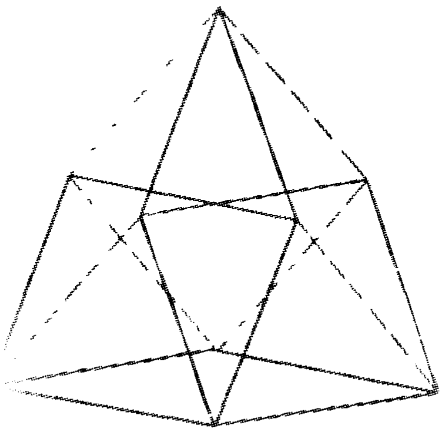
Дополнение

Полное описание всех 119979 возможных конфигураций деталей для головоломок-колючек см. в статье Катлера [18, 3]. Этот же автор располагает и полной информацией относительно компьютерных программ для составления и разборки головоломок-колючек и других типов. Особенно трудный вариант, названный Катлером «Неподдающаяся колючка Билла», описан в журнале «Scientific American» [18, 5]. Прежде чем удастся вынуть деталь-ключ, требуется 4 раза передвинуть детали головоломки. Автор публикации Дьюдни обратился к читателям с предложением придумать аналогичную двумерную головоломку и опубликовал лучшее решение в январском номере журнала за 1986 г.

В 1980 г. английская фирма «Pentanglae», занимающаяся производством головоломок, выпустила «Китайскую головоломку Кросса», сконструированную А. К. Кроссом. В комплект входят 42 детали из красного дерева вместе с инструкцией, позволяющей собрать 314 различных головоломок-колючек.

Глава 19

Игральные кости Зихермана, принцип Крускала и другие курьезы



Используемые в известных играх аксессуары – игральные кости, шахматные фигуры, шашки, карты и т. д.– всегда были богатым источником задач в занимательной математике. В этой главе мы познакомимся с несколькими новыми примерами такого рода задач, отобранных из соображений разнообразия и красоты. Ответы на большинство вопросов приводятся непосредственно в тексте, но с одним решением читателям придется подождать до раздела «Ответы и решения».

Начну с игральных костей. Можно ли расставить на гранях двух кубов числа так, чтобы кубы были полностью отличны от стандартных игральных костей, но при этом их можно было использовать в любой игре, где требуются игральные кости, и исходы бросаний были бы такими же, как и в случае обычных игральных костей?

Насколько мне известно, первым, кто поставил и решил эту задачу, был полковник Джордж Зихерман из Буффало. Ответ на сформулированный выше вопрос утвердительный. Необыкновенная пара игральных костей изображена на рис. 126. Если предположить, что на каждой грани кости должно стоять положительное число, то это единственное

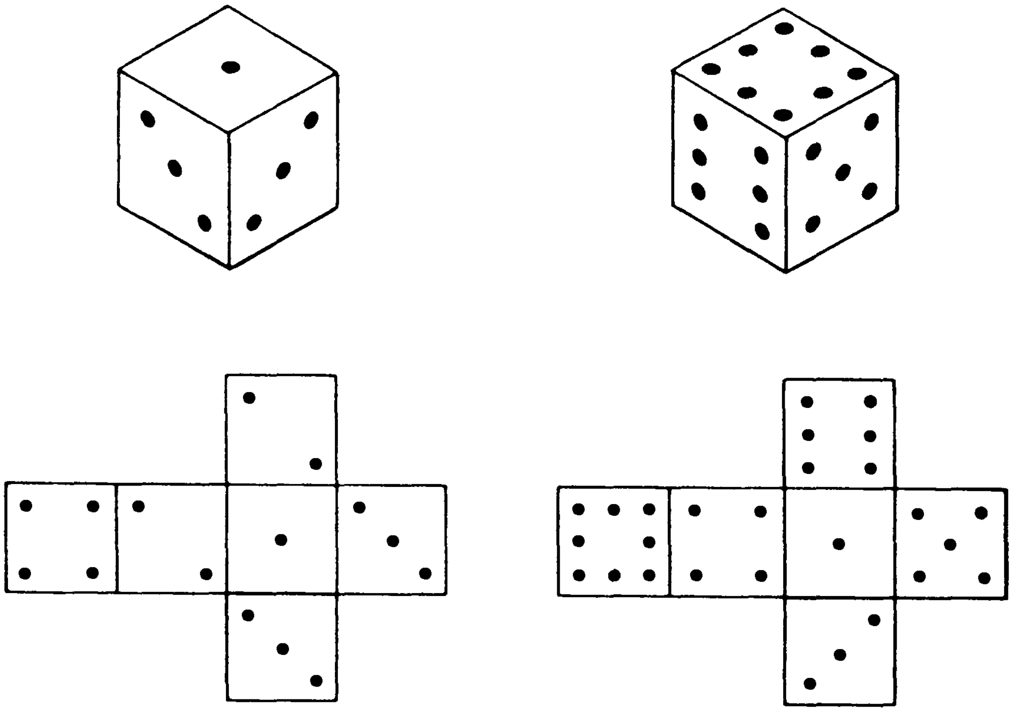


Рис. 126

Игральные кости Зихермана.

решение задачи. Каким образом шесть чисел распределены по граням кости, не имеет значения. Зихерман расположил числа так, что сумма чисел на противоположных гранях левой кости была равна пяти, а на противоположных гранях правой кости – девяти.

На рис. 127 слева приведена знакомая таблица, которая

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

2	3	3	4	4	5
4	5	5	6	6	7
5	6	6	7	7	8
6	7	7	8	8	9
7	8	8	9	9	10
9	10	10	11	11	12

Рис. 127

Число очков, выпадающих при бросании двух стандартных игральных костей (слева) и игральных костей Зихермана (справа).

показывает, каким образом каждая из сумм от 2 очков до 12 может выпасть при бросании двух обычных костей. Общее число комбинаций равно 36. Чтобы определить вероятность выпадения любой данной суммы n, подсчитаем, сколько раз число n встречается в таблице, и разделим полученное число на 36. Например, число 4 встречается в таблице три раза, поэтому вероятность выпадения четырех очков равна 3/36, т. е. 1/12. Соответствующая таблица для игральных костей Зихермана изображена на рис. 127 справа. Из этой таблицы видно, что вероятности выпадения любого числа очков остаются такими же, как для обычных игральных костей. Любое казино могло бы использовать кости Зихермана на столах, где ведется игра в кости, не меняя ставки и долю, удерживаемую с игроков в пользу игорного дома, хотя убедить посетителей в том, что при бросании двух костей Зихермана вероятность выпадения любого числа очков от 2 до 12 остается такой же, как при бросании двух обычных костей, было бы нелегко.

Доказать, что построить другой вариант таблицы (при условии, что на гранях костей стоят положительные целые числа) несложно, хотя для этого необходимо немного повозиться, и поэтому приводить здесь доказательство вряд ли уместно. Зихерман обнаружил также, что любые три кости с необычной «маркировкой» граней порождают такие же вероятности исходов бросаний, как три обычные кости, лишь при условии, если две из них совпадают с найденной им парой игральных костей. Например, пара костей Зихермана плюс одна обычная кость порождают такие же вероятности исходов, как три обычные кости, две пары костей Зихермана – как четыре обычные кости и т. д.

Стандартное расположение очков на западных игральных костях (сумма очков на противоположных гранях равна 7, если смотреть на кость с вершины, то на трех сходящихся в этой вершине гранях против часовой стрелки должно стоять соответственно 1, 2 и 3 очка) играет важную роль во многих задачах, фокусах и даже в нумерологических изысканиях. Четыре ребра каждой грани игральной кости соответствуют четырем временам года. Двенадцать ребер куба символизируют двенадцать месяцев. Три пары чисел на противоположных гранях дают в сумме одно и то же число, равное семи – числу дней в неделе. Если число $7 \times 7 \times 7$ прибавить к числу 7 + 7 + 7, то сумма окажется равной 343 + 21 = 364. Прибавив еще одну единицу (соответствующую одной игральной кости), мы получим 365 – число дней в году.

Игральную кость можно держать так, что будут видны 1, 2 или 3 ее грани. Можно ли повернуть игральную кость так, чтобы сумма очков на видимых гранях была равна любому числу от 1 до 15? Интересно, что единственным «несчастливым» числом, которое нельзя получить таким образом, является число 13. Умножив 13 на 4 (по числу вершин в одной грани), получим 52 – число недель в году и карт в колоде.

Карл Фульвес, фокусник, писатель и специалист по компьютерным наукам, недавно изобрел необычный экстрасенсный фокус, основанный на расположении чисел (очков) на гранях игральной кости. Фокусник вручает кому-нибудь из зрителей игральную кость, поворачивается к нему спиной и дает ему следующие наставления. Прежде всего кость необходимо положить на стол любой гранью вверх. Если число на верхней грани четно, то кость следует перекатить на четверть оборота к востоку (вправо). Если число на верхней грани нечетно, то кость следует перекатить на четверть оборота к северу (от себя). Эту процедуру надлежит повторять многократно, следуя правилу: поворот на четверть оборота на восток, если число очков на верхней грани четно, и на север, если число очков на верхней грани нечетно. Всякий раз, поворачивая игральную кость, зритель произносит вслух: «Поворот», но не сообщает фокуснику ни число очков, которое стояло на верхней грани в самом начале, ни последующие числа.

После нескольких ходов фокусник просит зрителя остановиться, как только на верхней грани окажется число 1, затем повернуть кость еще один раз (в соответствии с правилом) и затем сосредоточить все внимание на числе очков, которое окажется на верней грани. На первый взгляд кажется, что возможен любой из четырех случаев. Однако фокусник, не оборачиваясь, правильно называет число на верхней грани.

Секрет фокуса без особого труда можно раскрыть опытным путем. После самое большее трех перекатываний числа на верхней грани повторяются в циклической последовательности 1 – 4 – 5 – 6 – 3 – 2. Таким образом, за единицей на верхней грани всегда появляется четверка. После самое большее трех перекатываний вы можете с уверенностью попросить зрителя остановиться после того, как на верхней грани окажется единица. В действительности достаточно двух перекатываний за исключением тех случаев, когда в исходной позиции на верхней грани стоит шестерка, а на грани, обращенной к зрителю, пятерка.

Следующую комбинаторную задачу мне прислал несколько лет назад корреспондент из Швеции Кристер Линдштедт. Представьте себе куб $3 \times 3 \times 3$, составленный из 27 стандартных игральных костей. В такой конфигурации 54 пары чисел стоят на гранях, по которым кости примыкают друг к другу. Перемножим числа в каждой паре и сложим все 54 произведения. Какова минимальная сумма, достижимая при соответствующем расположении игральных костей? Какова максимальная сумма? Я не знаю ответа ни на один из этих вопросов и не думаю, что на подобные вопросы стоило бы пытаться ответить без помощи компьютера. Мне не известны даже максимальная и минимальная суммы для куба, составленного из восьми игральных костей. Наилучшие из найденных мной значений равны соответственно 306 и 40.

Существует одна малоизвестная шахматная задача, частный случай которой представляет собой замечательную проблему, общее решение которой пока не известно. Можно ли расставить на шахматной доске 5×5 пять ферзей одного и три ферзя другого цвета так, чтобы ни один ферзь одного цвета не находился под боем ферзя другого цвета? Нарисуйте на листке бумаги шахматную доску 5×5 и воспользуйтесь пешками или монетами вместо ферзей. Как ни удивительно, эта задача допускает единственное (с точностью до поворотов и отражений доски с ферзями) решение.

На той же шахматной доске 5-го порядка (доске, вдоль любой из сторон которой умещаются 5 полей) невозможно расставить 5 ферзей так, чтобы под боем не находилось более трех полей, или расставить 3 ферзя так, чтобы под боем не находилось более пяти полей. Это обстоятельство наводит на мысль о следующей более общей проблеме. Дана шахматная доска n-го порядка, на которой расставлено k ферзей одного цвета. Каково максимальное число не находящихся под боем полей при соответствующей расстановке ферзей? Разумеется, на «безопасных» (не находящихся под боем) полях можно расставить ферзи другого цвета, поэтому интересующая нас проблема эквивалентна задаче об определении максимального числа, например белых ферзей, которые можно расставить вместе с k черных ферзей на шахматной доске n-го порядка так, чтобы ни один ферзь одного цвета не атаковал ни одного ферзя другого цвета.

Для досок 1-го и 2-го порядков общая задача не имеет смысла. Нетрудно видеть, что на доске 3-го порядка ферзя можно поставить на угловое поле или на поле, примыкающее к краю доски, тогда безопасными остаются самое большее две клетки. Задача начинает становиться интересной при $n = 4$. Неизвестно, можно ли расставить k ферзей на досках порядка $n > 5$ более чем одним способом. Отыскание формы, дающей решение общей задачи, представляется делом весьма трудным (если не безнадежным).

Существуют десятки классических шахматных задач, в которых фигурирует конь. Некоторые из них приведены в гл. 14 моей книги «Математическое шоу» [19, 1*]. Скотт Ким предложил следующую задачу с конем, которую мне не доводилось видеть раньше. Можно ли расставить на стандартной шахматной доске 16 коней так, чтобы каждый конь держал под боем ровно 4 других коня? Красивое симметричное решение представлено на рис. 128. Тонкие черные линии, которыми показаны ходы конем, образуют проекцию остова гиперкуба.

В 1977 г. математик из Колорадского университета Ян Мыцельский обратился ко мне с вопросом, является ли новой следующая задача, которую предложил его коллега Ричард Дж. Лавер. Можно ли начертить на плоскости конечное множество одинаковых по своим размерам квадратов так, что каждая вершина каждого квадрата является также вершиной по крайней мере еще одного квадрата? Квадраты могут налегать друг на друга. Мыцельский построил множество из 576 квадратов, которое служит решением задачи, и поставил вопрос о том, нельзя ли уменьшить это число. Вскоре после этого Мыцельский сообщил, что одному его коллеге удалось найти решение с 40 квадратами, а двое других коллег независимо понизили число квадратов до 12 (рис. 129). Наконец, профессор компьютерных наук Колорадского университета Анджей Эренфойхт нашел решение с 8 квадратами.

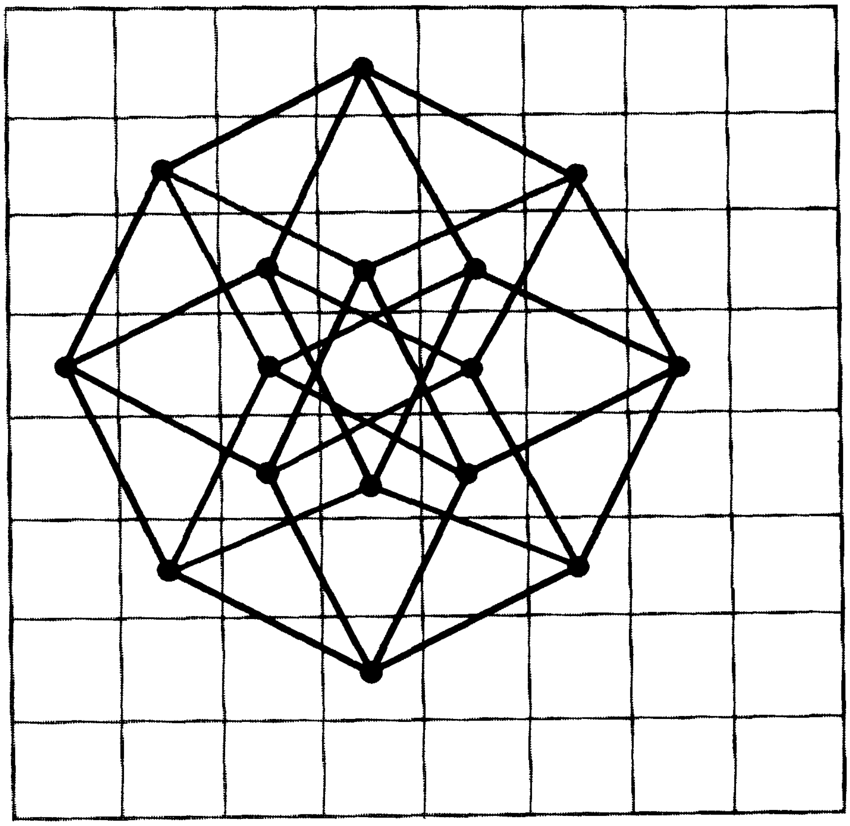


Рис. 128

Гиперкубическое решение задачи Кима о шахматных конях.

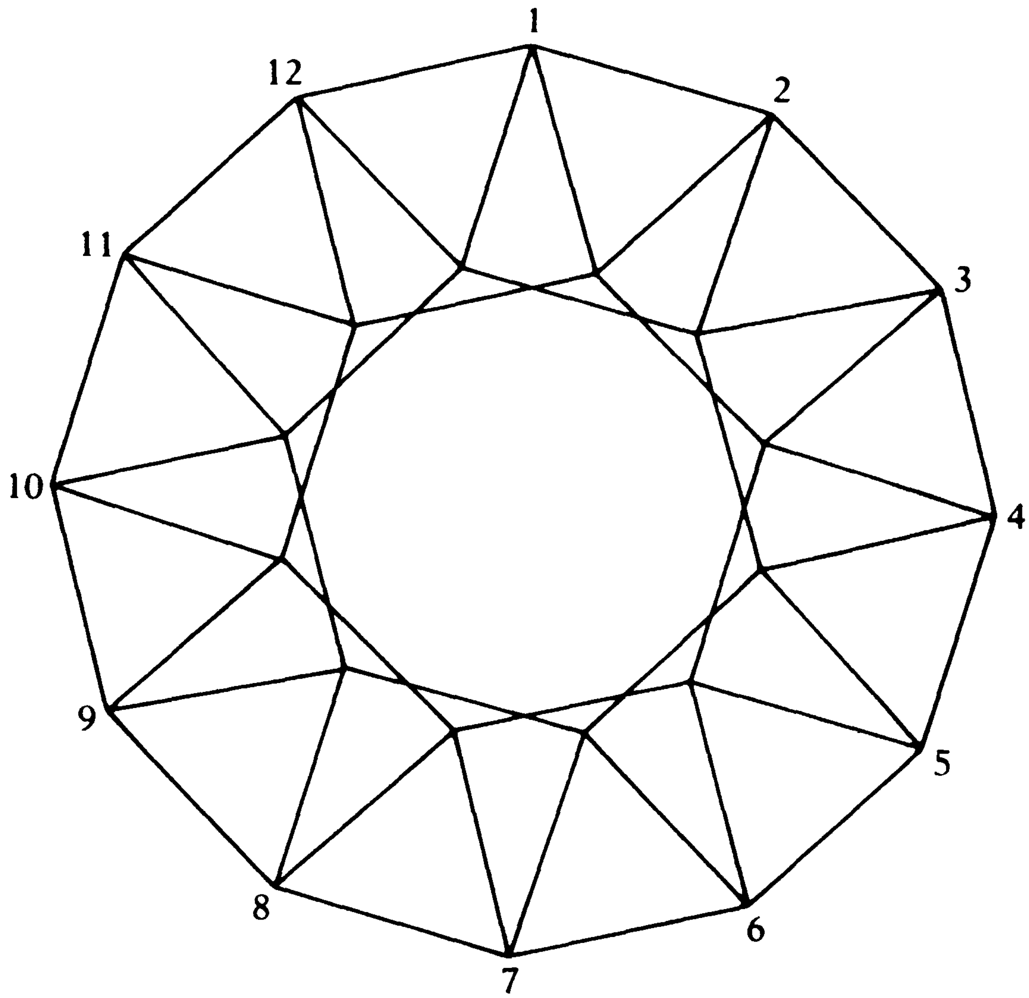


Рис. 129

Решение задачи Ричарда Дж. Лавера о 12 квадратах.

Я упомянул об этой задаче в разговоре с Кимом, ничего не сказав о приведенных выше результатах. Ким несказанно поразил меня, мгновенно ответив: «Для этого достаточно 8 квадратов». Разумеется, Ким помнил о своей задаче с 16 конями, которая позволяет решить задачу Лавера с 8 квадратами. Не подлежит сомнению, что решения с числом квадратов меньше 8 не существует, но я не располагаю доказательством этого утверждения. В трехмерном случае задача может быть решена тремя квадратами. На плоскости шесть одинаковых равносторонних треугольников можно расположить так, чтобы каждая его вершина принадлежала двум треугольникам, но ни одна сторона не принадлежала двум треугольникам (рис. 130). Решением служит проекция на плоскость четырехмерного политопа, известного под названием треугольной двойной призмы.

Дэвид Л. Сильверман, автор книги «Ваш ход» [19, 2] (великолепного собрания задач-головоломок на основе игр), изобрел еще одну новую игру на шахматной доске, которая

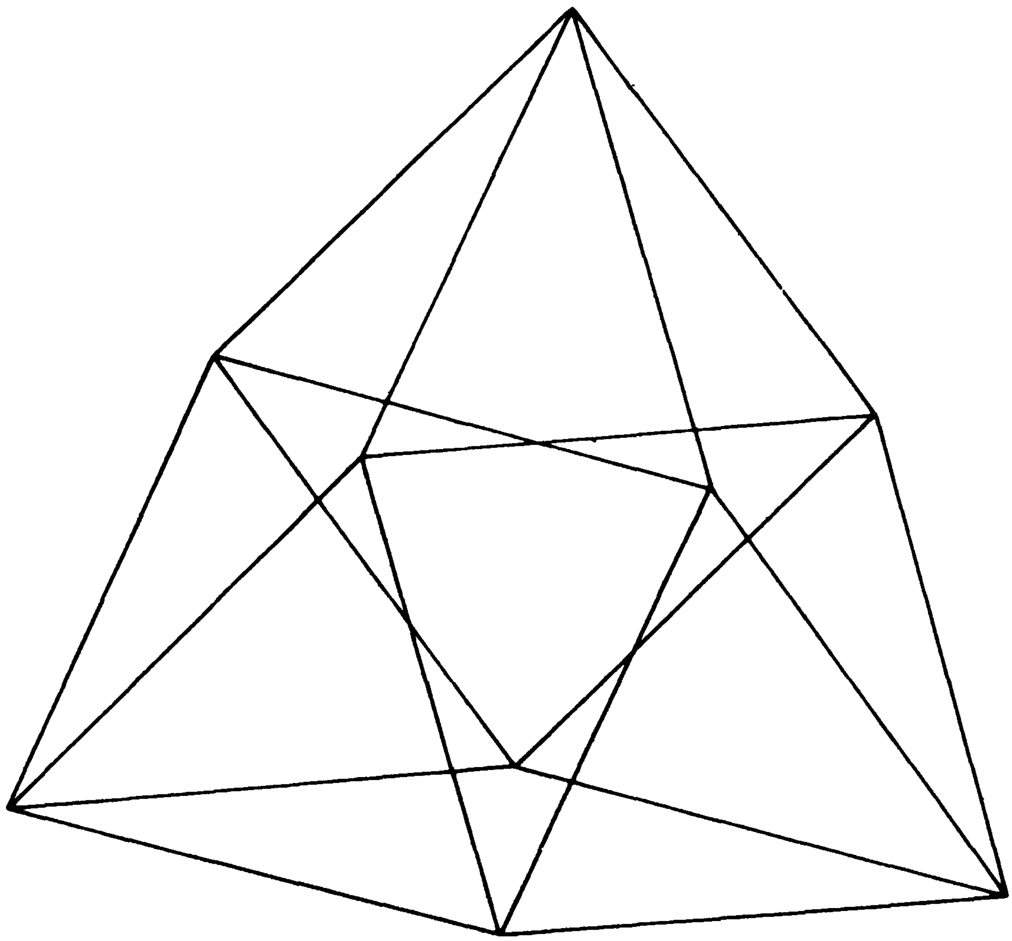


Рис. 130

Проекция четырехмерного политопа, дающая решение задачи о треугольниках.

не вошла в его книгу. Для игры требуется необычная фигура, которая получила название «амазонка». Амазонка сочетает в себе силу ферзя (именуемого в быту королевой) и коня. Играют в новую игру на обычной шахматной доске с двумя амазонками и запасом фишек. В качестве амазонок можно использовать и обычных ферзей, не забывая, что такие ферзи могут ходить и как кони.

Белые начинают игру, ставя свою амазонку на любое поле. В ответ черные ставят свою амазонку на любое свободное поле, которое не находится под боем другой амазонки. В дальнейшем игроки по очереди делают ходы, переставляя свои амазонки на любое свободное поле, не атакуемое другой амазонкой. Амазонка при этом не ходит, как ферзь или как конь. Игрок просто берет свою амазонку и переставляет ее на любое свободное поле, которому не угрожает другая амазонка. На освобождающееся поле ставится фишка. Поле с фишкой выбывает из игры (его в дальнейшем не может занимать ни одна амазонка), но атаке фишки не препятствуют. По мере того как продвигается игра, поля медленно, но верно заполняются фишками до тех пор, пока кто-нибудь из игроков, пытаясь сделать очередной ход, не обнаруживает, что ему некуда поставить свою амазонку. Выигравшим считается тот из игроков, кто делает последний ход.

Если в «Амазонку» Сильвермана играть на шахматной доске размером 5×5, то первый игрок сразу же обеспечивает себе выигрыш, делая амазонкой ход на центральное поле. Так как все остальные поля оказываются под боем, второй игрок не может выставить свою амазонку на доску. На стандартной шахматной доске второй игрок всегда может обеспечить себе выигрыш, если будет придерживаться разработанной Сильверманом остроумной парной стратегии. Игрок мысленно делит доску на четыре прямоугольника размером 8×2 и нумерует поля в каждом прямоугольнике так, как показано на рис. 131. (В каждом прямоугольнике любое из чисел от 1 до 8 встречается дважды.) После каждого хода белых черные просто занимают поле в том же прямоугольнике с тем же номером, как и поле, занятое белыми. «Амазонка» – великолепный пример необычайной мощи тривиальной парной стратегии, обеспечивающей выигрыш в игре, анализ которой на первый взгляд кажется

1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	1	2	3	4

Рис. 131

Парная стратегия в игре Сильвермана «Амазонка».

весьма трудным. Парная стратегия применима к игре на любой доске четного порядка больше 4. Нетрудно также придумать несколько более сложные стратегии, обеспечивающие выигрыш первому игроку, на всех досках нечетного порядка больше 5.

Росс Хонсберджер в своей книге «Математические жемчужины II» [19, 3*], коллекции задач-головоломок, не менее замечательной, чем та, которая была собрана в первой книге того же автора, впервые сообщил широкому кругу читателей о замечательном открытии математика из Кембриджского университета Джона Хортона Конуэя – «перепрыгивании шашек». Представим себе стандартную шахматную доску, разделенную пополам так, как показано на рис. 132. Нижняя половина закрашена в темный цвет, а горизонтали незакрашенной половины перенумерованы снизу вверх числами от 1 до 4. Мысленно надстроим доску еще одной горизонталью, поместив ее поверх четвертой горизонтали и обозначив номером 5. Если шашка прыгает за верхний край доски, то считается, что она прыгает на 5-ю горизонталь.

Все прыжки должны быть ортогональными, т.е. совершаться по горизонтали и вертикали, но не по диагонали. Как и в обычной игре в шашки, те из шашек, через которые

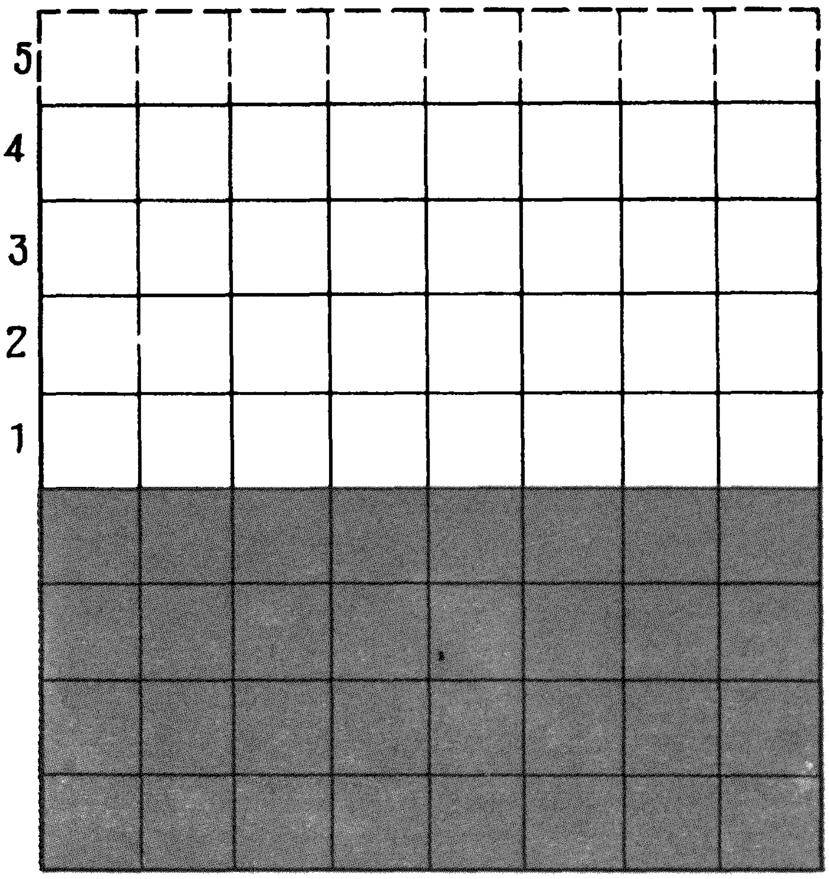


Рис. 132
Шашечная задача Джона Хортона Конуэя.

перепрыгивает другая шашка, «берутся», т. е. снимаются с доски. Задача состоит в том, чтобы определить минимальное число шашек, которые можно расставить на закрашенной в темный цвет половине доски так, чтобы после серии прыжков шашка «приземлилась» на n-й горизонтали.

Ясно, что двойка – минимальное число шашек, которое необходимо для того, чтобы пешка оказалась на 1-й горизонтали. Расставлены эти две шашки так, как показано на рис. 133 слева вверху. Четверка – минимальное число шашек, необходимое для того, чтобы попасть на 2-ю горизонталь. Расставлены они так, как показано на рис. 133 вверху справа. Нижняя шашка перепрыгивает на горизонталь 1, а затем самая левая шашка в два прыжка оказывается на 2-й горизонтали. Чтобы попасть на 3-ю горизонталь, восемь шашек следует расставить так, как показано на рис. 133 внизу слева. Таким образом, до сих пор каждое последующее минимальное число было вдвое больше предыдущего, но когда мы доходим до 4-й горизонтали, эта закономерность нарушается: чтобы попасть на 4-ю горизонталь, необходимо по крайней мере 2^0 пешек. Расставить их можно, например так, как показано на рис. 133 внизу справа. Стрелки показывают первую серию прыжков. Найти последующие прыжки, которые позволят достичь 4-й горизонтали, совсем нетрудно.

Сколько шашек необходимо для того, чтобы достичь 5-й горизонтали, т. е. чтобы одна шашка спрыгнула с доски? Поразительно, но при любой расстановке пешек на нижней половине доски (окрашенной в темный цвет) 5-я горизонталь остается недостижимой. В действительности ситуация еще более безнадежна: независимо от того, как далеко простирается темная часть доски вниз, влево или вправо, а также от количества пешек на ней, 5-я горизонталь остается недостижимой. Те из читателей, которым это покажется интересным, смогут ознакомиться с остроумным доказательством недостижимости 5-й горизонтали, предложенным Конуэем в гл. 3 книги Хонсберджера [19, 3*].

Обращаясь к игральным картам, мы обнаруживаем так много новых задач и фокусов, основанных на математи-

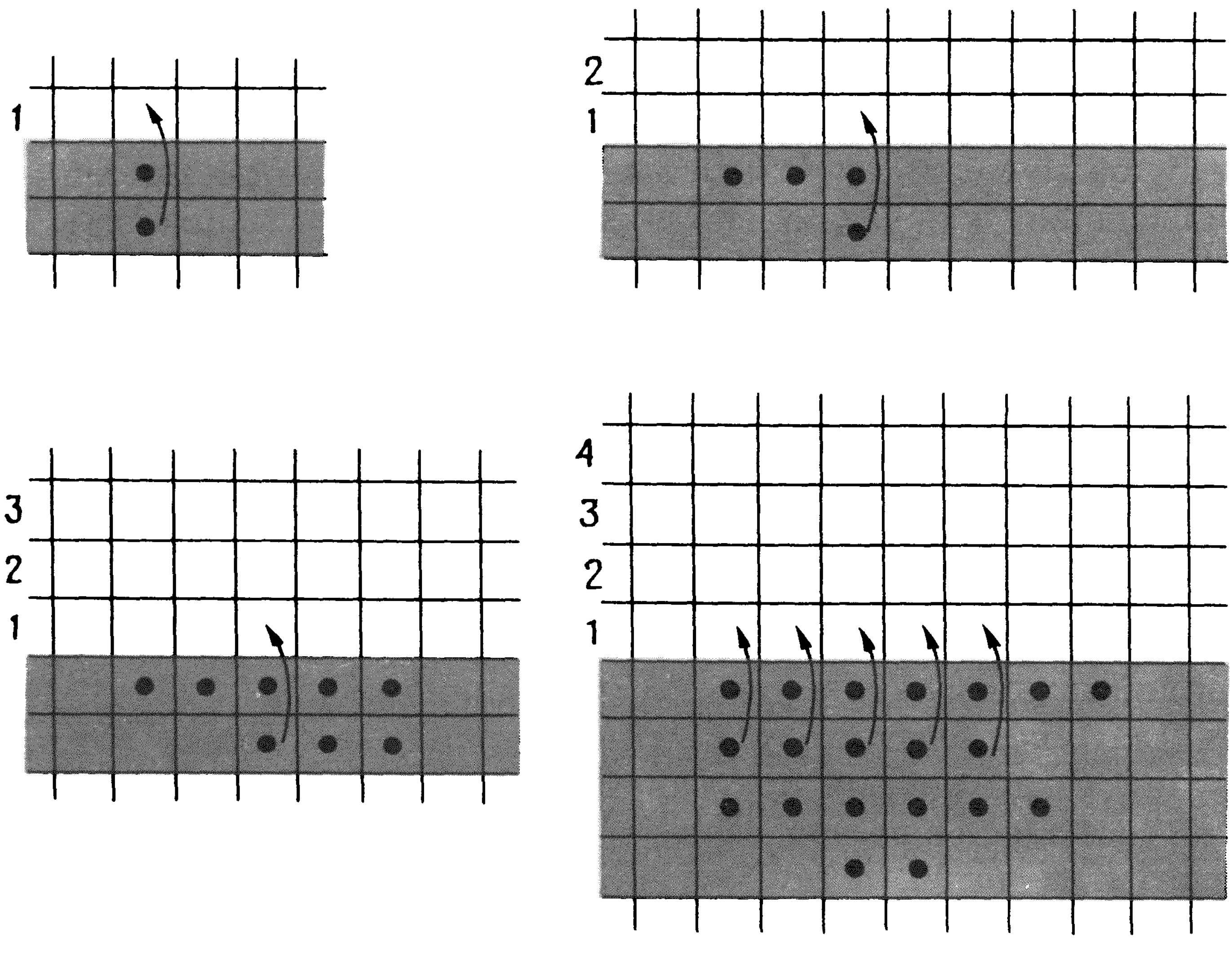


Рис. 133

Как пешке пройти в 1-, 2-, 3- и 4-й ряды.

ческих принципах, что мучительно жаль ограничиться из-за недостатка места лишь одной новацией. Несколько лет назад физик из Принстонского университета Мартин Крускал сделал необычное открытие, известное среди фокусников под названием принципа, или счета, Крускала.

Этот принцип лучше всего объяснить на примере карточного фокуса, к которому его впервые применил Крускал. Зритель тасует колоду карт и задумывает любое число от 1 до 10. Затем он медленно снимает по одной карте с верха колоды и выкладывает их стопкой лицевой стороной вверх. При этом зритель считает про себя, отмечая значение карты, на которую приходится задуманное число.

Предположим, что задумано число 7 и что седьмой картой оказывается пятерка. Не выдавая ничем себя, зритель продолжает сдавать карты, мысленно называя следующую карту первой, и продолжает считать по порядку от 1 до 5. Предположим, что пятая карта окажется десяткой. Как и прежде, он называет следующую карту первой и продолжает сдавать карты, считая про себя по порядку. Описанная нами процедура продолжается до тех пор, пока не будут сданы все 52 карты. Карты в конце каждого счета, определяющие, до которого числа зритель ведет счет в следующей серии карт, называются ключевыми картами. Последнюю ключевую карту зритель должен запомнить. Это – так называемая выбранная карта (карта, отобранная рандомизированной процедурой счета).

Разумеется, мало вероятно, что счет окончится на последней карте. Более вероятно, что закончить последний счет не удастся. Зритель должен снимать и выкладывать карты медленно, ритмично, ничем не выдавая моменты, когда сдает ключевые карты. Если последний счет не удается довести до конца, то зритель все равно должен запомнить последнюю ключевую карту, но, чтобы не выдать ее, продолжать сдавать карты до исчерпания колоды.

Для облегчения счета по рекомендации фокусника всем картам с картинками присваивается значение 5. Например, если счет заканчивается, скажем, на даме, то следующий счет ведется не до 12, а до 5. Типичная ситуация показана на рис. 134, на котором изображена типичная последовательность карт и указаны значения ключевых карт. Зритель начинает сдавать карты, задумав число 4. Выбранная карта,

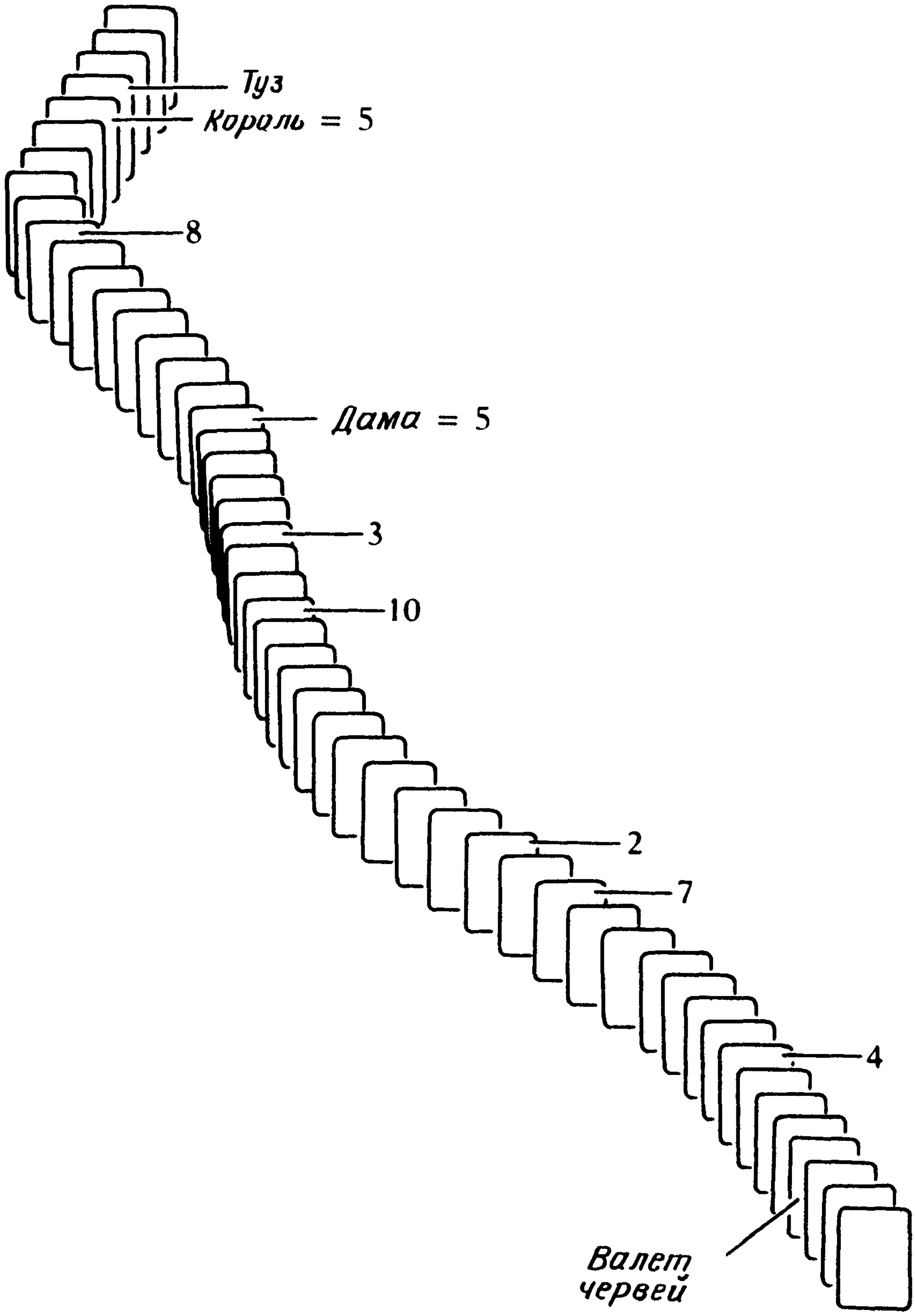


Рис. 134

Типичная последовательность карт для фокуса, основанного на принципе Крускала.

которую он запоминает,-червовый валет. Ее значение равно 5, но, поскольку после нее в колоде остается лишь три карты, последний счет остается незавершенным. Ясно, что описанная выше процедура, производимая с перетасованной колодой карт, может приводить к выбору любой из последних 10 карт.

После того как зритель закончит сдавать колоду и запомнит выбранную карту, фокусник берет колоду, извлекает из

10 последних карт одну и кладет ее вверх рубашкой на стол. Зритель называет свою карту. Фокусник переворачивает свою карту. *Вероятно*, она совпадает с выбранной картой.

Я специально попросил набрать слово «вероятно» курсивом, чтобы подчеркнуть одну особенность фокуса Крускала, отличающего его от всех остальных карточных фокусов, в которых фокусник находит выбранную карту. В фокусе Крускала фокусник в принципе не может указать выбранную карту с достоверностью. Вероятность того, что фокусник укажет выбранную карту, составляет величину около 5/6.

А теперь я хочу открыть читателям один прелюбопытный секрет. Пока зритель сдает карты, фокусник выбирает любую карту с малым значением из нескольких карт, которые были сданы первыми. Эту карту фокусник считает первым ключом в последовательности, которую он молча отсчитывает про себя, пока зритель ведет свой счет про себя. Противоречащее интуиции открытие Крускала состоит в том, что в пяти случаях из шести последняя ключевая карта, отсчитанная фокусником, совпадает с последней ключевой картой, отсчитанной зрителем! Иначе говоря, с вероятностью около 5/6 две произвольно начатые последовательности карт пересекаются на одной и той же ключевой карте. Как только это случается, обе последовательности далее совпадают.

Придание картам с картинками значения, равного 5, увеличивает число ключевых карт в средней последовательности и тем самым увеличивает вероятность пересечения. Начиная счет с той из начальных карт, которая имеет малое значение (вместо того, чтобы выбирать произвольное число от 1 до 10), фокусник тем самым немного увеличивает вероятное число ключевых карт в последовательности. Это немного повышает вероятность успеха. Если фокус проделывать с помощью перетасованных вместе двух колод, то вероятность неудачи становится необычайно малой.

Один из лучших вариантов фокуса Крускала был предложен Саем Энсфилдом из Лондона. Сначала фокус демонстрируется в обычном варианте, описанном выше, и подается как проявление телепатических способностей фокусника. Когда фокусник снимает выбранную (с вероятностью около 5/6) карту, он замечает карту, которая лежит непосредственно под ней. Если значение карты достаточно мало, чтобы начать другой счет, то фокусник молча продолжает свой счет и запоминает последнюю ключевую карту. Снятая карта в колоду не возвращается.

Затем фокусник вручает (не тасуя) колоду из 51 карты зрителю и просит того повторить всю процедуру, избрав другое начальное число. «На этот раз,– заявляет фокусник,– я попытаюсь назвать вашу карту, используя отпущенную мне силу предвидения». С этими словами фокусник записывает предсказание на листке бумаги, сворачивает его и откладывает в сторону. Разумеется, записывает при этом он ту карту, которую помнит. Поскольку последовательность карт в колоде не изменилась, эта карта (с той же вероятностью около 5/6) окажется второй выбранной картой.

Насколько можно судить, ничто не мешает запрограммировать компьютер так, чтобы он сыграл роль медиума или экстрасенса. В этом случае пятьдесят две перфокарты должны были бы носить названия игральных карт. Зритель тасует карты, выбирает карты с помощью принципа Крускала и вводит колоду в компьютер. Программа составлена с таким расчетом, что компьютер «угадывает» карту и одновременно запоминает карту, которая с наибольшей вероятностью может оказаться выбранной при повторении фокуса. Если первая догадка окажется правильной, то выбранная карта извлекается из компьютерной колоды и опыт повторяется с новым начальным числом. На этот раз компьютер печатает название карты, не просматривая колоду.

Даже компьютер иногда ошибается, но именно потому, что фокус Крускала удается не всегда, он производит особенно сильное впечатление. Когда Ури Геллер потерпел неудачу в телешоу Джонни Карсона (Карсон, в прошлом фокусник, тщательно контролировал все материалы прежде, чем появиться перед камерой), Мерв Гриффин заявил, что именно неудача убедила его в подлинности дара Геллера. «Фокусы получаются всегда»,– пояснил Гриффин. Все мы знаем, что «дар» приходит и уходит. Почему же в таком случае робот-экстрасенс должен владеть своим даром более безотказно, чем гуманоид?

Ответы и решения

Начнем с задачи о восьми игральных костях: составить из них куб так, чтобы сумма 12 произведений пар чисел на соприкасающихся гранях была (1) минимальна и (2) максимальна. Приведенные мной значения 40 и 306 оказались правильными. Уильям Функенбуш отметил, что если четыре игральные кости заменить зеркальными отражениями обычных игральных костей (как это принято в Японии), то минимальная сумма остается по-прежнему равной 40, а максимальная повышается до 308. Минимальное и максимальное решения представлены на рис. 135.

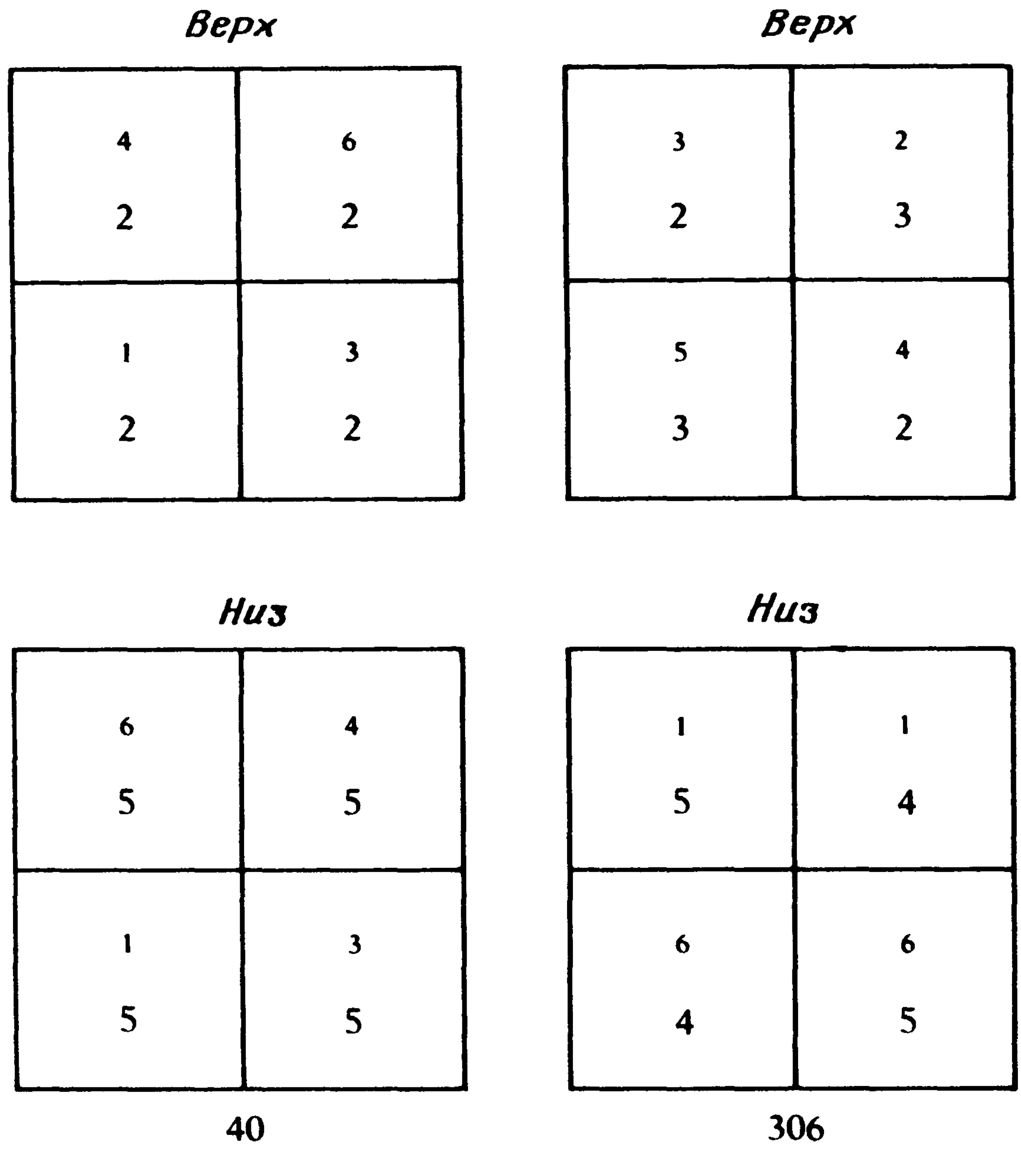


Рис. 135

Решения задачи о 8 игральных костях с минимальной (40) и максимальной (306) суммой произведений числа очков на 12 соприкасающихся гранях. Более крупными цифрами набрано число очков на верхней грани, более мелкими – на грани, обращенной на север.

6 5	5 6	4 5		2 1	2 1	3 1
5 4	2 6	3 6	*Верх*	4 1	2 1	2 3
3 5	1 4	1 5		4 1	6 2	6 3

5 4	6 5	6 4		2 4	1 4	1 4
3 1	6 4	4 5	*Середина*	2 4	2 6	4 2
1 4	2 1	2 4		6 4	6 2	6 3

4 2	6 3	6 2		1 5	1 5	3 5
3 1	4 1	5 3	*Низ*	4 5	5 4	2 6
1 2	2 1	3 2		4 5	4 6	6 5
	294				1028	

Рис. 136

Решение задачи о 27 игральных костях с минимальной (294) и максимальной (1028) суммой произведений числа очков на соприкасающихся гранях. Более крупными цифрами набрано число очков на верхней грани, более мелкими – на грани, обращенной на север.

В случае аналогичной задачи с 27 игральными костями минимальная сумма равна 294, а максимальная 1028. Соответствующие решения представлены на рис. 136. Минимум достигается в единственном (с точностью до двух возможных ориентаций центральной игральной кости) варианте строения куба. Первым решил эту трудную задачу Кеннет Джекмен, за ним последовали Леонард Лопов, Дэвид Ван-

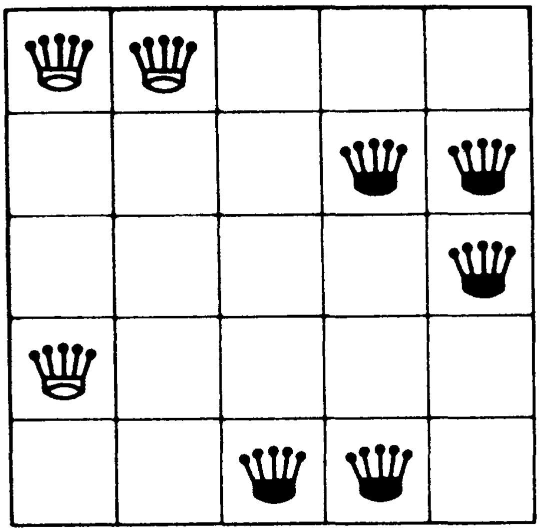


Рис. 137

Решение шахматной задачи.

дершель, Алан Катбертон и Пол Стивенс. Лопов и Вердершель решили задачу, не прибегая к помощи компьютера.

Шахматная задача на доске 5-го порядка имеет единственное (с точностью до поворотов и отражений) решение, представленное на рис. 137. В 1972 г. я опубликовал несколько иной вариант этой задачи в разделе «Математические игры» журнала «Scientific American». Позднее она была воспроизведена в моей книге [19, 4*]. В дополнении к гл. 17 я упомянул общую задачу о расстановке k ферзей на досках n-го порядка, при которой максимально число полей, не находящихся под боем. Общая задача остается нерешенной, но Рональд Грэхэм и Фан Чен из «Bell Labs» продолжают над ней работать и уже получили несколько удивительных результатов, которые будут опубликованы позднее.

Дополнение

В основном тексте я утверждал, что при замене обычных игральных костей костями Зихермана вероятности исходов в любых играх, связанных с бросанием костей, остаются неизменными, но это неверно. Например, Гэри Гудмен отметил, что при игре в триктрак дубли рассматриваются как особые случаи. Между тем вероятности дублей для игральных костей Зихермана отличаются от вероятностей дублей для обычных костей; невозможно даже выбросить дубль двойки. Уильям Функенбуш сообщил мне в письме, что даже в казино за теми столами, за которыми играют в кости, игральные кости Зихермана не могут быть использованы в ставках на выпадение некоторых сумм «в жестком варианте», т. е. на выпадение одинаковых чисел на обеих костях. Две такие ставки (на суммы 4 и 10 в жестком варианте) вообще невозможно сделать.

Многие читатели прислали алгебраические доказательства единственности игральных костей Зихермана, по существу совпадающие с доказательством самого Зихермана,– с помощью производящих многочленов и их единственной факторизации. В двух опубликованных статьях открытие Зихермана обобщалось на случай k игральный костей с m гранями каждая. Такие обобщенные кости можно моделировать с помощью платоновых тел, призм с m гранями, m-угольными волчками или урнами с m шарами. (См. работы «Перенумерация граней игральных костей» Дуэйн Бролайн [19, 5*] и «Циклотомические полиномы и нестандартные игральные кости» Джозефа Галлиана [19, 6*]. Позднее по существу те же результаты были повторно получены в работе «Игральные кости с правильными исходами бросаний» Льюисом Робертсоном, Раэ Шорттом и Стифеном Лендри [19, 7*].)

Можно ли так расставить целые положительные числа на гранях двух игральных костей, чтобы любая допустимая сумма очков выпадала с равной вероятностью? Эта задача также допускает единственное решение. См. главу об игральных костях моей книги «Математическое шоу» [19, 1*]. Фокус Карла Фульвеса с игральными костями описан в его книге «Возможности фаро» [19, 8*] (с. 33–34), опубликованной частным образом. В этой же книге приводится аналогичный, но более сложный фокус с игральными костями, в котором цикл достигает 24 шагов.

В основном тексте я упомянул о том, что мне не известно доказательство минимальности с восемью квадратами решения задачи о квадратах, каждая вершина которых совмещена с вершиной по крайней мере еще одного квадрата. Шерер из Германии нашел доказательство, правда, весьма длинное. Задача допускает обобщение на случай n-сторонних многоугольников в пространстве любого числа измерений, и несколько читателей прислали письма по поводу таких вариантов задачи. Эти обобщения погружают нас в увлекательнейшие детали структур политопов в пространствах высших размерностей. Политопы, проекции которых служат решениями задачи о размещении треугольников, принадлежат к классу так называемых политопов Гесса. Они рассмотрены в классическом труде Г. С. М. Кокстера «Регулярные комплексные политопы» [19, 9*], ныне доступном в издании фирмы «Dover» в мягкой обложке.

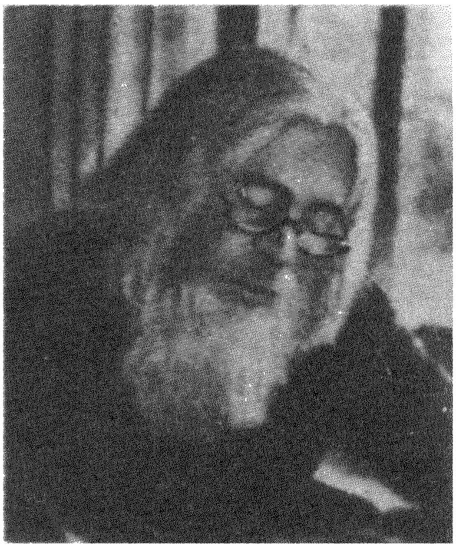
Теорема Конуэя о шашках была обобщена на случай трехмерного пространства Юджином Левайном и Ирой Папик в статье «Прыжки шашек в трех измерениях» [19, 10*]. Авторы показали, что пешка на кубической доске не может прыгнуть выше седьмого уровня.

Специалисты по карточным фокусам найдут описания фокусов на основе принципа Крускала в статьях, опубликованных в двух журналах для фокусников – в статье Карла Фульвеса и Мартина Гарднера «Принцип Крускала» [19, 11*] и в редактируемой Чарлзом Хадсоном колонке «Карточный уголок» журнала „The Linking Ring“, где со своими идеями выступил специалист по карточным фокусам из Чикаго Эд Марло. В этой же колонке (в декабре 1957 г. и в марте 1978 г.) обсуждались аналогичные карточные фокусы на основе так называемого принципа Крауса.

Перечитывая новеллу «Исчезновение лэди Фрэнсис Карфакс» в сборнике рассказов о Шерлоке Холмсе «Его последний поклон», я, к своему удивлению, обнаружил следующиее замечание Шерлока Холмса, которое, по-видимому, предвосхищает принцип Крускала: «Если вы следуете двум различным линиям рассуждений, Ватсон, то непременно обнаружите точку пересечения, которая должна лежать недалеко от истины».

Глава 20

Логические задачи Рэймонда Смаллиана



Позвольте представить вам профессора Смаллиана, который докажет, что либо он не существует, либо вы не существуете, но кто именно существует, вам не известно.

Из речи Мелвина Фиттинга, *представлявшего Рэймонда Смаллиана в клубе студентов-математиков*

Книга Рэймонда М. Смаллиана «Как же называется эта книга?» [20, 1*] – одна из самых оригинальных, глубоких и занимательных коллекций задач по занимательной логике, которая когда-либо была написана. В ней собрано более 200 новеньких, «с иголочки», задач, составленных хитроумнейшим автором и пересыпанных математическими шуточками, забавными анекдотами и головоломными парадоксами. Кульминацией книги можно считать замечательную серию рассказов-задач, вводящих читателя в самую суть эпохальной работы Курта Гёделя о неразрешимости.

Кто такой Смаллиан? Он родился в 1919 г. в Нью-Йорке, изучал философию у Рудольфа Карнапа в Чикагском университете и получил степень доктора философии в Принстонском университете. В настоящее время Смаллиан профессор философии в Университете штата Индиана (г. Блумингтон) и заслуженный профессор математики и философии в колледже Лемана и Центра аспирантуры университетского колледжа Нью-Йорка.

Среди специалистов по логике, теории рекурсивных функций, теории доказательства и искусственному интеллекту Смаллиан пользуется наибольшей известностью как автор двух изящных небольших монографий «Логика первого порядка» [20, 2*] и «Теория формальных систем» [20, 3*]. Статья Смаллиана в «Философской энциклопедии» о знаменитой гипотезе континуума Георга Кантора – шедевр сжатого и ясного изложения. В 1977 г. издательство «Harper & Row» выпустило первую нематематическую книгу Смаллиана «Тао безмолвствует» [20, 7] – одно из лучших введений в таоизм, которое мне доводилось видеть.

К числу основных увлечений Смаллиана относятся музыка (он вполне профессиональный пианист-классик), фокусы (в юности Смаллиан иногда подрабатывал, выступая с показом фокусов) и шахматы. Недавно он закончил работу над двумя собраниями замечательных шахматных задач «Шахматные истории о Шерлоке Холмсе» [20, 1] и «Шахматные истории из „Тысячи и одной ночи“» [20, 2], в которых каждая задача органически вплетена в беллетризованные истории. Добавьте к блестящему литературному стилю необычайно развитое чувство юмора и кэрролловскую любовь к парадоксам, и вы получите представление о том, что так привлекает читателя в книге «Как же называется эта книга?».

Книга открывается подлинной историей, которая вводит одну из излюбленных тем Смаллиана. Когда Смаллиану было шесть лет, его старший брат Эмиль сказал ему 1 апреля, что одурачит его так, как еще никто не одурачивал. Весь день маленький Смаллиан был настороже, ожидая розыгрыша, и вечером, лежа в постели, никак не мог заснуть по той же причине. Наконец, Эмиль открыл свой секрет: Рэймонд ожидал, что его одурачат, а Эмиль этого не сделал и поэтому одурачил своего младшего брата.

«Помнится, в тот день я долго еще ворочался в постели после того, как мама выключила свет, и ломал голову над тем, оставил меня брат в дураках или не оставил,– пишет Смаллиан.– С одной стороны, если брат меня не одурачил, то я не получил того, что мне было обещано, и, следовательно, остался в дураках... Но с тем же основанием можно утверждать, что если брат меня одурачил, то я *получил* обещанное, и тогда не понятно, в каком смысле меня следует считать оставшимся в дураках. Как же все-таки обстоит дело: одурачил меня брат или не одурачил?

Я не стану сейчас отвечать на этот вопрос. В нашей книге мы еще не раз вернемся к нему в той или иной форме».

После вводного раздела, посвященного некоторым «добрым знакомым» – классическим логическим задачам-головоломкам, излагаемым иногда под новым, несколько неожиданным углом зрения, Смаллиан знакомит читателя с тремя типами персонажей большинства последующих задач: с рыцарями, говорящими всегда только правду, с лжецами, изрекающими всегда только ложь, и с нормальными людьми, которые в одних случаях говорят правду, а в других лгут.

Поразительно, как много можно извлечь всего лишь из нескольких строк диалога между этими персонажами. Например, однажды в бытность свою на острове, населенном только рыцарями и лжецами, Смаллиан повстречал двух местных жителей, отдыхавших под деревом, и спросил одного из них: «Кто-нибудь из вас рыцарь?». Когда островитянин (обозначим его A) ответил, Смаллиан узнал то, что хотел узнать. Кто такой A – рыцарь или лжец? Кто другой островитянин?

На первый взгляд кажется, что для решения задачи имеющейся информации недостаточно, но ключом к решению служит следующее замечание: ответ островитянина A позволил Смаллиану узнать то, что требовалось. Если бы A ответил утвердительно, то Смаллиан ничего не узнал бы. (Если A – рыцарь, то один или оба островитянина могли бы быть рыцарями, а если A – лжец, то оба островитянина могли бы быть лжецами.) Следовательно, островитянин A должен был ответить отрицательно. Но если бы A был рыцарем, то он должен был ответить утвердительно, а поскольку A ответил отрицательно, он должен быть лжецом. Так как A – лжец, его отрицательный ответ ложен. Следовательно, по крайней мере один из островитян должен быть рыцарем. Таким образом, другой островитянин – рыцарь.

Вскоре среди персонажей книги появляется Алиса Льюиса Кэрролла. Мы встречаем ее в тот момент, когда она заблудилась в Лесу Забывчивости и не может вспомнить, какой сегодня день недели (см. гл. 3 «Сквозь Зеркало, и что там увидела Алиса» Льюиса Кэрролла). В лесу Алиса встречает Льва и Единорога. Лев лжет по понедельникам, вторникам и средам, а Единорог – по четвергам, пятницам и субботам. В остальные дни недели Лев и Единорог говорят только правду. «Вчера был один из дней, когда я лгу»,– заявляет Лев. «Вчера был один из дней, когда я тоже лгу»,– говорит Единорог. Алиса, не уступающая остротой разума Смаллиану, сумела вывести, какой день недели был вчера. Какой?

Затем появляются новые персонажи из Зазеркалья: братцы Траляля и Труляля, Белый Король, Шалтай-Болтай и Бармаглот. Траляля ведет себя как Единорог, а Труляля – как Лев. После того как Алиса решает серию задач, основанную на разговоре между Траляля и Труляля, Шалтай-Болтай открывает ей страшную тайну: в Зазеркалье существует еще и третий братец, неотличимый по виду от Траляля и Труляля, и зовут его Трулюлю. Трулюлю всегда лжет. Алиса серьезно обеспокоена, потому что все ее предыдущие умозаключения могут оказаться ложными. С другой стороны, Шалтай-Болтай может лгать, и Трулюлю может не существовать. Смаллиан приводит четыре версии того, что происходит дальше, и просит читателя заключить, какая из версий правильна и существует или не существует Трулюлю.

Затем читатель переносится в комедию Шекспира «Венецианский купец» и приглашается к решению знаменитой задачи о трех шкатулках – золотой, серебряной и свинцовой – с различными надписями, которую Порция предлагает своим поклонникам. Портрет Порции находится лишь в одной шкатулке, и если поклонник правильно угадает шкатулку с портретом, то Порция отдаст ему свою руку и сердце. (Не все знают, что Порция подсказывает своему возлюбленному, напевая:

«С кем пойду я под венец?
С тем, кто будет молодец».

Последние слова в этих двух строчках рифмуются со словом

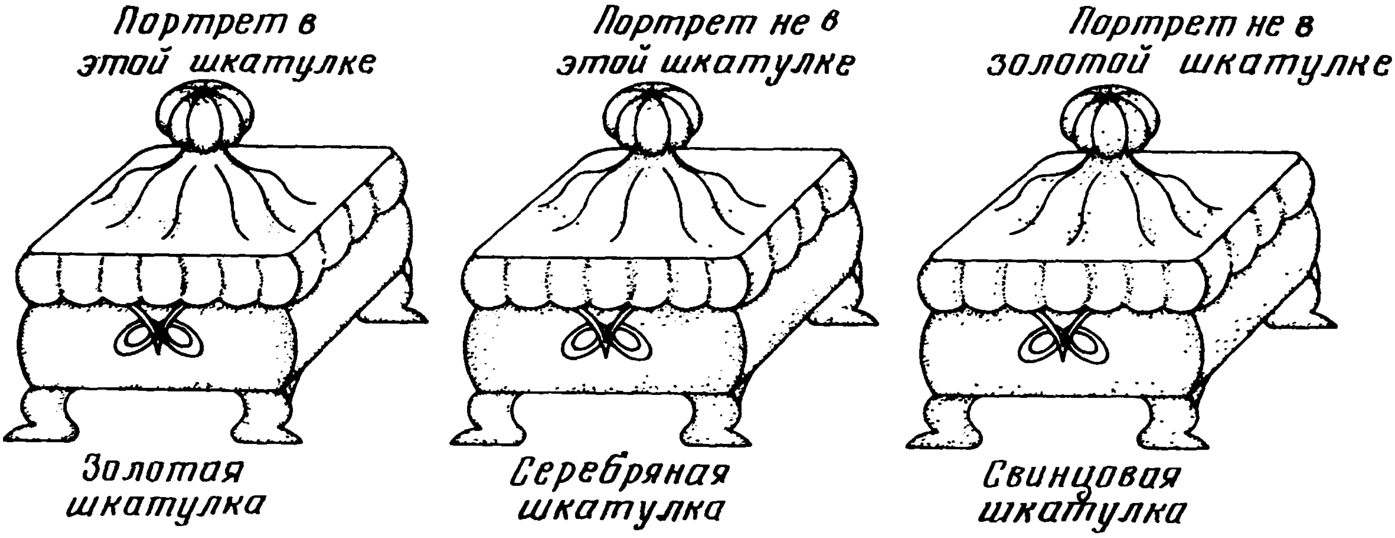


Рис. 138

Первое испытание с шкатулками, придуманное Порцией.

«свинец», что и подсказывает избраннику Порции правильный выбор шкатулки.)

Изменяя надписи на шкатулках, Смаллиан создает серию замечательных задач, которые подводят читателя все ближе и ближе к теореме Гёделя. Первую из этих задач вы видите на рис. 138. Порция, которая никогда не лжет, объясняет своему поклоннику, что истинна самое большее одна надпись. Какую шкатулку ему следует выбрать?

Смаллиан придумывает замечательные вариации на тему шкатулок Порции. В некоторых задачах на каждой шкатулке имеются по две надписи. Мы узнаем также, что шкатулки делают два мастера – Беллини, помещающий на шкатулках своей работы только правдивые надписи, и Челлини, помещающий на своих шкатулках только ложные надписи.

Рассмотрим еще одну задачу со шкатулками, изображенную на рис. 139. Надпись на крышке золотой шкатулки гласит: «Портрет не в этой шкатулке». На крышке серебряной шкатулки читаем: «Ровно одно из двух высказываний, выгравированных на крышках, истинно». Эти две надписи представляют собой логическую дилемму, имеющую огромное значение в истории современной семантики. Поклонник Порции рассуждает следующим образом. Если истинна надпись на серебряной шкатулке, то надпись на золотой шкатулке ложна. Если надпись на серебряной шкатулке ложна, то надписи либо обе истинны, либо обе ложны. Они не могут быть обе истинны, если надпись на

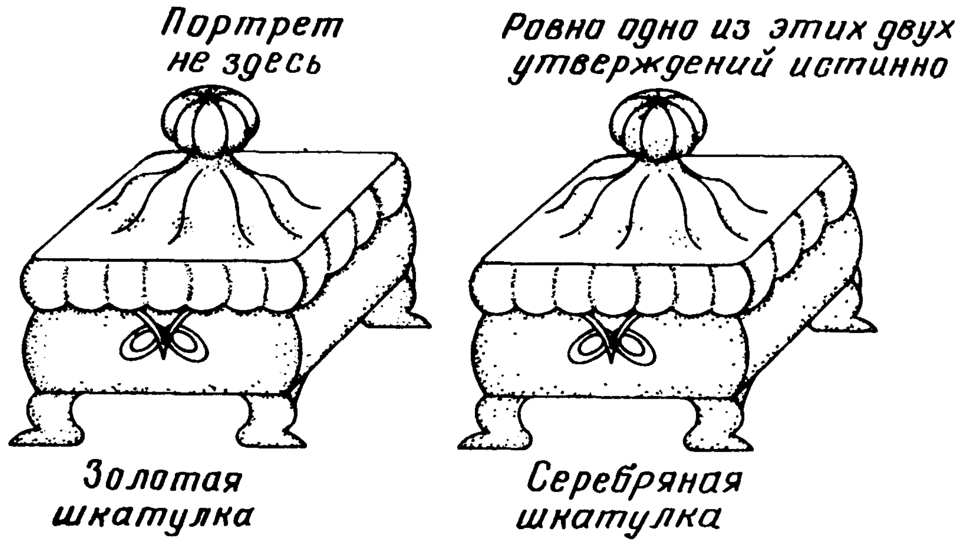


Рис. 139

В какой из шкатулок находится портрет Порции?

серебряной шкатулке ложна, и поэтому обе надписи ложны. И в том, и в другом случае надпись на золотой шкатулке ложна. Следовательно, портрет должен быть в золотой шкатулке. Поклонник с торжеством открывает золотую шкатулку, но к своему ужасу обнаруживает, что она пуста. Портрет находится в другой шкатулке. Где ошибка в его рассуждениях?

Ошибку поклонник Порции совершает, когда предполагает, что высказывание, выгравированное на крышке серебряной шкатулки либо истинно, либо ложно. Эта задача Смаллиана знакомит нас с современной концепцией метаязыков. Значения истинности высказываний конкретного языка допустимо обсуждать только в более широком языке, или метаязыке, содержащем первый в качестве своего подмножества. Если же язык утверждает что-либо относительно значений истинности своих высказываний, то в результате часто возникает логическое противоречие. Без метавысказываний относительно истинности или ложности надписей на крышках шкатулок или информации о том, как связаны между собой эти значения истинности, надписи могут оказаться бессмысленными.

Затем на страницах книги Смаллиана появляется инспектор Скотланд-Ярда Лесли Крэг, и Смаллиан знакомит нас с серией загадочных дел, расследованных инспектором, которые могут быть разрешены с помощью дедуктивных умозаключений. Наиболее просто первое из дел.

На складе совершено крупное хищение. Преступник (или преступники) вывез награбленное на автомашине. Подозрение пало на трех преступников-рецидивистов *A*, *B* и *C*, которые были доставлены в Скотланд-Ярд для допроса. Было установлено следующее:

1) Никто, кроме *A*, *B* и *C*, не был замешан в хищении.

2) *C* никогда не ходит на дело без *A* (и возможно, других соучастников).

3) *B* не умеет водить машину.

Виновен или не виновен *A*?

Последующие страницы своей книги Смаллиан отводит практическим советам о том, как уберечься от оборотней, выбирать невесту, защищать себя на суде и жениться на дочери короля. Пусть, например, вы хотите убедить завидную невесту, питающую в силу каких то непостижимых причин неодолимую симпатию к лжецам, в том, что вы богатый лжец. (Вы должны быть богатым или бедным.) Можете ли добиться желаемого с помощью одной-единственной фразы? Да, для этого вам необходимо лишь сказать: «Я бедный лжец». Невеста сразу же поймет, что вы не можете быть рыцарем, так как рыцарь не мог бы лгать и утверждать, что он бедный лжец. Поскольку вы лжец, ваше высказывание должно быть ложно. Следовательно, вы богатый лжец. Предположим, что невеста на выданьи питает симпатию только к рыцарям. Какая фраза убедит ее в том, что вы богатый рыцарь?

Следующий раздел посвящен логическим задачам, основанным на условных высказываниях вида «Если *P* истинно, то *Q* истинно». Высказывания *P* и *Q* связаны между собой отношением импликации, правильная интерпретация которого имеет первостепенное значение для понимания исчисления высказываний. Смаллиан умело обыгрывает известные парадоксы импликации, а затем приводит 18 остроумных логических задач, непреодолимых для тех, кто не достиг уверенного владения законами логики.

Затем мы вступаем на остров Ваал – единственное место на Земле, где некий жрец знает ответ на архиважный метафизический вопрос: «Почему на свете вообще существует нечто, а не ничто?» На острове обитают только рыцари и лжецы. После серии встреч с обитателями острова Ваал Смаллиан доказывает, что остров существовать не может.

Доказательство несуществования неприменимо к следующему острову, который посещает Смаллиан,– острову зомби. Отличить зомби, которые всегда лгут, от людей, которые всегда говорят правду, нелегко. Ситуация осложняется еще больше тем, что на все вопросы, допускающие ответы типа «да – нет», островитяне отвечают «бал» или «да», но, к сожалению, не известно, какое из этих слов означает по-нашему «да» и какое «нет». Предположим, что вы спрашиваете островитянина, означает ли «бал» по-нашему «да», и он отвечает: «Бал». Вы не можете определить, что означает «бал», но можете ли вы сказать, кто встретившийся вам островитянин – зомби или человек? Можно ли выяснить, что означает по-нашему «бал» с помощью одного-единственного вопроса, допускающего ответ типа «да – нет»?

Не менее странные существа населяют и Трансильванию, куда переносит читателя воображение Смаллиана. Обитающие здесь люди (которые всегда говорят правду) внешне ничем не отличаются от вампиров (которые всегда лгут). К тому же половина трансильванцев не в своем уме. Спятившие с ума трансильванцы считают все истинные высказывания ложными и все ложные высказывания истинными. Всего, таким образом, существуют четыре типа трансильванцев: люди в здравом рассудке, люди не в своем уме, вампиры в здравом рассудке и вампиры, спятившие с ума. Любое высказывание человека в здравом рассудке истинно, а любое высказывание человека, спятившего с ума, ложно. Наоборот, любое высказывание вампира в здравом рассудке ложно, а любое высказывание вампира, находящегося не в своем уме, истинно. К счастью, в Трансильвании на все вопросы отвечают на понятном всем языке. Как с помощью одного вопроса, допускающего ответ типа «да – нет», можно определить, является ли трансильванец вампиром? Как с помощью одного вопроса, допускающего ответ типа «да – нет», можно определить в своем ли он разуме?

Смаллиан жаждет выяснить, жив ли граф Дракула Задунайский, и с этой целью задает вопросы различным трансильванцам. Читатель должен делать выводы из приводимого в тексте диалога. Этот раздел книги Смаллиана завершается описанием грандиозного бала в замке графа Дракулы Задунайского, где в довершение всего присутствующие отвечают на все вопросы «бал» или «да», как на острове зомби. В результате отважному путешественнику приходится ломать голову над тремя вопросами. В своем ли разуме его собеседник? Человек ли он? Что означает «бал»? В конце концов Смаллиан обнаруживает, что граф Дракула жив, но спятил с ума.

Одна глава книги называется «Как доказать что угодно». Вдохновленный примером великих софистов из диалога Платона «Евтидем», в котором один из собеседников доказывает другому, что отец того – пес, Смаллиан рассматривает различные методы, позволяющие доказывать (или по крайней мере создавать видимость доказательства) что угодно, например существование Бога, черта, единорогов, Деда Мороза и т. д. Один из методов заимствован из традиционного онтологического доказательства существования Бога. Некоторые другие представляют собой варианты одного тонкого метода, открытого специалистом по математической логике Дж. Беркли Россером.

Рассмотрим, например, следующее утверждение: «Если это утверждение истинно, то Дед Мороз существует». Смаллиан пишет: «Если наше утверждение истинно, то Дед Мороз заведомо существует (потому что если это утверждение истинно, то должно быть верно, что если это утверждение истинно, то Дед Мороз существует, из чего следует, что Дед Мороз существует). Следовательно, то, о чем говорится в утверждении, верно, поэтому утверждение истинно. Значит, утверждение истинно, а если оно истинно, то Дед Мороз существует. Следовательно, Дед Мороз существует». Рассуждение неверно, но без понимания роли метаязыков объяснить, в чем здесь дело, не так-то просто.

Предпоследняя глава знакомит читателя с известным парадоксом лжеца («Это утверждение ложно») в различных вариантах и облачениях. Некоторые из наиболее глубоких парадоксов логики и теории множеств Смаллиан излагает в такой форме, которая делает их более понятными, чем когда-либо прежде. Вот, например, как Смаллиан объясняет знаменитый парадокс, известный под названием парадокса Ришара, т. е. самую основу доказательства теоремы Гёделя о неразрешимости.

У некоего математика имеется «Книга множеств». На каждой странице этой книги математик выписывает целые положительные числа или приводит описания каких-то подмножеств натуральных чисел. Страницы книги перенумерованы последовательными целыми числами. Если число *n* не записано на *n*-й странице, то оно называется ординарным (обыкновенным). Рассмотрим множество всех ординарных чисел. Предположим, что это множество описано на некоторой странице «Книги множеств». Номер страницы не может быть ординарным числом, так как если бы номер был ординарным числом, то он стоял бы на той же странице и, следовательно, был бы экстраординарным числом. С другой стороны, он не может быть и экстраординарным числом, так как если бы он был экстраординарным числом, то должен был бы стоять на той же странице, а по предположению на странице выписаны только ординарные числа. Противоречие, к которому мы приходим, вынуждает нас отказаться от предположения о том, что множество ординарных чисел может быть описано в «Книге множеств». Следовательно, существует множество положительных целых чисел, которое не может быть описано в «Книге множеств».

Теперь мы уже располагаем всем необходимым для того, чтобы по достоинству оценить кульминационную – последнюю – главу в книге Смаллиана, посвященную теореме Гёделя. Насколько мне известно, это самое блестящее введение в круг идей, ставших великим водоразделом в истории исследований по основаниям математики. Со времен Лейбница математики мечтали о том, что когда-нибудь всю математику удастся объединить в рамках обширной системы, что позволит доказывать или опровергать любое утверждение. Лейбницу удалось превратить мечту математиков в предмет философских диспутов. «Если бы возникли какие-то разногласия,– писал Лейбниц,– то спор между двумя философами был бы ничуть не более необходим, чем спор между двумя бухгалтерами. Ибо им достаточно было бы взять в руки грифели, сесть за свои грифельные доски и сказать друг другу (пригласив, если угодно, приятелей в качестве свидетелей): «Давайте посчитаем».

Несбыточность мечты стала окончательно ясной в 1931 г., когда вышла в свет работа Гёделя. В этой работе 25-летний Гёдель показал, что дедуктивная система

«Principia Mathematica» Норта Уайтхеда и Бертрана Рассела, а также родственных систем, например стандартной теории множеств, содержат неразрешимые утверждения, т. е. такие утверждения, которые истинны, но истинность которых не может быть доказана в рамках системы. Точнее говоря, Гёдель показал, что если такая система, как система «Principia Mathematica», удовлетворяет некоторым разумным условиям (самосогласованности, т. е. непротиворечивости), то можно построить утверждения, которые окажутся неразрешимыми. Гёдель доказал также, что если такая система непротиворечива, то невозможно доказать ее непротиворечивость, оставаясь в рамках самой системы.

Результаты Гёделя применимы к любой дедуктивной системе, достаточно богатой для того, чтобы содержать арифметику. Даже в обычной арифметике существуют утверждения, которые истинны, но недоказуемы. (Очень простые системы, такие, как арифметика без умножения, не содержат никаких неразрешимых утверждений.) Кроме того, невозможно доказать непротиворечивость арифметики, оставаясь внутри арифметики.

Разумеется, можно расширить арифметику, добавив новые аксиомы, так, чтобы расширенная система позволяла доказывать любое прежде не разрешимое утверждение. Увы, в расширенной системе ситуация столь же безнадежна, как и в исходной арифметике. Повторяя рассуждения Гёделя, можно показать, что расширенная система содержит новые неразрешимые утверждения и что непротиворечивость расширенной системы не может быть доказана в рамках этой системы. Построение все более широких систем можно продолжать неограниченно, но при этом никогда не удастся достичь уровня, при котором все неразрешимые утверждения будут изгнаны из системы или доказательство непротиворечивости системы станет возможным в рамках самой системы.

В арифметике существует одна знаменитая нерешенная проблема, называемая гипотезой Гольдбаха. Она утверждает, что любое четное число большее 2 представимо в виде суммы двух простых чисел. Никто не доказал гипотезу Гольдбаха и никто не опроверг ее, построив контрпример. Возможно, что гипотеза Гольдбаха неразрешима в смысле Гёделя. Если это так, то гипотеза Гольдбаха верна, но недоказуема в рамках арифметики. Гипотеза Гольдбаха верна, так как если бы она была ложна, то существовал бы контрпример, а в этом случае гипотеза была бы разрешимой.

Еще более тревожным аспектом этой ситуации является невозможность конструктивного доказательства того, что в один прекрасный день математики, занимающиеся теорией чисел, не найдут арифметического доказательства правильности гипотезы Гольдбаха и ... ее ложности! Математики надеются и верят, что такое никогда не случится ни с одной арифметической теоремой потому, что если бы такая теорема нашлась, то она означала бы крушение арифметики, да и всей математики. (Нетрудно показать, что если дедуктивная система, в которой возможны доказательства от противного, содержит хотя бы одно противоречие, то в такой системе становится доказуемым любое утверждение.) Математики-платоники, которые считают аксиомы арифметики истинными, а правила вывода правильными, не имеют таких хлопот, ибо считают, что никакие противоречия возникнуть не могут. Однако у чисто конструктивных формалистов таких гарантий не существует.

Утверждения, неразрешимые в смысле Гёделя, неразрешимы только в рамках данной системы. Появившиеся в 1936 г. работы А. М. Тьюринга и Алонзо Черча установили, что существуют проблемы, неразрешимые в более глубоком смысле. Эти авторы показали, что существуют проблемы, для решения которых нет конечных алгоритмов, или разрешающих процедур. К числу примеров таких абсолютно неразрешимых проблем относятся знаменитая проблема остановки в теории машин Тьюринга, проблема цветных домино в теории укладок, проблемы в теории игры «Жизнь», предложенной Джоном Хортоном Конуэем, и многие другие. Никогда ни в одном из логически непротиворечивых миров не удастся построить компьютер, сколь бы мощным он ни был, который бы, играя символами, смог решить такие проблемы за конечное число шагов.

С 1936 г. математики придумали множество доказательств теоремы Гёделя и получения связанных с ней результатов Черча–Тьюринга. Некоторые из более поздних доказательств оказались более простыми, чем первоначальное доказательство Гёделя. Смаллиан находит замечательный прием для изложения результатов Гёделя, отправляя читателя на воображаемый гёделев остров, населенный только рыцарями и лжецами. Рыцарь, доказавший, что он рыцарь, называется признанным рыцарем. Лжец, доказавший, что он лжец, называется отъявленным лжецом. Островитяне состоят членами клубов. Известно, что выполняются следующие четыре условия.

1. Все признанные рыцари состоят членами одного клуба.

2. Все отъявленные лжецы состоят членами одного клуба.

3. Все островитяне, не состоящие членами клуба C, состоят в одном клубе. Этот клуб называется дополнением клуба C.

4. Для любого клуба C существует по крайней мере один островитянин, который утверждает, что он состоит членом клуба C.

Легко и просто за какие-нибудь три пассажа Смаллиан показывает, что на острове существует по крайней мере один непризнанный рыцарь и по крайней мере один неотъявленный лжец. Если рассматривать рыцарей как истинные утверждения, признанных рыцарей как доказуемые истинные утверждения, лжецов как ложные утверждения и отъявленных лжецов как доказуемые ложные утверждения, то результаты, к которым приходит в ходе своих рассуждений Смаллиан, соответствуют результатам Гёделя. Еще три фразы – всего лишь три фразы! – и Смаллиан приходит к теореме Альфреда Тарского о том, что ни все лжецы, ни все рыцари не состоят членами одного клуба.

Существует хорошо известный вариант старого парадокса лжеца с двумя утверждениями, одно из которых написано на лицевой, а другое на оборотной стороне карточки. Одно утверждение гласит: «Утверждение на другой стороне этой карточки истинно», другое гласит: «Утверждение на другой стороне этой карточки ложно». Ни одно из утверждений не содержит ссылки на себя, и тем не менее противоречие очевидно. Аналогично, Смаллиан мысленно посещает то, что он называет «дважды гёделевыми островами», населенными рыцарями и лжецами, удовлетворяющими следующему условию: для любых двух клубов C_1 и C_2 найдутся два островитянина A и B, такие, что по утверждению A островитянин B состоит членом клуба

C_1, а по утверждению *B* островитянин *A* состоит членом клуба C_2. Исследование таких двойных островов – одно из излюбленных занятий Смаллиана. Он знакомит читателя с несколькими сделанными им открытиями относительно двойных островов и представляет несколько новых, еще нерешенных проблем.

Завершается книга поистине поразительным вариантом предложенной Гёделем конструкции недоказуемого утверждения. Рассмотрим следующее утверждение: *«Это утверждение недоказуемо»*. «Если это предложение ложно,– пишет Смаллиан,– то не верно, что оно недоказуемо. Следовательно, оно доказуемо, а это означает, что оно истинно. Итак, предположив, что это предложение ложно, мы пришли к противоречию. Значит, оно должно быть истинно.

А теперь будьте внимательны! Я доказал, что предложение, набранное курсивом, истинно. Но в истинном предложении говорится о том, что есть на самом деле. Значит, оно недоказуемо. Как же мне удалось доказать его?»

Ошибка, объясняет Смаллиан, состоит в том, что понятие доказуемого предложения не вполне определенно. Рассмотрим уточненный вариант исходного утверждения: «Это предложение недоказуемо в системе *S*». Парадокс волшебным образом исчезает! Дело в том, что приведенное выше предложение должно быть истинным, но недоказуемым в системе *S*. (Предполагается, что любое предложение, доказуемое в системе *S*, истинно.) В новой форме предложение «представляет собой грубый аналог гёделевского предложения *X* (содержащего утверждение о собственной недоказуемости не вообще, а в рамках системы *S*)».

И тут Смаллиан внезапно вспоминает, что он еще не ответил на вопрос: «Как же называется эта книга?» Эта книга называется... Впрочем, ответ вы найдете на последней странице книги.

Ответы и решения

1. Лев мог сказать, что лгал накануне, только в понедельник и в четверг. Единорог мог сказать, что он лгал накануне, только в четверг и в воскресенье. Следовательно, они оба могли утверждать, что лгали накануне, только в четверг.

2. Высказывания, выгравированные на золотой и свинцо-

вой шкатулках, противоположны, поэтому одно из них должно быть истинным. Поскольку истинно не более чем одно из трех высказываний, то высказывание на крышке серебряной шкатулки ложно. Следовательно, портрет в действительности находится в серебряной шкатулке.

3. Если *B* не виновен, то ясно, что виновен кто-то из *A*, *C* (или оба), так как из высказывания (1) следует, что никто, кроме *A*, *B* и *C*, не может быть виновен. Если *B* виновен, то у него должен быть соучастник (так как *B* не умеет водить машину). Следовательно, и в этом случае *A* или *C* должен быть виновен. Таким образом, кто-то из *A* и *C* (или оба) виновен. Если *C* не виновен, то *A* должен быть виновен. С другой стороны, если *C* виновен, то в силу высказывания (2) *A* также виновен. Следовательно, *A* виновен.

4. Вам нужно сказать: «Я не бедный рыцарь». Услыхав такое признание, ваша возлюбленная стала бы рассуждать следующим образом. Если бы вы были лжецом, то действительно не были бы бедным рыцарем. Следовательно, ваше высказывание было бы истинным. Это означало бы, что вы, будучи лжецом, высказали истинное утверждение. Возникшее противоречие показывает, что вы рыцарь. Но тогда ваше высказывание истинно, и вы не бедный рыцарь. А поскольку вы рыцарь, то вы должны быть богатым рыцарем.

5. На ваш вопрос «Означает ли „бал“ по-нашему „да“?», островитянин ответил: «Бал». Если «бал» действительно означает «да», то правильный ответ на ваш вопрос должен гласить: «Бал». Поэтому человек ответит: «Бал», а зомби ответит: «Да». Если же «бал» не означает «да», то и в этом случае правильный ответ на ваш вопрос должен гласить: «Бал». Следовательно, и в этом случае человек ответит вам: «Бал», а зомби ответит: «Да».

6. Определить с помощью одного-единственного вопроса, что такое «бал», вы сможете, спросив островитянина, человек ли он. Если островитянин ответит: «Бал», то это слово означает по-нашему «да», так как на этот вопрос и люди, и зомби отвечают утвердительно. Если же островитянин отвечает: «Да», то это слово означает по-нашему «да», а «бал» означает «нет».

7. Отличить вампира-трансильванца с помощью одного-единственного вопроса, допускающего ответ «да – нет», вы

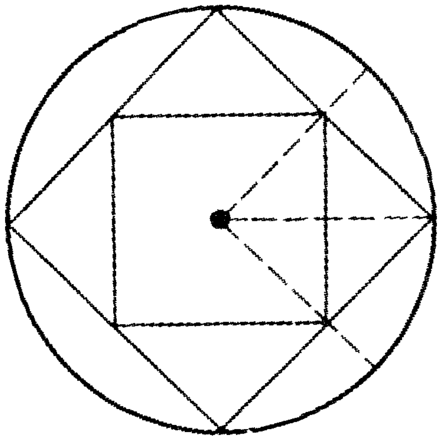
можете, спросив его, в здравом ли он уме. Вампир ответит отрицательно, а человек утвердительно. (Доказательство я предоставляю читателю.) Если вы захотите узнать, в здравом ли рассудке трансильванец, то спросите его: «Вы вампир?».

Дополнение

В своей статье я ограничился обзором первой книги занимательных логических задач, написанной Смаллианом. Его перу принадлежат и другие книги, доступные широкому кругу читателей, перечисленные в списки литературы [20, 1-10]. При подготовке текста я использовал также глубокий анализ книги Смаллиана «Как же называется эта книга?», принадлежащий выдающемуся философу Уилларду Ван Орману Куайну, и занимательную статью о нем, появившуюся в журнале «Smithsonian» [20, 12].

Джеймс Кеннеди напомнил мне название еще одной книги, содержавшее ссылку на самое себя. Это была книга фокусов американского фокусника Теда Аннеманна (которая вышла за несколько лет до книги Смаллиана). Называлась она «Книга без названия».

Глава 21
Возвращение доктора Матрикса



Все та же старая история.
Герман Хапфилд. *А время идет**)

В последней главе моей книги «Магические числа доктора Матрикса» [21, 1*] я сообщил печальную весть о кончине моего старого друга, знаменитого нумеролога доктора Ирвинга Джошуа Матрикса. В последний раз я виделся с ним и с его дочерью Ифой, наполовину японкой, в Стамбуле. Было это в 1980 г. Загримированный под араба Абдула Абулбула Амира, доктор Матрикс находился там с какой-то сверхсекретной миссией по линии ЦРУ. По возвращении в Нью-Йорк я узнал о его трагической встрече на берегах Дуная близ Измаила с агентом советского КГБ Иваном Скавинским-Скаваром. Оба, как сообщала газета «New York Times», по-видимому, выстрелили из пистолетов одновременно. Тело Скавара русские бросили в Черное море. Амир был похоронен неподалеку от Измаила на кладбище «Райхенбахский водопад».

В начале 1987 г. я был участником конференции по фрактальной геометрии, проходившей в роскошном отеле «Ритц» в Лиссабоне. Однажды, когда я сидел за завтраком с Бенуа Мандельбротом, отцом фракталов, почетным гостем

конференции и главным докладчиком, громкоговоритель сообщил мне, что меня просят к телефону.

К моему удивлению и восторгу, это была Ифа! Она отказалась сообщить, откуда ей стало известно, что я в Лиссабоне, но спросила, не смогу ли я навестить ее в Касабланке. «Касабланка ведь совсем рядом,– сказала она,– вы и не заметите, как долетите». И добавила: «У меня для вас есть кое-какие сведения об отце».

Мы договорились встретиться «У Рика» – известном в Касабланке казино, ресторане и баре. Именно там снимался в 1942 г. фильм «Касабланка» с Ингрид Бергман, Хемфри Богартом, Клодом Рейнзом и Полом Хенрейдом в главных ролях. Как известно всем поклонникам этого классического фильма, он снят по никогда не шедшей на сцене пьесе «Все приходят к Рику». У действующих лиц пьесы были реальные прототипы. Возможно, вам будет интересно узнать, что с ними стало. В 1943 г. муж Ильзы Виктор Ласло был убит из мести нацистом, через несколько лет Ильза Лунд и Ричард Блейн снова встретились в Париже. Они поженились, и шафером на их свадьбе был друг Рика капитан Луи Рено. У них родился сын Ричард-младший.

После смерти Ричарда-старшего в 1957 г. Ильза с сыном вернулась в Стокгольм. Там они жили вплоть до смерти Ильзы в 1982 г. В 1983 г. Рик-младший купил «Американское кафе», некогда принадлежавшее его отцу, и переименовал заведение в кафе «У Рика». С тех пор он им и управляет.

Касабланка, суетливый портовый город с почти трехмиллионным населением, выглядел так, как я ожидал: богатство и респектабельность одних районов резко контрастировали с вопиющей нищетой других. Высокие белые здания компаний с французскими лавками ослепительно сверкали под лучами яркого африканского солнца. Неподалеку от «Эль Мансура», гостиницы, в которой я остановился, проходили подозрительного вида грязные угрюмые улочки, прибежище бедноты, преступности, наркомании, болезней и нищеты. Когда мое такси проезжало мимо одного из «соукс» (старых рынков), до меня донесся аромат пряностей и дым кебабов, готовившихся на открытом огне.

В кафе «У Рика» – по соседству с рынком – было шумно и накурено. В глазах рябило от множества людей – туристов-европейцев и местных мусульман, большинство из которых говорили по-французски. Рик, куривший, как и его отец, сигарету за сигаретой, сам провел меня к столику, из-за которого мне улыбалась и махала рукой Ифа. Она несколько постарела, но, как всегда, была ослепительно хороша. Против нее за столиком спиной ко мне сидел седой мужчина. Обогнув столик, я увидел его лицо и от неожиданности едва не лишился чувств – перед мной был доктор Матрикс собственной персоной! Орлиное лицо его было мрачным, когда он встал, чтобы расцеловать меня в обе щеки, но изумрудные глаза блестели от удовольствия (один глаз был скрыт моноклем).

От неожиданности я лишился дара речи, а Ифа тем временем принялась рассказывать мне о том, что произошло. Русский агент погиб мгновенно от пули, попавшей в мозг, а Абдул, или, точнее, доктор Матрикс, упал без сознания, когда пуля Скавара царапнула его левый висок. Агенты ЦРУ были неподалеку. На вертолете они доставили доктора Матрикса в Марокко, где он быстро оправился от ранения и стал жить под новым именем. Двое крестьян из предместий Измаила за щедрую мзду охотно засвидетельствовали смерть обоих дуэлянтов. Похороны «Абдула» были ложными: в могилу опустили пустой гроб.

Доктор Матрикс был малословен и терпеливо дождался, пока Ифа не закончила свое удивительное повествование. Он заверил меня, что угроза ответных действий со стороны КГБ миновала, но пояснил, что теперь выполняет другую деликатную миссию, сообщив лишь, что живет в Касабланке под видом поэта-эмигранта из Индианы Джаспера Уиткомба Ланди. Ифа под сценическим псевдонимом, который она просила не раскрывать, исполняла танец живота в ночном клубе соседнего курортного городка Айн Диаб. «На сцене я как голая истина», – усмехнулась она.

«Jasper Whitcomb Lundy, – написал я по-английски. – Почему такое странное имя?»

«Все буквы различные, – пояснил доктор Матрикс. – В таких длинных именах это бывает редко. К тому же обратите внимание: гласные идут в таком же порядке, как в латинском алфавите AEIOUY».

«А что это у вас на пряжке ремня? – спросил я. – Похоже на древнекитайский магический квадрат ло шу с какими-то странными числами на темных клетках (рис. 140)».

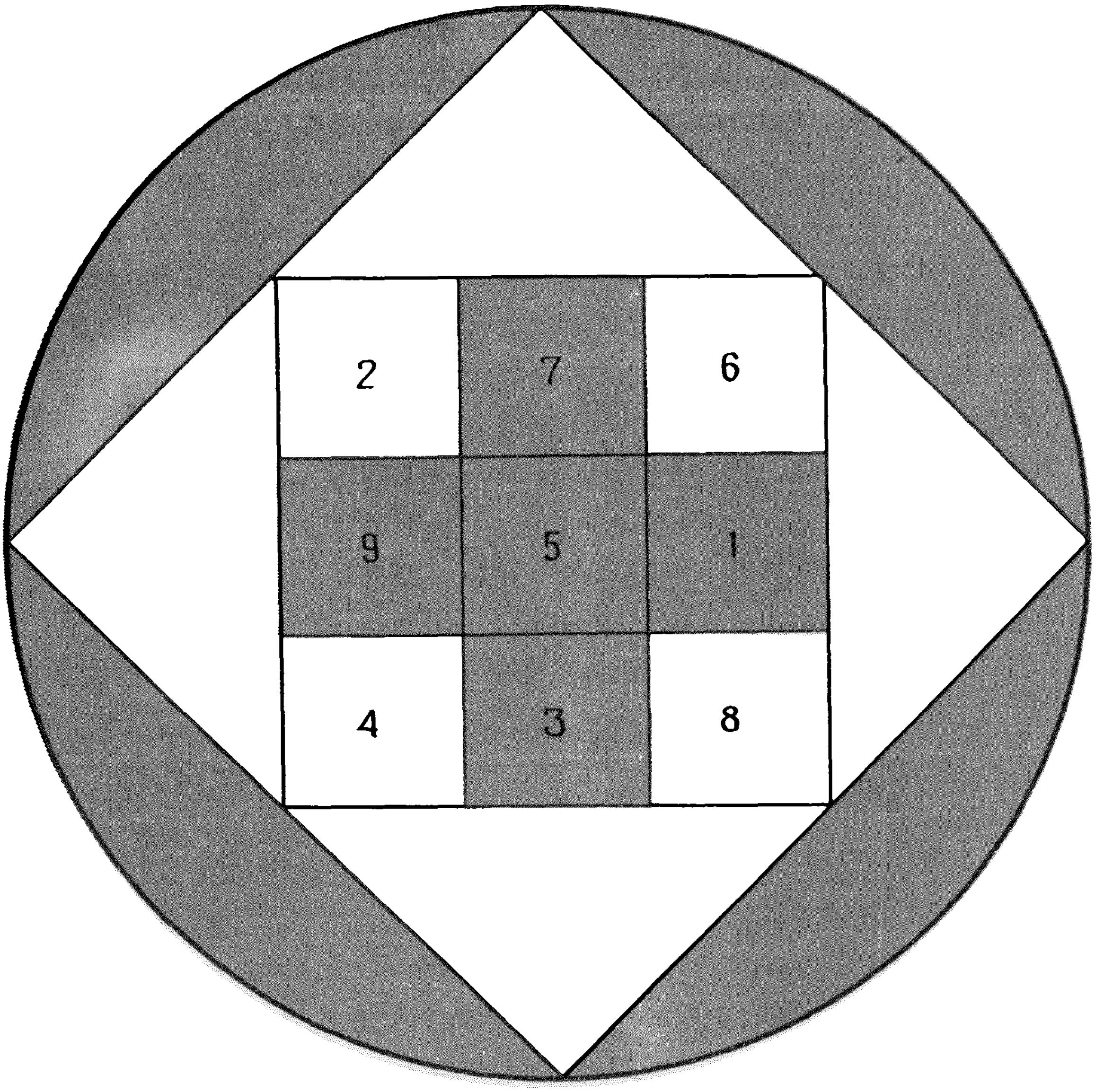


Рис. 140

Пряжка от брючного ремня д-ра Матрикса с изображением древнекитайского магического квадрата ло шу.

«Вы совершенно правы – это ло шу. Все четные числа – инь, все нечетные – янь. Пятерка в центре соответствует земле, четверка и девятка – металлу, двойка и семерка – огню, шестерка и единица – воде, восьмерка и тройка – дереву. Баланс инь и янь соблюдается в каждой паре. Как вы знаете, ло шу – единственный (с точностью до поворотов и отражений) способ расположить девять чисел так, чтобы все суммы чисел по горизонтали, вертикали и диагонали были равны».

Я кивнул: «В январском номере «Scientific American» за 1976 г. была статья о магических квадратах и кубах. Ло шу всегда производил на меня сильное впечатление как один из наиболее изящных результатов в истории комбинаторной теории чисел».

«Ло шу обладает многими удивительными свойствами,–

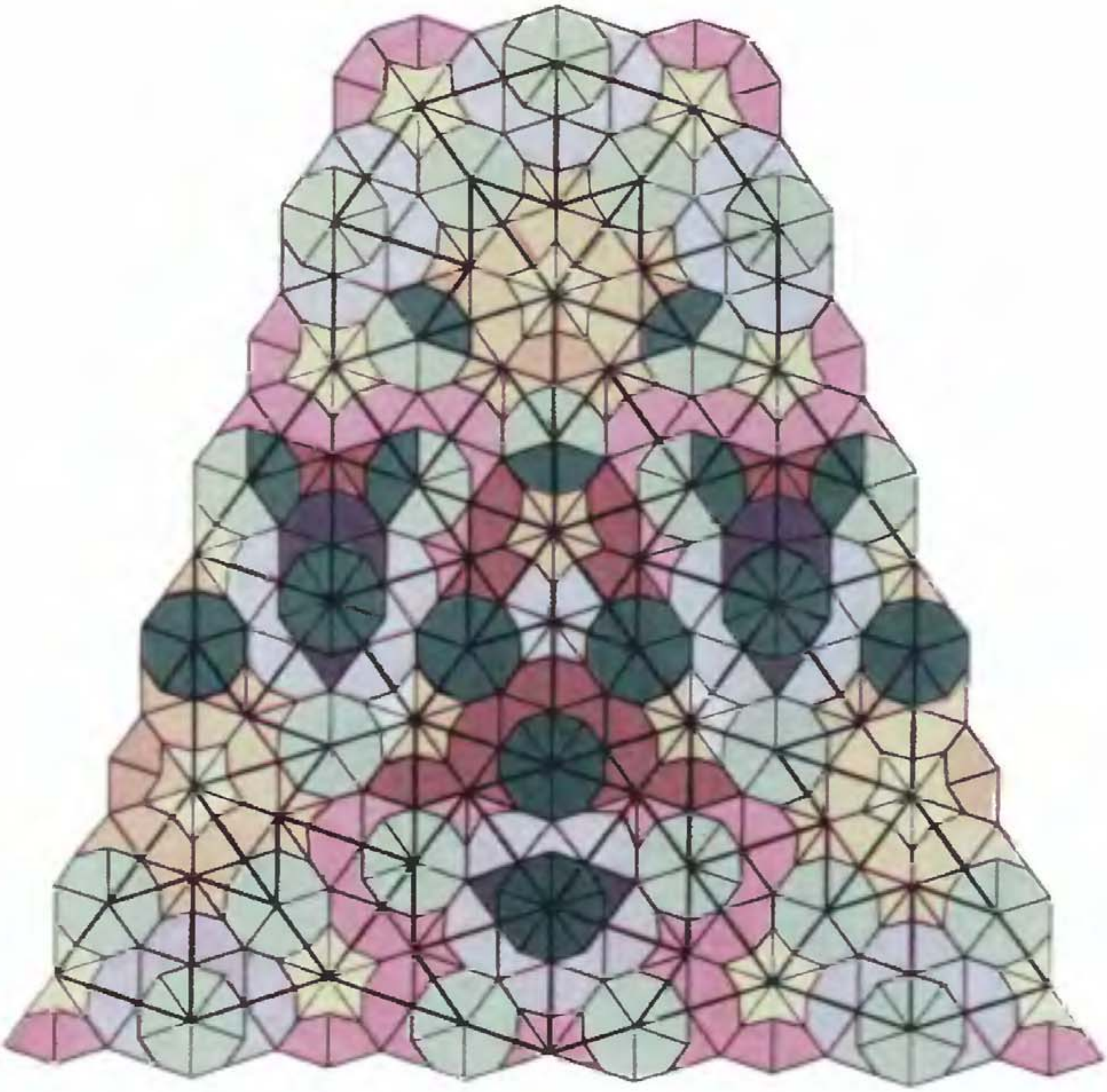


Фото 1

Империя короля.

Фото 2

Созданная с помощью компьютера похожая на Землю планета; вид над воображаемым лунным ландшафтом.

Фото 3

Члены Улипо: стоят слева направо: Жан Фурнель, Мишель Метай, Люк Этьенн, Жорж Перек, Марсель Ренабу, Жан Лескюр, Жак Дюшато. Сидят слева направо: Итало Кальвино, Харри Мэтьюз, Франсуа Лелионне, Раймон Кено, Жан Кеваль, Клод Берж.

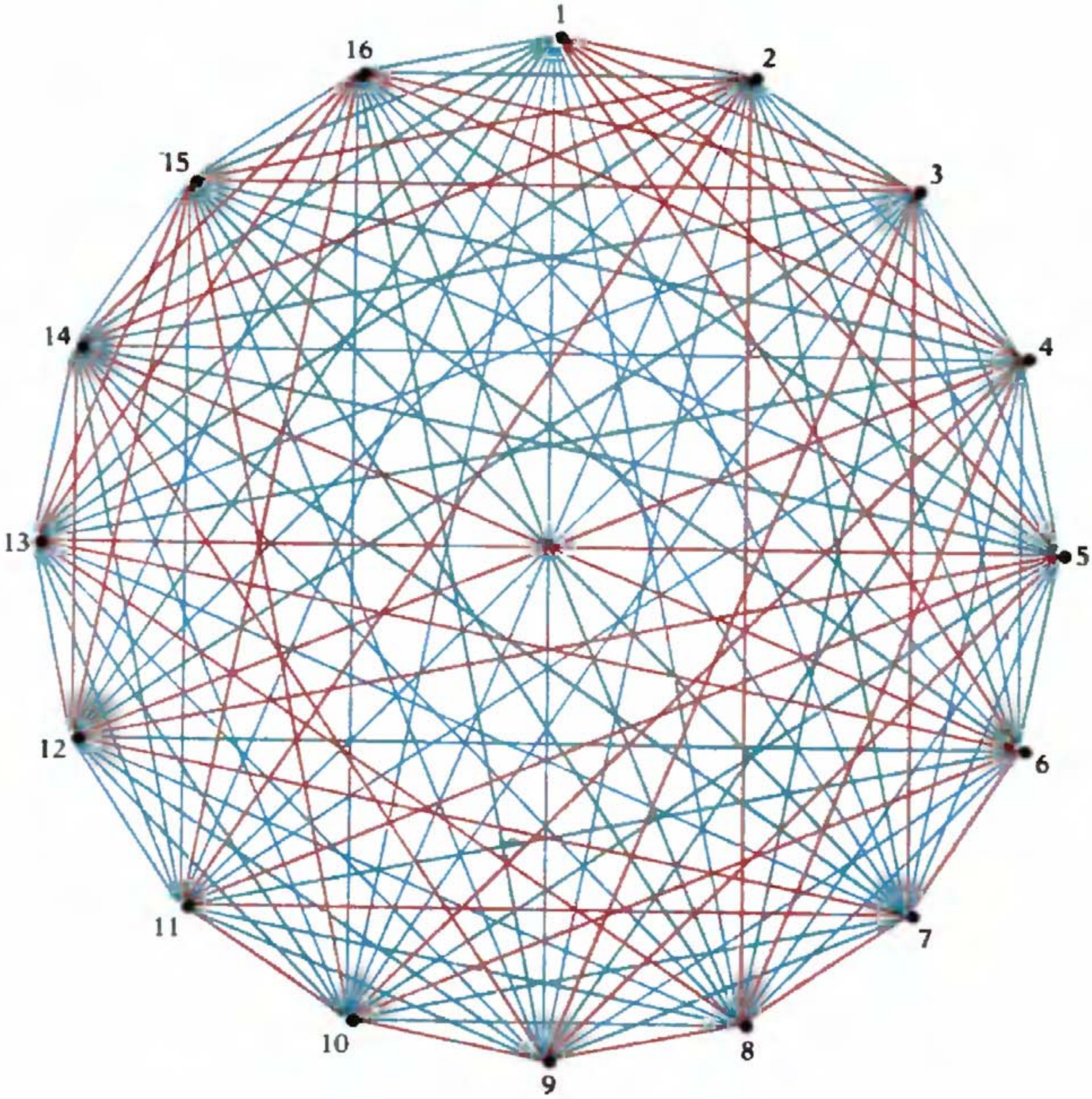


Фото 4

Раскраска в три цвета критического полного графа с 16 вершинами K_{16}.

заметил доктор Матрикс.– В вашей статье, насколько мне помнится, были упомянуты лишь несколько из них».

Я поспешно извлек из кармана блокнот и карандаш.

«Представьте ло шу на торе. Его поверхность разделена на девять клеток.

Если угодно, можете представить себе плоский квадрат три на три с отождествленными противоположными сторонами. Каждая пара смежных клеток в верхнем ряду считается склеенной с парой клеток в нижнем ряду, расположенными непосредственно под ними. Каждая пара смежных клеток, примыкающих к левой стороне квадратов, считается склеенной с парой клеток, примыкающих к правой стороне и расположенных на одних горизонталях».

«Угловые клетки также склеены»,– прервал я его.

«Совершенно верно. Всего тороидальная матрица содержит девять квадратов два на два».

«Ну и что?»

«Суммы четырех чисел в каждом из этих девяти квадратов не только все различны. Это последовательные целые числа от 16 до 24».

«Поразительно! – воскликнул я.– Я этого не знал».

«Ничего удивительного,– сказал доктор Матрикс.– Я совершил это открытие, когда мне было семь лет, но никогда не писал об этом».

Я записал все, что сказал доктор Матрикс, и спросил: «А нет ли у ло шу каких-нибудь необычных свойств, о которых стоило бы знать?».

«Сотни,– ответил доктор Матрикс.– Позвольте мне описать еще одно свойство, которое я открыл 30 лет назад. С тех пор оно было несколько раз переоткрыто, хотя знают о нем немногие математики. Рассмотрим трехзначные числа, которые возникают при чтении цифр в квадрате по горизонталям. Возведите каждое число в квадрат и сложите все три квадрата. Проделайте то же самое, но с тремя числами, полученными при чтении квадрата по горизонталям справа налево. Обе суммы одинаковы».

Я достал свой карманный калькулятор. Доктор Матрикс был прав:

$$276^2 + 951^2 + 438^2 =$$
$$= 672^2 + 159^2 + 834^2 = 1\ 172\ 421.$$

«Это еще не все,– сказал доктор Матрикс, вставляя монокль.– Тот же результат остается в силе и для трехзначных чисел, получаемых при чтении квадрата по столбцам».

«А по диагоналям?»

«Oui, mon ami. Суммы получаются одинаковыми для главной и для ломаных диагоналей. Впрочем, последние на торе распрямляются. Возьмите три диагонали, идущие вниз и вправо. Возведите каждое число в квадрат и сложите. Сумма равна сумме квадратов тех же трех чисел, прочитанных в обратном направлении. То же самое верно и для трех диагоналей, идущих вниз и влево».

Я проверил на своем калькуляторе:

$$258^2 + 714^2 + 693^2 =$$
$$= 852^2 + 417^2 + 396^2 = 1\ 056\ 609,$$
$$654^2 + 798^2 + 213^2 =$$
$$= 456^2 + 897^2 + 312^2 = 1\ 109\ 889.$$

Доктор Матрикс нажал скрытую кнопку в низу своей пряжки, и ему на ладонь выпал серебряный диск. Перевернув диск, доктор Матрикс положил его рядом с моей тарелкой. Магический квадрат, выгравированный на оборотной стороне этого диска, вы видите на рис. 141 слева.

«Перед вами один из самых невероятных магических квадратов, которые когда-либо были открыты,– заявил доктор Матрикс.– Его обнаружил несколько лет назад мой друг Ли Сэллоуз. Он называет его ли шу».

«Я вижу, что это магический квадрат,– сказал я.– Должно быть, и он обладает какими-нибудь другими необыкновенными свойствами?»

«Несомненно!»

Доктор Матрикс начертил в моем блокноте пустой квадрат три на три. В каждую клетку он вписал число, указывающее число букв в английском числительном, соответствующем аналогичному числу в ли шу. Например, в слове „five“ (пять) четыре буквы, поэтому в левый верхний угол доктор Матрикс вписал число четыре (рис. 141 справа). Я не верил своим глазам: передо мной не просто был новый магический квадрат, но и числа в нем были последовательными натуральными числами от 3 до 11!

Позднее я узнал, что Сэллоуз назвал такие магические

5	22	18
28	15	2
12	8	25

4	9	8
11	7	3
6	5	10

Рис. 141

Магический квадрат ло шу Ли Сэллоуза (слева) и его альфамагический партнер (справа).

квадраты, которые столь нелепым образом «переводят» на каком-либо языке один магический квадрат в другой, «альфамагическими». Результаты своих глубоких компьютерных исследований альфамагических квадратов всех размеров и более чем на 20 языках Сэллоуз изложил в своей состоящей из 2 частей статье «Альфамагические квадраты», опубликованной в 1986 г. Сэллоуз – английский инженер, работающий в Ниймегенском университете в Голландии.

Ифа слушала нашу беседу с легкой улыбкой. «Может, ты поделишься с мистером Гарднером некоторыми задачами о ло шу? Они позабавят его читателей, если он вздумает снова написать о тебе».

Доктор Матрикс с готовностью предложил мне с десяток задач, из которых я выбрал следующие:

1. Постройте магический квадрат из девяти последовательных целых (неотрицательных) чисел с постоянной 666 – знаменитым библейским «числом зверя».

2. На рис. 142 (слева) изображена матрица, в которой восьмерка вписана в боковую, а не в угловую клетку, как в ло шу. Впишите в остальные клетки целые числа так, чтобы среди всех девяти чисел не было повторяющихся и чтобы при этом получился магический квадрат с постоянной ло шу, равной 15.

3. Постройте магический квадрат из девяти простых чисел, среди которых не должно быть повторяющихся,

	8	

B	G	F
I	E	A
D	C	H

Рис. 142

Две задачи на составление ло шу.

с минимальной магической постоянной. Число 1 исключите, поскольку оно не считается простым. Число 2 также не может быть использовано. (Доказательство. Предположим, что 2 встречается среди чисел, вписанных в клетки магического квадрата $n \times n$ из простых чисел, и что число n нечетно. Так как 2 – единственное четное простое число, сумма чисел, стоящих на любой горизонтали, вертикали и диагонали, нечетна, за исключением вертикали, горизонтали и диагонали, которые содержат двойку (сумма стоящих в них чисел четна). Если же число n нечетно, то сумма чисел, стоящих на любой горизонтали, вертикали и диагонали, четна, за исключением горизонтали, вертикали и диагонали, которые содержат двойку (сумма стоящих в них чисел нечетна).

4. Приняв простой код $A = 1$, $B = 2$ и т.д., переведите числа ло шу в девять букв, которые вы видите на рис. 142 (справа). Представьте себе, что на какую-то клетку поставлен шахматный король. Сделав 7 ходов королем, прочитайте английское слово из восьми букв (которое пишется через дефис). Буква в той клетке, на которой первоначально стоит король, считается первой буквой слова.

Доктор Матрикс вставил серебряный диск в пряжку на своем ремне. «Кстати,– заметил он, откидываясь в кресле и вставляя монокль,– интересными свойствами обладают три трехзначных числа, прочитываемые по горизонталям в ло шу моей ориентации. Возьмем число в верхнем ряду – 276. Оно равно сумме пятых степеней чисел 1, 2 и 3.

Число в среднем ряду 951 равно разности квадратов последовательных чисел 475 и 476. Число 475 равно разности между квадратами последовательных чисел 237 и 238, а число 237 равно разности между квадратами последовательных чисел 118 и 119».

«У меня голова идет кругом,– признался я, записывая все это в блокнот.– А чем замечательно число 438, стоящее в нижнем ряду вашего ло шу?»

«Оно *самое замечательное* из всех,– ответил доктор Матрикс.– Это число Смита».

Я в недоумении посмотрел на него: «А что особенного в числах Смита?».

Числа Смита, как пояснил доктор Матрикс, были открыты Гарольдом Смитом, мужем сестры математика из Университета Леги в Вифлееме (штат Пенсильвания) Альберта Виланского. Однажды Смит, который не был математиком, заметил, что если номер его телефона записать как одно число 4937775, то это число будет обладать одним необычным свойством. Сложив все цифры в его простых множителях 3, 5, 5, 65, 837, вы получите 42 – сумму цифр в его телефонном номере. Виланский назвал любое составное число, обладающее этим свойством, числом Смита и даже написал об этих числах краткую заметку, которую опубликовал в «Two-Year College Mathematics Journal». Позднее Вейн Макдэниэл из Университета Миссури доказал, что существует бесконечно много чисел Смита.

Наименьшее число Смита равно 4. Среди первого миллиона целых чисел имеется 29 928 чисел Смита, что составляет около 3 процентов. Считается, что доля чисел Смита остается примерно такой же и для любого интервала длиной в миллион чисел. В таблице, приведенной на рис. 143, представлены все числа Смита меньше 2000. Заметим, что 666 – число Смита (так же, как и 1776). Доктор Матрикс обратил мое внимание на любопытное совпадение дат: 1776 г. – это и год публикации библии капитализма «Исследования о природе и причинах богатства народов» Адама Смита, и год основания самой капиталистической страны мира.

Доктор Матрикс сделал небольшое отступление, чтобы объяснить мне одно любопытное свойство числа 1776, которое он открыл. Доктор Матрикс попросил меня выбрать

4	645	150
22	648	158
27	654	1626
58	663	1633
85	666	1642
94	690	1678
121	706	1736
166	728	1755
202	729	1776
265	762	1795
274	778	1822
319	825	1842
346	852	1858
355	861	1872
378	895	1881
382	913	1894
391	915	1903
438	922	1908
454	958	1921
483	985	1935
517	1086	1952
526	1111	1962
535	1165	1966
562	1219	
576	1255	
588	1282	
627	1284	
634	1376	
636	1449	

Рис. 143

Числа Смита до 2000.

любую цифру N и, нажав трижды клавишу N на моем калькуляторе, получил на индикаторе число NNN. Затем доктор Матрикс попросил умножить число NNN на 16 и разделить произведение на N. Представьте себе, что я получил 1776!

Два последовательных числа Смита, например 728 и 729 (следующая наибольшая пара – числа 2964 и 2965), называются «братья Смита». Не известно, бесконечно ли множество братьев Смита. Однако было показано, что существует бесконечно много чисел, которые доктор Матрикс называет «псмитсами» (Ифа предпочитает название «смиттимс») – палиндромными числами Смита, т. е. числами Смита, которые читаются одинаково слева направо и справа налево.

На рис. 144 вы видите нарисованный доктором Матриксом магический квадрат из девяти чисел Смита. Постоянная, равная 822, уверил меня доктор Матрикс,– наименьшая из возможных для такого квадрата. Если все числа в этом квадрате разделить на 2, то вы получите квадрат из 9 различных простых чисел с постоянной 411.

Доктор Матрикс напомнил мне, что 22 (второе число Смита) – число, на которое в фильме «Касабланка» Рик рекомендовал своему патрону, находившемуся в весьма стесненных финансовых обстоятельствах, делать ставки в рулетку. И старое, несколько покоробившееся колесо трижды останавливалось на 22. Пятое число Смита 85, добавил доктор Матрикс, равно сумме цифр в слове MATRIX, если его перевести в цифровую форму с помощью кода $A = 1$, $B = 2$ и т.д.

Доктор Матрикс упомянул о своем друге Сэмюэле Ейтсе, вышедшем на пенсию специалисте по компьютерным наукам, ныне проживающем в Дельрей Бич (штат Флорида), как о лучшем в мире знатоке чисел Смита. Числа Смита тесно связаны с так называемыми репьюнитами – числами, состоящими только из единиц. Из любого репьюнита, простые множители которого известны, можно построить число Смита. Так как число репьюнитов бесконечно, чисел Смита также бесконечно много. Ейтс долгое время был признанным авторитетом по репьюнитам, опубликовавшим о них множество статей и даже одну монографию.

Известно только пять простых репьюнитов: R_2, R_{19}, R_{23}, R_{317} и R_{1031}. Индексы, также простые, указывают число единиц в записи простых репьюнитов. В 1987 г. Ейтс получил

94	382	346
526	274	22
202	166	454

C = 822

Рис. 144

Магический квадрат Смита 3 × 3 с наименьшей постоянной.

из R_{1031} наибольшее известное число Смита (10694985-значное). Оно представимо в виде произведения

$$9 \times R_{1031}(10^{4594} + 3 \times 10^{2297} + 1)^{1476} \times 10^{3913210}.$$

«Есть ли другие числа Смита на ло шу?»–спросил я.

«Как ни невероятно, но есть,–ответил доктор Матрикс.– Если прочитать числа, стоящие на диагоналях справа налево, то получатся два числа Смита. Сумма цифр простых множителей числа 654 (2, 3 и 109) равна 15. То же верно и относительно числа 852 с простыми множителями 2, 2, 3 и 71».

«Обладают ли какими-нибудь необычными свойствами числа, стоящие в ло шу по вертикалям?»

«Мой дорогой Гарднер,–заметил доктор Матрикс покровительственным тоном,–не существует ни одного числа, которое не обладало бы какими-нибудь необычными свойствами. Взять хотя бы номер вашей комнаты в лиссабонском отеле. Ифа сказала мне, что вы остановились в номере 243. Это весьма необычное число. Его простые множители равны 3, 3, 3, 3 и 3, а в троичной системе счисления оно имеет вид 100 000. А знаете, как выглядит число, обратное 243, в десятичной системе счисления?»

Я покачал головой.

Доктор Матрикс вставил монокль и записал в моем блокноте: $1/243 = 0{,}004115226337448559\ldots$.

«Дик Фейнман обратил мое внимание на эту сумасшедшую дробь, когда во время второй мировой войны меня пригласили в Лос-Аламос, чтобы проверить некоторые числа в расчетах, связанных с созданием атомной бомбы[1)]».

«Вы знали Фейнмана?»

---

1) Дробь $^1/_{243}$ упоминается на с. 116 автобиографии Ричарда Фейнмана «Вы, должно быть, шутите, мистер Фейнман» [21, 2*]. «После 559 она немного сбивается, но потом выправляется и великолепно повторяется»,–Фейнман вспоминает о том, что привел эту дробь в письме, отправленном из Лос-Аламоса. Цензор Манхаттанского проекта вернул ему письмо, заподозрив, что число может быть каким-то кодом. Фейнман направил цензору объяснительную записку. Число $^1/_{243}$ не может быть кодом, писал Фейнман, так как «если вы действительно разделите 1 на 243, то на самом деле получите все цифры разложения, и поэтому в числе 0,004115226337... содержится ничуть не больше информации, чем в числе 243, в котором вряд ли содержится какая-то информация вообще».

«Его учитель,– ответил доктор Матрикс,– был моим учеником. Кстати, знаете ли вы, что flatcar (железнодорожная платформа) – анаграмма слова fractal (фрактал)? Впрочем, я отвлекся. Любое трехзначное число в ло шу, прочитанное по любой горизонтали, вертикали или диагонали в любом направлении, обладает следующим необычным свойством. Прибавьте прочитанное число к нему же, умножьте число на него же, вычтите число из него же и разделите число на него же. Сложив все четыре результата, вы всегда получите точный квадрат».

Я выбрал наугад число 654. Разумеется, мой микрокалькулятор показал, что $(654 + 654) + (654 - 654) + (654 \times 654) + (654:654) = 429\,025$ – квадрат числа 655. Через несколько дней я понял, что попался на удочку: «необыкновенным» свойством обладает любое число. Вот простое алгебраическое доказательство:

$$\begin{aligned}&(n + n) + (n - n) + (n \times n) + (n:n) =\\ &= 2n + 0 + n^2 + 1 =\\ &= n^2 + 2n + 1 =\\ &= (n + 1)^2.\end{aligned}$$

Мне не хотелось бы, чтобы у читателя создалось впечатление, будто Ифа не принимала участия в разговоре. За обедом и потом в игорном зале мы говорили о самых различных вещах, и доктор Матрикс выиграл кучу денег в двадцать одно. Просто я упоминаю лишь о тех местах в нашем разговоре, которые имели отношение к числам и нумерологии.

Я указал своим карандашом на серебряную пряжку на поясе доктора Матрикса и сказал: «Этот круг и два вписанных квадрата не дают мне покоя. В них есть что-нибудь особенное?».

«Хорошо, что вы упомянули об этом,– сказал доктор Матрикс.– Вашим любителям занимательной математики, возможно, понравится одна забавная задачка, связанная с этими фигурами. Пусть радиус круга равен 7 единицам. Сколько времени понадобится вам, чтобы определить длину стороны меньшего квадрата?»

«Гм, мне придется проделать кое-какие вычисления и воспользоваться теоремой Пифагора».

«Ничего подобного,– ответил доктор Матрикс. Ифа лишь улыбалась.– Ответ очевиден».

Мы сидели за десертом, потягивая вино. Чтобы как-то скрыть свое замешательство, я прикоснулся своим бокалом к бокалу доктора Матрикса и сказал, стараясь походить на Богарта: «Я знаю, что проблемы трех маленьких людей – не Бог весть что, но позвольте мне, мистер Ланди, пожелать вам долгой и счастливой жизни в вашем втором перевоплощении».

Пожилой негр наигрывал на фортепьяно «А время идет». Ифа, делая вид, будто смотрит на меня с болью, чокнулась со мной и сказала, гораздо лучше подражая Богарту: «За вас, друг мой».

Ответы и решения

1. Квадрат с «числом зверя» (на рис. 145 слева вверху) получается, если к каждому числу, стоящему в клетке магического квадрата ло шу, прибавить $(666 - 15)/3 = 217$.

219	224	223
226	222	218
221	220	225

1	8	6
10	5	0
4	2	9

17	113	47
89	59	29
71	5	101

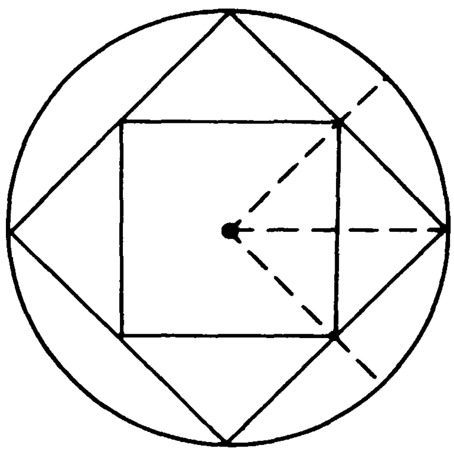


Рис. 145

Решения задач.

2. Единственное решение представлено на рис. 145 справа вверху.

3. Единственное решение представлено на рис. 145 внизу. Постоянная равна 177.

4. Это слово „big-faced“ («большелицый»).

Задача о геометрическом чертеже на пряжке от пояса доктора Матрикса решается следующим образом. Сторона меньшего квадрата равна 7, т. е. радиусу круга. На рис. 145 внизу справа приведено доказательство этого утверждения типа «взгляни и ты убедишься сам».

Дополнение

Просматривая свои заметки, я обнаружил, что доктор Матрикс обратил мое внимание на следующую связь между квадратом ли шу и «числом зверя». Прибавьте число 100

$a-c$	$a-b+c$	$a+b$
$a+b+c$	a	$a-b-c$
$a-b$	$a+b-c$	$a+c$

Рис. 146

Схема всех магических квадратов 3 × 3.

к числам, стоящим в клетках ли шу, и проделайте ту же операцию с числами в клетках квадрата-партнера. Сложив числа, стоящие в соответствующих клетках двух квадратов, вы получите магический квадрат с постоянной 666.

При решении задач с магическими квадратами три на три полезно иметь в виду алгебраическую структуру, изображенную на рис. 146. Девять чисел образуют магический квадрат в том и только том случае, если их можно разделить на такие три тройки, что каждая тройка содержит по три члена арифметической прогрессии, разности всех трех прогрессий одинаковы, а наименьшие числа трех прогрессий образуют еще одну арифметическую прогрессию. Эти тройки указаны на рис. 146 белым, светло-серым и темно-серым цветом.

Вместо a, b и c можно подставлять любые действительные числа. Центральное число a всегда равно одной трети магической постоянной. Например, если магическая постоянная равна π, то $a = \pi/3$. Разумеется, если вы не

1 480 028 201	1 480 028 129	1 480 028 183
1 480 028 153	1 480 028 171	1 480 028 189
1 480 028 159	1 480 028 213	1 480 028 141

Рис. 147

Магический квадрат из последовательных простых чисел.

хотите, чтобы числа в клетках магического квадрата повторялись, то вам следует надлежащим образом выбирать числа *a*, *b* и *c*. Если вы хотите, чтобы числа в клетках были последовательными положительными целыми числами, то постоянная должна быть кратна трем, число *a* должно быть не меньше 5, число *b* должно быть равно 1, а число *c* должно быть равно 3.

В 1987 г. в своей заметке о магических квадратах из простых чисел, опубликованной в «Календаре математических наук, 1988 г.» (Rome Press, 1987), я предложил премию в 100 долларов тому, кто первым построит магический квадрат три на три из последовательных простых чисел. Свое предложение я повторил в книге «Загадки сфинкса» (Математическая ассоциация Америки, 1987). В начале 1988 г. Гарри Нелсон из Калифорнийского университета, используя составленную им хитроумную программу и компьютер Cray, выиграл премию, получив 22 решения задачи, одно из которых с наименьшей постоянной представлено на рис. 147. Программа Нелсона не позволяет доказать, что это решение имеет наименьшую из возможных магических постоянных, хотя с высокой вероятностью можно утверждать, что это именно так.

Литература*

ГЛАВА 2

МОЗАИКИ ПЕНРОУЗА. II

1. Goldberg M. Central Tesselations.– Scripta Mathematica, 1955, 21, pp. 253–260.
2. Hao Wang. Games, Logic and Computers.– Scientific American, November 1965, pp. 98–106.
3. Berger R. The Undecidability of the Domino Problem.– Memoirs of the American Mathematical Society, 1966, 66.
4. Robinson R. M. Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane.– Inventiones Mathematicae, 1971, 12, pp. 177–209.
5. Penrose R. The Role of Aesthetics in Pure and Applied Mathematical Research.– Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications, 1974, 10, pp. 266–271.
6. Guy R. K. The Penrose Pieces.– Bulletin of the London Mathematical Society, 1976, 8, pp. 9–10.
7. Koji Miyazaki. On Some Periodical and Non-Periodical Honeycomb.– A Kobe University monograph, 1977.
8. Penrose R. Pentaplexity: A Class of Nonperiodic Tilings of the Plane.– Eureka, 1978, 39, pp. 16–22. Перепечатано в изданиях: The Mathematical Intelligencer, 1979, 2, pp. 32–37; Geometrical Combinatorics, F. C. Holroyd and R. J. Wilson, eds.– Pitman, 1984.
9. de Bruijn N. G. Algebraic Theory of Penrose's Nonperiodic Tilings of the Plane.– Nederl. Akad. Proc., Series A, 1981, 69.
10. Grünbaum B., Shepard G. C. Some Problems on Plane Tilings.– In: The Mathematical Gardner, David A. Klarner, ed.– Prindle, Weber and Schmidt, 1981. Имеется перевод: Грюнбаум Б., Ше-

---

*) В данном списке литературы номера без звездочек соответствуют тем ссылкам, которые были приведены автором в конце глав, номера с одной звездочкой относятся к тем ссылкам, которые в оригинале приведены непосредственно в тексте, номера с двумя звездочками – к литературе, добавленной переводчиком.– *Прим. перев.*

пард Дж. Ч. Некоторые проблемы, связанные с плоскими мозаиками.– В сб.: Математический цветник,– М.: Мир, 1983.
11. Beenker E. P. M. Algebraic Theory of Nonperiodic Tilings of the Plane by Two Simple Building Blocks: a Square and a Rhombus.– Eindhoven University of Technology, the Netherlands, Department of Mathematics and Computer Science, T. H. Report 82-WSK-04, September 1982.
12. Interview with Roger Penrose.– Omni, June 1986, pp. 67 ff.
13. Grünbaum B., Shepard G. C. Tilings and Patterns.– W. H. Freeman and Company, 1986.

КВАЗИКРИСТАЛЛЫ

14. Peterson I. The Fivefold Way for Crystals.– Science News, 1985, 127, pp. 188–189. Перепечатано в сб.: Peterson I.The Mathematical Tourist.– W. H. Freeman and Company, 1988, pp. 200–212.
15. Nelson D. R., Halperin B. I. Pentagonal and Icosahedral Order in Rapidly Cooled Metals.– Science, 1985, 229, pp. 235–238.
16. Browne M. W. Puzzling Crystals Plunge Scientists into Uncertainty.– New York Times, Sunday, July 30, 1985, p. C1 ff.
17. Pauling L. Apparent Icosahedral Symmetry is Due to Directed Multiple Twinning of Cubic Crystals.– Nature, 1985, 317, p. 512.
18. Mossrei R., Sadoc J. F. Pauling's Model Not Universally Accepted.– Nature, 1986, 319, p. 104. Ответ на заметку Лайнуса Полинга [17].
19. Levine D. Quasicrystals: A New Class of Ordered Structure.– Ph. D. Thesis, University of Pennsylvania, 1986.
20. Nelson D. P. Quasicrystals.– Scientific American, August 1986, pp. 42–51.
21. Steinhardt P. J. Quasicrystals.– Scientific American, November/December 1986, pp. 586–597. В списке литературы к этой статье указано более 40 названий.
22. de Bruijn N. G. A Riffle Shuffle Card Trick and Its Relation to Quasicrystal Theory.– Nieuw Archief voor Wiskunde (to be published).
23. Steinhardt P., Ostlund S., eds. The Physics of Quasicrystals.– World Scientific, 1987.
24. La Brecque M. Opening the Door to Forbidden Symmetries.– Mosaic, 1987–1988, 18, pp. 2–23.
25. Icosahedral Symmetry. Письмо от Лайнуса Полинга, в котором он продолжает свою критику квазикристаллов, с ответом Пола Стейнхардта.– Science, 1988, 239, pp. 963–964.
26. Peterson I. Tiling to Infinity.– Science News, July 16, 1988, 134, p. 42.

ГЛАВА 3

КНИГИ И СТАТЬИ БЕНУА МАНДЕЛЬБРОТА

1. How Long Is the Coast of Britain? – Science, 1967, 156, pp. 636–638.
2. Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimensions.– Paris: Flammarion, 1975.

3. Fractals: Form, Chance, and Dimensions.– W. H. Freeman and Company, 1977. Перевод книги [2].
4. Getting Snowflakes into Shape.– New Scientist, June 22, 1978, pp. 808–810.
5. Fractals and the Geometry of Nature. The Encyclopedia Brittanica's 1981 Yearbook of Science and the Future.
6. The Fractal Geometry of Nature.– W.H. Freeman and Company, 1982.

КНИГИ О ФРАКТАЛАХ

7. Falconer K. The Geometry of Fractal Sets.– Cambridge University Press, 1985.
8. Peitgen H.-O., Richter P. The Beauty of Fractals.– Springer-Verlag, 1986. Имеется перевод: Пейтген X.-О., Рихтер П. Красота фракталов.– М.: Мир, 1992.
9. The Science of Fractal Images. Heinz-Otto Peitgen, ed.– Springer-Verlag, 1987.

НЕСПЕЦИАЛЬНЫЕ СТАТЬИ И ИНТЕРВЬЮ

10. Davis Ch., Knuth D. Number Representations and Dragon Curves, Parts 1 and 2.– Journal of Recreational Mathematics, 1970, 3, pp. 68–81, 133–149.
11. Steen L. A. Fractals: A World of Nonintegral Dimensions.– Science, 1977, 112, pp. 112–123.
12. Gardner M. Fractal Music.– Scientific American, April 1978, pp. 16–32.
13. Thomsen D. A Place in the Sun for Fractals.– Science News, 1981, 121, pp. 28–30.
14. Schechter B. A New Geometry of Nature.– Discover, June 1982, pp. 66–67.
15. Stein K. The Fractal Cosmos.– Omni, February 1983, pp. 63 ff.
16. McDermott J. Geometric Forms Known as Fractals Find Sense in Chaos.– Smithsonian, December 1983, 14, pp. 110–175.
17. Barcellos A. The Fractal Geometry of Mandelbrot.– The College Mathematics Journal, 1984, 15, pp. 98–177.
18. Peterson I. Ants in Labyrinths and Other Fractal Excursions.– Science News, 1984, 125, pp. 42–43.
19. Davis M. Interview with Benoît B. Mandelbrot.– Omni, Ferbruary 1984, pp. 65–66, 102–107.
20. Mandelbrot B. An Interview by Anthony Barcellos.– Mathematical People. Donald Albers and G. L. Alexanderson, eds.– Birkhäuser, 1985.
21. Dewdney A. K. Exploring the Mandelbrot Set.– Scientific American, August 1985, pp. 16–24.
22. Gleick J. The Man Who Reshaped Geometry.– New York Times Magazine, December 8, 1985, pp. 64 ff.
23. Dewdney A. K. Of Fractal Mountains, Graftal Plants and Other Computer Graphics at Pixar.– Scientific American, December 1986, 255, pp. 14–20.

24. Sander L. Fractal Growth.– Scientific American, January 1987, pp. 94–100.
25. Peterson I. Packing It In; Fractals Play an Important Role in Image Compression.– Science News, 1987, 131, pp. 283–285.
26. Schechter B. Fractal Fairy Tales.– Omni, October 1987, pp. 87–91.
27. West B., Goldberger A. Physiology in Fractal Dimensions.– American Scientist, 1987, 75, pp. 354–365.
28. Petrson I. The Mathematical Tourist: Snapshots of Modern Mathematics. – W. H. Freeman and Company, 1988.

ГЛАВА 4

1. Guy R. K., Smith C. A. B. The G-Values of Various Games.– Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1956, 52, Part 3, pp. 514–526.
2. Golomb S. W. A Mathematical Investigation of Games of "Take Away".– Journal of Combinatorial Theory, 1966, 1, pp. 443–458.
3. Conway J. H. All Numbers Great and Small.– University of Calgary Mathematical Research Paper No. 149, 1972.
4. Conway J. H. All Games Bright and Beautiful.– University of Calgary Mathematical Research Paper No. 295, 1975. Перепечатано в журнале: American Mathematical Monthly, 1977, 84, pp. 417–434.
5. Conway J. H. A Gamut of Game Theories.– Mathematical Magazine, 1978, 51, pp. 5–12.

О СЮРРЕАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

6. Knuth D. Surreal numbers.– Addison-Wesley, 1974.
7. Gonshor H. An Introduction to the Theory of Surreal Numbers.– London Mathematical Society Lecture Note Series 110, 1986.

О КОНУЭЕ

8. Guy R. K. John Horton Conway: Mathematical Magus.– Two-Year College Mathematics Journal, 1982, 13, pp. 290–299.
9. Taubes G. John Horton Conway: A Mathematical Madness in Cambridge.– Discover, August 1984, pp. 40–50.
10. Thomson M., Niemann M. Mathematical Mania.– Science Today, Spring 1987, pp. 8–9.

ГЛАВА 5

1. Dudeney H. E. Amusements in Mathematics.– Dover, 1958.
2. The Best Mathematical Puzzles of Sam Loyd.– Dover, 1959.
3. More Mathematical Puzzles of Sam Loyd.– Dover, 1960. Имеется перевод книг [2] и [3]: Лойд С. Математическая мозаика.– М.: Мир, 1980.
4. Guy R. K., Kelly P. A. The No-Three-in-Line Problems.– Canadian Mathematics Bulletin, 1968, 11, pp. 527–531.
5. Adena M. A., Holton D. A., Kelly P. A. Some Thoughts on the No-Three-in-Line Problems.– In: Combinatorial Mathematics: Procee-

dings of the Second Australian Conference. Ed. by Derek A. Holton.– No. 403 of Lecture Notes in Mathematics, Berlin: Springer-Verlag, 1974.

6. Hall R. R., Jackson T. H., Sudbery A., Wild K. Some Advances in the No-Three-in-Line Problem.– Journal of Combinatorial Theory, 1975, 18, pp. 336–341.
7. Craggs D., Hughes-Jones R. On the No-Three-in-Line Problems.– Journal of Combinatorial Theory, 1976, 20, pp. 363–364.
8. Klove T. On the No-Three-in-Line Problem, II.– Journal of Combinatorial Theory, 1978, 24, pp. 126–127.
9. Klove T. On the No-Three-in-Line Problem, III.– Journal of Combinatorial Theory, 1979, 26, pp. 82–83.
10. Anderson D. B. Update on the No-Three-in-Line Problem.– Journal of Combinatorial Theory, 1979, 27, pp. 365–366.
11. Guy R. Unsolved Problems in Number Theory.– Springer-Verlag, 1981. (Problem F4)

ГЛАВА 7

1. Oddities and Curiosities of Words and Literature. C. C. Bombaugh, Martin Gardner, ed.– Dover, 1961.
2. Borgmann D. Language on Vacation: An Olio of Orthographical Oddities.– Schribner's, 1965.
3. Borgmann D. Beyond Language: Adventures in Word and Thought.– Schribner's, 1967.
4. Espy W. The Game of Words.– Grosset and Dunlap, 1972.
5. La Littérature Potentielle.– Oulipo, Gallimard, 1973.
6. Bergerson H. Palindromes and Anagrams.– Dover, 1973.
7. Espy W. Almanac of Words and Play.– Potter, 1975.
8. Mathews H Oulipo.– Word Ways, May 1976, 9, pp. 67–74.
9. Eckler R. Oulipo.– Word Recreations.– Dover, 1979, pp. 4–9.
10. Espy W. Another Almanac of Words and Play.– Potter, 1980.
11. Oulipo. Atlas de Littérature Potentielle.– Gallimard, 1981.
12. Augarde T. The Oxford Guide to Word Games.– Oxford, 1984.
13. Gardner M. Puzzles in Ulysses.– Semiotica, 1985, 57, pp. 317–330.
14. Dickson P. Names.– Delacorte, 1986.
15. Names and Games. Ross Eckler, ed.– University Press of America, 1986.
16. Harry Mathews Number. The Review of Contemporary Fiction, Fall 1987, 7. Статьи 18 авторов, посвященные Мэтьюзу. Приведена также обширная библиография работ самого Мэтьюза и статей о нем.
17. Mathews H. That Ephemeral Thing. A Review of George Perec's Life: A User's Manual.– New York Review of Books, June 16, 1988, pp. 34–37.

ГЛАВА 8

ОБ ИГРЕ ВИТХОФФА

1. Coxeter H. S. M. The Golden Section, Phyllotaxis, and Wythoff's Game.– Scripta Mathematica, June/September 1953, 19, pp. 135–143.

2. Berge Cl. The Theory of Graphs and Its Applications.– Paris: Dunod, 1958; London: Methuen, 1962. Имеется перевод: Берж К. Теория графов и ее применение.– М.: ИЛ, 1962.
3. Connell I. G. A Generalization of Wythoff's Game.– The Canadian Mathematics Bulletin, 1959, 2, pp. 181–190.
4. Whiniham M. Fibonacci Nim.– The Fibonacci Quaterly, December 1963, 1, pp. 9–14.
5. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения.– М.: Физматгиз, 1961.
6. O'Beirne T. H. Puzzles and Paradoxes.– Oxford University Press, 1965, pp. 131–138; Dover, 1984.
7. Яглом А. М., Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении.– М.: Гостехиздат, 1954.
8. Holladay J. Some Generalizations of Wythoff's Game and Other Related Games.– Mathematics Magazine, January 1968, 41, pp. 7–13.
9. Klarner D. Partitions of N into Distinct Fibonacci Numbers.– The Fibonacci Quarterly, February 1968, 6, pp. 235–244.
10. Fraenkel A. S., Boras I. A Generalization of Wythoff's Game.– Journal of Combinatorial Theory, Series A, September 1973, pp. 175–191.
11. Silber R. A Fibonacci Property of Wythoff Pairs.– The Fibonacci Quarterly, February 1977, 15, pp. 85–88.
12. Silber R. Wythoff's Nim and Fibonacci Representations.– The Fibonacci Quaterly, February 1977, 15, pp. 85–88.
13. Horadam A. F. Wythoff Pairs.– The Fibonacci Quaterly, April 1978, 16, pp. 147–151.
14. Hoggatt V. E., Jr., Hillman A. P. A Property of Wythoff Pairs.– The Fibonacci Quaterly, October 1978, 16, p. 472.
15. Rouse Ball W. W., Coxeter H. S. M. Mathematical Recreations and Essays.– Dover, 1987, pp. 39–40. Имется перевод: Болл У., Коксетер Г. Математические эссе и развлечения.– М.: Мир, 1986.
16. Hoggatt V. E., Jr., Bicknell-Johnson M., Sarsfield R. A Generalization of Wythoff's Game.– The Fibonacci Quaterly, October 1979, 17, pp. 198–211.
17. Bergum G. E., Hoggatt V. E., Jr. Some Extensions of Wythoff Pair Sequences.– The Fibonacci Quaterly, February 1980, 18, pp. 28–32.
18. Fraenkel A. How to Beat Your Wythoff Games' Opponent on Three Fronts.– The Amarican Mathematical Monthly, June/July 1982, 89, pp. 353–361.
19. Fraenkel A. Wythoff Games, Continued Fractions, Cedar Trees and Fibonacci Sequences.– Theoretical Computer Science, 1984, 29, pp. 49–73.
20. Bicknell-Johnson M. Generalized Wythoff Numbers from Simultaneous Fibonacci Representations.– The Fibonacci Quarterly, November 1985, 23, pp. 308–318.

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ БИТТИ

21. Beatty S. Problem 3173.– The American Mathematical Monthly, 1926, 33, p. 159; solutions in: 1927, 34, p. 159.
22. Uspensky J. V. On a Problem Arising Out of a Certain Game.– The American Mathematical Monthly, 1927, 34, pp. 516–521.

23. Lambek J., Moser L. Inverse and Complementary Sequences of Natural Numbers.– The American Mathematical Monthly, 1954, 61, pp. 454–458.
24. Graham R. L. On a Theorem of Uspensky.– The American Mathematical Monthly, April 1963, 70, pp. 407–409.
25. Gilbert E. N. Functions Which Represent All Integers.– The American Mathematical Monthly, September 1963, 70, pp. 736–738.
26. Fraenkel A. The Bracket Function and Complementary Sets of Integers.– The Canadian Journal of Mathematics, 1969, 21, pp. 6–27.
27. Honsberger R. Complementary Sequences.– Ingenuity in Mathematics, Chapter 7.– Random House, 1970.
28. Fraenkel A., Levitt J., Shimsoni M. Characterization of the Set of Values f(n) = N, n = 1, 2, ... – Discrete Mathematics, 1972, 2, pp. 335–345.
29. Fraenkel A. Complementary and Exactly Covering Sequences.– Journal of Combinatorial Theory, January 1973, 14, pp. 8–20.
30. Fraenkel A. A Characteristic of Exactly Covering Congruences.– Discrete Mathematics, 1973, 4, pp. 359–366.
31. Fraenkel A. Further Characterizations and Properties of Exactly Covering Congruences.– Discrete Mathematics, 1975, 12, pp. 93–100.
32. Stolarsky K. Beatty Sequences, Continued Fractions, and Certain Shift Operators.– The Canadian Mathematical Bulletin, 1976, 19, pp. 473–482.
33. Fraenkel A. Complementary Systems of Integers.– The American Mathematical Monthly, February 1977, 84, pp. 114–115.
34. Stolarsky K. A Set of Generalized Fibonacci Sequences Such That Each Natural Number Belongs to Exactly One.– The Fibonacci Quaterly, October 1977, 15, p. 224.
35. Graham R. L., Shen Lin, Chio-Shih Lin. Spectra of Number.– Mathematics Magazine, May 1978, 51, pp. 174–176.
36. Boshernitzan M., Fraenkel A. S. Nonhomogeneous Spectra of Numbers.– Discrete Mathematics, 1981, 34, pp. 325–327.
37. Boshernitzan M., Fraenkel A. S. A Linear Algorithm for Nonhomogeneous Spectra of Numbers.– Journal of Algorithms, 1984, 5, pp. 187–198.
38. Berger M. A., Felzenbaum A., Fraenkel A. Disjoint Covering Systems of Rational Beatty Sequences.– Journal of Combinatorial Theory, Series A, May 1986, 42, pp. 150–153.

ГЛАВА 10

1. Hardy G. H. A Mathematician's Apology.– London: Methuen, 1953.
2. Silverman D. Find the Needle.– Journal of Recreational Mathematics, January 1957, 4, p. 67 (problem 157); January 1972, 5, p. 69 (solution); October 1972, 5, p. 262–263 (comment by Benjamin Schwartz).
3. Brumfiel C. Using a Game as a Teaching Device.– Mathematical Teacher, May 1974, 67, pp. 386–391.
4. Austin A. K. A Calculus For Know/Don't Know Problems.– Mathematics Magazine, January 1976, 48, pp. 12–14.
5. Conway J. H., Patterson M. S. A Headache Causing Problem.– Een

Par Met Een Korte Broek. J. K. Lenstra et al., eds.– Amsterdam, 1977.
6. Akihiro Nozaki. Anno's Hat Tricks. Illustrated by Mitsumasa Anno.– Philomel, 1985.
7. McGilvery L. 'Speaking of Paradoxes'... or Are We?– Journal of Recreational Mathematics, 1987, 19, pp. 15–19.

ГЛАВА 11

1. De Morgan A. A Budget of Paradoxes.– Second Ed.– Open Court 1915.
2. Sawyer W. W. Things and Un-things.– Mathematics Teacher, January 1958, 51, pp. 14–16.
3. Fang I. E. A Tale of Star-Crossed Lovers.– Uclan Review Magazine, Spring 1960.
4. Kohn J. A Physical Model for the Operations with Integers.– Mathematics Teacher, December 1978, 71, pp. 734–736.
5. Nagel E. Teleology Revisited.– Columbia University Press, 1979. Chapter 8. Impossible Numbers.
6. Crowley M., Dunn K. On Multiplying Negative Numbers.– Mathematics Teacher, April 1987, 78, pp. 252–256.

ГЛАВА 12

1. Courant R., Robbins H. Functions and Limits.– In: What is Mathematics?– Oxford University Press, 1941. Имеется перевод: Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика?– М.: Просвещение, 1967.
2. Stone A. H, Tukey J. W. Generalized 'Sandwich' Theorems.– Duke Mathematical Journal, June 1942, 9, pp. 356–359.
3. Cuts and Congruence.– Mathematics Calendar.– Springer-Verlag, 1979.

ГЛАВА 14

КНИГИ ПО КРИПТОАНАЛИЗУ

1. Gaines H. Cryptanalysis.– Dover, 1956. Перепечатка книги 1939 г.
2. Kahn D. The Codebreaker.– Macmillan, 1967. Книга, превосходящая по своим достоинствам все прочие издания на эту тему.
3. Sinkov A. Elementary Cryptanalysis.– Random House, 1968.
4. Konheim A. Cryptography: A Primer.– Wiley, 1981.
5. Bosworth B. Codes, Ciphers, and Computer.– Hayden, 1982.
6. Meyer C. H., Matyas S. M. Cryptography: A New Dimension in Computer Data Security.– Wiley, 1982.
7. Kahn D. Kahn on Codes: New Secrets of Cryptology.– Macmillan, 1983.
8. Gardner M. Codes, Ciphers, and Secret Writing.– Dover, 1984. Перепечатка детской книги, изданной в 1972 г.
9. O'Connor L. J., Seberry J. Cryptographic Significance of the Knapsack Problem.– Aegean Park Press, 1988.

ОБ ЭДГАРЕ АЛЛАНЕ ПО И КРИПТОАНАЛИЗЕ

10. Poe E. A. A Few Words on Secret Writing.– Graham's Magazine, July 1841, 19, pp. 33–38.
11. Friedman W. Edgar Allan Poe, Cryptographer.– American Literature, November 1936, 8, pp. 226–280.
12. Wimsatt W., Jr., What Poe Knew About Cryptography.– Publications of the Modern Language Association, 1945, 58, pp.754–779.
13. Winkel B. Poe's Challenge Cipher Finally Broken.– Cryptologia, January 1977, 1, pp. 93–96. Расшифровка и комментарии по поводу того, как она была получена, приведены в том же журнале (October 1977, 1, pp. 318–325).

НОВЫЕ РАБОТЫ

14. Shaffer R. Cryptic Reaction.– The Wall Street Journal, June 16, 1978, p. 1.
15. An Uncrackable Code?– Time, July 3, 1978, pp. 55–56.
16. Faflick Ph. Opening the «Trapdoor Knapsack». – Time, October 28, 1982.
17. Kolata G. B. Computer Encryption and the National Security Agency Connection.– Science, July 29, 1977, pp. 438–448; Crytography: On the Brink of a Revolution? – Science, Audust 19, 1977, pp. 747–748; Cryptology: Scientists Puzzle Over Threat to Open Research Publication.– Science, September 30, 1977, pp. 1345–1349; Cryptology: A Secret Meeting at IDA.– Science, April 14, 1978, p. 184; New Codes Coming into Use.– Science, May 16, 1980, pp. 1442–1443; Testing for Primes Gets Easier.– Science, September 26, 1980, pp. 1503–1504; Cryptographers Gather to Discuss Research.– Science, November 1981, pp. 646–647; Another Promising Code Falls.– Science, December 16, 1983, p. 1224.

ПОПУЛЯРНЫЕ СТАТЬИ

18. Shapley D. The New Unbreakable Codes: Will They Put NSA Out of Business? – The Washington Post Outlook, Section B1, July 9, 1978.
19. Hellman M. The Mathematics of Publick-Key Cryptography.– Scientific American, August 1979, pp. 146–157.
20. Rapoport R. Unbreakable Code.– Omni, September 1980, pp. 84–86, 92.
21. Davida G. Safety in Numbers.– The Science, July/August 1981, pp. 9–14.
22. Lucaino D., Prichett G. Gryptology: From Caesar Ciphers to Public-Key Cryptosystems.– The College Mathematics Journal, January 1987, 18, pp. 2–17.

СТАТЬИ СПЕЦИАЛЬНОГО ХАРАКТЕРА

23. Diffie W., Hellman M. New Directions in Cryptography.– IEEE Transactions of Information Theory, November 1976, pp. 644–654.
24. Rivest R., Shamir A., Adleman L. A Method of Obtaining Digital

Signatures and Public-Key Cryptosystems.– M.I.T. Laboratory for Computer Science, Technical Memo 82, April 1977; Communications of the ACM, February 1978, 21, pp. 120–126.
25. Simmons G., Norris M. Preliminary Comments on the M.I.T. Public-Key Cryptosystem.– Cryptology, October 1977, 1, pp. 406–414. Ответ Райвеста см. в журнале Cryptology, January 1978, 2, pp. 62–65.
26. Merkle R.C. Secure Communications Over Insecure Channels.– Communications of the ACM, April 1978, 21, pp. 294–299.
27. Merkle R., Hellman M. Hiding Information and Signatures in Trapdoor Knapsacks.– Transactions of Information Theory, September 1978, pp. 525–530.
28. Simmons G.J. Cryptology: The Mathematics of Secure Communication.– Mathematical Intelligencer, 1979, 1, pp. 233–246.
29. Diffie W., Hellman M. Privacy and Authentication: An Introduction to Cryptography.– Proceedings of the IEEE, March 1979, 67, pp. 397–427.
30. Merkle R. Secrecy, Authentication, and Public-Key Systems.– Technical Report 1979–1, Information Systems Laboratory, Stanford University, June 1979.
31. Simmons G. Symmetric and Asymmetric Encryption.– Computing Surveys, December 1979, 11, pp. 305–330. В библиографии приведены ссылки на 66 работ.
32. Sloane N.J.A. Error-Correcting Codes and Cryptography.– In: The Mathematical Gardner.– Prindle, Weber, and Schmidt, 1981. Имеется перевод: Слоэн Н.Дж.А. Коды, исправляющие ошибки, и криптография.– В сб.: Математический цветник.– М.: Мир, 1983, с. 432–472.
33. Shamir A. A Polynomial Time Algorithm Testing for Breaking the Basic Merkle – Hellman Cryptosystems.– Proceedings of the 23rd Annyal Symposium of the Foundations of Computer Science, 1982, pp. 145–152.
34. Adleman L.M. On Breaking the Generalized Knapsack Public-Key Cryptosystem.– Proceedings of the 15th ACM Symposium on Theory of Computing, 1983, pp. 402–412.
35. Blum M. How to Exchange (Secret) Keys.– ACM Transactions on Computer Systems, May 1983, 1, pp. 175–193.
36. Lenstra H.W., Jr. Integer Programming and Cryptography.– Mathematical Intelligencer, 1984, 6, pp. 14–19.
37. Boyer R., Strother Moore J. Proof Checking the RSA Public-Key Encryption Algorithm.– The American Mathematical Monthly, March 1984, 91, pp. 181–189.
38. Rivest R. Cryptology.– In: Handbook of Theoretical Computer Science, Chapter 13, 1988. Превосходный обзор переворота, происходящего в настоящее время в криптографии. Библиография содержит ссылки более чем на 170 работ.

О СИСТЕМЕ DES

39. Morris R., Sloane N.J.A., Wyner A.D. Assessment of the National Bureau of Standards Proposed Federal Data Encryption Standard.– Cryptology, 1977, 1, pp. 281–306.

40. Diffie W., Hellman M. E. Exhaustive Cryptanalysis of the NBS Data Encryption Standard.– Computer, June 1977, 10, pp. 74–84.
41. Hellman M. E. DES Will Be Totally Insecure Within Ten Years.– IEEE Spectrum, July 1979, 16, pp. 32–39.

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ БЕЗ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

42. Peterson I. Keeping Secrets: How to Prove a Thorem So That No One Else Can Claim It.– Science News, August 30, 1986, 130, pp. 140–141.
43. Buhler J. Zero-Knowledge Proofs.– Focus (newsletter of the American Mathematical Association), October 1986, 6, pp. 1, 6–7.
44. Gleick J. A New Approach to Protecting Secrets in Discovered.– New York Times, February 17, 1987, pp. 17–18.
45. Brief U. S. Supression of Proof Stirs Anger.– New York Times, February 17, 1987, p. 17. О попытке представителей армии США заблокировать патент Шамира.

ГЛАВА 15

1. Taylor H. M. Conic Section.– In: Encyclopedie Britannica, Ninth Edition.– Encyclopedia Britannica, Inc., 1890.
2. Hilbert D., Cohn-Vossen S. Geometry and the Imagination.– Chelsea, 1952. Имеется перевод: Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия.– М.– Л.: Гостехиздат, 1951.
3. Lockwood E. H. A Book of Curves.– Cambridge University Press, 1961.
4. Ball D. Halving Envelopes.– Mathematical Gazette, October 1980, 64, pp. 166–172.

ГЛАВА 16

1. Kruskal M. D. Delphi: A Game of Inductive Reasoning.– Plasma Physics Laboratory, Princeton University, 1962.
2. Abbott R. The New Eleusis.– Privately published, 1977.
3. Sackson S. Eleusis: The Game with the Secret Rule.– Games, May/June 1978, pp. 18–19.
4. Romesburg H. C. Simulating Scientific Inquiry with the Card Game Eleusis.– Science Education, 1979, 3, pp. 599–608.
5. Dietterich T. The Methodology of Knowledge Layers for Inducing Descriptions of Sequentially Ordered Events.– Department of Computer Science, University of Illinois at Urbana.– Master's thesis, 1980.

ГЛАВА 17

1. Goodman A. W. On Sets of Acquaintances and Strangers at Any Party.– The American Mathematical Monthly, 1959, 66, pp. 778–783.
2. Lorden G. Blue-Empty Chromatic Graphs.– The American Mathematical Monthly, 1962, 69, pp. 114–120.
3. Graham R. On Edgewise 2-Colored Graphs with Monochromatic Triangles and Containing No Complete Hexagon.– Journal of Combinatorial Theory, 1968, 4, p. 300.

4. Harary F. Graph Theory.– Addison-Wesley, 1969. Имеется перевод: Харари Ф. Теория графов.– М.: Мир, 1973.
5. Erdös P. et al. Euclidean Ramsey Theorems I.– Journal of Combinatorial Theory, Series A, 1973, 14, pp. 341–363.
6. Burr S. Generalized Ramsey Theory for Graphs – A Survey.– In: Graphs and Combinatorics, R. Bary and F. Harary, eds.– Springer-Verlag, 1974, pp. 58–75.
7. Graham R., Rotschild B., Spencer J. Ramsey Theory.– Wiley, 1980.
8. Graham R. Rudiments of Ramsey Theory.– The American Mathematical Society, 1981. Имеется перевод: Грэхэм Р. Начала теории Рамсея.– М.: Мир, 1984.
9. Journal of Graph Theory, Spring 1983, 7. Этот выпуск, посвященный Фрэнку Рамсею, содержит 19 статей о Рамсее и теории Рамсея.

ГЛАВА 18

1. Sculpture: Take Apart and Look Again.– Time, May 23, 1969, p. 78.
2. Marchiori G. La Sculpture de Berrocal.– Brussels: La Connaissance Bruxelles, 1973.

О ГОЛОВОЛОМКАХ-КОЛЮЧКАХ

3. Cutler W. The Six-Piece Burr.– Journal of Recreational Mathematics, 1977–1978, 10, pp. 241–250.
4. Van Delft P., Botermans J. Creative Puzzles of the World.– Abrams, 1978, pp. 66–80.
5. Dewdney A. K. Computer Recreations.– Scientific American, October 1985, pp. 16–22.
6. Coffin S. Puzzle Craft.– Privately printed, 1985, pp. 32–60.
7. Slocum J., Botermans. Puzzles Old and New.– University of Washington Press, 1986, pp. 68–87.
8. Cutler W. Holey 6-Piece Burr! – Privately printed, 1986.

ГЛАВА 20

КНИГИ РЭЙМОНДА СМАЛЛИАНА С ЛОГИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ-ГОЛОВОЛОМКАМИ

1. The Chess Mysteries of Sherlock Holmes.– Knopf, 1979.
2. The Chess Mysteries of the Arabian Knights.– Knopf, 1981.
3. The Lady or the Tiger? – Knoph, 1981. Имеется перевод: Принцесса или тигр? – М.: Мир, 1985.
4. Alice in Puzzle-Land.– Morrow, 1982. Имеется перевод: Алиса в Стране Смекалки.– М.: Мир, 1987.
5. To Mock a Mockingbird.– Knoph, 1985.
6. Forever Undecided: A Puzzle Guide to Gödel.– Knopf, 1987.

ФИЛОСОФСКИЕ РАБОТЫ СМАЛЛИАНА

7. The Tao Is Silent.– Harper and Row, 1977.
8. This Book Needs No Title.– Prentice-Hall, 1980.

9. Five Thousand B.C. and Other Philosophical Fantasies.– St. Martin's, 1983.
10. Incompleteness and Undecidability.– Oxford University Press (forthcoming).

О СМАЛЛИАНЕ

11. Van Orman Quine W. Knights and Knaves.– New York Times Book Review, May 28, 1978.
12. Mothner I. The Puzzling and Paradoxal Worlds of Raymond Smullian.– Smithsonian, 1982, 13, p. 115–128.

О ГЁДЕЛЕ И НЕРАЗРЕШИМОСТИ

13. Davis M. Computability and Unsolvability.– McGraw-Hill, 1958.
14. Nagel E., Newman J. Gödel's Proof.– New York University Press, 1959. Имеется перевод: Нагель Э., Ньюмен Дж. Теорема Гёделя.– М.: «Знание», 1970.
15. The Undecidability. Martin Davis, ed.– Raven Press, 1965.

ГЛАВА 21

ОБ АЛЬФАМАГИЧЕСКИХ КВАДРАТАХ

1. Sallows L. Alphamagic Squares.– Abacus, 1986, 4, pp. 28–45; 1987, pp. 20–29, 43.

О ЧИСЛАХ СМИТА

2. Wilansky A. Smith Numbers.– Two-Year College Mathematics Journal, 1987, 13, p. 21.
3. McDaniel W. L. The Existence of Infinitely Many k-Smith Numbers.– The Fibonacci Quarterly, 1983, 56, pp. 36–37.
4. Oltikar S., Weiland K. Construction of Smith Numbers.– Mathematics Magazine, 1983, 56, pp. 36–37.
5. Yates S. Special Sets of Smith Numbers.– Mathematical Magazine, 1986, 59, pp. 293–296.
6. Yates S. Smith Numbers Congruent to 4 (Mod 9).– Journal of Recreational Mathematics, 1987, 19, pp. 139–141.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

ГЛАВА 1

1*. Gardner M. Time Travel and Other Mathematical Bewilderments.– N. Y.: W. H. Freeman and Company, 1988. Имеется перевод: Гарднер М. Путешествие во времени.– М.: Мир, 1990.
2*. Gardner M. The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions.– N. Y.: Simon and Schuster, 1969. Имеется перевод: Гарднер М. Математические досуги.– М.: Мир, 1972. Глава 24. «Делящиеся» фигуры на плоскости, с. 301–314.

ГЛАВА 2

1*. Sloane N. J. A. Handbook of Integer Sequences.– Academic Press, 1973.
2*. Rouse Ball W. W., Mathematical Recreations and Essays.– Dover, 1987. Имеется перевод: Болл У. Коксетер Г. Математические эссе и развлечения.– М.: Мир, 1986.
3*. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения.– М.: Мир, 1971. Гл. 42, с. 429–440.
1**. Веннинджер М. Модели многогранников.– М.: Мир, 1974.
2**. Арнольд В. И. Дополнение Б.– В кн.: Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени.– М.: Наука, 1989, с. 291–300.
3**. Левитов А. С. Квазикристаллы.– Природа, 1990, 5, с. 76–84.

ГЛАВА 3

1*. Гарднер М. Крестики-нолики.– М.: Мир, 1988.
2*. Гарднер М. Математические досуги.– М.: Мир, 1972.
3*. Gardner M. Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American.– University of Chicago Press, 1983.
4*. Hahn H. Geometry and Intuition.– Scientific American, April 1954.
5*. Gardner M. Mathematical Magic Show.– Knopf, 1977.
6*. Scientific American, November 1975.
7*. Gleick J. Chaos: Making a New Science.– London: Heinemann, 1987.
1**. Пархоменко А. С. Что такое линия?– М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
2**. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология.– М.: Наука, 1982.

ГЛАВА 4

1*. Conway J. H. On Numbers and Games.– Academic Press, 1976.
2*. Gardner M. Wheels, Life, and Other Mathematical Amusements.– W. H. Freeman and Company, 1983. Имеется перевод: Гарднер М. Крестики-нолики.– М.: Мир, 1988.
3*. Gardner M. Mathematical Magic Show.– Knopf, 1977.
4*. Gardner M. Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainment.– W. H. Freeman and Company, 1986.
5*. Gardner M. Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.– Simon and Schuster, 1959. Имеется перевод: Гарднер М. Математические головоломки и развлечения.– М.: Мир, 1971. Гл. 14, Ним и Так-тикс, с. 132–142.
6*. Gardner M. Mathematical Carnival.– Knopf, 1975. Имеется перевод: Гарднер М. Математические новеллы.– М.: Мир, 1974. Гл. 23. Топологические игры «Рассада» и «Брюссельская капуста», с. 281–290.
7*. Berlekamp E. R., Conway J. H., Guy R. K. Winning Ways.– Academic Press, 1982.

ГЛАВА 5

1*. Loyd S. Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums, with Answers.– Morningside Press (Lamb Publishing Company), 1914.
2*. Gardner M. Wheels, Life, and Other Mathematical Amusement.– W. H. Freeman and Company, 1983. Имеется перевод: Гарднер М. Крестики-нолики.– М.: Мир, 1988.
3*. Ainley S. Mathematical Puzzles.– G. Bell and Sons, 1977.

ГЛАВА 7

1*. Updike J. Hugging the Shore.
2*. Mathews H. Conversations.– Random House, 1962.
3*. Mathews H. Tlooth.– Doubleday, 1966.
4*. Mathews H. The Sinking of the Odradek Stadium and Other Novels.– Harper and Row, 1975.
5*. Mathews N. Selected Declarations of Dependence.– Eternal Network.– Toronto, 1976.
6*. Adler M. J. Philosopher at Large.– Macmillan, 1977, pp. 157–159.
7*. Gardner M. Wheels, Life, and Other Mathematical Amusements.– W. H. Freeman and Company, 1983. Имеется перевод: Гарднер М. Крестики-нолики.– М.: Мир, 1988.
8*. Гарднер М. Математические досуги.– М.: Мир, 1972.

ГЛАВА 9

1*. Штейнгауз Г. Сто задач.– М.: Физматгиз, 1959.
2*. Harborth H. Journal of Combinatorial Theory (A), 1972, 12, pp. 253–259.
3*. Buckley M. R. W. Journal of Recreational Mathematics, 1985, 8.
4*. Trigg C. Absolute Difference Triangles.– Journal of Recreational Mathematics, 1976–1977, 9, pp. 271–275.
5*. Chang G. J., Hu M. C., Lih K. W., Shih T. C. Exact Difference Triangles.– Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, Taipei, Taiwan, June 1977, 5, pp. 191–197.
6*. Erdös R., Guy R. Distinct Distances Between Lattice Points.– Elementen der Mathematik, 1970, 25, pp. 121–133.
7*. Fan Chung. The Number of Different Distances Determined by n Points in the Plane.– Journal of Combinatorial Theory, Series A, 1984, 36, pp. 342–354.

ГЛАВА 10

1*. Pierce C. Collected Papers, Vol. 1, p. 62.
2*. Kraitchik M. Mathematical Recreations.– Dover, 1953.
3*. Gardner M. Aha! Gotcha.– W. H. Freeman and Company, 1982. Имеется перевод: Гарднер М. А ну-ка, догадайся.– М.: Мир, 1984.
4*. Gamow G., Stern M. Puzzle-Math.– Viking, 1958.
5*. Gardner M. Puzzles form Other Worlds.– Vintage, 1987.

6*. Proccedings of the Fourth ACM Conference on Principles of Distributed Computing, 1985.

ГЛАВА 12

1*. Lucey R. M. A Problem A Day.– Penguin Books, 1937.
2*. Trigg C. W. Mathematical Quickies.– McGraw-Hill, 1967. Имеется перевод: Задачи с изюминкой.– М.: Мир, 1975.
3*. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп.– М.: Наука, 1981; М.– Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
4*. Steinhaus H. Fundamenta Mathematica, 1945, 33, pp. 245–263.

ГЛАВА 14

1*. The Mathematical Gardner. Ed. by D. A. Klarner.– Boston: Prindl, Weber and Schmidt, California: Wadsworth International, 1981. Имеется перевод: Математический цветник.– М.: Мир, 1983.
2*. Blum M. Coin flipping by telephone.– SIGAT News, 1983, 15, pp. 23–27.
3*. Denning P. Security Data in Networks.– American Scientist, January/February 1987, 75, pp. 12–14.
4*. Denning D. Cryptography and Security.– Addison-Wesley, 1982.

ГЛАВА 15

1*. Carroll L. The Dynamics of a Parti-cle. Имеется перевод: Кэрролл Л. Точ(еч)ная динамика партийной болтовни.– В сб.: История политической мысли и современность.– М.: Наука, 1988, с. 227–242.
2*. Gardner M. New Mathematical Diversions from Scientific American.– New York: Simon and Schuster, 1966. Chapter 15. Имеется перевод: Гарднер М. Математические досуги.– М.: Мир, 1972.

ГЛАВА 16

1*. Gardner M. The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.– Simon and Schuster, 1961. Имеется перевод: Гарднер М. Математические головоломки и развлечения.– М.: Мир, 1971.
2*. Abbott R. Abbott's New Card Games.– Stein and Day, 1963; Funk and Wagnalls, 1963.
3*. Gardner M. Mathematical Circus.– Knopf, 1979.
4*. Katz R. Pensari Guide Book, 1986.
5*. The Life and Letters of Thomas H. Huxley.– Appleton, Vol. 1, 1901.

ГЛАВА 17

1*. Gardner M. Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments.– W. H. Freeman and Company, 1986.
2*. Гарднер М. Математические новеллы.– М.: Мир, 1974.

3*. Knuth D. E. Mathematics and Computer Science: Cope with Finiteness. Science, December 17, 1976.

ГЛАВА 18

1*. Needham J. Science and Civilization in China, Vol. 3.
2*. Hoffmann.- Puzzles Old and New, 1983.
3*. The Magician's Own Book, 1857.
4*. Filipiak A. S. 100 Puzzles: How to Make and to Solve Them.– A. S. Barnes and Company, 1942.

ГЛАВА 19

1*. Gardner M. Mathematical Magic Show.– Knopf, 1977.
2*. Silverman D. L. Your Move.– McGraw-Hill, 1971.
3*. Honsberger R. Mathematical Gems II.– Mathematical Association of America, 1976.
4*. Gardner M. Wheels, Life, and Other Mathematical Amusements.– W. H. Freeman and Company, 1983. Имеется перевод: Гарднер М. Крестики-нолики.– М.: Мир, 1988.
5*. Broline D. Renumbering of the Faces of Dice.– Mathematics Magazine, 1979, 52, pp. 312–315.
6*. Gallian J. Cyclotomic Polynomials and Nonstandard Dice.– Discrete Mathematics, 1979, 27, pp. 245–259.
7*. Robertson L., Short R., Landry S. Dice with Fair Sums.– American Mathematical Monthly, 1988, 95, pp. 316–328.
8*. Fulves K. Faro Possibilities, 1970.
9*. Coxeter H. S. M. Regular Complex Polytopes.
10*. Levine E., Papick I. Checker Jumping in Three Dimensions.– Mathematics Magazine, September 1979, 52, pp. 227–231.
11*. Fulves K., Gardner M. The Kruskal Principle.– The Pallbearers Review, June 1975.
12*. The Linking Ring, December 1976, pp. 82–87.

ГЛАВА 20

1*. Smullian R. M. What is the Name of This Book? – Prentice Hall, 1978. Имеется перевод: Смаллиан Р. М. Как же называется эта книга? – М.: Мир, 1981.
2*. Smullian R. M. First-Order Logic.– Springer-Verlag, 1968.
3*. Smullian R. M. Theory of Formal Systems.– Princeton University Press, 1961.

ГЛАВА 21

1*. Gardner M. The Magic Numbers of Dr. Matrix.– Prometeus, 1985.
2*. Feynman R. Surely You're Joking, Mr. Feynman.– Norton, 1985.

Именной указатель

Предметный указатель

Оглавление

Научно-популярное издание

Мартин Гарднер

ОТ МОЗАИК ПЕНРОУЗА К НАДЕЖНЫМ ШИФРАМ

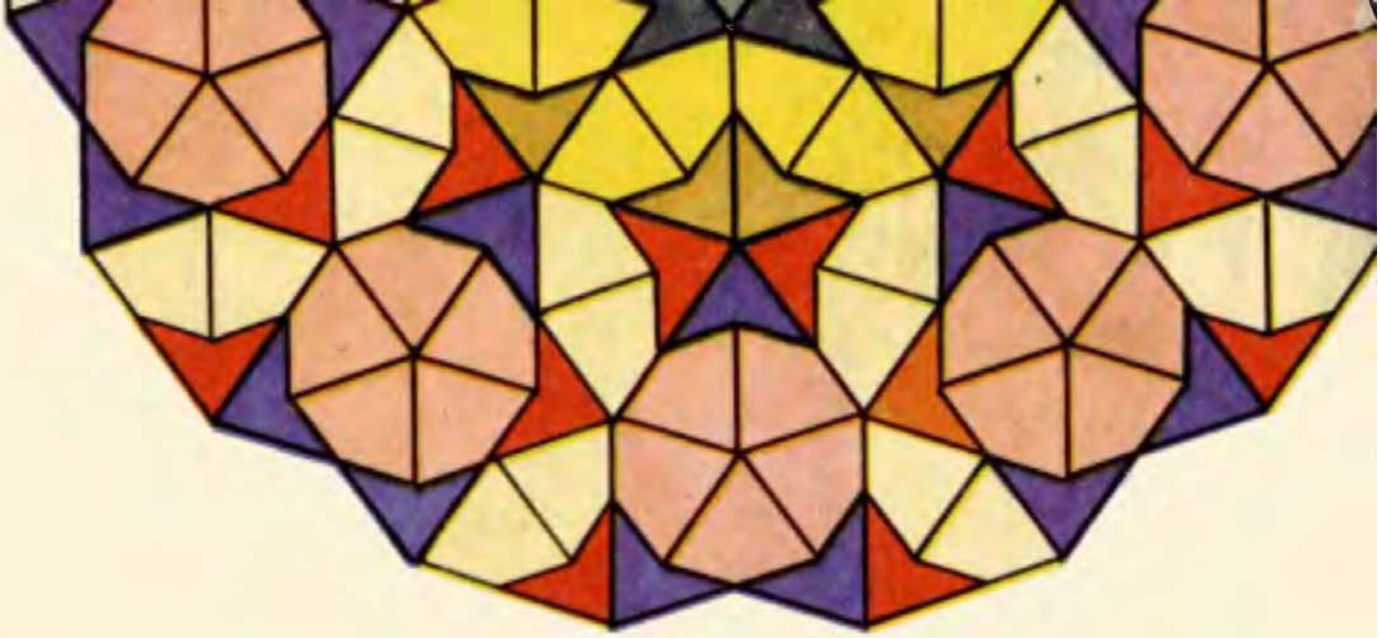
Заведующий редакцией В. И. Арнольд
Зам. зав. редакцией А. С. Попов
Ведущий редактор А. А. Брянцинская
Мл. научн. редактор Р. И. Пяткина
Художник Ю. С. Урманчеев
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Г. А. Максимова
Корректор Н. С. Курлова

ИБ № 7583

Сдано в набор 12.04.91. Подписано к печати 25.08.92. Формат 84×108 1/32.
Бумага кн.-журн. Печать офсетная. Гарнитура таймс. Объем 6,50 бум. л.
Усл. печ. л. 21,84. Усл. кр.-отт. 24,79. Уч.-изд. л. 20,85. Изд. № 1/7924.
Тираж 10 000 экз. Зак. 285. С-286.

Издательство «Мир» Министерства печати и информации
Российской Федерации
129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

АО «Офсет»
113186, г. Москва, ул. Нагорная, 20, корп. 7.



В этой книге Гарднер вводит читателя в мир сюрреальных чисел Конуэя, фракталов Мандельброта и логических головоломок Смаллиана. Он стремится заинтриговать читателя, описывая гиперболы, отрицательные числа и треугольники из бильярдных шаров. Он предлагает ему развлечься, прочитав эссе, ранее нигде не опубликованные, посвященные таким понятиям, как мозаики Пенроуза, надежные шифры, а также знакомит читателя с деятельностью группы литераторов и математиков, объединившихся под названием Улипо. И конечно же, читатель прочтет здесь увлекательную историю о возвращении доктора Матрикса, одного из старейших и любимейших литературных героев Мартина Гарднера.

ISBN 5-03-001991-X (русск.)
ISBN 0-7167-1987-8 (англ.)