И. Г. Малкин

МЕТОДЫ ЛЯПУНОВА И ПУАНКАРЕ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

УРСС

И. Г. Малкин

МЕТОДЫ ЛЯПУНОВА И ПУАНКАРЕ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Издание второе, исправленное

МОСКВА

УРСС

ББК 22.161.6 22.336 22.311 22.318 22.161.7 22.21

Малкин Иоэль Гильевич

Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е, испр. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 248 с.

ISBN 5-354-00904-9

В настоящей книге дается изложение методов и результатов Ляпунова и Пуанкаре, имеющих непосредственное приложение в теории нелинейных колебаний. Труды этих выдающихся ученых весьма сложны по содержанию и велики по объему и к тому же не посвящены специально нелинейным колебаниям. Данная монография поможет читателю ознакомиться с тем, как общие результаты Ляпунова и Пуанкаре применяются к решению задач нелинейных колебаний. Рассмотрены практические приемы и методы вычислений.

Книга будет полезна математикам и физикам, в том числе исследователям-практикам, интересующимся вопросами нелинейных колебаний, а также студентам и аспирантам.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 20.08.2004 г.
Формат 60×90/16. Тираж 320 экз. Печ. л. 15,5. Зак. № 2-1485/658.

Отпечатано в типографии ООО «РОХОС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

ISBN 5-354-00904-9

© И. Г. Малкин, 1949, 2004
© Едиториал УРСС, 2004

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в Internet: http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-42-16
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46

2762 ID 23826

9 785354 009046

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Известными исследованиями Мандельштама, Папалекси, Андронова и их последователей по теории нелинейных колебаний показано исключительное значение, которое имеют для этой теории методы Ляпунова и Пуанкаре. Речь идет:

а) о методах решения задачи устойчивости движения и нахождения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, разработанных Ляпуновым в его классическом сочинении „Общая задача об устойчивости движения";

б) о методах отыскания периодических решений и исследования вида интегральных кривых нелинейных дифференциальных уравнений, разработанных Пуанкаре в его классических исследованиях „Новые методы небесной механики" и „Кривые, определяемые дифференциальными уравнениями".

В этих трудах Ляпунова и Пуанкаре разработаны и другие важные вопросы математического анализа, находящие применение в теории нелинейных колебаний.

Труды Ляпунова и Пуанкаре весьма сложны по содержанию и велики по объему. Поэтому, изучение этих трудов для практика, интересующегося вопросами нелинейных колебаний, является задачей весьма трудной. К тому же эти труды не посвящены специально нелинейным колебаниям и не все вопросы, в них освещаемые, имеют приложение в этой теории.

Нам представляется, поэтому, целесообразным дать в небольшой книге изложение результатов Ляпунова и Пуанкаре, имеющих непосредственное приложение в теории нелинейных колебаний. В этом и заключается одна из основных задач, которую мы перед собою поставили при составлении данной монографии.

С другой стороны, необходимо показать, как общие результаты Ляпунова и Пуанкаре применяются к решению задач нелинейных колебаний, т. е. изложить практические приемы и методы вычислений.

Известно, что практическое применение методов Ляпунова и Пуанкаре, если иметь в виду нелинейные системы самого общего вида, сопряжено с большими математическими трудностями. Эти трудности могут быть, вообще говоря, преодолены лишь только для систем частного вида. В частности, они легко преодолеваются для систем, мало отличающихся от линейных. Именно такого рода систем и рассматривались в исследованиях Мандельштама, Папалекси, Андронова и их последователей. Так возникла теория квазилинейных колебаний. Несмотря на весьма частный характер систем, рассматриваемых в этой теории, все же при ее применении удалось получить весьма серьезные практические результаты. Изложению этой теории посвящена вторая глава данной монографии.

Однако многие важные практические задачи не могут быть уложены в схемы квазилинейной теории даже и в тех случаях, когда уравнения колебаний действительно мало отличаются от линейных. Нам удалось показать, что связанные с применением методов Ляпунова и Пуанкаре математические трудности могут быть успешно преодолены для систем значительно более общего вида. Мы имеем в виду системы, мало отличающиеся от систем Ляпунова. Теории колебаний такого рода систем посвящена значительная часть настоящей монографии.

Переходим к несколько более подробному изложению содержания монографии.

В первой главе излагается теория Пуанкаре периодических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра. При этом мы уточняем и дополняем некоторые результаты Пуанкаре, вследствие чего их применение на практике значительно упрощается.

Во второй главе, как указывалось выше, излагается теория квазилинейных колебаний.

Третья глава посвящена теории устойчивости периодических движений. Здесь основные результаты Ляпунова об устойчивости изложены применительно к периодическим движениям и показаны практические приемы решения задачи устойчивости периодических колебаний.

В этой же главе излагается общая теория линейных уравнений с периодическими коэффициентами, играющая весьма важную роль в теории устойчивости периодических движений и в теории нелинейных колебаний вообще. Наше изложение этой теории отличается от обычно принятого, основанного на теории линейных подстановок, и представляется нам более простым.

В четвертой главе излагается разработанная Ляпуновым теория периодических решений некоторых особых систем нелинейных дифференциальных уравнений, которые мы называем системами Ляпунова. Нам удалось при этом значительно упростить основные доказательства, вследствие чего все изложение значительно проще, чем у Ляпунова.

В пятой и шестой главах изложены результаты наших исследований колебаний систем, близких к системам Ляпунова. При этом в пятой главе рассматриваются системы с одной степенью свободы, а в шестой главе — со многими степенями свободы.

Из изложенного выше следует, что настоящая монография отнюдь не исчерпывает все основные вопросы теории нелинейных колебаний. В частности, в ней рассматриваются только периодические колебания, так как именно к такого рода колебаниям главным образом и применимы теории Ляпунова и Пуанкаре. Колебания почти периодические и, в частности, квазипериодические в этой монографии не рассматриваются, вследствие чего в ней не нашли отражения важные исследования Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова по теории нелинейных колебаний.

Основой настоящей монографии явился курс лекций, читанных автором в 1943—1946 гг. для студентов и сотрудников Уральского государственного университета и Уральского политехнического института.

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПУАНКАРЕ

§ 1. Идея метода Пуанкаре. Малый параметр

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_r) \quad (s = 1, 2, \ldots, r). \tag{1.1}$$

Мы будем предполагать, что правые части этих уравнений являются аналитическими функциями переменных $x_1, \ldots, x_r$ в некоторой области G и непрерывными периодическими функциями независимой переменной t, которую мы будем считать положительной. Везде в дальнейшем мы будем предполагать, что период этих функций равен 2π, что, очевидно, не нарушает общности рассуждений.

Задача заключается в отыскании периодических решений уравнений (1.1), т. е. таких решений

$$x_s = f_s(t)$$

этих уравнений, для которых $f_s(t)$ являются периодическими функциями t. Период этих функций не может, очевидно, отличаться от 2π. При этом, разумеется, предполагается, что общее решение уравнений (1.1) неизвестно.

Для разрешения поставленной задачи естественно воспользоваться широко применяемым на практике приемом, заключающимся в следующем. В большинстве практических задач, в правых частях исследуемых дифференциальных уравнений удается выделить некоторую группу членов, которые можно считать малыми по сравнению с остальными „ведущими“ членами. Считая, что эти члены не имеют существенного значения для рассматриваемой задачи (будь то задача периодических решений или иная), отбрасывают их и получают таким образом более простую систему уравнений. Разрешив задачу для упрощенной системы, или ограничиваются полученным таким образом решением, или, принимая его за первое приближение, возвращаются к исходным уравнениям и применяют к ним какой-нибудь, специально разработанный для данной задачи, метод последовательных приближений.

Этот прием лежит в основе метода Пуанкаре отыскания периодических решений. Чтобы придать задаче точную математическую постановку, Пуанкаре ввел в рассмотрение так называемый „малый параметр". Пуанкаре предположил, что правые части уравнений (1.1) зависят не только от переменных $t, x_1, \ldots, x_r$, но и от некоторого параметра μ и являются аналитическими функциями этого параметра при его достаточно малых значениях. При таком предположении, считая μ достаточно малым, можно представить уравнения (1.1) в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(0)}(t, x_1, \ldots, x_r) + \mu \cdot X_s^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_r) + \\ + \mu^2 \cdot X_s^{(2)}(t, x_1, \ldots, x_r) + \ldots \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \quad (1.2)$$

где $X_s^{(0)}, X_s^{(1)}, \ldots$ — аналитические функции $x_1, \ldots, x_r$ и непрерывные периодические функции t. Выражения

$$\mu \cdot X_s^{(1)} + \mu^2 \cdot X_s^{(2)} + \ldots$$

и представляют собой совокупность малых членов. Отбрасывая в уравнениях (1.2) малые члены, мы получим упрощенную систему уравнений:

$$\frac{dx_s^0}{dt} = X_s^{(0)}(t, x_1^0, \ldots, x_r^0) \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \quad (1.3)$$

которую мы в дальнейшем будем называть *„порождающей"* системой. Пусть

$$x_s^0 = \varphi_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, r) \qquad (1.4)$$

какое-нибудь периодическое решение порождающей системы. Если следовать вышеуказанному приему, мы должны будем принять это решение в качестве первого приближения периодического решения основной системы. При этом молчаливо предполагается, что решению (1.4) действительно отвечает периодическое решение системы (1.2), мало отличающееся от решения (1.4) при достаточно малом μ. Однако, такого рода утверждение будет, вообще говоря, несправедливо. Пуанкаре был, повидимому, первым, который с достаточной четкостью показал, что сколь угодно малое изменение правых частей дифференциальных уравнений (в любой задаче) может вызвать резкие качественные изменения в характере решений этих уравнений. В частности, Пуанкаре показал, что не всегда периодическому решению порождающей системы соответствует периодическое решение основной системы. Может случиться, что для периодического решения порождающей системы не существует периодического решения основной системы, но может также случиться, что таких решений будет несколько и даже бесчисленное множество. Другими словами, может оказаться, что задача отыскания периодических решений для системы (1.2) и такая же задача для системы (1.3) не имеют между собой ничего общего. Отсюда возникает следующая основная задача: выяснить условия, при которых заданному периодическому решению системы (1.3) отвечает одно и только одно периодическое решение системы (1.2). Представляет, очевидно, капитальный интерес исследование и таких случаев, когда такого однозначного соответствия между периодическими решениями систем (1.2) и (1.3) не существует. Следует заметить, что здесь идет речь о тех периодических решениях системы (1.2), которые, при достаточно малом μ, мало отличаются от соответствующего решения системы (1.3), или, точнее, о тех периодических решениях системы (1.2), которые при $\mu=0$ обращаются в соответствующее решение системы (1.3).

Изучению поставленных выше задач и посвящена теория Пуанкаре.

§ 2. Условия существования периодических решений основной системы. Теорема Пуанкаре

Пусть

$$x_s^0=\varphi_s(t) \qquad (s=1, 2, \ldots, r) \qquad (2.1)$$

какое-нибудь периодическое решение порождающей системы (1.3), лежащее в области G аналитичности функций X_s^0. Мы будем называть это решение *порождающим* решением. Рассмотрим решение

$$x_s = x_s(t, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu) \quad (s = 1, 2, \ldots, r) \tag{2.2}$$

основной системы (1.2), определяемое начальными условиями

$$x_s(0, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu) = \varphi_s(0) + \beta_s \quad (s = 1, 2, \ldots, r) \tag{2.3}$$

и постараемся подобрать величины β_i как функции μ таким образом, чтобы они обращались в нуль при $\mu = 0$ и чтобы решение (2.2) было периодическим периода 2π. Другими словами, постараемся подобрать β_i таким образом, чтобы (2.2) было периодическим решением, соответствующим порождающему решению (2.1). Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие уравнения:

$$\psi_s = x_s(2\pi, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu) - x_s(0, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu) = 0 \tag{2.4}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r).$$

В самом деле, если (2.2) — периодическое решение, то условия (2.4) будут, очевидно, выполняться. Обратно, если выполняются условия (2.4), то в силу периодичности правых частей уравнений (1.2) мы будем находиться к моменту времени $t = 2\pi$ в тех же условиях, что и в начальный момент и, следовательно, решение (2.2) будет периодическим.

Как хорошо известно из теории дифференциальных уравнений, в силу условий, наложенных на правые части уравнений (1.2), величины ψ_s будут аналитическими функциями переменных $\beta_1 \ldots \beta_r$ и μ, если численные значения этих последних достаточно малы. Кроме того, эти величины ψ_s обращаются в нуль при $\beta_1 = \ldots = \beta_r = \mu = 0$. В самом деле, при $\beta_1 = \ldots = \beta_r = \mu = 0$, решение (2.2) обращается в порождающее решение, которое, по условию, является периодическим. Поэтому, если при $\beta_1 = \ldots = \beta_r = \mu = 0$ функциональный определитель

$$D = \frac{\partial(\psi_1, \ldots \psi_r)}{\partial(\beta_1, \ldots \beta_r)} \tag{2.5}$$

отличен от нуля, то существует единственная система функций $\beta_i(\mu)$, удовлетворяющих уравнениям (2.4), обращающихся в нуль при $\mu = 0$, и эти функции будут аналитическими при μ достаточно малом. Подставляя эти функции в (2.2), мы получим периодическое решение уравнений (1.2), обращающееся в порождающее при $\mu=0$. Это решение будет, очевидно, аналитическим относительно μ. Таким образом, мы приходим к следующей теореме Пуанкаре.

Теорема. *Если для рассматриваемого порождающего решения функциональный определитель (2.5) не обращается в нуль при $\beta_1=\ldots=\beta_r=\mu=0$, то при μ достаточно малом, существует одно и только одно периодическое решение основной системы, обращающееся в порождающее при $\mu=0$, и это решение будет аналитическим относительно μ.*

§ 3. Случай, когда функциональный определитель функций ψ_i обращается в нуль

Допустим, теперь, что функциональный определитель (2.5) обращается в нуль. В этом случае, вопрос о разрешимости уравнений (2.4) становится очень сложным. С точки зрения математической, этот случай можно рассматривать как исключительный. Однако, как нетрудно видеть, именно этот случай обращения в нуль якобиана (2.5) является наиболее важным для теории нелинейных колебаний.

Допустим, например, что мы имеем дело со случаем „малой нелинейности", т. е. со случаем, когда порождающая система является линейной. Мы предполагаем при этом, что задача является существенно нелинейной, т. е., что трактовка ее как линейной приводит к неправильным заключениям о характере развития колебаний (главным образом, с качественной стороны). Если при этом речь идет о периодических колебаниях, то, на основании теоремы Пуанкаре, мы должны будем заключить, что в рассматриваемом случае определитель (2.5) обращается в нуль, ибо, в противном случае, мы имели бы полное соответствие между нелинейной и линеаризированной задачами.

Приведенный пример показывает, какую важную роль в теории нелинейных колебаний играет случай обращения в нуль определителя (2.5). Поэтому неудивительно, что исследование Пуанкаре двух частных случаев обращения в нуль определителя (2.5) содержит по существу полное теоретическое обоснование некоторых основных явлений при нелинейных колебаниях, обнаруженных лишь много лет спустя.

К рассмотрению этих случаев мы сейчас и переходим.

1-й случай. Допустим, что порождающая система (1.3) допускает семейство периодических решений

$$x_s^0 = \varphi_s(t, h) \qquad (s = 1, 2 \ldots, r), \tag{3.1}$$

зависящих от одного произвольного параметра h, и что рассматриваемое порождающее решение принадлежит к этому семейству и соответствует значению $h = h^*$ параметра. Покажем, что в этом случае фунциональный определитель (2.5) необходимо обращается в нуль. В самом деле, если бы этот определитель был отличен от нуля, то система уравнений (2.4) имела бы при $\mu = 0$ в окрестности точки $\beta_1 = \ldots = \beta_r = 0$ единственное решение $\beta_1 = \ldots = \beta_r = 0$. Но при $\mu = 0$ уравнения (2.4) выражают необходимые и достаточные условия периодичности решения порождающей системы, имеющего начальные условия (2.3). При нашем предположении, этому условию должно удовлетворять не только решение $\beta_1 = \ldots = \beta_r = 0$, но и решение

$$\beta_s = \varphi_s(0, h) - \varphi_s(h^*), \qquad (s = 1, 2, \ldots, r),$$

зависящее от произвольного параметра, что противоречит вышесказанному.

Таким образом, в рассматриваемом случае определитель (2.5) обращается в нуль. Чтобы выяснить вопрос о существовании периодического решения, исключим из уравнений (2.4) какие-нибудь $r-1$ величин $\beta_1, \ldots \beta_r$. Это можно почти всегда сделать и во всяком случае тогда, когда хотя бы один из миноров $r-1$-го порядка определителя (2.5) отличен от нуля. Допустим, для определенности, что исключены величины $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$. Мы предполагаем при этом, что эти величины являются аналитическими функциями от β_r и μ, обращающимися в нуль при $\beta_r = \mu = 0$. Тогда для определения β_r мы получим уравнение вида

$$F(\beta_r, \mu) = 0, \tag{3.2}$$

из которого эта величина должна быть определена как функция от μ, обращающаяся в нуль при $\mu = 0$.

Исследуем подробнее это уравнение. Функция F будет аналитической относительно β_r и μ. Кроме того, она будет зависеть также от параметра h^*, входящего в порождающее решение. Так как при $\mu=0$ уравнения (2.4) допускают бесчисленное множество решений, зависящих от произвольного параметра, то и уравнение (3.2) должно при $\mu=0$ иметь бесчисленное множество решений для β_r и, следовательно, удовлетворяться тождественно. Поэтому уравнение (3.2) необходимо имеет вид

$$\mu\Phi(\beta_r, \mu)=0,$$

где Φ — также аналитическая функция от β_r и μ, но которая, вообще говоря, не обращается в нуль при $\beta_r=\mu=0$. Отбрасывая множитель μ и разлагая в ряд, мы можем теперь уравнение (3.2) представить в виде

$$P(h^*)+Q(h^*)\cdot\beta_r+R(h^*)\mu+\ldots=0,$$

где P, Q, R — некоторые функции от h^*. Для того, чтобы это уравнение имело решение, обращающееся в нуль при $\mu=0$, необходимо, чтобы h^* удовлетворяло уравнению

$$P=0. \tag{3.3}$$

Мы приходим, таким образом, к важному предложению Пуанкаре:

из бесчисленного множества порождающих решений семейства (3.1) *только тем могут действительно отвечать периодические решения основной системы, для которых параметр h^* принимает определенные численные значения*[1].

Следовательно, в рассматриваемом случае имеется резкое качественное различие в поведении основной и порождающей систем. Как мы увидим ниже, этот факт имеет большое значение для теории нелинейных колебаний.

Результат Пуанкаре может быть обобщен и дополнен. Поставим задачу несколько шире. Допустим, что порождающая система имеет семейство периодических решений

$$x_s^0=\varphi_s(t, h_1, \ldots h_k) \quad (s=1, 2, \ldots, r), \tag{3.4}$$

[1] Возможны, конечно, исключения, при которых уравнение (3.3) удовлетворяется тождественно. Эти случаи требуют особого исследования.

зависящее от k произвольных постоянных, и что порождающее решение принадлежит этому семейству и соответствует значениям $h_j = h_j^*$ этих постоянных. Допустим, кроме того, что хотя бы один из определителей k-го порядка матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial h_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial h_1} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial h_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial h_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial h_2} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial h_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial h_k} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial h_k} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial h_k} \end{matrix} \right\| \tag{3.5}$$

не обращается в нуль при $t=0$, $h_j = h_j^*$. Это предположение не следует рассматривать как особое ограничение, так как оно выражает, что в окрестности порождающего решения k начальных значений решения (3.4) могут быть выбраны произвольно, т. е., что постоянные $h_1, \ldots, h_k$ являются независимыми.

В рассматриваемом случае уравнения (2.4) имеют при $\mu = 0$ решение

$$\beta_s = \varphi_s(0, h_1, \ldots, h_k) - \varphi_s(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r), \tag{3.6}$$

зависящее от k произвольных постоянных. Поэтому, не только определитель (2.5), но и все его миноры до $r-k+1$-го порядка включительно обращаются в нуль при $\mu = \beta_1 = \ldots = \beta_r = 0$. Предположим, что хотя бы один из миноров $r-k$-го порядка при этих условиях отличен от нуля. Допустим, для определенности, что

$$\left\{ \frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_{r-k})}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_{r-k})} \right\}_{\mu = \beta_j = 0} \neq 0. \tag{3.7}$$

Тогда можно показать, что из определителей k-го порядка матрицы (3.5), которые, по предположению, не все обращаются в нуль при $t=0$, $h_j = h_j^*$, определитель

$$\left\{ \frac{\partial(\varphi_{r-k+1}, \ldots, \varphi_r)}{\partial(h_1, \ldots, h_k)} \right\}_{t=0,\ h_j = h_j^*} \tag{3.8}$$

будет во всяком случае отличен от нуля. В самом деле, рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial\beta_1}\right)A_1+\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial\beta_2}\right)A_2+\ldots+\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial\beta_r}\right)A_r=0, \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ r) \tag{3.9}$$

где скобки обозначают, что величины μ, $\beta_1, \ldots, \beta_r$ после дифференцирования, положены равными нулю. Так как определитель этой системы вместе со всеми его минорами $r-k+1$-го порядка обращаются в нуль, то эта система допускает k линейно независимых решений. Чтобы получить эту систему решений, рассмотрим первые $r-k$ уравнений (3.9). В силу (3.7) мы можем разрешить эти уравнения относительно $A_1, \ldots, A_{r-k}$, выразив эти величины через $A_{r-k+1}, \ldots, A_r$. Придавая теперь $A_{r-k+1}, \ldots, A_r$, какие-либо численные значения, мы получим решение системы (3.9). Рассматривая k систем таких численных значений с отличным от нуля определителем, мы получим полную систему из k независимых решений уравнений (3.9). Обозначим полученную таким образом систему решений через $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{rj}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ и предположим, что величины $A_{r-k+1,j}, \ldots, A_{rj}$ выбраны следующим образом:

$$A_{r-k+i,j}=\begin{matrix}1\ (\text{при } i=j)\\ 0\ (\text{при } i\neq j)\end{matrix} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{3.10}$$

Мы можем, однако, указать и другую систему решений уравнений (3.9). Эта система решений может быть получена следующим образом.

Как мы уже говорили, уравнения (2.4) при $\mu=0$ должны тождественно удовлетворяться при значениях β_s, удовлетворяющих соотношениям (3.6). Дифференцируя эти тождества по $h_1, \ldots, h_k$ и заменяя затем эти величины значениями $\overset{*}{h}_1, \ldots, \overset{*}{h}_k$, будем иметь

$$\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial\beta_1}\right)\frac{\partial\varphi_1(0,\overset{*}{h}_1,\ldots,\overset{*}{h}_k)}{\partial\overset{*}{h}_j}+\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial\beta_2}\right)\cdot\frac{\partial\varphi_2(0,\overset{*}{h}_1,\ldots,\overset{*}{h}_k)}{\partial\overset{*}{h}_j}+\ldots+$$
$$+\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial\beta_1}\right)\cdot\frac{\partial\varphi_r(0,\overset{*}{h}_1,\ldots,\overset{*}{h}_k)}{\partial\overset{*}{h}_j}=0,$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ r;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Следовательно, уравнения (3.9) имеют систему решений

$$B_{sj} = \frac{\partial \varphi_s(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)}{\partial h_j^*} \quad (s = 1, 2, \ldots, r; \; j = 1, 2, \ldots, k).$$

Но эти решения необходимо должны быть линейными комбинациями решений A_{sj}, т. е.

$$B_{sj} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{\alpha j} \cdot A_{s\alpha} \quad (s = 1, 2, \ldots, r; \; j = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.11}$$

где $a_{\alpha j}$ некоторые постоянные. Из (3.11) вытекает, что всевозможные определители k-го порядка, составленные из величин $\frac{\partial \varphi_s(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)}{\partial h_j^*}$, равны произведению определителя $|a_{ij}|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ на соответственные определители из величин A_{si}. Но так как, по условию, хотя бы один из определителей

$$\left| \frac{\partial \varphi_s(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)}{\partial (h_1^*, \ldots, h_k^*)} \right|$$

отличен от нуля, то и определитель $|a_{i\alpha}|$ также отличен от нуля. Полагая теперь в (3.11) $s = r - k + i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, будем, на основании (3.10), иметь

$$\frac{\partial \varphi_{r-k+i}(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)}{\partial h_j^*} = a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k).$$

Следовательно, определитель (3.8) равен определителю $|a_{ij}|$ и будет по доказанному отличным от нуля.

Установив это, перейдем к рассмотрению уравнений (2.4). Так как, по условию, минор (3.7) отличен от нуля, то первые $r - k$ уравнений могут быть разрешены относительно $\beta_1, \ldots, \beta_{r-k}$, причем для этих величин получатся аналитические функции от $\beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r, \mu$, обращающиеся в нуль при $\beta_{r-k+1} = \ldots = \beta_r = \mu = 0$. Подставляя эти величины в последние k уравнений (2.4), получим уравнения

$$F_j(\mu, \beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.12}$$

определяющие $\beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r$. Здесь F_j суть аналитические функции от μ, $\beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r$, обращающиеся в нуль вместе с этими величинами.

Как уже указывалось, уравнения (2.4) имеют при $\mu = 0$ решение (3.6), зависящее от k произвольных параметров $h_1, \ldots, h_k$. Так как определитель (3.8) по доказанному отличен от нуля, то в качестве произвольных параметров могут быть приняты величины $\beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r$. Следовательно, уравнения (3.12) должны при $\mu = 0$ удовлетворяться при любых значениях $\beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r$. Поэтому

$$F_j = \mu \cdot \Phi_j(\mu, \beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r) \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

где Φ_j — также аналитические функции от $\beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r, \mu$, но которые, вообще говоря, не обращаются в нуль, когда эти величины равны нулю. Таким образом, уравнения (3.12), по сокращении на μ принимают вид

$$\Phi_j = P_j + Q_{j1} \cdot \beta_{r-k+1} + \ldots + Q_{jk}\beta_r + R_j\mu + \ldots = 0 \quad (3.13)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

где коэффициенты P_j, Q_{ji}, $R_j, \ldots$ зависят от параметров $\overset{*}{h}_1, \ldots, \overset{*}{h}_k$, входящих в порождающее решение. Для того, чтобы эти уравнения допускали решение, для которого $\beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r$ обращались бы в нуль при $\mu = 0$, необходимо, чтобы удовлетворялись условия

$$P_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \quad (3.14)$$

и, следовательно, так же, как и в случае одного параметра, только тем порождающим решениям могут отвечать периодические решения основной системы, для которых $\overset{*}{h}_1, \ldots, \overset{*}{h}_k$ удовлетворяют уравнениям (3.14).

Допустим, что величины $\overset{*}{h}_1, \ldots, \overset{*}{h}_k$ действительно выбраны согласно уравнениям (3.14). Будет ли при этом система (3.13) допускать для $\beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r$ решение нужного нам вида? Другими словами, будут ли для уже отобранных порождающих решений действительно существовать периодические решения основной системы, обращающиеся в порождающие при $\mu = 0$? Из уравнений (3.13) видно, что если определитель

$$|Q_{ij}| \quad (3.15)$$

отличен от нуля, то эти уравнения действительно допускают и притом единственное решение, при котором $\beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r$ обращаются в нуль при $\mu=0$ и эти величины будут аналитическими функциями μ. Следовательно, для каждого порождающего решения семейства (3.4), для которого h_j^* удовлетворяют уравнениям (3.14) и для которого определитель (3.15) отличен от нуля, существует одно и только одно периодическое решение основной системы, обращающееся в порождающее при $\mu=0$, и это решение будет аналитическим относительно μ.

Непосредственное вычисление определителя (3.15) сопровождается на практике весьма громоздкими вычислениями, связанными с определением членов второго порядка в разложениях функций ψ_s (вычисление коэффициентов P_j требует, как это нетрудно видеть, знания только членов первого порядка). Однако в этом вычислении нет никакой необходимости. Мы сейчас покажем, что определитель (3.15) отличается от функционального определителя

$$\frac{\partial(P_1, \ldots, P_k)}{\partial(h_1^*, \ldots, h_k^*)} \tag{3.16}$$

уравнений (3.14) неравным нулю множителем. В самом деле, очевидно, имеем

$$P_j = \Phi_j(0, 0, \ldots, 0),$$

$$Q_{ji} = \left(\frac{\partial \Phi_j(0, \beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r)}{\partial \beta_{r-k+i}}\right)_{\beta_{r-k+1}=\ldots=\beta_r=0}.$$

Заменим в функциях Φ_j величины $\beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r$ величинами $h_1, \ldots, h_k$ при помощи подстановки (3.6) и результат подстановки обозначим через $\overline{\Phi}_j(\mu, h_1, \ldots, h_k)$. Тогда, замечая, что нулевым значениям величин β_j соответствуют значения h_j^* величин h_j, будем иметь:

$$P_j = \overline{\Phi}_j(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)$$

$$|Q_{ji}| = \left\{\frac{\partial(\overline{\Phi}_1, \ldots, \overline{\Phi}_k)}{\partial(h_1, \ldots, h_k)} : \frac{\partial(\beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r)}{\partial(h_1, \ldots, h_k)}\right\}_{\mu=0,\ h_j=h_j^*}$$

и, следовательно,

$$|Q_{jl}| = \frac{\partial(P_1, \ldots, P_k)}{\partial(h_1^*, \ldots, h_k^*)} : \left(\frac{\partial(x_{r-k+1}^0, \ldots, x_r^0)}{\partial(h_1, \ldots, h_k)}\right)_{h_j = h_j^*, t=0}. \quad (3.17)$$

Отсюда вытекает справедливость нашего предложения, так как, по доказанному, определитель, стоящий в знаменателе выражения (3.17), отличен от нуля.

Мы приходим окончательно к следующему предложению.

Для того, чтобы порождающему решению, принадлежащему к семейству (3.4), *соответствовало периодическое решение основной системы, обращающееся в порождающее при* $\mu = 0$, *необходимо, чтобы параметры удовлетворяли уравнениям* (3.14). *Если, для этих значений параметров, функциональный определитель* (3.16) *отличен от нуля, то указанное периодическое решение основной системы действительно существует и оно будет единственным и аналитическим относительно* μ.

2-й случай. Правые части уравнений (1.1), будучи периодическими относительно t с периодом 2π, будут, очевидно, также иметь относительно этой переменной период $2k\pi$, где k — целое число. Точно так же и порождающее решение этих уравнений может быть рассматриваемо как периодическое, периода $2k\pi$. Поэтому, совершенно аналогично предыдущему, мы можем поставить задачу отыскания периодических решений уравнений (1.1) периода $2k\pi$. Для решения этой задачи мы должны будем подобрать $\beta_i(\mu)$ таким образом, чтобы выполнялись уравнения

$$\begin{aligned} \psi_i'(\beta, \ldots, \beta_r, \mu) = x_i(2k\pi, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu) - \\ - x_i(0, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu) = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r)$$

и чтобы эти величины обращались в нуль при $\mu = 0$.

Допустим, что функциональный определитель (2.5) отличен от нуля при $\beta_1 = \ldots = \beta_r = \mu = 0$. Следовательно, порождающему решению отвечает одно и только одно периодическое решение основной системы периода 2π. Пусть

$$\beta_i = \beta_i^*(\mu) \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \quad (3.19)$$

— соответствующие этому решению функции β_i. Так как это решение является одновременно периодическим периода $2k\pi$, то функции (3.19) удовлетворяют не только уравнениям (2.4), но и уравнениям (3.18). Если при этом функциональный определитель

$$D' = \frac{\partial (\psi_1', \ldots, \psi_r')}{\partial (\beta_1, \ldots, \beta_r)} \tag{3.20}$$

не обращается в нуль при $\beta_1 = \ldots = \beta_r = \mu = 0$, то уравнения (3.18) не могут иметь иного решения, кроме (3.19). Но если мы имеем:

$$(D')_{\beta_1 = \ldots = \beta_r = \mu = 0} = 0,$$

то уравнения (3.18) могут иметь решения, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$, отличные от (3.19). Этим решениям не могут отвечать периодические решения периода 2π, так как при наших предположениях, такого рода периодическое решение существует только одно и оно соответствует функциям (3.19). Следовательно, решениям уравнений (3.18), отличным от (3.19), соответствуют периодические решения периода $2k\pi$. Эти решения при $\mu = 0$ также обращаются в порождающие. Таким образом, для уравнений (1.1) могут одновременно существовать периодическое решение периода 2π и периодические решения периода $2k\pi$, сливающиеся друг с другом (в порождающее) при $\mu = 0$.

Может также случиться, что уравнения (1.1) допускают одновременно периодическое решение периода 2π и периодические решения периода $2k\pi$, не сливающиеся друг с другом при $\mu = 0$, т. е. соответствующие различным порождающим решениям. Допустим, например, что порождающая система имеет решение

$$x_s = \varphi_s^*(t, h_1, \ldots, h_m) \quad (s = 1, 2, \ldots, r),$$

содержащее m произвольных постоянных $h_1, \ldots, h_m$ и что функции φ_s^* имеют относительно t период $2k\pi$ при любых значениях этих постоянных, лежащих в некоторой области, но что только при некоторых определенных значениях этих постоянных, допустим при $h_j = h_j^*$, период φ_s^* равен 2π. Примером такой порождающей системы может служить уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{k^2}x = \lambda \sin t,$$

для которого общий интеграл

$$x = A\cdot\cos\frac{t}{k} + B\sin\frac{t}{k} + \frac{k^2\lambda}{1-k^2}\sin t$$

представляет собой периодическую функцию периода $2k\pi$ и лишь частное решение, соответствующее A и B, равным нулю, имеет период 2π. Для такого рода порождающей системы якобиан (2.5) при $\beta_1 = \ldots = \beta_r = \mu = 0$ и при $h_i = h_i^*$ будет, вообще говоря, отличен от нуля (что мы и будем предполагать), а якобиан (3.20), при тех же условиях, но при произвольных h_i, так же, как и все его миноры до $r-k+1$-го порядка, будет, по доказанному, обращаться в нуль. Тогда, поступая с уравнениями (3.18) так же, как мы поступили в аналогичном случае с уравнениями (2.4), мы придем для определения $h_1, \ldots, h_k$ к уравнениям вида

$$P_j'(h_1, \ldots, h_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \qquad (3.21)$$

Уравнения (3.21) необходимо допускают решение $h_i = h_i^*$, но они могут иметь решение и отличное от этого. В последнем случае система (1.1) будет иметь периодическое решение периода 2π и периодические решения периода $2k\pi$, соответствующие различным порождающим решениям.

Вышеприведенные рассуждения дают полное теоретическое обоснование явления так называемого „резонанса n-го рода", заключающегося в том, что при известных обстоятельствах в нелинейных системах могут возникнуть интенсивные вынужденные колебания с периодом, кратным периоду возмущающей силы. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже.

§ 4. Случай, когда дифференциальные уравнения движения не содержат явно времени

Допустим теперь, что дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_r, \mu) \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \qquad (4.1)$$

где уже X_s не содержат явно времени, но попрежнему являются аналитическими функциями переменных $x_1, \ldots, x_r$ в некоторой области G и параметра μ при достаточно малых его значениях.

Такого рода системы, в отличие от (1.1), мы будем называть *автономными*.

Случай автономных систем имеет существенные особенности, резко отличающие его от случая систем неавтономных. В самом деле, для уравнений (1.1), любое периодическое решение имеет вполне определенный наперед заданный период, равный периоду 2π правых частей этих уравнений или кратный ему. Уравнения же (4.1) могут иметь периодические решения любого периода T, который будет, вообще говоря, функцией параметра μ. Кроме того, уравнения (4.1) не могут иметь изолированных периодических решений, ибо если в каком-нибудь периодическом решении этих уравнений заменить t на $t+h$, где h — произвольная постоянная, то снова получится периодическое решение. Вследствие этих особенностей, рассматриваемый сейчас случай требует специального исследования.

Пусть

$$x_s^0 = \varphi_s(t) \quad (s = 1, 2, \ldots, r) \tag{4.2}$$

периодическое решение периода T порождающей системы:

$$\frac{dx_s^0}{dt} = X_s(x_1^0, \ldots, x_r^0, 0) \quad (s = 1, 2, \ldots, r). \tag{4.3}$$

Будем искать периодическое решение основной системы (4.1), обращающееся в порождающее при $\mu = 0$. Пусть $T + \alpha$ — период искомого решения, а

$$\varphi_s(0) + \beta_s \quad (s = 1, 2, \ldots, r) \tag{4.4}$$

его начальные значения. Обозначая это решение через $x_s(t, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu)$, получим следующие необходимые и достаточные условия его периодичности:

$$\psi_s(\beta_1, \ldots, \beta_r, \alpha, \mu) = x_s(T+\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu) - x_s(0, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu) = 0$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r). \tag{4.5}$$

Здесь ψ_s — аналитические функции переменных α, $\beta_1, \ldots \beta_r$, μ, обращающиеся в нуль при $\beta_1 = \ldots = \beta_r = \alpha = \mu = 0$, в силу заведомой периодичности решения (4.2). Мы получаем, таким образом, r уравнений для нахождения $r+1$ неизвестных $\beta_1, \ldots, \beta_r, \alpha$. Одну из неизвестных мы можем, следовательно, выбрать совершенно произвольно. Положим, например,

$$\beta_r = 0. \tag{4.6}$$

Тогда, если функциональный определитель

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1}, & \ldots, & \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_{r-1}}, & \frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\psi_r}{\partial\beta_1}, & \ldots, & \frac{\partial\psi_r}{\partial\beta_{r-1}}, & \frac{\partial\psi_r}{\partial\alpha} \end{vmatrix} \tag{4.7}$$

отличен от нуля при $\mu = \beta_1 = \ldots = \beta_{r-1} = \alpha = 0$, то уравления (4.5) имеют одно и только одно решение для функций $\beta_1(\mu), \ldots, \beta_{r-1}(\mu)$ и $\alpha(\mu)$, при котором эти функции обращаются в нуль при $\mu = 0$, и эти функции будут аналитическими. Подставляя эти функции в $x_s(t_1, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu)$, мы получим периодическое решение уравнений (4.1), обращающееся в порождающее при $\mu = 0$ и период $T+\alpha$ этого решения. Полученное, таким образом, периодическое решение будет аналитическим относительно μ.

Если определитель (4.7) обращается в нуль, то вместо того, чтобы полагать равной нулю величину β_r, можно положить равной нулю какую-нибудь другую неизвестную функцию. Мы приходим, таким образом, к заключению, что система (4.5) допускает одно и только одно периодическое решение, обращающееся в порождающее при $\mu = 0$, если только не все определители r-го порядка, заключающиеся в матрице

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1}, & \ldots, & \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_r}, & \frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_1}, & \ldots, & \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_r}, & \frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\psi_r}{\partial\beta_1}, & \ldots, & \frac{\partial\psi_r}{\partial\beta_r}, & \frac{\partial\psi_r}{\partial\alpha} \end{Vmatrix} \tag{4.8}$$

обращаются одновременно в нуль при $\beta_1 = \ldots = \beta_r = \alpha = \mu = 0$.

Заметим, прежде всего, что один из этих определителей, а именно,

$$\Delta_{r+1} = \frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_r)}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_r)} \tag{4.9}$$

во всяком случае обращается в нуль и, следовательно, замена равенства (4.6) равенством $\alpha = 0$ не приведет к цели. Обращение в нуль определителя (4.9) непосредственно вытекает из того обстоятельства, что порождающее решение остается периодическим при замене t на $t+h$ и, следовательно, система (4.5) при $\alpha = \mu = 0$ должна допускать бесчисленное множество решений, отличных от тривиального $\beta_1 = \ldots = \beta_r = 0$.

Что же касается остальных определителей матрицы (4.8), то среди них будут, вообще говоря, и отличные от нуля. Однако, таким отличным от нуля определителем не обязательно будет Δ_r. Поэтому не всегда выбор (4.6) является правильным. Следует, однако, заметить, что на практике не возникает сомнений, какую из величин β_s следует задавать произвольно. Дело в том, что обычно бывает заранее известно, что какая-нибудь из величин x_s (характеризующая какую-нибудь координату или скорость системы) в некоторый момент времени принимает определенное численное значение. Примем момент времени, при котором эта величина принимает свое заранее известное значение, за начальный. Этим самым мы фиксируем начальное значение одной из переменных, т. е. одну из величин β_s. Но так как система (4.1) не содержит явно времени, то выбор начального момента времени не играет никакой роли, и следовательно, не может отразиться на существовании или несуществовании периодического решения. После того, как периодическое решение будет вычислено, простая замена t на $t+h$ восстановит утраченную общность.

Допустим теперь, что все определители r-го порядка матрицы (4.8) обращаются в нуль при $\beta_1 = \ldots = \beta_r = \alpha = \mu = 0$. Так же как и для неавтономной системы, этот случай является наиболее важным для теории нелинейных колебаний. Этот случай встретится всякий раз, когда порождающее решение содержит произвольные постоянные (кроме уже указанной постоянной h).

Допустим для определенности, что порождающая система допускает периодическое решение

$$x_s^0 = \varphi_s(t, h_1, \ldots, h_k) \qquad (s = 1, 2, \ldots, r),$$

содержащее, кроме h, еще k произвольных независимых постоянных $h_1, \ldots, h_k$ и что период T рассматриваемого решения не зависит от этих постоянных. Предположим, для определенности, что рассматриваемое порождающее решение соответствует значению $h_j = h_j^*$ параметров. Допустим, как и прежде, что не нарушая общности рассуждений, мы можем положить $\beta_r = 0$. Так как система уравнений (4.5) должна при $\alpha = \mu = 0$ допускать для $\beta_1, \ldots, \beta_r$ решение, зависящее от $k+1$ произвольных постоянных, то функциональный определитель (4.9) вместе со всеми его минорами до порядка $r-k$ включительно должны обращаться в нуль при $\beta_1 = \ldots = \beta_r = \alpha = \mu = 0$.

Следовательно, при этих же условиях должен обращаться в нуль и определитель (4.7) со всеми его минорами до порядка $r-k+1$ включительно. Допустим, что хотя бы один из миноров $r-k$-го порядка этого определителя (4.7) (этот минор обязательно содержит колонку с производными по α) отличен от нуля. Пусть это будет минор

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_{r-k})}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_{r-k-1}, \alpha)}.$$

Тогда первые $r-k$ уравнений (4.5) могут быть разрешены относительно $\beta_1, \ldots, \beta_{r-k-1}$ и α и подставляя эти величины в остальные уравнения, мы получим для нахождения $\beta_{r-k}, \ldots, \beta_{r-1}$ уравнения вида

$$F_j(\beta_{r-k}, \ldots, \beta_{r-1}, \mu) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \qquad (4.10)$$

где F_j — аналитические функции своих аргументов, обращающиеся в нуль вместе с ними.

Как мы уже говорили, система (4.5) допускает при $\alpha = \mu = 0$ решение, зависящее от $k+1$ произвольных постоянных, из которых одну, а именно β_r, мы положили равной нулю. Следовательно, система (4.10) должна при $\mu = 0$

иметь решение, содержащее k произвольных параметров, что, очевидно, возможно, если они при $\mu = 0$ удовлетворяются тождественно. Поэтому, должно быть

$$F_j = \mu \cdot \Phi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

где Φ_j — также аналитические функции от $\beta_{r-k}, \ldots, \beta_{r-1}, \mu$, но которые, вообще говоря, не обращаются в нуль при $\beta_{r-k} = \ldots = \beta_{r-1} = \mu = 0$.

Таким образом, уравнения (4.10) по сокращении на μ могут быть представлены в виде

$$P_j + \sum_{i=1}^{k} Q_{ji}\beta_{r-i} + R_j \cdot \mu + \ldots = 0, \tag{4.11}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k),$$

где коэффициенты зависят от $\overset{*}{h}_1, \ldots, \overset{*}{h}_k$.[1]

Для того, чтобы уравнения (4.11) имели решение, при котором $\beta_{r-k}, \ldots, \beta_{r-1}$ обращаются в нуль при $\mu = 0$, необходимо, чтобы удовлетворялись условия

$$P_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Эти уравнения служат для нахождения тех значений $\overset{*}{h}_j$, при которых порождающему решению может отвечать периодическое решение основной системы.

Более детальный анализ рассматриваемого случая может быть проведен так же, как и для неавтономной системы. Мы этим, однако, здесь не занимаемся, так как это не потребуется в дальнейшем.

§ 5. Трудности, возникающие при практическом применении метода Пуанкаре, и связанное с этим ограничение задачи

В двух предыдущих параграфах мы доказали существование при известных условиях периодических решений у системы дифференциальных уравнений движения. Мы переходим теперь к вопросу о действительном вычислении этих решений. Как мы сейчас увидим, действительное вычисление периоди-

---

[1] Параметр h не может, очевидно, играть никакой роли.

ческих решений приводит к большим, зачастую непреодолимым, затруднениям, что заставляет на практике значительно сужать область применения теории Пуанкаре вследствие необходимости серьезных ограничений при выборе порождающей системы.

Допустим, для определенности, что мы имеем дело со случаем неавтономной системы, т. е. со случаем, когда дифференциальные уравнения движения содержат явно время. Для действительного вычисления периодического решения мы можем следовать тому пути, при помощи которого мы доказали существование этого решения. Для этого необходимо, прежде всего, вычислить функции $x_s(t, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu)$, затем составить уравнения (2.4), разрешить их относительно $\beta_1, \ldots, \beta_r$ и подставить полученные величины в функции x_s.

Будем искать x_s под видом рядов, расположенных по целым положительным степеням величин $\beta_1, \ldots, \beta_r, \mu$. Тогда, принимая во внимание, что при $\beta_1 = \ldots = \beta_r = \mu = 0$ мы должны получить порождающее решение, будем иметь:

$$x_s = \varphi_s(t) + \sum A_s^{(m_1 \ldots m_r m)}(t) \cdot \beta_1^{m_1} \ldots \beta_r^{m_r} \mu^m,$$

$$(s = 1, 2, \ldots, r).$$

Подставляя эти разложения в уравнения (1.2) и приравнивая подобные члены, получим для нахождения коэффициентов $A_s^{(m_1 \ldots m_r m)}$ дифференциальные уравнения вида:

$$\frac{dA_s^{(m_1 \ldots m_r m)}}{dt} = p_{s1} \cdot A_1^{(m_1 \ldots m_r m)} + \ldots +$$

$$+ p_{sr} \cdot A_r^{(m_1 \ldots m_r m)} + F_s^{(m_1 \ldots m_r m)} \tag{5.1}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, r).$$

Здесь

$$p_{sk} = \left(\frac{\partial X_s^{(0)}(t, x_1, \ldots, x_r)}{\partial x_k}\right),$$

где круглые скобки обозначают, что после дифференцирования величины x_s должны быть заменены их значениями в порождающем решении, т. е. величинами $\varphi_s(t)$. $F_s^{(m_1 \ldots m_r m)}$

суть целые рациональные функции с периодическими коэффициентами от тех $A_j^{(l_1 \ldots l_r l)}$, для которых $l_1 + \ldots + l_r + l < m_1 + \ldots + m_r + m$ и, следовательно, если последние величины уже вычислены, будут известными функциями от t.

Коэффициенты p_{sk} будут, очевидно, периодическими функциями времени. Следовательно, нахождение коэффициентов $A_s^{(m_1 \ldots m_r m)}$ требует, прежде всего, интегрирования системы линейных однородных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sr}y_r \qquad (s = 1, 2, \ldots, r). \tag{5.2}$$

В этом и заключается вся трудность задачи, так как уравнения вида (5.2) мы интегрировать не умеем.

Мы, можем, однако, подойти к нашей задаче несколько иначе. Вместо того, чтобы составлять уравнения (2.4), что приводит к необходимости вычисления функций $x_s(t, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu)$, т. е., по существу, общего интеграла уравнений движения, мы могли бы попытаться непосредственно вычислить периодическое решение, приняв порождающее решение в качестве первого приближения. Мы видели, что когда функциональный определитель (2.5) отличен от нуля, а также в некоторых практически важных случаях, когда этот определитель обращается в нуль, искомое периодическое решение будет аналитическим относительно μ. Поэтому во всех этих случаях мы можем сразу искать периодическое решение под видом рядов, расположенных по степеням μ. Полагая

$$x_s(t) = \varphi_s(t) + \mu x_s^{(1)}(t) + \mu^2 x_s^{(2)}(t) + \ldots, \tag{5.3}$$

попытаемся подобрать коэффициенты $x_s^{(l)}(t)$ таким образом, чтобы они были периодическими функциями и чтобы ряды (5.3) формально удовлетворяли уравнениям движения. Такие ряды обязательно найдутся (так как, по предположению, существует аналитическое периодическое решение) и если они окажутся единственными, то они, очевидно, будут обязательно сходиться и действительно представят искомое решение.

Подставляя (5.3) в уравнения (1.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, мы получим дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dx_s^{(l)}}{dt} = p_{s1}x_1^{(l)} + \ldots + p_{sr}x_r^{(l)} + F_s^{(l)},$$

где $F_s^{(l)}$ — целые рациональные функции от $x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(l-1)}$ с периодическими коэффициентами. Мы снова пришли, таким образом, к уравнениям вида (5.1). Правда, нам нужен сейчас не общий интеграл этих уравнений, а только частное периодическое решение, но мы не знаем каких-либо общих способов, позволяющих найти такое решение без предварительного интегрирования однородной системы (5.2). Таким образом, хотя этот способ, в тех случаях, когда он может быть с уверенностью применен, значительно уменьшает громоздкость вычислений, он все же не устраняет возникающих при этом принципиальных затруднений.

Может, однако, случиться, что коэффициенты p_{sk} будут не периодическими функциями времени, а постоянными величинами. В этом случае все трудности отпадают, и метод делается простым и удобным для практических вычислений.

Коэффициенты p_{sk} получатся постоянными всякий раз, когда порождающаяся система не содержит явно t и при этом функции $\varphi_s(t)$ обращаются в постоянные, т. е. порождающее решение есть состояние равновесия порождающей системы. Другой, более общий и важный случай будет тот, когда порождающая система есть система линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Этот последний случай мы будем называть *квазилинейным*, а уравнения (1.2) основной системы — *квазилинейными*.

Теория квазилинейных периодических колебаний хорошо разработана и получила широкое применение на практике. Благодаря трудам Мандельштама, Папалекси, Андронова, Витта и их последователей, создавшим и применившим на практике эту теорию, она стала рабочим аппаратом при изучении различных свойств электромагнитных колебаний. Изложению теории квазилинейных колебаний посвящена следующая глава.

Однако, как мы покажем ниже, квазилинейная трактовка нелинейных систем не всегда приводит к правильному описанию явлений колебаний, даже в тех случаях, когда уравнения колебаний действительно мало отличаются от линейных. Поэтому необходимо изучение систем более общих. Ниже мы увидим, что теорию Пуанкаре удается применить и тогда, когда порождающая система принадлежит к классу нелинейных систем, изученных Ляпуновым, и которые мы в дальнейшем называем системами Ляпунова.

Заметим также, что уравнения (5.2) удается проинтегрировать, как мы это увидим ниже, когда известно не только периодическое решение порождающей системы, но и ее общее решение.

ГЛАВА II
КОЛЕБАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 6. Колебания неавтономной системы с одной степенью свободы вдали от резонанса[1]

Рассмотрим колебания нелинейной системы с одной степенью свободы, которая при $\mu=0$ обращается в обычный линейный осциллятор. Мы имеем в виду систему, описываемую дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x+f(t)=\mu\cdot F(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu). \tag{6.1}$$

Здесь k — постоянная величина, которую мы будем предполагать отличной от целого числа, $f(t)$ — непрерывная периодическая функция времени периода 2π, разлагающаяся в ряд Фурье, $F(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu)$ — аналитическая функция переменных x и $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ в некоторой области и переменной μ при достаточно малых ее значениях. По отношению к t функция F является непрерывной и периодической периода 2π, разлагающейся в ряд Фурье.

Пусть

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt) \tag{6.2}$$

— ряд Фурье функции $f(t)$. Так как по предположению k отлично от целого числа, то порождающее уравнение

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}+k^2x_0+f(t)=0 \tag{6.3}$$

[1] Основные результаты §§ 6 и 7 установлены впервые Андроновым и Виттом в работе „К математической теории захватывания".

допускает одно и только одно периодическое решение

$$x_0 = -\frac{a_0}{2k^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nt + b_n \sin nt}{k^2 - n^2} = \varphi(t). \tag{6.4}$$

Чтобы построить периодическое решение основной системы, обращающееся в порождающееся при $\mu = 0$, будем искать решение $x(t,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \mu)$ этой системы с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} x(0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \mu) &= x_0(0) + \beta_1, \\ \dot{x}(0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \mu) &= \dot{x}_0(0) + \beta_2 \end{aligned} \right\} \tag{6.5}$$

под видом ряда

$$x(t,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \mu) = x_0 + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + \ldots \tag{6.6}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (6.1) и приравнивая коэффициенты при подобных членах, получим

$$\frac{d^2A}{dt^2} + k^2A = 0, \qquad \frac{d^2B}{dt^2} + k^2B = 0.$$

Начальные условия (6.5) дают:

$$A(0) = 1, \quad \dot{A}(0) = 0, \quad B(0) = 0, \quad \dot{B}(0) = 1$$

и, следовательно,

$$A = \cos kt, \qquad B = \frac{1}{k}\sin kt.$$

Составляя функции ψ_1 и ψ_2, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= [x] = (\cos 2k\pi - 1)\beta_1 + \frac{1}{k}\sin 2k\pi\beta_2 + [C]\mu + \ldots \\ \psi_2 &= [\dot{x}] = -k\sin 2k\pi \cdot \beta_1 + (\cos 2k\pi - 1)\beta_2 + [\dot{C}]\mu + \ldots \end{aligned} \right\} \tag{6.7}$$

Здесь, как и в дальнейшем, мы пользуемся обозначением

$$[F(t)] = F(2\pi) - F(0).$$

Из (6.7) находим:

$$\left\{\frac{\partial(\psi_1,\ \psi_2)}{\partial(\beta_1,\ \beta_2)}\right\}_{\beta_1=\beta_2=\mu=0} = (\cos 2k\pi - 1)^2 + \sin^2 2k\pi \neq 0.$$

Следовательно, на основании результатов § 2, при достаточно малых значениях μ существует одно и только одно периодическое решение уравнения (6.1), обращающееся при $\mu=0$ в решение (6.4) уравнения (6.3).

Для вычисления этого решения воспользуемся приемом, указанным в конце предыдущего параграфа. Будем искать это решение под видом ряда

$$x(t)=x_0+x_1(t)\mu+x_2(t)\mu^2+\ldots, \tag{6.8}$$

где $x_j(t)$ — неизвестные периодические функции времени. Подставляя этот ряд в уравнение (6.1) и приравнивая коэффициенты при μ^l, получим для нахождения $x_l(t)$ уравнения вида

$$\frac{d^2x_l}{dt^2}+k^2x_l=F_l,$$

где F_l—целые рациональные функции величин $x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}$ с периодическими коэффициентами. В частности,

$$F_1=F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$$

и, следовательно, F_1 является известной периодической функцией времени.

Допустим, что все $x_1, \ldots, x_{l-1}$ уже вычислены и вышли периодическими. Тогда F_l будет известной периодической функцией времени и так как k отлично от целого числа, то существует одно и только одно периодическое решение

$$x_l=\frac{a_{0l}}{2k^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{nl}\cos nt+b_{nl}\sin nt}{k^2-n^2} \tag{6.9}$$

уравнения для x_l. Здесь a_{nl} и b_{nl} — коэффициенты Фурье функции F_l. Так как функция F_l известна, то мы приходим к заключению, что существует только один ряд (6.8) с периодическими коэффициентами, формально удовлетворяющий уравнению (6.1). Следовательно, этот ряд сходится и действительно представляет искомое периодическое решение.

Мы предположили, что k отличается от целого числа. Если бы k равнялось целому числу, то как порождающее решение (6.4), так и решения (6.9) для x_l потеряли бы всякий смысл, вследствие появления нулей в знаменателях.

Исключение представляет лишь тот особый случай, когда не только $f(t)$, но и все функции F_i не содержат в своих разложениях k-й гармоники. Оставляя этот особый случай в стороне, мы видим, что при k, равном целому числу, построенное нами решение (6.8) перестает существовать.

Допустим теперь, что k не равно целому числу, но мало от него отличается. В этом случае в порождающем решении и в функциях F_i появляются члены с численно очень большими коэффициентами. Так как F_i суть целые рациональные функции от уже ранее вычисленных величин x_j, то эти члены будут появляться в разложении (6.8) во все более высоких степенях. Тем не менее, ряд (6.8) будет сходиться при достаточно малых значениях μ, т. е., как бы мало ни отличалось k от целого числа, всегда найдется такое малое значение μ, при котором этот ряд будет сходиться. Однако в каждой физической задаче величина μ имеет, хотя может быть и малое, но вполне определенное фиксированное значение и, как бы мало это значение ни было, всегда найдется для k такая достаточно малая окрестность целого числа, что ряд (6,8) окажется расходящимся.

Таким образом, случай k, мало отличающегося от целого числа, так же как и случай k, равного целому числу, требует особого исследования. Такие случаи мы будем называть *резонансными*. Решение (6.8) справедливо только вдали от резонанса.

§ 7. Колебания неавтономной системы с одной степенью свободы при резонансе

Рассмотрим систему, описываемую уравнением (6.1) при резонансе, т. е. допустим, что k или равно целому числу n, или мало от него отличается. Мы будем предполагать, что „расстройка" k^2-n^2 имеет порядок малости μ и обозначим

$$n^2-k^2=\mu a,$$

где a — конечная величина. Кроме того, мы будем предполагать, что коэффициенты при n-ой гармонике в разложении функции $f(t)$ также имеют порядок малости μ и положим

$$a_n=\mu a_n', \qquad b_n=\mu b_n'.$$

Тогда, присоединяя члены

$$\mu a x, \quad \mu (a_n' \cos nt + b_n' \sin nt)$$

к функции $\mu \cdot F(t, x, \dot{x}, \mu)$ и сохраняя за полученной, таким образом, новой функцией первоначальное обозначение, мы можем уравнение (6.1) записать в следующем виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x + f'(t) = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \tag{7.1}$$

где

$$f'(t) = f(t) - a_n \cos nt - b_n \sin nt =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{j \neq n}^{1, \infty} (a_j \cos jt + b_j \sin jt).$$

Рассмотрим порождающее уравнение

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + n^2x_0 + f'(t) = 0. \tag{7.2}$$

Это уравнение допускает семейство периодических решений

$$x_0 = \frac{a_0}{2n^2} + \sum_{j \neq n}^{1, \infty} \frac{a_j \cos jt + b_j \sin jt}{n^2 - j^2} + M_0 \cos nt + N_0 \sin nt =$$

$$= \varphi(t) + M_0 \cos nt + N_0 \sin nt, \tag{7.3}$$

зависящее от двух произвольных постоянных M_0 и N_0. Мы имеем, следовательно, дело со случаем, рассмотренным в общем виде в § 3.

Следуя общему методу, будем искать решение $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ уравнения (7.1) с начальными условиями

$$x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = x_0(0) + \beta_1, \quad \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = \dot{x}_0(0) + \beta_2,$$

под видом ряда:

$$x(t, \beta_1, \beta_2, \mu) = x_0(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu +$$

$$D\beta_1\mu + E\beta_2\mu + F\mu^2 + \ldots$$

расположенного по целым и положительным степеням β_1, β_2 и μ. В этом ряде совокупность членов выше первого порядка обращается в нуль при $\mu = 0$, так как при этом уравнение (7.1) обращается в линейное, общее решение которого может содержать начальные значения только линейно.

Для коэффициентов A и B имеем начальные условия

$$A(0) = 1, \quad \dot{A}(0) = 0, \quad B(0) = 0, \quad \dot{B}(0) = 1$$

и дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2A}{dt^2} + n^2A = 0, \quad \frac{d^2B}{dt^2} + n^2B = 0,$$

откуда находим

$$A = \cos nt, \quad B = \frac{1}{n}\sin nt.$$

Составляя уравнения (2.4) и пользуясь уже известными обозначениями, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \mu\,\{[C] + [D]\beta_1 + [E]\beta_2 + [F]\mu + \ldots\} = 0, \\ \psi_2 &= \mu\,\{[\dot{C}] + [\dot{D}]\beta_1 + [\dot{E}]\beta_2 + [\dot{F}]\mu + \ldots\} = 0. \end{aligned}\right\} = 0. \quad (7.4)$$

Как и следовало ожидать, согласно общей теории, полученные уравнения сокращаются на μ и для того, чтобы они допускали решение, обращающееся в нуль при $\mu = 0$, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$[C] = 0, \quad [\dot{C}] = 0. \qquad (7.5)$$

Найдем эти условия. Коэффициент C удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2C}{dt^2} + n^2C = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$$

и начальным условиям

$$C(0) = 0, \quad \dot{C}(0) = 0,$$

откуда находим

$$C = \frac{1}{n}\int_0^t F(\tau, x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau), 0)\sin n(t - \tau)\, d\tau$$

и уравнения (7.5) принимают вид:

$$
\left.\begin{aligned}
P(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi} F(\tau,\ M_0\cos n\tau + N_0\sin n\tau + \varphi(\tau),\\
-M_0 n\sin n\tau + N_0 n\cos n\tau + \dot\varphi(\tau),\ 0)\sin n\tau\cdot d\tau = 0,\\
Q(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi} F(\tau,\ M_0\cos n\tau + N_0\sin n\tau + \varphi(\tau),\\
-M_0 n\sin n\tau + N_0 n\cos nt + \dot\varphi(\tau),\ 0)\cos n\tau\cdot d\tau = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.6)
$$

Мы получили, таким образом, два уравнения для определения значений произвольных постоянных M_0 и N_0. Этим значениям отвечают те порождающие решения семейства (7.3), вблизи которых могут установиться периодические колебания системы (7.1). Для того, чтобы такие колебания действительно установились, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$
\begin{vmatrix} [D], & [E] \\ [\dot D], & [\dot E] \end{vmatrix} \neq 0,
$$

так как в этом случае, уравнения (7.4) действительно допускают и притом единственное и аналитическое решение для β_1 и β_2, для которого эти величины обращаются в нуль при $\mu = 0$.

В § 3 было доказано общее положение, согласно которому, для существования периодического решения достаточно, чтобы при выполнении уравнений (7.6) выполнялось также условие

$$
\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial M_0}, & \dfrac{\partial P}{\partial N_0} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial M_0}, & \dfrac{\partial Q}{\partial N_0} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (7.7)
$$

Проверим это утверждение в рассматриваемом случае. Имеем:

$$
\frac{d^2D}{dt^2} + n^2D = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)A + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot x}\right)\dot A = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cos nt - n\left(\frac{\partial F}{\partial \dot x}\right)\sin nt
$$

$$
D(0) = \dot D(0) = 0,
$$

где скобки обозначают, что после дифференцирования величина μ должна быть положена нулю, а величины x и $\dot{x}$ должны быть заменены их значениями в порождающем решении. Из этого уравнения находим

$$D=\frac{1}{n}\int\limits_{0}^{t}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{t=\tau}\cos n\tau-n\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=\tau}\sin n\tau\right\}\sin n(t-\tau)\cdot d\tau.$$

Отсюда, принимая во внимание (7.6) и (7.3), непосредственно убеждаемся, что

$$[D]=\frac{1}{n}\frac{\partial P}{\partial M_0},\quad [\dot{D}]=\frac{\partial Q}{\partial M_0}.$$

Аналогично получаем:

$$[E]=\frac{1}{n}\frac{\partial P}{\partial N_0},\quad [\dot{E}]=\frac{\partial Q}{\partial N_0}$$

и, следовательно,

$$\begin{vmatrix}[D], & [E]\\ [\dot{D}], & [\dot{E}]\end{vmatrix}=\frac{1}{n}\frac{\partial (P,Q)}{\partial (M_0,N_0)}, \tag{7.8}$$

что и доказывает наше утверждение.

При выполнении (7.7) искомое периодическое решение будет аналитическим относительно μ. Поэтому для действительного вычисления этого решения будем искать его в виде ряда

$$x=x_0+\mu x_1+\mu^2 x_2+\ldots, \tag{7.9}$$

расположенного по целым, положительным степеням μ, где x_1, $x_2, \ldots$ — неизвестные периодические функции времени. Имеем, прежде всего,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+n^2x_1=F(t, x_0, \dot{x}_0, 0). \tag{7.10}$$

Так как n — целое число, то уравнение (7.10) будет тогда и только тогда допускать периодическое решение, когда в разложении Фурье правой части этого уравнения, являющейся периодической функцией времени, будут отсутствовать члены с $\sin nt$ и $\cos nt$. Следовательно, необходимо прежде всего, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \sin nt\, dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \cos nt\, dt = 0.$$

Это уже знакомые нам уравнения для M_0 и N_0. Допустим, что M_0 и N_0 действительно выбраны согласно этим уравнениям. Тогда все решения уравнения (7.10) будут периодическими и они имеют вид

$$x_1 = \varphi_1(t) + M_1 \cos nt + N_1 \sin nt,$$

где M_1 и N_1 — произвольные постоянные, а $\varphi_1(t)$ — какое-нибудь частное решение, которое может быть, например, вычислено по обычной элементарной формуле

$$\varphi_1(t) = \frac{a_{01}}{2n^2} + \sum_{m \neq n}^{1, \infty} \frac{a_{m1} \cos mt + b_{m1} \sin mt}{n^2 - m^2},$$

в которой a_{m1} и b_{m1} — коэффициенты Фурье функции $F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$.

Входящие в выражение для x_1 произвольные постоянные M_1 и N_1 могут быть использованы для того, чтобы в уравнении для x_2 уничтожить члены с $\cos nt$ и $\sin nt$. Покажем, как это делается.

Уравнение для x_i имеет вид

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + n^2 x_i = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) x_{i-1} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) \dot{x}_{i-1} + F_i, \qquad (7.11)$$

где скобки имеют то же значение, что и в (7.8), а F_i — целая рациональная функция с периодическими коэффициентами от $x_0, x_1, \ldots, x_{i-2}$. Это уравнение, так же как и уравнение (7.10), либо совсем не имеет периодических решений, либо, наоборот, все его решения являются периодическими. Допустим для определенности, что все функции

$x_1, \ldots, x_{i-1}$ вышли периодическими. Эти функции имеют вид

$$x_j = \varphi_j(t) + M_j \cos nt + N_j \sin nt,$$

где φ_j — некоторые периодические функции времени, а M_j и N_j — постоянные. Допустим, что постоянные $M_1, \ldots, M_{i-2}$, $N_1, \ldots N_{i-2}$ уже определены, а постоянные M_{i-1} и N_{i-1} остались еще неопределенными. Тогда, приравнивая нулю коэффициенты при $\cos nt$ и $\sin nt$ в разложении Фурье правой части уравнения (7.11), мы получим два уравнения

$$M_{i-1}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cos nt - n\left(\frac{\partial F}{\partial \dot x}\right)\sin nt\right\}\cos nt\cdot dt +$$
$$+ N_{i-1}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\sin nt + n\left(\frac{\partial F}{\partial \dot x}\right)\cos nt\right\}\cos nt\,dt +$$
$$+\int_0^{2\pi} F_i^* \cos nt\,dt = 0,$$

$$M_{i-1}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cos nt - n\left(\frac{\partial F}{\partial \dot x}\right)\sin nt\right\}\sin nt\,dt +$$
$$+ N_{i-1}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\sin nt + n\left(\frac{\partial F}{\partial \dot x}\right)\cos nt\right\}\sin nt\,dt +$$
$$+\int_0^{2\pi} F_i^* \sin nt\,dt = 0,$$

где F_i^* — некоторая известная периодическая функция. Эти уравнения выражают необходимые и достаточные условия периодичности решения для x_i.

Мы получили, таким образом, два уравнения для нахождения постоянных M_{i-1} и N_{i-1}. Эти уравнения линейны и определитель их совпадает, очевидно, с (7.7). Следовательно, если для M_0 и N_0, определяемых уравнениями (7.6), выполняется условие (7.7), то существует только один ряд с периодическими коэффициентами, формально удовлетворяющий уравнению (7.1). Этот ряд будет поэтому сходиться и действительно представит искомое периодическое решение.

Пример 1. Рассмотрим в качестве примера колебание системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x-\gamma x^3=\lambda\sin t, \tag{7.12}$$

где величина γ предполагается малой. К такого рода уравнению приводятся многие важные физические и технические задачи. Трактуя уравнение (7.12) как квазилинейное, положим $\gamma=\mu\gamma'$, после чего это уравнение примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=\mu\gamma' x^3+\lambda\sin t. \tag{7.13}$$

Допустим, сначала, что мы имеем дело с нерезонансным случаем. В этом случае порождающее уравнение имеет единственное периодическое решение

$$x_0=\frac{\lambda}{k^2-1}\sin t.$$

Будем искать периодическое решение уравнения (7.13) под видом ряда

$$x=x_0+\mu x_1+\ldots \tag{7.14}$$

Для x_1 получаем уравнение:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+k^2x_1=\frac{\gamma'\lambda^3}{(k^2-1)^3}\sin^3 t,$$

которое имеет единственное решение

$$x_1=\frac{3\gamma'\lambda^3}{4(k^2-1)^4}\sin t-\frac{\gamma'\lambda^3}{4(k^2-1)^3(k^2-9)}\sin 3t.$$

Вычисление дальнейших приближений не представляет никаких затруднений.

Допустим теперь, что мы имеем дело с резонансным случаем, когда k равно единице или мало от нее отличается. Полагая в этом случае

$$1-k^2=\mu\alpha,\quad \lambda=\mu\lambda',$$

приведем уравнение (7.12) к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\mu(\lambda'\sin t+ax+\gamma'x^3). \tag{7.15}$$

Порождающее уравнение имеет сейчас периодическое решение

$$x_0=M_0\cos t+N_0\sin t,$$

зависящее от двух произвольных постоянных M_0 и N_0.

Будем искать периодическое решение уравнения (7.15) под видом ряда

$$x=x_0+\mu x_1+\ldots \tag{7.16}$$

с периодическими коэффициентами. Имеем:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+x_1=\lambda'\sin t+a(M_0\cos t+N_0\sin t)+$$
$$+\gamma'(M_0\cos t+N_0\sin t)^3.$$

Для того, чтобы это уравнение имело периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы в его правой части отсутствовали члены с $\cos t$ и $\sin t$. Это дает два уравнения для нахождения M_0 и N_0:

$$aM_0+\frac{3}{4}\gamma' M_0^3+\frac{3}{4}\gamma' M_0N_0^2=0,$$
$$\lambda'+aN_0+\frac{3}{4}\gamma' N_0^3+\frac{3}{4}\gamma' M_0^2N_0=0.$$

Этим уравнениям можно удовлетворить только в предположении

$$M_0=0,\quad N_0=A, \tag{7.17}$$

где A — корень кубического уравнения

$$\lambda'+aA+\frac{3}{4}\gamma' A^3=0. \tag{7.18}$$

Обращение в нуль коэффициента M_0 вызвано тем обстоятельством, что уравнение (7.15) не изменяется при замене t на $-t$ и x на $-x$, вследствие чего разложение искомого решения будет содержать только синусы. Этим обстоятельством мы воспользуемся при дальнейших вычислениях, что внесет некоторые упрощения.

Определив произвольные постоянные согласно (7.17), будем теперь иметь

$$x_1 = \frac{\gamma' A^3}{32} \sin 3t + N_1 \sin t,$$

где N_1 — новая произвольная постоянная. Эта постоянная определится из условия периодичности функции x_2. В самом деле, для x_2 имеем уравнение

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + x_2 = a\left(\frac{\gamma' A^3}{32} \sin 3t + N_1 \sin t\right) +$$
$$+ 3\gamma' A^2 \sin^2 t \left(\frac{\gamma' A^3}{32} \sin 3t + N_1 \sin t\right)$$

и условие периодичности дает:

$$\left(a + \frac{9}{4}\gamma' A^2\right) N_1 - \frac{3}{128}\gamma'^2 A^5 = 0.$$

Как и следовало ожидать, согласно общей теории, уравнение для N_1 получилось линейное. Определив N_1, будем теперь иметь:

$$x_2 = \frac{1}{512}\gamma'^2 A^5 \sin 5t +$$
$$+ \left(-\frac{1}{256} a\gamma' A^3 + \frac{3}{32}\gamma'^2 A^2 N_1 - \frac{3}{512}\gamma'^2 A^5\right) \sin 3t + N_2 \sin t,$$

где N_2 — новая произвольная постоянная, которая определится из следующего приближения. Продолжая аналогичным образом дальше, мы можем получить любое число приближений.

Рассмотрим подробнее уравнение (7.18), определяющее A. Возвращаясь к старым обозначениям, мы можем его переписать в виде

$$\lambda + (1 - k^2) A + \frac{3}{4}\gamma A^3 = 0. \tag{7.19}$$

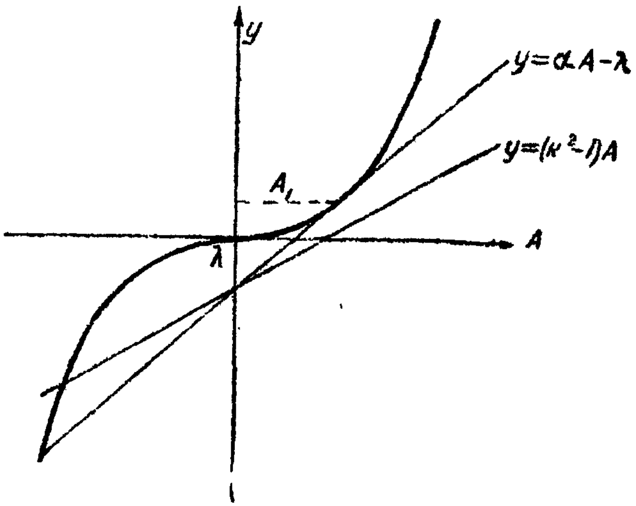
Число вещественных корней этого уравнения определяет число периодических решений при резонансе. Эти корни могут быть получены графически как точки пересечения прямой

$$y = (k^2 - 1) A - \lambda \tag{7.20}$$

и кубической параболы

$$y = \frac{3}{4}\gamma A^3. \tag{7.21}$$

На черт. 1 видно, что когда разность k^2-1 отрицательна или когда она положительна, но не превосходит некоторой величины α, при которой прямая (7.20) касается



Черт. 1.

параболы (7.21), уравнение (7.19) имеет только один вещественный корень. Но если

$$k^2-1 > \alpha,$$

то уравнение (7.19) будет иметь три вещественных корня.

Отсюда, однако, не следует, что уравнение (7.15) будет при этом иметь три периодических решения, как это полагают некоторые авторы. В самом деле, уравнение (7.15) написано нами в предположении, что величина k^2-1 достаточно мала. Только при таком предположении мы можем быть уверены, что ряд (7.16) сходится и представляет собой действительное, а не формальное решение уравнения (7.15). И действительно, легко видеть, что когда k^2-1 достигает значения α, ряд (7.16) теряет для корня A_1 всякий смысл, так как для двойного корня знаменатель, стоящий в выражении для N_1, обращается в нуль. Может, конечно, случиться, что при дальнейшем увеличении k ряд (7.16) будет опять сходиться для всех корней уравнения (7.19) и мы будем иметь три различных периодических решения уравнения колебаний. Однако, этот вопрос требует специального исследования, которое не имеет ничего общего с развиваемой здесь теорией. Согласно этой теории, мы должны рассматривать последний случай (расстройка k^2-1 достаточно велика) как нерезонансный и пользоваться рядом (7.14), который дает только одно периодическое решение. Таким образом, при квазилинейной трактовке уравнения (7.12) мы получаем как в резонансном, так и в нерезонансном случаях, только одно периодическое решение. Между тем, опыт показывает, что в системе, описываемой уравнением (7.12), пока k^2-1 остается меньше некоторой положительной величины β, устанавливается определенный режим вынужденных периодических колебаний. Но затем, при дальнейшем увеличении k, эти колебания делаются неустойчивыми и система срывается на новый режим периодических колебаний. Отсюда следует, что при $k^2-1>\beta$ для уравнения (7.12) должно одновременно существовать несколько периодических решений. Таким образом, квазилинейная трактовка уравнения (7.12), по крайней мере при строгом ее применении, не дает полного описания физической картины колебания.

Уравнение (7.12) является частным случаем уравнения, которое мы подробно исследуем в гл. V при помощи более общих методов.

Пример 2. Мы видели, что при k, близком к целому числу, метод нахождения периодических решений, изложенный в предыдущем параграфе делается непригодным вследствие того, что ряд, определяющий это решение, становится расходящимся. В этом случае необходимо применить специальный резонансный метод, который мы изложили в этом параграфе. Однако, можно привести примеры, когда этот метод приводит к такого же типа рядам, как и нерезонансный и, следовательно, становится также непригодным. Допустим, например, что колебание системы описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x+\beta x^2=\lambda\sin t, \qquad (7.22)$$

где β мала по сравнению с единицей. Полагая $\beta=\mu\beta'$, будем трактовать уравнение (7.22) как квазилинейное

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=\lambda\sin t-\mu\beta'x^2.$$

В нерезонансном случае, применяя метод предыдущего параграфа, легко находим периодическое решение этого уравнения под видом ряда

$$x=\frac{\lambda}{k^2-1}\sin t+\left(\frac{\beta'\lambda^2}{2(k^2-1)(k^2-4)}\cos 2t-\right.$$
$$\left.-\frac{\beta'\lambda^2}{2k^2(k^2-1)^2}\right)\mu+\ldots \quad (7.23)$$

В резонансном случае, когда k мало отличается от единицы, полагаем

$$1-k^2=\mu\alpha,\quad \lambda=\mu\lambda'$$

и применяем к полученному таким образом уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\mu(\lambda'\sin t+ax-\beta'x^2) \quad (7.24)$$

метод настоящего параграфа. Имеем:

$$x_0=M_0\cos t+N_0\sin t,$$
$$x=x_0+\mu x_1+\ldots,$$
$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+x_1=\lambda'\sin t+a(M_0\cos t+N_0\sin t)-\beta'(M_0\cos t+$$
$$+N_0\sin t)^2.$$

Условие периодичности x_1 дает:

$$M_0=0,\quad N_0=-\frac{\lambda'}{a}$$

и, следовательно,

$$x_1=-\frac{\beta'\lambda'^2}{2a^2}-\frac{\beta'\lambda'^2}{6a^2}\cos 2t+M_1\cos t+N_1\sin t.$$

Далее,

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+x_2=ax_1-2\beta'x_0x_1$$

и из условия периодичности x_2 находим:

$$M_1 = 0, \quad N_1 = \frac{5}{6}\frac{\beta'^2\lambda'^3}{a^4}.$$

Таким образом, возвращаясь к первоначальным обозначениям, будем иметь:

$$x = \frac{\lambda}{k^2-1}\sin t + \left(-\frac{\lambda^3\beta'}{6(k^2-1)^3}\cos 2t - \frac{\lambda^2\beta'}{2(k^2-1)^3}\right)\mu + \ldots$$

Полученное разложение ничем по существу не отличается от разложения (7.23) и, так же, как последнее, расходится при достаточно малом k^2-1.

Не следует, однако, думать, что уравнение (7.22) при резонансе не имеет периодического решения. Такое ешение, как мы увидим ниже, существует, но оно не может быть получено при квазилинейной трактовке этого уравнения.

§ 8. Резонанс n-го рода

Как было показано в конце § 3, в нелинейной системе возможно явление резонанса n-го рода, заключающегося в том, что в системе могут возникнуть интенсивные колебания, когда собственная частота мало отличается от $\frac{1}{n}$ (n — целое число) части частоты возмущающей силы. Теория этого явления для квазилинейной системы с одной степенью свободы, описываемой уравнением типа (6.1), подробно разработана Мандельштамом и Папалекси[1]. Мы приводим здесь некоторые основные результаты этого исследования, придерживаясь, однако, другого порядка изложения.

Итак, рассмотрим уравнение (6.1) в предположении, что k мало отличается $\frac{1}{n}$. Относя член $\left(k^2-\frac{1}{n^2}\right)x$ к правой части уравнения, мы можем его записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{n^2}x + f(t) = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu). \qquad (8.1)$$

[1] Мандельштам и Папалекси. О явлениях резонанса n-го рода, журн. техн. физики, т. II, вып. 7—8, 1932.

Задача заключается в определении условий, при которых в системе возникают периодические колебания с частотой $\frac{1}{n}$, т. е. условий, при которых уравнение (8.1) допускает периодические решения периода $2\pi n$.

Заметим, прежде всего, что так как $\frac{1}{n^2}$ отличается от целого числа, то, на основании результатов § 6, уравнение (8.1) имеет периодическое решение, периода 2π, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее

$$x_0^*(t) = \varphi(t), \tag{8.2}$$

где функция φ определяется равенством (6.4). Нас интересуют, однако, такие решения периода $2\pi n$, которые не сводятся к решениям периода 2π. Для получения этих решений заметим, что порождающее уравнение имеет семейство периодических решений

$$x_0 = \varphi(t) + M_0 \cos\frac{t}{n} + N_0 \sin\frac{t}{n} \tag{8.3}$$

периода $2\pi n$, зависящее от двух произвольных постоянных M_0 и N_0. Так как правая часть уравнения (8.1) является относительно t периодической функцией периода 2π и, следовательно, также периода $2\pi n$, то задача ничем не отличается от изученной в предыдущем параграфе, в которой лишь стоит заменить период 2π периодом $2\pi n$. Поэтому, следуя методу предыдущего параграфа, будем искать интересующее нас решение под видом ряда

$$x = x_0 + \mu x_1 + \ldots.$$

Для x_1 имеем уравнение

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{1}{n^2}x_1 = F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ 0),$$

в котором правая часть является известной периодической функцией периода $2\pi n$. Для того, чтобы это уравнение имело периодическое решение периода $2\pi n$, необходимо и достаточно, чтобы в разложении правой части этого уравнения по синусам и косинусам углов, кратных $\frac{t}{n}$, отсутствовали члены с $\cos\frac{t}{n}$ и $\sin\frac{t}{n}$. Следовательно, должны выполняться условия:

$$P(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)\cos\frac{t}{n}\,dt = 0,$$

$$Q(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)\sin\frac{t}{n}\,dt = 0. \qquad (8.4)$$

Мы получили, таким образом, два уравнения для нахождения произвольных постоянных M_0 и N_0. Эти уравнения удовлетворяются при $M_0 = N_0 = 0$. В самом деле, как было указано выше, уравнение (8.1) имеет периодическое решение периода 2π, соответствующее порождающему решению (8.2), т. е. решению (8.3) с нулевыми значениями величин M_0 и N_0. Но это решение может быть, очевидно, рассматриваемо как имеющее период $2\pi n$ и должно, следовательно, заключаться среди искомых решений. Легко также непосредственно убедиться, что уравнения (8.4) удовлетворяются при $M_0 = N_0 = 0$. Для этого достаточно заметить, что при $M_0 = N_0 = 0$ функция $F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$ становится периодической периода 2π и, следовательно, ее разложение содержит синусы и косинусы только целых кратностей t. Поэтому разложения Фурье подынтегральных выражений в уравнениях (8.4) не будут содержать свободных членов и интегралы обратятся тождественно в нуль.

Но уравнения (8.4) могут иметь решения, при которых хотя бы одна из величин M_0, N_0 отлична от нуля. Если для такого решения функциональный определитель

$$\frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)}$$

отличен от нуля, то, на основании результатов предыдущего параграфа, для него действительно существует периодическое решение уравнения (8.1) и это решение будет, очевидно, иметь период $2\pi n$, не сводящийся к периоду 2π.

Дальнейшее вычисление решения производится так же, как и при обычном резонансе.

Пример. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{4}x=\lambda\sin t+\mu\{ax+(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\dot{x}\}, \tag{8.5}$$

где a, α, β, γ — постоянные, исследованные Мандельштамом и Папалекси. Такого рода уравнением описываются, при некоторых условиях, колебания лампового генератора.

Исследуем резонанс второго рода для этой системы, т. е. найдем периодические решения уравнения (8.5) периода 4π. Мы ограничимся при этом вычислением нулевого приближения, т. е. порождающего решения. Имеем

$$x=x_0+\mu x_1+\ldots$$

$$x_0=M_0\cos\frac{t}{2}+N_0\sin\frac{t}{2}-\frac{4}{3}\lambda\sin t,$$

где M_0 и N_0 — постоянные, подлежащие определению. Они находятся из условия, что уравнение для x_1:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{1}{4}x_1=ax_0+(\alpha+\beta x_0+\gamma x_0^2)\dot{x}_0$$

допускает периодические решения периода 4π. А для этого необходимо и достаточно, чтобы в правой части этого уравнения отсутствовали члены с $\cos\frac{t}{2}$ и $\sin\frac{t}{2}$. Приравнивая нулю коэффициенты при этих членах, получаем:

$$-M_0\left\{\alpha+\frac{\gamma}{4}\left(M_0^2+N_0^2+\frac{32}{9}\lambda^2\right)\right\}+N_0\left(2a+\frac{2}{3}\lambda\beta\right)=0, \tag{8.6}$$

$$M_0\left(2a-\frac{2}{3}\lambda\beta\right)+N_0\left\{\alpha+\frac{\gamma}{4}\left(M_0^2+N_0^2+\frac{32}{9}\lambda^2\right)\right\}=0.$$

Эти два уравнения, кроме тривиального решения $M_0=N_0=0$, имеют еще решение, определяемое равенствами

$$\left.\begin{aligned} M_0^2+N_0^2&=-\frac{4\alpha}{\gamma}-\frac{32}{9}\lambda^2\pm\frac{8\alpha}{3\gamma}\sqrt{9a^2-\lambda^2\beta^2},\\ \frac{M_0}{N_0}&=\sqrt{\frac{\lambda\beta-3a}{\lambda\beta+3a}}.\end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Функциональный определитель уравнений (8.6) для решения (8.7) отличен от нуля и потому этому решению действительно отвечает периодическое решение уравнения (8.5) периода 4π.

§ 9. Колебания неавтономной квазилинейной системы с любым числом степеней свободы вдали от резонанса

Рассмотрим колебания квазилинейной неавтономной системы с любым числом степеней свободы[1]. Мы имеем в виду системы, уравнения колебаний которых могут быть приведены к виду:

$$\frac{dx_s}{dt}=a_{s1}x_1+\ldots+a_{sr}x_r+f_s(t)+\mu F_s(t, x_1,\ldots x_r, \mu) \quad (9.1)$$
$$(s=1, 2,\ldots,r).$$

Здесь a_{sj} — постоянные; f_s — непрерывные периодические функции времени периода 2π, разлагающиеся в ряды Фурье; F_s — аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_r$ в некоторой области G, в которой лежат все рассматриваемые дальше порождающие решения, и параметра μ при достаточно малых его значениях. Относительно t, F_s являются непрерывными периодическими функциями, периода 2π, разлагающимися в ряды Фурье.

Мы будем предполагать, что характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, \ldots, & a_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, \ldots, & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1}, & a_{r2}, \ldots, & a_{rr}-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad (9.2)$$

линейной части не имеет ни корня, равного нулю, ни корня вида $\pm ki$, где k — либо целое число, либо мало от него отличается. В этом *нерезонансном* случае порождающая система

$$\frac{dx_s^{(0)}}{dt}=a_{s1}x_1^{(0)}+\ldots+a_{sr}x_r^{(0)}+f_s(t), \quad (9.3)$$
$$(s=1, 2, \ldots, r)$$

имеет одно и только одно периодическое решение, которое может быть вычислено обычным методом неопределенных коэффи-

---

[1] Частный случай этой задачи рассматривался Бернштейном и Иконниковым в работе „К математической теории вынужденных колебаний в автоколебательных системах с двумя степенями свободы", Журн. техн. физ., т. IV, вып. I, 1934.

циентов. В самом деле, пусть

$$f_s(t)=\alpha_{s0}+\sum_{p=1}^{\infty}(\alpha_{sp}\cos pt+\beta_{sp}\sin pt)$$

—разложения Фурье функций f_s. Будем искать периодическое решение системы (9.3) под видом таких же рядов

$$x_s^{(0)}=\overset{*}{\alpha}_{s0}+\sum_{p=1}^{\infty}(\overset{*}{\alpha}_{sp}\cos pt+\overset{*}{\beta}_{sp}\sin pt)=\varphi_s(t) \tag{9.4}$$

с неопределенными коэффициентами $\overset{*}{\alpha}_{s0}$, $\overset{*}{\alpha}_{sp}$, $\overset{*}{\beta}_{sp}$. Для этих коэффициентов получаем уравнения

$$\sum_{j=1}^{r}a_{sj}\overset{*}{\alpha}_{jp}+\alpha_{s0}=0,$$

$$p\overset{*}{\beta}_{sp}+\sum_{j=1}^{r}a_{sj}\overset{*}{\alpha}_{jp}+\alpha_{sp}=0\quad(s=1,\,2,\,\ldots,r;\ p=1,\,2\ldots),$$

$$-p\overset{*}{\alpha}_{sp}+\sum_{j=1}^{r}a_{sj}\overset{*}{\beta}_{jp}+\beta_{sp}=0.$$

Так как характеристическое уравнение (9.2) не имеет нулевого корня, то детерминант уравнений для $\overset{*}{\alpha}_{s0}$ отличен от нуля и эти уравнения имеют единственное решение. Что же касается уравнений для $\overset{*}{\alpha}_{sp}$ и $\overset{*}{\beta}_{sp}$, то их детерминант имеет вид:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12},\ldots,a_{1r}, & p, & 0,\ldots,0\\ a_{21}, & a_{22},\ldots,a_{2r}, & 0, & p,\ldots,0\\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ a_{r1} & a_{r2},\ldots,a_{rr}, & 0, & 0,\ldots,p\\ -p, & 0,\ldots,0, & a_{11}, & a_{12},\ldots,a_{1r}\\ 0, & -p,\ldots,0, & a_{21}, & a_{22},\ldots,a_{2r}\\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ 0, & 0,\ldots,-p, & a_{r1}, & a_{r2},\ldots,a_{rr}\end{vmatrix} \tag{9.5}$$

Помножим каждую из последних r колонок, а также каждую из последних r строк на $i=\sqrt{-1}$ и затем сложим попарно первые r колонок с последними. В полученном таким образом определителе сложим попарно первые r строк с последними строками, после чего будем иметь:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}+pi, & a_{12}, \ldots, & a_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}+pi, \ldots, & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1}, & a_{r2}, \ldots, & a_{rr}+pi \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{11}-pi, & a_{12}, \ldots, & a_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}-pi, \ldots, & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1}, & a_{r2}, \ldots, & a_{rr}-pi \end{vmatrix}$$

Так как по условию уравнение (9.2) не имеет корней вида $\pm pi$, то определитель (9.5) отличен от нуля. Отсюда непосредственно вытекает существование и единственность решения (9.4).

Будем теперь искать периодическое решение уравнений (9.1), обращающееся в (9.4) при $\mu = 0$. Пусть, как обычно,

$$x_s(t, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu) = x_s^0 + A_{s1}\beta_1 + A_{s2}\beta_2 + \ldots + \\ + A_{sr}\beta_r + C_s\mu + \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots r)$$

решение уравнений (9.1) с начальными условиями

$$x_s(0, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu) = x_s^0(0) + \beta_s.$$

Условия периодичности этого решения имеют вид:

$$\psi_s = [x_s] = [A_{s1}]\beta_1 + [A_{s2}]\beta_2 + \ldots + [A_{sr}]\beta_r + \\ + [C_s]\mu + \ldots = 0. \quad (9.6)$$

Обозначим через x_{sj} фундаментальную систему решений уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sr}x_r, \qquad (9.7)$$

определяемую начальными условиями

$$x_{sj}(0)=0, \qquad (s\neq j),$$
$$x_{ss}(0)=1. \tag{9.8}$$

Будем, как легко видеть, иметь:

$$A_{sj}=x_{sj}$$

и, следовательно,

$$D=\left\{\frac{\partial(\psi_1,\ldots,\psi_r)}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_r)}\right\}_{\beta_1=\ldots=\beta_r=\mu=0}=$$

$$=\begin{vmatrix} x_{11}(2\pi)-1, & x_{12}(2\pi), & \ldots, & x_{1r}(2\pi)\\ x_{21}(2\pi), & x_{22}(2\pi)-1, & \ldots, & x_{2r}(2\pi)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ x_{r1}(2\pi), & x_{r2}(2\pi), & \ldots, & x_{rr}(2\pi)-1 \end{vmatrix}$$

Ниже будет показано, что каковы бы ни были постоянные a_{sj}, для системы (9.7) имеет место тождество

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t)-\lambda, & x_{12}(t), & \ldots, & x_{1r}(t)\\ x_{21}(t), & x_{22}(t)-\lambda, & \ldots, & x_{2r}(t)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ x_{r1}(t), & x_{r2}(t), & \ldots, & x_{rr}(t)-\lambda \end{vmatrix}\equiv$$
$$\equiv(e^{\lambda_1 t}-\lambda)(e^{\lambda_2 t}-\lambda)\ldots(e^{\lambda_r t}-\lambda),$$

где λ_j — корни характеристического уравнения (9.2). Поэтому

$$D=(e^{2\pi\lambda_1}-1)\cdot(e^{2\pi\lambda_2}-1)\ldots(e^{2\pi\lambda_r}-1)$$

и, на основании условий, наложенных на корни λ_j, приходим к заключению, что величина D отлична от нуля. Следовательно, согласно теореме Пуанкаре, существует одно и только одно периодическое решение системы (9.1), обращающееся в (9.4) при $\mu=0$, и это решение будет аналитическим относительно μ.

Для действительного вычисления этого решения будем его искать под видом ряда

$$x_s = x_s^{(0)} + \mu x_s^{(1)} + \mu^2 x_s^{(2)} + \ldots, \qquad (9.9)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r)$$

с периодическими коэффициентами. Для вычисления этих коэффициентов мы получаем уравнения вида

$$\frac{dx_s^{(k)}}{dt} = a_{s1}x_1^{(k)} + \ldots + a_{sr}x_r^{(k)} + F_s^{(k)}, \qquad (9.10)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots),$$

где $F_s^{(k)}$ — целые рациональные функции с периодическими коэффициентами от тех $x_j^{(l)}$, для которых $l < k$.

В частности,

$$F_s^{(1)} = P_s(t, x_1^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, 0)$$

и, следовательно, $F_s^{(1)}$ являются известными периодическими функциями. Допустим, что все $x_s^{(1)}, \ldots, x_s^{(k-1)}$ уже вычислены и вышли периодическими. Тогда, как было показано выше, уравнения (9.10) допускают одно и только одно периодическое решение, которое может быть вычислено методом неопределенных коэффициентов.

Таким образом, существует одна и только одна система рядов (9.9) с периодическими коэффициентами, формально удовлетворяющих уравнениям (9.1). Эти ряды сходятся и действительно представляют искомое решение.

§ 10. Колебания квазилинейной неавтономной системы с любым числом степеней свободы при резонансе

Допустим теперь, что среди корней характеристического уравнения имеется пара чисто мнимых $\pm ni$, причем n либо равно целому числу, либо мало от него отличается. Мы предполагаем при этом, что характеристическое уравнение не имеет больше корней такого же типа. Кроме того, мы придерживаемся старого предположения, что характеристическое уравнение не имеет корня, равного нулю.

В рассматриваемом случае, ряды (9.9) либо совсем не существуют (когда n — целое число), либо, при фиксированном μ, расходятся (когда n отличается от целого числа достаточно мало).

При помощи линейного преобразования с постоянными коэффициентами, систему (9.1) можно привести к виду

$$\frac{dx}{dt} = -ny + \varphi(t) + \mu f(t, x, y, x_1, \ldots, x_m, \mu),$$

$$\frac{dy}{dt} = nx + \psi(t) + \mu F(t, x, y, x_1, \ldots, x_m, \mu), \quad (10.1)$$

$$\frac{dx_s}{dt} = b_{s1}x_1 + \ldots + b_{sm}x_m + a_s x + b_s y + f_s(t) + \\ + \mu F_s(t, x, y, x_1, \ldots, x_m, \mu),$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m).$$

Здесь $m = r - 2$ и φ, ψ, f_s, f, F, F_s суть функции такого же типа, как и f_s и F_s в уравнениях (9.1) (хотя новые f_s и F_s не совпадают с первоначальными f_s и F_s), а a_s, b_s и b_{sj} — постоянные, причем уравнение

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \rho, & b_{12}, \ldots, & b_{1m} \\ b_{21}, & b_{22} - \rho, \ldots, & b_{2m} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ b_{m1}, & b_{m2}, \ldots, & b_{mm} - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (10.2)$$

определяет те $r - 2$ корней уравнения (9.2), которые отличаются от $\mp ni$. Следовательно, уравнение (10.2) не имеет ни корня, равного нулю, ни корней вида $\mp pi$, где p либо целое число, либо мало от него отличается.

Для выполнения указанного преобразования, можно поступить следующим образом.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dy_s}{dt} = -a_{1s}y_1 - a_{2s}y_2 - \ldots - a_{rs}y_r, \quad (10.3)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, r),$$

сопряженную с (9.7). Ее характеристическое уравнение имеет корни, лишь знаком отличающиеся от корней уравнения (9.2) и, следовательно, оно также имеет пару чисто мнимых корней $\pm ni$. Корню $-ni$ отвечает частное решение

$$y_s = \alpha_s e^{-nit} \quad (s = 1, 2, \ldots, r)$$

системы (10.3) и, следовательно, на основании известных свойств сопряженных систем, система (9.7) имеет первый интеграл

$$(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r) e^{-nit} = \text{const}.$$

Здесь $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ суть некоторые комплексные постоянные. Выделяя в выражении, стоящем в скобках, вещественную и мнимую части, будем иметь:

$$(x + iy) e^{-nit} = \text{const}.$$

Если теперь в уравнениях (9.1) ввести вместо двух каких-нибудь переменных новые переменные x и y, то эти уравнения примут вид (10.1).

Мы будем предполагать, что n является целым числом. Случай, когда n не является целым числом, а мало от него отличается (на величину порядка малости μ), приводится к предыдущему путем отнесения поправочных членов к функциям μf, μF, μF_s. Кроме того, так же как и при резонансе с одной степенью свободы, мы будем считать, что коэффициенты при членах с $\cos nt$ и $\sin nt$ в разложениях Фурье функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют порядок малости μ и эти члены также отнесем к функциям μf, μF, μF_s.

При сделанных предположениях порождающая система

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx^{(0)}}{dt} = -ny^{(0)} + \varphi(t), \qquad \frac{dy^{(0)}}{dt} = nx^{(0)} + \psi(t) \\ &\frac{dx_s^{(0)}}{dt} = b_{s1}x_1^{(0)} + \ldots + b_{sm}x_m^{(0)} + a_s x^{(0)} + b_s y^{(0)} + f_s(t) \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m)$$

допускает периодическое решение, зависящее от двух произвольных постоянных. В самом деле, пусть

$$\varphi(t) = P_{10} + \sum_{p \neq n}^{1, \infty} (P_{1p} \cos pt + Q_{1p} \sin pt)$$

$$\psi(t) = P_{20} + \sum_{p \neq n}^{1, \infty} (P_{2p} \cos pt + Q_{2p} \sin pt)$$

— разложения Фурье функций φ и ψ. Тогда, прежде всего, имеем:

$$x^{(0)}=\frac{P_{20}}{n}+\sum_{p\neq n}^{1,\infty}\frac{(-nP_{2p}+pQ_{1p})\cos pt-(nQ_{2p}+pP_{1p})\sin pt}{n^2-p^2}+$$
$$+M_0\cos nt+N_0\sin nt,$$

$$y^{(0)}=\frac{P_{10}}{n}+\sum_{p\neq n}^{1,\infty}\frac{(nP_{1p}+pQ_{2p})\cos pt+(nQ_{1p}-pP_{2p})\sin pt}{n^2-p^2}+$$
$$+M_0\sin nt-N_0\cos nt,$$

где M_0 и N_0 — произвольные постоянные. Подставляя $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ в последние m уравнений (10.4) и принимая во внимание свойства корней уравнения (10.2), мы получим, как это было показано в предыдущем параграфе, вполне определенное периодическое решение

$$x_s^{(0)}=x_s^{(0)}(t)\quad (s=1,2,\ldots,m)$$

для $x_s^{(0)}$.

Будем теперь искать периодическое решение системы (10.1). Пусть

$$x(t,\alpha,\beta,\beta_1,\ldots,\beta_m,\mu)=x^{(0)}(t)+A\alpha+B\beta+$$
$$+\mu\,[C+X(t,\alpha,\beta,\beta_1,\ldots,\beta_m,\mu)],$$
$$y(t,\alpha,\beta,\beta_1,\ldots,\beta_m,\mu)=y^{(0)}(t)+A^*\alpha+B^*\beta+$$
$$+\mu\,[C^*+Y(t,\alpha,\beta,\beta_1,\ldots,\beta_m,\mu)],$$
$$x_s=x_s^{(0)}+A_{s1}\beta_1+\ldots+A_{sm}\beta_m+A_s\alpha+B_s\beta+$$
$$+\mu\,[C_s+X_s(t,\alpha,\beta,\beta_1,\ldots,\beta_m,\mu)],$$
$$(s=1,2,\ldots,m)$$

решение этой системы с начальными условиями

$$x(0,\alpha,\beta,\beta_1,\ldots,\beta_m,\mu)=x^{(0)}(0)+\alpha,$$
$$y(0,\alpha,\beta,\beta_1,\ldots,\beta_m,\mu)=y^{(0)}(0)+\beta,$$
$$x_s(0,\alpha,\beta,\beta_1,\ldots,\beta_m,\mu)=x_s^{(0)}(0)+\beta_s.$$

Здесь X, Y, X_s — аналитические функции от α, β, $\beta_1, \ldots, \beta_m$, μ, обращающиеся в нуль вместе с этими переменными. Линейная часть разложений для x и y не содержит β_s, так как линейная часть первых двух уравнений (10.1) не зависит от x_j. Далее, имеем:

$$\frac{dA}{dt} = -nA^*, \quad \frac{dA^*}{dt} = nA,$$

$$\frac{dB}{dt} = -nB^*, \quad \frac{dB^*}{dt} = nB,$$

$$A(0) = 1, \ A^*(0) = 0, \ B(0) = 0, \ B^*(0) = 1$$

и, следовательно,

$$A = \cos nt, \qquad A^* = \sin nt,$$

$$B = -\sin nt, \quad B^* = \cos nt,$$

Для коэффициентов A_{sj} легко находим

$$A_{sj} = x_{sj},$$

где x_{sj} — фундаментальная система решений уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = b_{s1}x_1 + \ldots + b_{sm}x_m \quad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

с начальными условиями

$$x_{sj}(0) = \begin{cases} 0 \ (s \neq j) \\ 1 \ (s = j) \end{cases}.$$

Составляя условия периодичности, получим следующие уравнения для нахождения величин $\alpha, \beta, \beta_1, \ldots, \beta_m$:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(\alpha, \beta, \beta_1, \ldots, \beta_m, \mu) = \mu \{ [C] + [X] \} = 0, \\ &\psi^*(\alpha, \beta, \beta_1, \ldots, \beta_m, \mu) = \mu \{ [C^*] + [Y] \} = 0, \\ &\psi_s(\alpha, \beta, \beta_1, \ldots, \beta_m, \mu) = [A_{s1}]\beta_1 + \ldots + [A_{sm}]\beta_m + \\ &\qquad + [A_s]\alpha + [B_s]\beta + \mu \{ [C_s] + [X_s] \} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (10.5)$$

По свойству корней уравнения (10.2), функциональный определитель

$$\left\{ \frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_m)}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_m)} \right\}_{\alpha=\beta=\beta_1=\ldots=\beta_m=\mu=0} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_{11}(2\pi)-1, & \ldots, & x_{1m}(2\pi) \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ x_{m1}(2\pi), & \ldots, & x_{mm}(2\pi)-1 \end{vmatrix},$$

как было показано выше, отличен от нуля. Поэтому, последние m уравнений (10.5) разрешимы относительно $\beta_1, \ldots, \beta_m$ и дают для этих величин аналитические функции переменных α, β и μ, обращающиеся в нуль вместе с этими переменными. Подставляя $\beta_1, \ldots, \beta_m$ в первые два уравнения (10.5), получим:

$$\left. \begin{aligned} \mu\,\{\,[C\,] + \Phi\;\,(\alpha, \beta, \mu)\,\} &= 0, \\ \mu\,\{\,[C^*] + \Phi^*(\alpha, \beta, \mu)\,\} &= 0, \end{aligned} \right\} \tag{10.6}$$

где Φ и Φ^* — аналитические функции от α, β, μ, обращающиеся в нуль при $\alpha=\beta=\mu=0$. Для того, чтобы уравнения (10.6) имели решение для α и β нужного нам вида, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$[C]=0, \quad [C^*]=0. \tag{10.7}$$

Напишем подробнее эти условия. Имеем

$$\frac{dC}{dt} = -nC^* + f_0(t), \quad \frac{dC^*}{dt} = nC + F_0(t),$$

$$C(0) = C^*(0) = 0,$$

где

$$f_0(t) = f(t, x^{(0)}, y^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, 0),$$

$$F_0(t) = F(t, x^{(0)}, y^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, 0).$$

Следовательно,

$$C = \int_0^t \{\, f_0(\tau)\cos n(t-\tau) - F_0(\tau)\sin n(t-\tau)\,\}\, d\tau,$$

$$C^* = \int_0^t \{\, f_0(\tau)\sin n(t-\tau) + F_0(\tau)\cos n(t-\tau)\,\}\, d\tau$$

и условия (10.7) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} P(M_0, N_0) &= \int_0^{2\pi} \{ f_0(\tau)\cos n\tau + F_0(\tau)\sin n\tau \}\, d\tau = 0, \\ Q(M_0, N_0) &= \int_0^{2\pi} \{ -f_0(\tau)\sin n\tau + F_0(\tau)\cos n\tau \}\, d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \quad (10.8)$$

Мы получаем, таким образом, два уравнения для определения M_0 и N_0. Как указывалось в § 3, если для определенных таким образом величин M_0 и N_0 выполняется еще условие

$$\frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)} \neq 0, \quad (10.9)$$

то соответствующему порождающему решению действительно отвечает периодическое решение уравнений (10.1) и это решение будет аналитическим относительно μ.

Для практического вычисления этого решения ищем его в виде рядов

$$\left.\begin{aligned} x &= x^{(0)} + \mu x^{(1)} + \ldots \\ y &= y^{(0)} + \mu y^{(1)} + \ldots \\ x_s &= x_s^{(0)} + \mu x_s^{(1)} + \ldots \quad (s = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}\right\} \quad (10.10)$$

с периодическими коэффициентами. Для вычисления коэффициентов этих рядов получаем уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx^{(k)}}{dt} = -ny^{(k)} + f^{(k)}, \quad \frac{dy^{(k)}}{dt} = nx^{(k)} + F^{(k)} \\ &\frac{dx_s^{(k)}}{dt} = b_{s1}x_1^{(k)} + \ldots + b_{sm}x_m^{(k)} + a_s x^{(k)} + b_s y^{(k)} + F_s^{(k)} \end{aligned}\right\} \quad (10.11)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m),$$

где $f^{(k)}$, $F^{(k)}$, $F_s^{(k)}$ — целые рациональные функции с периодическими коэффициентами от тех $x^{(l)}$, $y^{(l)}$, $x_j^{(l)}$, для которых $(l < k)$.

Допустим, что все $x^{(l)}$, $y^{(l)}$, $x_j^{(l)}$ $(l < k)$ уже вычислены и вышли периодическими. Тогда свободные члены в уравнениях (10.11) будут известными периодическими функциями времени и уравнения дадут возможность вычислить $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $x_j^{(k)}$. Покажем, как это делается.

Рассмотрим два уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = -ny + f(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = nx + F(t),$$

где f и F — некоторые известные периодические функции, ряды Фурье которых имеют вид:

$$f(t) = \alpha_{10} + \sum (\alpha_{1p} \cos pt + \beta_{1p} \sin pt),$$

$$F(t) = \alpha_{20} + \sum (\alpha_{2p} \cos pt + \beta_{2p} \sin pt).$$

Так как n — целое число, то эти уравнения, вообще говоря, не имеют периодического решения. Для того, чтобы такое решение существовало, необходимо и достаточно, как это легко видеть, чтобы выполнялись условия

$$\beta_{1n} - \alpha_{2n} = 0,$$

$$\alpha_{1n} + \beta_{2n} = 0.$$

Обращаясь теперь к уравнениям (10.11), мы видим, что для того, чтобы $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ вышли периодическими, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \{f^{(k)}(\tau) \sin n\tau - F^{(k)}(\tau) \cos n\tau\}\, d\tau = 0, \\ &\int_0^{2\pi} \{f^{(k)}(\tau) \cos n\tau + F^{(k)}(\tau) \sin n\tau\}\, d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.12)$$

Если эти уравнения выполняются, то $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ будут иметь вид:

$$x^{(k)} = \varphi^{(k)}(t) + M_k \cos nt + N_k \sin nt,$$

$$y^{(k)} = \psi^{(k)}(t) + M_k \sin nt - N_k \cos nt,$$

где $\varphi^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ — некоторые периодические функции, а M_k и N_k — произвольные постоянные. После того, как $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ уже определены, *последние* m уравнений (10.11) дадут возможность вычислить $x_s^{(k)}$ и получить для них, в силу условия о корнях характеристического уравнения (10.2), вполне определенные периодические функции, зависящие, однако, от M_k и N_k.

То обстоятельство, что коэффициенты рядов (10.10) содержат произвольные постоянные, дает возможность удовлетворить уравнениям (10.12), которыми эти постоянные и определяются. При этом, постоянные M_{l-1} и N_{l-1} определяются из условий (10.12) для l-го приближения. В частности, постоянные M_0 и N_0 определяются из уравнений (10.12) для $k=1$, которые совпадают с (10.8), так как, очевидно,

$$f^{(1)}(\tau)=f(\tau, x^{(0)}, y^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, 0),$$

$$F^{(1)}(\tau)=F(\tau, x^{(0)}, y^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, 0).$$

Так же, как и в случае с одной степенью свободы, легко непосредственно проверить, что уравнения для M_k и N_k $(k \geqslant 1)$ получатся линейными с отличным от нуля детерминантом, если выполняется условие (10.9).

Таким образом, каждому решению уравнений (10.8), для которого выполняется условие (10.9), отвечает единственная система формальных рядов (10.10). Эти ряды сходятся и представляют искомое периодическое решение.

§ 11. Квазилинейные автономные системы с одной степенью свободы

Мы переходим теперь к рассмотрению колебаний автономных квазилинейных систем. Мы начинаем при этом с простейшего случая системы с одной степенью свободы, описываемой уравнением вида[1]

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=\mu f(x, \dot{x}, \mu), \tag{11.1}$$

[1] Ср. Андронов и Хайкин. Теория колебаний. ОНТИ, 1937, стр. 458.

где f — аналитическая функция переменных x и $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ в некоторой области G, в которой лежат рассматриваемые дальше порождающие решения, и параметра μ при достаточно малых его значениях.

Порождающее уравнение

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}+k^2x_0=0$$

имеет семейство периодических решений

$$x_0=M_0\cos kt \tag{11.2}$$

периода $\frac{2\pi}{k}$, зависящих, кроме начальной фазы, которую мы принимаем равной нулю, еще от одного произвольного параметра M_0. Следовательно, уравнение (11.1) принадлежит к классу, исследованному в конце § 4, и, согласно полученным там результатам, оно будет, вообще говоря, иметь периодические решения лишь только для некоторых определенных значений параметра M_0 порождающего решения.

Для выяснения вопроса о существовании этих решений, поступаем так, как указано в § 4. Пусть

$$x_0(0)+\beta=M_0+\beta$$

начальное значение x в искомом периодическом решении. Что же касается начального значения $\dot{x}$, то, как было показано в § 4, его можно принять равным начальному значению $\dot{x}_0$, т. е. нулю.

В самом деле, в искомом решении, x будет периодической функцией и, следовательно, в интервале $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ существует такой момент времени, для которого $\dot{x}$ обращается в нуль. Этот момент времени мы можем принять за начальный.

Решение $x(t, \beta, \mu)$ уравнения (11.1) с начальными условиями

$$x(0, \beta, \mu)=x_0(0)+\beta, \quad \dot{x}(0, \beta, \mu)=0 \tag{11.3}$$

имеет вид:

$$x(t, \beta, \mu)=x_0(t)+A\beta+\mu[C+D\beta+E\mu+\ldots].$$

При этом, очевидно,

$$\frac{d^2A}{dt^2}+k^2A=0,\ A(0)=1,\ \dot{A}(0)=0$$

и, следовательно,

$$A=\cos kt.$$

Пусть

$$T+\alpha=\frac{2\pi}{k}+\alpha$$

— период искомого периодического решения. Тогда условия периодичности дают:

$$x(T+\alpha,\ \beta,\ \mu)-x(0,\ \beta,\ \mu)\equiv x\left(\frac{2\pi}{k}+\alpha,\beta,\mu\right)-M_0-\beta=0,$$

$$\dot{x}(T+\alpha,\beta,\mu)=0.$$

Разворачивая в ряд по α и выписывая в первом из этих уравнений члены линейные и второго порядка относительно α, β, μ, а во втором уравнении лишь только линейные члены, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}&\mu\left\{C\left(\frac{2\pi}{k}\right)+D\left(\frac{2\pi}{k}\right)\beta+E\left(\frac{2\pi}{k}\right)\mu+\dot{C}\left(\frac{2\pi}{k}\right)\alpha+\ldots\right\}+\\&\qquad\qquad+\alpha^2\left\{-\frac{1}{2}M_0k^2+\ldots\right\}=0,\\&\mu\left\{\dot{C}\left(\frac{2\pi}{k}\right)+\ldots\right\}+\alpha\left\{-M_0k^2+\ldots\right\}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(11.4)$$

Предполагая M_0 отличным от нуля, мы можем разрешить второе уравнение относительно α и это решение будет иметь вид:

$$\alpha=\mu\left\{\frac{1}{M_0k^2}\dot{C}\left(\frac{2\pi}{k}\right)+\ldots\right\},$$

где ненаписанные члены обращаются в нуль вместе с β и μ. Подставляя α в первое из уравнений (11.4), мы получим для определения β следующее уравнение:

$$\mu\left\{C\left(\frac{2\pi}{k}\right)+D\left(\frac{2\pi}{k}\right)\beta+Q\mu+\ldots\right\}=0,$$

где Q — некоторый коэффициент, который нам нет надобности выписывать.

Для того, чтобы это уравнение допускало решение для β, обращающееся в нуль при $\mu=0$, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$C\left(\frac{2\pi}{k}\right)=0. \tag{11.5}$$

Если при этом выполняется также условие

$$D\left(\frac{2\pi}{k}\right)\neq 0, \tag{11.6}$$

то решение для β будет единственным и аналитическим.

Вычислим величины $C\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ и $D\left(\frac{2\pi}{k}\right)$. Имеем:

$$\frac{d^2C}{dt^2}+k^2C=f(x_0, \dot{x}_0, 0),$$

$$\frac{d^2D}{dt^2}+k^2D=\frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial x_0}\cos kt-k\cdot\frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0}\sin kt,$$

$$C(0)=D(0)=\dot{C}(0)=\dot{D}(0)=0,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} C&=\frac{1}{k}\int_0^t f(x_0(t_1), \dot{x}_0(t_1), 0)\cdot\sin k(t-t_1)\cdot dt_1,\\ D&=\frac{1}{k}\int_0^t\left\{\frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial x_0}\cdot\cos kt-k\frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0}\sin kt\right\}_{t=t_1}\times\\ &\qquad\times\sin k(t-t_1)\cdot dt_1\equiv\frac{\partial C}{\partial M_0}.\end{aligned}\right\} \tag{11.7}$$

Следовательно, условие (11.5) имеет вид

$$\int_0^{\frac{2\pi}{k}} f(M_0\cos kt_1, -kM_0\sin kt_1, 0)\sin kt_1dt_1=0$$

или, после замены переменной под знаком интеграла,

$$P(M_0)=\int_0^{2\pi} f(M_0\cos u, \ -kM_0\sin u, 0)\sin u\,du=0. \tag{11.8}$$

Что же касается условия (11.6), то оно, на основании (11.7), может быть переписано следующим образом:

$$\frac{dP(M_0)}{dM_0} \neq 0. \tag{11.9}$$

Отсюда, мы приходим к заключению, что каждому некратному корню M_0 уравнения (11.8) отвечает единственное и притом аналитическое решение уравнений (11.4) и, следовательно, единственное периодическое решение уравнения (11.1) и это решение будет аналитическим относительно μ. Аналитическим относительно μ будет также получаться и период $\frac{2\pi}{k}+\alpha$ этого решения.

Переходим к вопросу о практическом вычислении периодического решения, соответствующего какому-нибудь простому корню уравнения (11.8), и его периода. Как мы только что показали, это решение будет аналитическим относительно μ и мы могли бы, как в аналогичных случаях, рассмотренных ранее, искать это решение под видом ряда

$$x_0(t)+\mu x_1(t)+\mu^2 x_2(t)+\ldots, \tag{11.10}$$

расположенного по степеням μ. Однако в рассматриваемом случае, представление решения под видом (11.10) является совершенно нецелесообразным. Дело в том, что поскольку период решения зависит от μ, коэффициенты разложения этого решения по степеням μ не будут периодическими функциями. В самом деле, так как α зависит от μ, то из равенства

$$x_0\left(t+\frac{2\pi}{k}+\alpha\right)+\mu x_1\left(t+\frac{2\pi}{k}+\alpha\right)+\ldots=x_0(t)+\mu x_1(t)+\ldots$$

отнюдь не вытекают равенства

$$x_s\left(t+\frac{2\pi}{k}+\alpha\right)=x_s(t).$$

Наоборот, последние равенства, очевидно, невозможны, так как их правые части не зависят от μ, а левые — зависят. Так, например, разложение по степеням μ

$$\sin t+\mu t\cos t-\frac{\mu^2}{2}t^2\sin t+\ldots$$

функции $\sin(1+\mu)t$, несмотря на ее периодичность, имеет непериодические коэффициенты. Таким образом, вид (11.10) искомого решения не дает представления об основной характеристике этого решения — его периодичности. Мы будем, поэтому, искать интересующее нас решение в ином виде.[1] Пусть

$$\omega = \frac{2\pi}{k} + \alpha = \frac{2\pi}{k}(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots) \tag{11.11}$$

период искомого решения, где h_j — некоторые, хотя и неизвестные, но вполне определенные постоянные. Заменим в уравнении (11.1) переменную t переменной τ при помощи подстановки

$$t = \frac{\tau}{k}(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots).$$

Тогда искомому периодическому решению уравнения (11.1) с периодом (11.11) отвечает периодическое решение полученного, таким образом, нового уравнения

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x(1 + h_1\mu + \ldots)^2 =$$

$$= \frac{\mu}{k^2} f\left[x,\ k(1 + h_1\mu + \ldots)^{-1}\frac{dx}{d\tau},\ \mu\right](1 + h_1\mu + \ldots)^2 \tag{11.12}$$

с периодом, независящим от μ и равным 2π. Это новое периодическое решение будет также аналитическим относительно μ. *В самом деле, рассматриваемое решение, так же, как и* всякое другое решение уравнения (11.12), будет аналитической функцией параметра μ, входящего в уравнение непосредственно, и своих начальных значений. Но эти начальные значения, совпадающие, очевидно, с (11.3), являются в свою очередь некоторыми вполне определенными аналитическими функциями μ. Отсюда непосредственно вытекает справедливость нашего утверждения.

Будем, поэтому, искать периодическое решение уравнения (11.12) под видом ряда

$$x = x^0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \ldots \tag{11.13}$$

---

[1] См. Н. Крылов и Н. Боголюбов. Введение в нелинейную механику. Киев, 1937, стр. 106. См. также излагаемый ниже в § 27 метод Ляпунова.

Так как теперь период решения не зависит от μ и равен 2π, то коэффициенты $x_s(\tau)$ будут периодическими функциями τ периода 2π. Кроме того, мы должны иметь:

$$\left(\frac{dx^{(0)}}{d\tau}\right)_{\tau=0}=\left(\frac{dx_j}{d\tau}\right)_{\tau=0}=0, \quad (j=1, 2, \ldots), \tag{11.14}$$

ибо для искомого периодического решения производная $\frac{dx}{dt}$ обращается в нуль при $t=0$.

Так как искомое периодическое решение несомненно существует, то должен существовать по крайней мере один ряд вида (11.13), формально удовлетворяющий уравнению (11.12). Если же окажется, что такой ряд существует только один, то он, очевидно, будет представлять искомое решение и будет, следовательно, сходиться.

Подставляя ряд (11.13) в уравнение (11.12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, мы получим уравнения для нахождения функций $x_j(\tau)$. Прежде всего имеем:

$$\frac{d^2x^{(0)}}{d\tau^2}+x^{(0)}=0,$$

откуда, принимая во внимание (11.14), получим:

$$x^{(0)}=M_0\cos\tau,$$

где M_0 — произвольная постоянная. Далее находим:

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+x_1=-2h_1M_0\cos\tau+\frac{1}{k^2}f(M_0\cos\tau, -kM_0\sin\tau, 0).$$

Для того чтобы это уравнение имело периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\left.\begin{aligned} P(M_0)&=\int_0^{2\pi} f(M_0\cos\tau, -kM_0\sin\tau, 0)\sin\tau\, d\tau=0\\ -2h_1M_0&+\frac{1}{\pi k^2}\int_0^{2\pi} f(M_0\cos\tau, -kM_0\sin\tau, 0)\cos\tau\, d\tau=0.\end{aligned}\right\} \tag{11.15}$$

Первое из этих условий является уже известным нам уравнением (11.8), определяющим амплитуду M_0 порождающего решения. Выбрав величину M_0 и предполагая, как мы уже это делали выше, что она является некратным и отличным от нуля корнем уравнения (11.8), мы получим из второго условия (11.15) вполне определенное значение для h_1. После этого для x_1 будем иметь:

$$x_1 = \varphi_1(\tau) + M_1 \cos\tau + N_1 \sin\tau,$$

где $\varphi_1(\tau)$ — некоторая периодическая функция τ периода 2π, а M_1 и N_1 — произвольные постоянные. Эти постоянные определятся из начальных условий (11.14) и из условия периодичности функции x_2. Вместе с ними определится также и постоянная h_2. Покажем, как это делается. Рассмотрим с этой целью уравнение, определяющее m-ое приближение. Оно, как легко видеть, имеет вид:

$$\frac{d^2x_m}{d\tau^2} + x_m = -2h_m M_0 \cos\tau - 2h_1 x_{m-1} + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial f(x, \dot{x}, 0)}{\partial x}\right) x_{m-1} + \\ + \frac{1}{k}\left(\frac{\partial f(x, \dot{x}, 0)}{\partial \dot{x}}\right) \cdot \frac{dx_{m-1}(\tau)}{d\tau} + F_m. \quad (11.16)$$

Здесь F_m — целая рациональная функция от $x^{(0)}, x_1, \ldots, x_{m-2}$ с постоянными коэффициентами. Эта функция зависит также от $h_1, \ldots, h_{m-1}$, но не зависит от h_m. Круглые скобки, в которые заключены производные функции $f(x, \dot{x}\ 0)$, показывают, что после дифференцирования величины x и $\dot{x}$ должны быть заменены величинами $M_0 \cos\tau$ и $-kM_0 \sin\tau$.

Если уравнение (11.16) имеет периодическое решение, то оно будет иметь вид

$$x_m = \varphi_m(\tau) + M_m \cos\tau + N_m \sin\tau,$$

где M_m и N_m — произвольные постоянные, а $\varphi_m(\tau)$ — некоторая периодическая функция. Допустим, для определенности, что все постоянные $h_1, \ldots, h_{m-1}$ и все функции $x_1, \ldots, x_{m-1}$ уже вычислены, но что входящие в выражение x_{m-1} постоянные M_{m-1} и N_{m-1} остались еще неопределенными. Тогда уравнение (11.16) может быть представлено в виде

$$\frac{d^2x_m}{d\tau^2}+x_m=-2h_mM_0\cos\tau-2h_1(M_{m-1}\cos\tau+N_{m-1}\sin\tau)+$$
$$+\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial x}\right)(M_{m-1}\cos\tau+N_{m-1}\sin\tau)+$$
$$+\frac{1}{k}\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial \dot{x}}\right)(-M_{m-1}\sin\tau+N_{m-1}\cos\tau)+F_m^*(\tau),$$

где F_m^* — некоторая известная периодическая функция τ периода 2π. Условия периодичности функции x_m дают:

$$\left.\begin{aligned}
&-2h_mM_0-2h_1M_{m-1}+\frac{M_{m-1}}{\pi k^2}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial x}\right)\cos\tau-\right.\\
&\left.-k\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial \dot{x}}\right)\sin\tau\right\}\cos\tau\,d\tau+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F_m^*\cos\tau\,d\tau+\\
&+\frac{N_{m-1}}{\pi k^2}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial x}\right)\sin\tau+\right.\\
&\qquad\left.+k\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial \dot{x}}\right)\cos\tau\right\}\cos\tau\,d\tau=0.\\
&-2h_1N_{m-1}+\frac{M_{m-1}}{\pi k^2}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial x}\right)\cos\tau-\right.\\
&\left.-k\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial \dot{x}}\right)\sin\tau\right\}\sin\tau\,d\tau+\\
&+\frac{N_{m-1}}{\pi k^2}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial x}\right)\sin\tau+\right.\\
&\left.+k\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial \dot{x}}\right)\cos\tau\right\}\sin\tau\,d\tau+\\
&\qquad+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F_m^*\sin\tau\,d\tau=0.
\end{aligned}\right\}\quad(11.17)$$

Кроме того, из начальных условий (11.14) получаем:

$$\dot{\varphi}_{m-1}(0)+N_{m-1}=0. \tag{11.18}$$

Уравнения (11.17) и (11.18) служат для определения M_{m-1}, N_{m-1} и h_m. Исследуем подробнее эти уравнения. Имеем тождественно:

$$\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial x}\right)\sin\tau+k\left(\frac{\partial f(\dot{x},x,0)}{\partial \dot{x}}\right)\cos\tau\right\}\sin\tau\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{M_0}\int_0^{2\pi}\frac{df(M_0\cos\tau,-kM_0\sin\tau,0)}{d\tau}\sin\tau\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{M_0}\int_0^{2\pi}f(M_0\cos\tau,-kM_0\sin\tau,0)\cos\tau\,d\tau;$$

$$\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial x}\right)\sin\tau+k\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial \dot{x}}\right)\cos\tau\right\}\cos\tau\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{M_0}\int_0^{2\pi}f(M_0\cos\tau,-kM_0\sin\tau,0)\sin\tau\,d\tau$$

$$\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial x}\right)\cos\tau-k\left(\frac{\partial f(x,\dot{x},0)}{\partial \dot{x}}\right)\sin\tau=$$

$$=\frac{\partial f(M_0\cos\tau,-kM_0\sin\tau,0)}{\partial M_0}.$$

Поэтому, принимая во внимание (11.15), мы можем уравнения (11.17) привести к виду:

$$\left.\begin{aligned}&-2h_mM_0+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F_m^*(\tau)\cos\tau\,d\tau=0,\\&\frac{1}{k^2}\frac{dP(M_0)}{dM_0}M_{m-1}+\int_0^{2\pi}F_m^*(\tau)\sin\tau\,d\tau=0.\end{aligned}\right\} \tag{11.19}$$

Так как корень M_0 является простым и он отличен от нуля, то первое из уравнений (11.19) однозначно определяет величину h_m, а второе из этих уравнений однозначно определяет величину M_{m-1}. Что же касается уравнения (11.18), то оно однозначно определяет величину N_{m-1}.

Итак, мы показали, что существует только один ряд вида (11.13), формально удовлетворяющий уравнению (11.12). Этот ряд и представляет искомое периодическое решение в удобном для практики виде. Вместе с тем, мы получили и удобный способ вычисления коэффициентов этого ряда с одновременным вычислением коэффициентов h_j в разложении периода.

Пример. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=\mu(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\frac{dx}{dt}, \qquad (11.20)$$

описывающее, при некоторых условиях, колебания лампового генератора. Полагая

$$t=\frac{\tau}{k}(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\ldots),$$

приведем уравнение (11.20) к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+x(1+h_1\mu+\ldots)^2=\frac{\mu}{k}(1+h_1\mu+\ldots)(\alpha+$$
$$+\beta x+\gamma x^2)\frac{dx}{d\tau}.$$

Пытаемся удовлетворить этому уравнению рядом

$$x=x^0+\mu x_1+\mu^2x_2+\ldots,$$

где $x^{(0)}$, x_j — некоторые периодические функции τ периода 2π, производные которых удовлетворяют начальным условиям:

$$\left(\frac{dx^{(0)}}{d\tau}\right)_{\tau=0}=\left(\frac{dx_j}{d\tau}\right)_{\tau=0}=0 \; (j=1, 2, \ldots). \qquad (11.21)$$

Имеем

$$x^{(0)}=M_0\cos\tau,$$

где M_0 — произвольная постоянная. Далее

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+x_1=-2h_1x^{(0)}+\frac{1}{k}(\alpha+\beta x^{(0)}+\gamma x^{(0)2})\frac{dx^{(0)}}{d\tau}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos\tau$ и $\sin\tau$, получаем

$$h_1 = 0, \quad -\frac{\alpha M_0}{k} - \frac{\gamma M_0^3}{4k} = 0, \quad M_0^2 = -\frac{4\alpha}{\gamma},$$

после чего для x_1 находим периодическое решение

$$x_1 = \frac{\beta M_0^2}{6k}\sin 2\tau + \frac{\gamma}{32k}M_0^3 \sin 3\tau + M_1\cos\tau + N_1 \sin\tau,$$

где M_1 и N_1 — произвольные постоянные. Уравнение для x_2 имеет вид:

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_2 = -2h_2x^{(0)} + \frac{\alpha}{k}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\beta}{k}x^{(0)}\frac{dx_1}{d\tau} + \\ + \frac{\beta}{k}x_1\frac{dx^{(0)}}{d\tau} + \frac{\gamma}{k}x^{(0)2}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{2\gamma}{k}x^{(0)}x_1\frac{dx^{(0)}}{d\tau}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos\tau$ и $\sin\tau$, получаем:

$$M_1 = 0, \qquad h_2 = \frac{1}{24}\frac{\beta}{k}M_0 + \frac{1}{16}\frac{\alpha^2}{k^2}$$

и из (11.21)

$$N_1 = -\frac{\beta M_0^2}{3k} - \frac{3}{32}\frac{\gamma}{k}M_0^3.$$

Таким образом, периодическое решение уравнения (11.20) имеет вид:

$$x_0 = M_0\cos\tau + \left\{-\left(\frac{\beta M_0^2}{3k} + \frac{3}{32}\frac{\gamma}{k}M_0^3\right)\sin\tau + \right. \\ \left. + \frac{\beta M_0^2}{6k}\sin 2\tau + \frac{\gamma}{32k}M_0\sin 3\tau\right\}\mu + \ldots,$$

$$\tau = kt\left[1 - \left(\frac{1}{24}\frac{\beta}{k}M_0 + \frac{1}{16}\frac{\alpha^2}{k^2}\right)\mu^2 + \ldots\right],$$

$$M_0 = \sqrt{\frac{-4\alpha}{\gamma}}.$$

В полученном решении мы можем теперь заменить t на $t+h$, где h — произвольная постоянная.

Примечание. Мы предполагали, что M_0 является простым корнем уравнения (11.8). Если M_0 обращает в нуль не только функцию $P(M_0)$, но и ее производную, то вопрос о существовании периодического решения требует особого исследования. Особый интерес подставляет тот случай, когда функция $P(M_0)$ обращается в нуль тождественно. Такой случай, как легко видеть, представится всякий раз, когда функция $f(x, \dot{x}, \mu)$ не содержит явно $\dot{x}$. Рассматриваемая система будет при этом консервативной и как мы увидим ниже, любое решение уравнения (11.1) будет периодическим.

§ 12. Фазовая плоскость для системы, рассмотренной в предыдущем параграфе. Предельные циклы. Автоколебания

Рассмотрим снова систему, описываемую дифференциальным уравнением (11.1).

Положим в этом уравнении $\dot{x} = y$ и запишем его в виде системы двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k^2 x + \mu f(x, y, \mu). \tag{12.1}$$

Рассматривая x и y как прямоугольные координаты некоторой точки в плоскости xy, мы получаем возможность геометрически изображать всевозможные состояния нашей системы. Плоскость xy называется плоскостью состояний, или *фазовой* плоскостью. Каждому движению нашей системы отвечает определенная кривая на фазовой плоскости. Эта кривая называется *фазовой траекторией*. Она, разумеется, отличается от действительной траектории движения. Фазовые траектории являются, очевидно, интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-k^2 x + \mu f(x, y, \mu)}{y}. \tag{12.2}$$

Выясним всевозможные виды фазовых траекторий. Заметим прежде всего, что при достаточно малом μ существует одна и только одна точка, для которой правые части уравнений (12.1) одновременно обращаются в нуль. Эта точка расположена на оси x на расстоянии порядка малости μ от начала координат. Ей соответствует единственное состояние равновесия нашей системы. Очевидно, что состоянию равновесия отвечает фазовая траектория, вырождающаяся в точку.

Эта точка является особой точкой дифференциального уравнения (12.2). Через нее может проходить одна интегральная кривая, может проходить несколько и даже бесчисленное множество таких кривых, но может также случиться, что через эту точку совсем не проходит ни одной интегральной кривой. Действительно, теорема Коши о существовании решений дифференциальных уравнений неприменима для рассматриваемой точки, так как для нее числитель и знаменатель в уравнении (12.2) одновременно обращаются в нуль. Для всех остальных точек фазовой плоскости, лежащих в области G, либо $\frac{dy}{dx}$, либо $\frac{dx}{dy}$ являются аналитическими функциями от x и y. Поэтому все эти точки являются обыкновенными точками. Через каждую из них, на основании теоремы Коши, проходит одна и только одна интегральная кривая.

Рассмотрим какое-нибудь периодическое движение нашей системы. Ему, очевидно, соответствует замкнутая фазовая траектория. Наоборот, каждой замкнутой фазовой траектории отвечает периодическое решение уравнений (12.1). В самом деле, пусть T — промежуток времени, в течение которого точка (x, y) опишет полностью фазовую траекторию, выходя в начальный момент времени t_0 из какого-нибудь положения (x_0, y_0) этой траектории. Примем момент t_0+T за начальный. При этом, значения x и y будут попрежнему равны x_0 и y_0. Но так как уравнения (12.1) не содержат явно t, то начальный момент времени не играет никакой роли и функции x и y будут в интервале (t_0+T, t_0+2T) такими же, как и в интервале (t_0, t_0+T), откуда непосредственно вытекает периодичность этих функций.

Установив это, допустим сначала, что $\mu=0$, т. е. рассмотрим порождающую систему

$$\frac{dx_0}{dt}=y_0, \qquad \frac{dy_0}{dt}=-k^2x_0.$$

Общее решение

$$x_0=M_0\cos(kt+\alpha), \qquad y_0=-M_0k\sin(kt+\alpha) \tag{12.3}$$

этой системы является периодическим. Поэтому все фазовые траектории являются замкнутыми кривыми. Одна из этих кривых вырождается в точку — в начало координат, которому соответствует состояние равновесия. В рассматриваемом случае лёгко, конечно, написать уравнение фазовых траекторий. Для этого достаточно исключить t из уравнений (12.3).

Исключая, находим

$$x_0^2 + \frac{y_0^2}{k^2} = M_0^2 \tag{12.4}$$

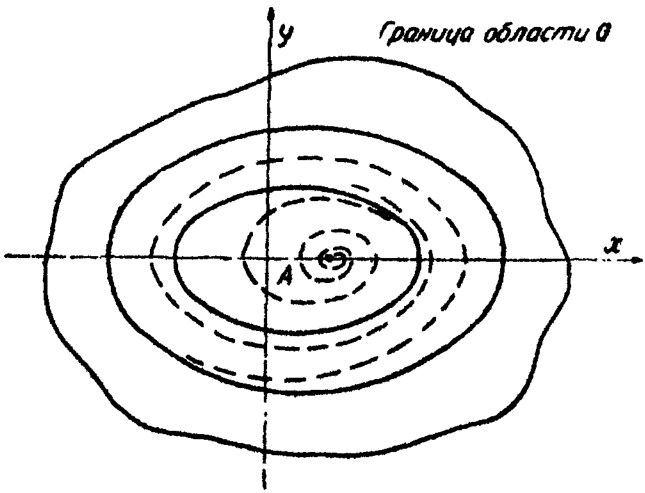
и, следовательно, фазовые траектории образуют семейство подобных эллипсов, стягивающихся в начало координат.

Особая точка дифференциального уравнения первого порядка, обладающая тем свойством, что все интегральные кривые, расположенные в достаточно малой окрестности этой точки, — замкнуты, называется „*центром*". Таким образом, при $\mu = 0$, особая точка уравнения (12.2), отвечающая состоянию равновесия, является „центром".

Допустим теперь, что μ отлично от нуля, но достаточно мало. В этом случае, как мы видели, система попрежнему будет иметь одно положение равновесия, соответствующее особой точке уравнения (12.2), которая теперь, вообще говоря, не совпадает с началом координат, а несколько сдвинута по отношению к нему по оси x. Что же касается периодических решений, то как было показано в предыдущем параграфе, уравнения (12.1) будут вообще говоря, иметь только конечное число такого рода решений. Так, например, будет всякий раз, когда уравнение (11.8) имеет только простые корни для амплитуды M_0 порождающего решения.

Следовательно, исключая из рассмотрения особые случаи, о которых мы говорили в примечании к предыдущему параграфу, мы приходим к заключению, что на фазовой плоскости в области G имеется лишь конечное число замкнутых траекторий. Эти замкнутые траектории будут мало отличаться от соответствующих им эллипсов (12.4) и, следовательно, они будут окружать начало координат и особую точку A, соответствующую состоянию равновесия (см. черт. 2).

Итак, при переходе от случая $\mu = 0$ к случаю $\mu \neq 0$ особая точка переходит в особую точку и конечное число эллипсов (12.4) в мало отличающиеся от них замкнутые траектории. Во что перейдут остальные эллипсы (12.4)? Другими словами, какой вид будут иметь остальные фазовые



Черт. 2.

траектории? Мы имеем при этом в виду только те фазовые траектории, которые лежат в области G. Мы покажем сейчас, что имеет место следующее важное предложение:

каждая фазовая траектория, лежащая между двумя замкнутыми фазовыми траекториями, является спиралью. Эта спираль асимптотически приближается, совершая бесчисленное множество оборотов, к обеим замкнутым траекториям (к одной при $t \to +\infty$, а к другой при $t \to -\infty$), между которыми она лежит.

Каждая фазовая траектория, лежащая внутри первой замкнутой траектории, асимптотически приближается с одной стороны к этой траектории, а с другой стороны к особой точке.

Каждая фазовая траектория, лежащая вне последней замкнутой траектории и достаточно близко к ней расположенная, с одной стороны асимптотически прибли-

жается к этой траектории, а с другой стороны, покидает область G.

Вид фазовых траекторий во всех трех случаях показан на черт. 2.

Для доказательства нашего предложения рассмотрим какую-нибудь фазовую траекторию и будем следовать вдоль нее в каком-нибудь определенном направлении, соответствующем либо возрастающим, либо убывающим значениям t. Покажем, что ни при каком конечном значении t фазовая траектория не пересечет особой точки. В самом деле, пусть

$$y=0, \quad x=a \tag{12.5}$$

координаты особой точки. Если бы в какой-нибудь момент времени t рассматриваемая траектория пересекла особую точку, то принимая этот момент времени за начальный, мы имели бы для системы (12.1) два различных решения с одними и теми же начальными значениями: решение, соответствующее рассматриваемой траектории, и решение (12.5), соответствующее состоянию равновесия. Но точка (12.5) является особой только для уравнения (12.2). Система уравнений (12.1) не имеет особых точек, так как правые части этих уравнений регулярны во всей области G. Поэтому для любых начальных значений система (12.1) имеет вполне определенное решение. Мы пришли, таким образом, к противоречию, что показывает, что рассматриваемая траектория ни при каком значении t не пересекает особой точки. Эта траектория ни при каком значении t не пересекает также ни самое себя, ни какой-либо другой фазовой траектории, так как точка пересечения должна была бы быть особой точкой системы (12.1).

Установив это, перейдем в уравнениях (12.1) к полярным координатам r и ϑ с полюсом в точке (12.5) и с полярной осью, совпадающей с осью x. Отсчитывая положительные углы по направлению часовой стрелки, будем иметь:

$$x=a+r\cos\vartheta, \quad y=-r\sin\vartheta,$$

откуда

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{1}{r^2}\left\{(a-x)\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}\right\}.$$

Заменяя здесь $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ их значениями из уравнений (12.1) и принимая во внимание, что

$$-k^2a+\mu f(a,\ 0,\ \mu)=0,$$

после несложных преобразований найдем:

$$\frac{d\vartheta}{dt}=k^2\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta+\mu\theta(r,\ \vartheta,\ \mu), \tag{12.6}$$

где функция θ регулярна при $r=0$. Так как

$$k^2\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\begin{cases}>1 & (\text{при } k>1),\\ >k^2 & (\text{при } k<1),\end{cases}$$

то из (12.6) вытекает, что при достаточно малом μ найдется такое положительное число α^2, что для всей области G будет справедливо неравенство:

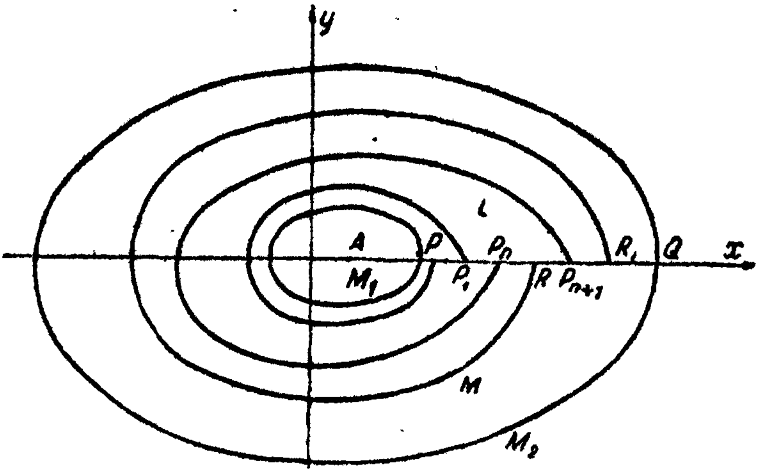
$$\frac{d\vartheta}{dt}>\alpha^2. \tag{12.7}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что когда t стремится к $+\infty$, то ϑ будет также стремиться к $+\infty$ и что когда $t\to-\infty$, то и $\vartheta\to-\infty$. Разумеется, это будет справедливо до тех пор, пока интегральная кривая остается в области G. Поэтому, каждая интегральная кривая, лежащая в области G, поскольку, по доказанному, она нигде сама себя не пересекает, необходимо является либо спиралью, вращающейся вокруг особой точки, либо замкнутой кривой.

Кроме того, из (12.7) следует, что каждая такая спираль (так же, как и замкнутая траектория) совершает полный оборот за промежуток времени, не превосходящий величины $\frac{2\pi}{\alpha^2}$, не зависящей от начальных условий.

Рассмотрим теперь фазовую траекторию L (черт. 3), выходящую из какой-нибудь точки P оси x. Допустим сначала, что точка P лежит между двумя замкнутыми фазовыми траекториями, между которыми нет других замкнутых фазовых траекторий. Рассматриваемая интегральная кривая будет, по доказанному, спиралью. Докажем, что эта спираль, совершая бесчисленное множество оборотов, асимптотически приближается к обеим замкнутым траекториям, к одной из них при $t \to +\infty$, а к другой — при $t \to -\infty$.

С этой целью будем следовать вдоль этой спирали в сторону, соответствующую возрастающим значениям t. При этом рассматриваемая спираль никогда не покинет области, заключенной между замкнутыми траекториями, так как она не может пересечь эти траектории. Допустим, для определенности, что следующая точка пересечения спирали



Черт. 3.

с осью x, пусть это будет точка P_1, лежит правее точки P. Тогда, если мы обозначим через P_2, P_3, ... последовательные точки пересечения нашей спирали с осью x, то каждая точка P_n будет лежать правее точки P_{n-1}. Последовательность точек P_j будет бесконечной и, следовательно, при $t \to \infty$ спираль совершит бесчисленное множество оборотов. Это непосредственно вытекает из доказанного нами положения, что каждый оборот совершается за промежуток времени, не превосходящий некоторого фиксированного числа.

Так как все точки P_j расположены левее точки пересечения Q внешней замкнутой траектории с осью x, то последовательность P_j будет иметь предельную точку. Таких предельных точек будет, очевидно, только одна и она либо совпадает с Q, либо расположена левее ее. Докажем, что предельная точка совпадает с Q. Допустим противное, что эта точка, которую мы обозначим через R, расположена левее точки Q. Рассмотрим траекторию M, проходящую через R. Так как между M_1 и M_2 нет замкнутых траекторий, то M является спиралью. Пусть R_1 — первая после R точка пересечения траектории M (если следовать вдоль нее в сторону возрастания t) с осью x. Можно легко показать, что точка R_1 расположена правее точки R, но мы этим не занимаемся, так как это не имеет для нас никакого значения. Одновременно с M рассмотрим виток траектории L, соединяющий точки P_n и P_{n+1}. Покажем, что если n достаточно велико, то этот виток будет сколь угодно близко примыкать к отрезку траектории M. В самом деле, любое решение уравнений (12.1) является аналитической функцией своих начальных условий, а следовательно, также и непрерывной функцией этих величин. Это значит, что какова бы ни была конечная величина T, две фазовые траектории будут оставаться сколь угодно близкими между собой в течение всего промежутка времени $(t, t+T)$, если только в момент времени t они выходили из достаточно близко расположенных точек фазовой плоскости. Но так как R есть предельная точка последовательности P_j, то при достаточно большом n точка P_n будет сколь угодно близкой к точке R. Следовательно, как мы и утверждали, виток траектории L, выходящей из точки P_n, будет сколь угодно близко расположен к витку траектории M, выходящей из точки R. В частности, точка P_{n+1} будет сколь угодно близкой к точке R_1. Другими словами, когда n неограниченно возрастает, точка P_{n+1} неограниченно приближается к точке R_1, что невозможно, так как P_{n+1} должна стремиться к предельной точке R, находящейся на определенном, независящем от n расстоянии от R_1. Таким образом, мы пришли к противоречию, что показывает, что точка R необходимо сливается с точкой Q. Следовательно, с неограниченным возрастанием n точка P_n стремится к точке Q. Но тогда, как мы только что видели, и n-ый виток спирали будет неограниченно приближаться к траектории, выходящей из Q, т. е. к траектории M_2. Таким образом, при $t \to +\infty$ траектория, выходящая из P, представляет собой спираль, асимптотически приближающуюся к замкнутой траектории M_2. Точно так же докажется, что при $t \to -\infty$

эта спираль будет наматываться на замкнутую траекторию M_1.

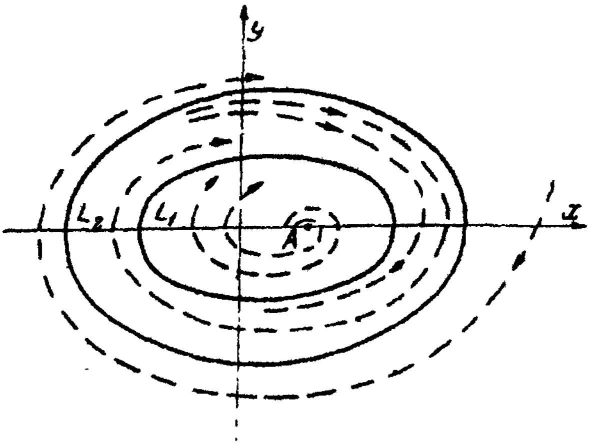
Мы предполагали, что точка P лежит между двумя замкнутыми траекториями. Допустим теперь, что точка P лежит внутри первой замкнутой траектории. Так как, по доказанному, любая незамкнутая траектория, лежащая в области G, является спиралью, вращающейся вокруг особой точки, то, как нетрудно видеть, все наши предыдущие рассуждения сохраняют силу, если особую точку рассматривать как выродившуюся замкнутую траекторию. В самом деле, для того, чтобы, в предыдущих рассуждениях можно было заменить внутреннюю замкнутую траекторию особой точкой, достаточно, чтобы спираль вращалась вокруг этой точки, что выполняется, и чтобы эта спираль ни при каком значении t эту точку не пересекала, что, по доказанному, также справедливо. Таким образом, рассматриваемая фазовая траектория является спиралью, которая с одной стороны наматывается на замкнутую траекторию, а с другой стороны асимптотически приближается к особой точке.

Точно также докажется, что если точка P лежит вне последней замкнутой траектории и достаточно близко к ней расположена, то соответствующая траектория с одной стороны наматывается на замкнутую траекторию, а с другой стороны покидает область G. Таким образом, наше основное предложение о виде всех фазовых траекторий можно считать доказанным.

Мы видели, что при $\mu = 0$ состоянию равновесия отвечает на фазовой плоскости особая точка типа „центра", т. е. такая особая точка, что все траектории, расположенные в достаточно малой ее окрестности, замкнуты. Напротив, в рассмотренном нами сейчас случае состоянию равновесия отвечает особая точка совсем другого типа: все траектории, расположенные в окрестности этой точки, образуют семейство спиралей, асимптотически приближающихся к этой точке. Особая точка такого типа носит название „*фокуса*".

Точно также и замкнутые фазовые траектории, отвечающие периодическим движениям, будут сейчас иного типа. Так, при $\mu = 0$ все траектории, смежные с любой замкнутой траекторией, будут также замкнутыми. В рассматриваемом же сейчас случае все траектории, смежные с замкнутой траекторией, являются спиралями, асимптотически приближающимися к этой замкнутой траектории. Такого рода замкнутые траектории носят название *предельных циклов*.

Различают двоякого рода предельные циклы: *устойчивые* и *неустойчивые*. Предельный цикл называется устойчивым, если при возрастающем t все соседние траектории к нему приближаются. Если же все траектории, смежные с предельным циклом, или только те, которые расположены по одну сторону от него, при возрастающем t от этого цикла уда-

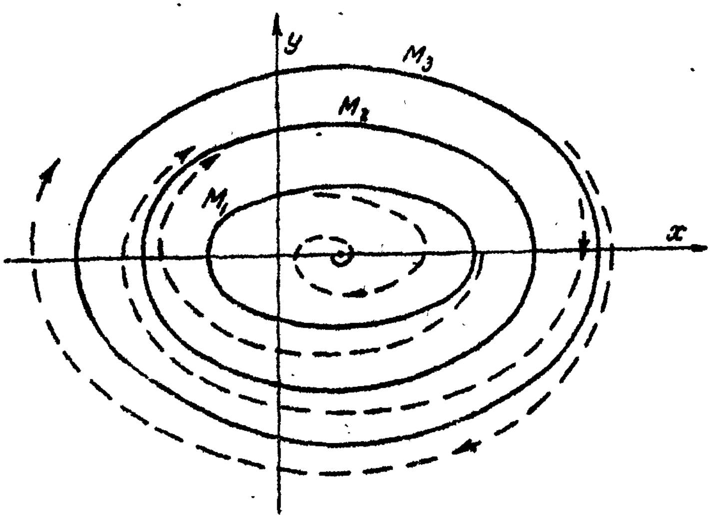


Черт. 4.

ляются, то такой предельный цикл называется неустойчивым. Так, из пяти предельных циклов, изображенных на черт. 4 и 5, циклы L_1 и M_2 будут устойчивыми, а остальные неустойчивыми.

Устойчивым предельным циклам соответствует особый вид колебаний, который совершенно не встречается в линейных системах. Допустим, для определенности, что мы имеем дело со случаем, изображенным на черт. 4. Состояние равновесия будет в этом случае неустойчивым и каковы бы ни были начальные значения x и y, если только они заключены в области, ограниченной вторым предельным циклом L_2, движение системы будет асимптотически приближаться к периодическому колебанию, соответствующему предельному циклу L_1. Теоретически это колебание установится при $t = \infty$.

Однако, по истечении конечного промежутка времени, спирали настолько близко подойдут к предельному циклу, что практически можно будет считать, что движение происходит по этому циклу. Таким образом, при любых начальных условиях, лежащих в некоторой области, по истечении некоторого промежутка времени в системе устанавливается определенный устойчивый режим колебаний, совершенно независящий от этих начальных условий. Такого рода колебания назы-



Черт. 5.

ваются *автоколебаниями*. Автоколебания соответствуют любому устойчивому предельному циклу. Так, в случае, изображенном на фиг. 5, устойчивому предельному циклу M_2 также соответствуют автоколебания, причем область начальных значений ограничена предельными циклами M_1 и M_3.

Автоколебания играют исключительно важную роль в различных вопросах техники. Поэтому нахождение устойчивых предельных циклов является одной из важнейших задач теории нелинейных колебаний автономных систем. В предыдущем параграфе указан общий прием отыскания предельных циклов для квазилинейных систем. В следующей главе будет дан простой способ для решения задачи об устойчивости этих циклов.

Неустойчивым предельным циклам, как замкнутым фазовым траекториям, также отвечают периодические колебания. Эти колебания не имеют, однако, физического значения, так как практически они никогда не будут осуществляться, вследствие их неустойчивости.

Теория предельных циклов, частный случай которой мы здесь рассмотрели, разработана впервые Пуанкаре и затем служила предметом многочисленных дальнейших исследований. На связь этой теории с задачей автоколебаний впервые обратил внимание академик А. А. Андронов.

§ 13. Колебания квазилинейной автономной системы с любым числом степеней свободы[1]

Результаты, полученные в § 11, можно легко обобщить на системы с любым числом переменных. Рассмотрим автономную систему с $m+2$ переменными, которая при $\mu=0$ обращается в систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Относительно последней мы будем предполагать, что ее характеристческое уравнение имеет по крайней мере одну пару чисто мнимых корней. Обозначая эти корни через $\pm ki$, мы можем, как это было показано в § 10, привести нашу систему к виду

$$\frac{dx}{dt}=-ky+\mu f(x, y, x_j, \mu), \tag{13.1}$$

$$\frac{dy}{dt}=kx+\mu F(x, y, x_j, \mu),$$

$$\frac{dx_s}{dt}=b_{s1}x_1+\ldots+b_{sm}x_m+a_s x+b_s y+\mu f_s(x, y, x_j, \mu),$$

$$(s=1, 2, \ldots, m),$$

где b_{sj}, a_s, b_s — постоянные, а f, F, f_s — аналитические функции переменных x, y, $x_1, \ldots, x_m$ в некоторой области G,

[1] Частный случай рассматриваемой в этом параграфе задачи исследован Андроновым и Виттом в работе: „К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы". Журн. техн. физ., т. IV, вып. I, 1934.

При более общих предположениях, эта задача рассмотрена Б. В. Булгаковым в работе: „О применении метода Пуанкаре к свободным псевдолинейным колебательным системам". Журн. Прикл. мат. и мех., т. VI, вып. 4, 1942.

в которой лежат все рассматриваемые в дальнейшем порождающие решения, и параметра μ при достаточно малых его значениях.

Мы будем предполагать, что среди остальных m корней характеристического уравнения порождающей системы

$$\frac{dx^0}{dt}=-ky^0, \qquad \frac{dy^0}{dt}=kx^0,$$

$$\frac{dx_s^0}{dt}=b_{s1}x_1^0+\ldots+b_{sm}x_m^0+a_sx^0+b_sy^0,$$

$$(s=1, 2, \ldots, m),$$

т. е. среди корней уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\rho, & b_{12}, & \ldots, & b_{1m} \\ b_{21}, & b_{22}-\rho, & \ldots, & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1}, & b_{m2}, & \ldots, & b_{mm}-\rho \end{vmatrix}=0 \tag{13.2}$$

нет ни корня, равного нулю, ни корней вида $\pm nki$, где n — целое число. При таком предположении, как это было показано в § 9, система линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=b_{s1}x_1+\ldots+b_{sm}x_m+F_s(t), \tag{13.3}$$

$$(s=1, 2, \ldots, m),$$

где F_s — периодические функции периода $\frac{2\pi}{k}$, имеет одно и только одно периодическое решение того же периода[1].

Отсюда вытекает, что порождающая система имеет периодическое решение

$$x^0=M_0\cos kt, \quad y^0=M_0\sin kt, \quad x_s^{(0)}=\varphi_s(t),$$

---

[1] В § 9 рассматривалось периодическое решение системы типа (9.3), имеющее период 2π, а не $\frac{2\pi}{k}$, что, очевидно, несущественно.

где φ_s — периодическое решение (единственное) уравнений

$$\frac{dx_s^{(0)}}{dt} = b_{s1}x_1^{(0)} + \ldots + b_{sm}x_m^{(0)} + \\ + M_0(a_s \cos kt + b_s \sin kt), \quad (13.4)$$

$$(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

а M_0 — произвольная постоянная. Принимая это решение за порождающее, будем искать периодическое решение системы (13.1). Пусть

$$x(0) = M_0 + \beta, \quad y(0) = y^{(0)}(0) = 0,$$
$$x_s(0) = \varphi_s(0) + \beta_s \quad (13.5)$$

— начальные значения этого решения. Здесь, согласно общим положениям § 4, начальное значение y принято равным $y^{(0)}(0)$.

Решение системы (13.1) с начальными условиями (13.5) имеет вид:

$$x(t,\ \beta,\ \beta_j,\ \mu) = M_0 \cos kt + B\beta + \mu\{C + \ldots\},$$
$$y(t,\ \beta,\ \beta_j,\ \mu) = M_0 \sin kt + B^*\beta + \mu\{C^* + \ldots\},$$
$$x_s(t,\ \beta,\ \beta_j,\ \mu) = \varphi_s(t) + B_s\beta + A_{s1}\beta_1 + \\ + \ldots + A_{sm}\beta_m + \mu\{C_s + \ldots\},$$
$$(s = 1, 2, \ldots,\ m),$$

где

$$B = \cos kt, \quad B^* = \sin kt,$$

A_{sj} удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dA_{sj}}{dt} = b_{s1}A_{1j} + b_{s2}A_{2j} + \ldots + b_{sm}A_{mj},$$
$$(s = 1, 2, \ldots,\ m;\quad j = 1,\ 2, \ldots m)$$

и начальным условиям

$$A_{sj} = \begin{cases} 0 \text{ (для } s \neq j), \\ 1 \text{ (для } s = j) \end{cases}$$

и ненаписанные члены обращаются в нуль при $\beta=\beta_1=\ldots=\beta_m=\mu=0$.

Пусть

$$T+\alpha=\frac{2\pi}{k}+\alpha$$

период искомого решения. Условия периодичности имеют вид:

$$\begin{gathered}
x(T+\alpha, \beta, \beta_j, \mu)-M_0-\beta=0, \\
y(T+\alpha, \beta, \beta_j, \mu)=0, \\
x_s(T+\alpha, \beta, \beta_j, \mu)-\varphi_s(0)-\beta_s=0, \\
(s=1, 2, \ldots, m).
\end{gathered}$$

Разворачивая в ряд по α и выписывая только младшие члены, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha^2\left(\frac{-M_0k^2}{2}+\ldots\right)+\mu\left\{C\left(\frac{2\pi}{k}\right)+\ldots\right\}=0, \\
\alpha(M_0k+\ldots)+\mu\left\{C^*\left(\frac{2\pi}{k}\right)+\ldots\right\}=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (13.6)$$

$$\begin{gathered}
\dot{\varphi}_s\left(\frac{2\pi}{k}\right)\alpha+B_s\left(\frac{2\pi}{k}\right)\beta+A_{s1}\left(\frac{2\pi}{k}\right)\beta_1+\ldots+\left[A_{ss}\left(\frac{2\pi}{k}\right)-1\right]\beta_s+ \\
+\ldots+A_{sm}\left(\frac{2\pi}{k}\right)\beta_m+\mu\left\{C_s\left(\frac{2\pi}{k}\right)+\ldots\right\}=0 \\
(s=1, 2, \ldots, m).
\end{gathered}$$

Как было доказано в § 9, имеем тождественно

$$D=\begin{vmatrix}
A_{11}\left(\frac{2\pi}{k}\right)-1, & A_{12}\left(\frac{2\pi}{k}\right), & \ldots, & A_{1m}\left(\frac{2\pi}{k}\right) \\
A_{21}\left(\frac{2\pi}{k}\right), & A_{22}\left(\frac{2\pi}{k}\right)-1, & \ldots, & A_{2m}\left(\frac{2\pi}{k}\right) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_{m1}\left(\frac{2\pi}{k}\right), & A_{m2}\left(\frac{2\pi}{k}\right), & \ldots, & A_{mm}\left(\frac{2\pi}{k}\right)-1
\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv\left(e^{\frac{2\pi}{k}\rho_1}-1\right)\ldots\left(e^{\frac{2\pi}{k}\rho_m}-1\right),$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_m$ — корни уравнения (13.2).

Следовательно, определитель D отличен от нуля и поэтому последние m уравнений (13.6) могут быть разрешены относительно $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Подставляя эти величины в первые два уравнения (13.6), получим:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2\left(-\frac{M_0k^2}{2}+\ldots\right)+\mu\left\{C\left(\frac{2\pi}{k}\right)+\ldots\right\}=0,\\ \alpha\,(M_0k+\ldots)+\mu\left\{C^*\left(\frac{2\pi}{k}\right)+\ldots\right\}=0,\end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

где ненаписанные члены суть аналитические функции величин α, β и μ, обращающиеся в нуль вместе с этими величинами. Полагая M_0 отличным от нуля, мы можем второе уравнение (13.7) разрешить относительно α. В результате получится аналитическая функция от β и μ, обращающаяся в нуль при $\mu=0$. Подставляя эту функцию в первое уравнение (13.7), мы получим для определения β уравнение вида

$$\mu\left\{C\left(\frac{2\pi}{k}\right)+\Phi\,(\beta,\mu)\right\}=0, \tag{13.8}$$

где $\Phi(\beta, \mu)$ — аналитическая функция от β и μ, обращающаяся в нуль при $\beta=\mu=0$.

Для того чтобы это уравнение имело решение, обращающееся в нуль при $\mu=0$, необходимо, чтобы удовлетворялось уравнение

$$C\left(\frac{2\pi}{k}\right)=0. \tag{13.9}$$

Но

$$\frac{dC}{dt}=-kC^*+f_0(t),$$
$$\frac{dC^*}{dt}=kC+F_0(t),$$
$$C(0)=C^*(0)=0,$$

где

$$f_0(t,=f(M_0\cos kt,\ M_0\sin kt,\ \varphi_s(t),\ 0),$$
$$F_0(t)=F(M_0\cos kt,\ M_0\sin kt,\ \varphi_s(t),\ 0).$$

Отсюда находим

$$C=\int_0^t\{f_0(u)\cos k(t-u)-F_0(u)\sin k(t-u)\}\,du$$

и уравнение (13.9), после несложного преобразования, примет вид:

$$\int_0^{2\pi} \left\{ f_0\left(\frac{\tau}{k}\right)\cos\tau + F_0\left(\frac{\tau}{k}\right)\sin\tau \right\} d\tau = 0. \qquad (13.10)$$

Мы получили, таким образом, уравнение для нахождения произвольной постоянной M_0 в порождающем решении. Так же, как и в случае одной степени свободы, легко непосредственно убедиться, что каждому некратному корню уравнения (13.10) отвечает одно и только одно решение уравнения (13.8) и, следовательно, одно и только одно периодическое решение системы (13.1). Это решение будет аналитическим относительно μ. Таким же будет и период $\frac{2\pi}{k} + \alpha$ этого решения.

Для действительного вычисления этого решения поступаем совершенно так же, как и в случае одной степени свободы. Введем вместо переменной t переменную τ при помощи подстановки

$$t = \frac{\tau}{k}(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots),$$

оставляя постоянные h_j неопределенными. Полученным таким образом уравнениям

$$\frac{dx}{d\tau} = \left(-y + \frac{\mu}{k}f\right)(1 + h_1\mu + \ldots)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \left(x + \frac{\mu}{k}F\right)(1 + h_1\mu + \ldots),$$

$$\frac{dx_s}{d\tau} = \frac{1}{k}(b_{s1}x_1 + \ldots + b_{sm}x_m + a_s x + b_s y + \mu f_s)(1 + h_1\mu + \ldots),$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m)$$

пытаемся удовлетворить формальными рядами

$$\left.\begin{aligned} x &= x^{(0)}(\tau) + \mu x^{(1)}(\tau) + \mu^2 x^{(2)}(\tau) + \ldots \\ y &= y^{(0)}(\tau) + \mu y^{(1)}(t) + \mu^2 y^{(2)}(\tau) + \ldots \\ x_s &= x_s^{(0)}(\tau) + \mu x_s^{(1)}(\tau) + \mu^2 x_s^{(2)}(\tau) + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (13.11)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m),$$

коэффициенты которых являются периодическими функциями τ постоянного периода 2π. Кроме того, должно быть:

$$y^{(0)}(0)=y^{(1)}(0)=y^{(2)}(0)=\ldots=0. \qquad (13.12)$$

Имеем, прежде всего,

$$\frac{dx^{(0)}}{d\tau}=-y^{(0)}, \quad \frac{dy^{(0)}}{d\tau}=x^{(0)},$$

$$\frac{dx_s^{(0)}}{d\tau}=\frac{1}{k}(b_{s1}x_1^{(0)}+\ldots+b_{sm}x_m^{(0)}+a_sx^{(0)}+b_sy^{(0)}),$$

$$(s=1, 2, \ldots, m)$$

и, следовательно, на основании (13.12),

$$x_0=M_0\cos\tau, \quad y_0=M_0\sin\tau.$$

Из сравнения с (13.4), получаем также

$$x_s^{(0)}=\varphi_s\left(\frac{\tau}{k}\right) \qquad (s=1,2, \ldots, m).$$

Далее имеем:

$$\frac{dx^{(1)}}{d\tau}=-y^{(1)}-h_1M_0\sin\tau+\frac{1}{k}f\left(M_0\cos\tau, M_0\sin\tau, \varphi_j\left(\frac{\tau}{k}\right),0\right),$$

$$\frac{dy^{(1)}}{d\tau}=x^{(1)}+h_1M_0\cos\tau+\frac{1}{k}F\left(M_0\cos\tau, M_0\sin\tau, \varphi_j\left(\frac{\tau}{k}\right), 0\right),$$

$$\frac{dx_s^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{k}(b_{s1}x_1^{(1)}+\ldots+b_{sm}x_m^{(1)}+a_sx^{(1)}+b_sy^{(1)})+$$
$$+\frac{h_1}{k}(b_{s1}x_1^{(0)}+\ldots+b_{sm}x_m^{(0)}+a_sx^{(0)}+$$
$$+b_sy^{(0)}+f_s(x^{(0)}, y^{(0)}, x_j^0, 0)),$$

$$(s=1, 2, \ldots, m).$$

Из этих уравнений видно, что если $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ получатся периодическими, то уравнения для $x_s^{(1)}$ дадут для этих величин, в силу условия о корнях характеристического уравнения (13.2), вполне определенные периодические функции. Что же касается уравнений для $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$, то для того, чтобы они допускали периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при $\sin\tau$ в первом уравнении равнялся коэффициенту при $\cos\tau$ во втором уравнении, а коэффициент при $\cos\tau$ в первом уравнении равнялся с обратным знаком коэффициенту при $\sin\tau$ во втором уравнении. При этом, *если эти условия выполнены, то все* решения для $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ выйдут периодическими. Таким образом, имеем:

$$\int_0^{2\pi}\left\{f_0\left(\frac{\tau}{k}\right)\cos\tau+F_0\left(\frac{\tau}{k}\right)\sin\tau\right\}d\tau=0,$$

$$-2h_1M_0+\frac{1}{\pi k}\int_0^{2\pi}\{f_0\sin\tau-F_0\cos\tau\}\,d\tau=0.$$

Первое из этих уравнений определяет M_0 и совпадает с (13.10), а второе уравнение определяет величину h_1. После этого будем иметь:

$$x^{(1)}=\varphi^{(1)}(\tau)+M_1\cos\tau+N_1\sin\tau,$$

$$y^{(1)}=\psi^{(1)}(\tau)+M_1\sin\tau-N_1\cos\tau,$$

$$x_s^{(1)}=\varphi_s^{(1)}(\tau),$$

где M_1 и N_1 — произвольные постоянные, а $\varphi^{(1)}$, $\psi^{(1)}$ и $\varphi_s^{(1)}$ — некоторые периодические функции τ, из которых $\varphi_s^{(1)}$ зависят от M_1 и N_1.

Постоянные M_1 и N_1, совершенно так же, как и в случае системы с одной степенью свободы, определятся из условия периодичности второго приближения и начальных условий (13.12). Одновременно с M_1 и N_1 вычислится также и постоянная h_2. Вычисления при этом будут такими же, как и при определении постоянных h_1 и M_0. Разница будет заключаться лишь только в том, что уравнение для M_1 (N_1 определится из начальных условий) получится линейным. Совершенно так же, как и в случае системы с одной степенью свободы можно непосредственным вычислением убедиться, что уравнение для M_1 будет разрешимым, если M_0 является простым корнем уравнения (13.10).

Таким способом можно подсчитать сколько угодно приближений в искомом решении. Одновременно с этим подсчитается и период

$$\frac{2\pi}{k}(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\ldots)$$

этого решения.

Сходимость полученных рядов доказывается так же, как и для одной степени свободы.

§ 14. Недостаточность квазилинейной трактовки физических проблем

Теория периодических квазилинейных колебаний, которую мы детально рассмотрели в этой главе, имеет большое практическое значение. Благодаря исследованиям Мандельштама, Папалекси, Андронова и их последователей, разработавших основные черты этой теории и успешно применивших ее к многочисленным физическим задачам, она заняла сейчас господствующее положение во всей теории нелинейных колебаний. Тем не менее, многие важные задачи теории нелинейных колебаний не могут быть успешно разрешены при квазилинейной трактовке. Сюда, конечно, относятся, прежде всего, все задачи, для которых уравнения колебаний, даже грубо приближенно, не могут считаться мало отличающимися от линейных. Но даже и в тех случаях, когда уравнения колебаний действительно мало отличаются от линейных, квазилинейная трактовка не всегда дает правильное описание характера колебаний. Так, в § 7, при квазилинейной трактовке уравнения (7.12) мы нашли для него только одно периодическое решение, что не дает возможности объяснить действительный характер колебаний, описываемых этим уравнением. Точно так же, при квазилинейной трактовке уравнения (7.24), мы совсем не могли найти для него периодического решения, хотя такое решение, как мы это увидим дальше, в действительности существует и может быть легко построено. Причина всего этого кроется в том, что при квазилинейной трактовке мы ищем периодические решения нелинейной системы среди решений соответствующей линейной системы. Анализ результатов этой главы показывает, что при такой трактовке нелинейность проявляется в одних случаях лишь только в том, что к соответствующему линейному решению добавляются некоторые поправочные члены, что для практики часто несущественно, а в других случаях происходит еще дополнительно отбор решений, так что не всякому решению линейной системы соответствует решение нелинейной системы. Последнее обстоятельство, конечно, весьма существенно. Оно, как мы видели, позволило рассмотреть такой важный для приложений вопрос, как теорию автоколебаний. Однако, значение нелинейности значительно большее, чем только что отмеченное. Нелинейные уравнения значительно „богаче", чем уравнения линейные, и легко может случиться, что многие важные особенности этих уравнений, в том числе и периодические решения, теряются при переходе к линейным уравнениям.

Все сказанное остается справедливым не только относительно квазилинейной трактовки уравнений колебаний.

Пользуясь методом Пуанкаре, мы всегда переходим от заданной системы уравнений к более простой порождающей системе. При этом мы всегда рискуем потерять некоторые важные особенности изучаемых уравнений. Этот риск будет, очевидно, тем больше, чем более простая система берется в качестве порождающей. Особенно рискован переход от нелинейной системы к системе линейной, ввиду принципиальных различий в поведении этих систем.

Из всего вышесказанного вытекает необходимость разработки метода Пуанкаре для систем более общего вида, чем квазилинейные. В § 5 мы указывали на те трудности, которые возникают при решении этой задачи. Мы указали также на то, что эти трудности могут быть преодолены, если в качестве порождающей принять особую нелинейную систему, изученную Ляпуновым. Частным случаем систем Ляпунова являются консервативные системы. *Системы Ляпунова и колебания систем, близких к системам Ляпунова*, рассматриваются подробно в гл. IV, V и VI. Сейчас мы переходим к рассмотрению другого весьма важного вопроса: *к теории устойчивости периодических решений*. Этому вопросу посвящена следующая глава.

ГЛАВА III

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

§ 15. Постановка задачи. Уравнения в вариациях

В § 13 мы видели, что при изучении вопроса об автоколебаниях автономных систем основное значение имеет не только определение периодических решений, но и вопрос *об устойчивости* этих решений. То же самое справедливо и в общем случае. Только те колебания могут иметь физическое значение, которые обладают известного рода устойчивостью. Поэтому, после того как найдено какое-нибудь периодическое решение, немедленно возникает вопрос об устойчивости этого решения.

Задача об устойчивости движения в самом общем виде была впервые четко сформулирована А. М. Ляпуновым в его классическом сочинении „Общая задача об устойчивости движения". В этом же сочинении Ляпунов развил также и основные методы решения этой задачи. Мы приводим здесь некоторые результаты Ляпунова, относящиеся к устойчивости периодических движений.

Допустим, что движение динамической системы описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_r) \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \tag{15.1}$$

где правые части, вообще говоря, не периодичны относительно t, и рассмотрим определенное движение этой системы, соответствующее какому-нибудь частному решению

$$x_s = \varphi_s(t) \quad (s = 1, 2, \ldots, r) \tag{15.2}$$

уравнений (15.1). Мы будем судить об устойчивости или неустойчивости движения (15.2) в зависимости от поведения соседних движений, т. е. таких движений, для которых начальные условия мало отличаются от $\varphi_s(t_0)$. Все эти движения мы будем называть *возмущенными*, а движение (15.2), устойчивость которого исследуется, — *невозмущенным*. Разности $x_s - \varphi_s(t)$ *мы будем называть возмущениями*.

Определение. Невозмущенное движение называется устойчивым (в смысле Ляпунова), если для всякого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно найти другое положительное число η такое, что для всех возмущенных движений, для которых в начальный момент времени t_0 выполняются неравенства

$$|x_s(t_0) - \varphi_s(t_0)| \leqslant \eta \quad (s = 1, 2, \ldots, r),$$

будут при всех $t > t_0$ выполняться неравенства

$$|x_s(t) - \varphi_s(t)| < \varepsilon \quad (s = 1, 2, \ldots, r). \tag{15.3}$$

Движения, не удовлетворяющие условиям устойчивости, называются *неустойчивыми*. Устойчивые невозмущенные движения, для которых при достаточно малом η выполняются не только условия (15.3), но и более сильные условия

$$\lim_{t \to \infty} (x_s(t) = \varphi_s(t) \quad (s = 1, 2, \ldots, r)$$

называются *асимптотически устойчивыми*.

Для исследования устойчивости движения удобно пользоваться уравнениями, которым удовлетворяют возмущения

$$y_s = x_s - \varphi_s(t) \quad (s = 1, 2, \ldots, r). \tag{15.4}$$

Эти так называемые *уравнения возмущенного движения* получатся, если в уравнениях (15.1) сделать подстановку (15.4). При такой подстановке уравнения (15.1) примут вид

$$\frac{dy_s}{dt} = X_s(t, \varphi_1 + y_1, \ldots, \varphi_r + y_r) - X_s(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_r)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r)$$

или, разлагая в ряды по $y_1, \ldots, y_r$ (предполагая, что такое разложение возможно),

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sr}y_r + \sum A_s^{(m_1, \ldots, m_n)} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_r^{m_r} \tag{15.5}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r).$$

Здесь

$$p_{sj} = \left(\frac{\partial X_s(t, x_1, \ldots, x_r)}{\partial x_j}\right),$$

где скобки обозначают, что после дифференцирования величины x_i должны быть заменены их значениями в невозмущенном движении, т. е. функциями $\varphi_i(t)$.

Уравнения (15.5) имеют тривиальное решение $y_1 = \ldots = y_r = 0$. Этому решению соответствует, очевидно, невозмущенное движение. В переменных $y_1, \ldots, y_r$ условие устойчивости выражается следующим образом: невозмущенное движение устойчиво, если для всякого положительного ε можно выбрать такое положительное η, что неравенства $|y_s(t)| < \varepsilon$ будут выполняться при всех $t > t_0$ для любого решения, для которого $|y_s(t_0)| \leqslant \eta$. Если при этом $\lim\limits_{t\to\infty} y_s = 0$, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Если в уравнениях возмущенного движения отбросить члены высших порядков, то полученные таким образом линейные уравнения

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sr}y_r \quad (s = 1, 2, \ldots, r) \qquad (15.6)$$

называются, по Пуанкаре, *уравнениями в вариациях* для решения (15.2).

Уравнения в вариациях играют большую роль при исследовании устойчивости. Как показал Ляпунов, во многих случаях устойчивость или неустойчивость невозмущенного движения целиком определяется видом решений уравнений в вариациях.

Кроме того, уравнения в вариациях играют также большую роль и при вычислении периодических решений. Действительно, уравнения (5.2), к которым, как мы видели, приводится задача вычисления периодических решений, представляют собой не что иное, как уравнения в вариациях порождающей системы, когда за невозмущенное решение принято порождающее.

Выведем здесь два важных свойства уравнений в вариациях, установленных Пуанкаре. Этими свойствами нам придется в дальнейшем пользоваться.

1. Допустим, что исходная система (15.1) допускает семейство решений

$$x_s = \varphi_s(t, h_1, \ldots, h_k) \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \tag{15.7}$$

зависящее от k произвольных параметров h_j и что невозмущенное решение принадлежит к этому семейству и соответствует значениям $h_j = h_j^*$ параметров. Тогда уравнения в вариациях (15.6) допускают k решений

$$y_{sj} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial h_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k;\ s = 1, 2, \ldots, r),$$

где производные вычисляются для невозмущенного решения.

В самом деле, подставляя (15.7) в (15.1), дифференцируя полученные тождества по h_j и переходя затем к невозмущенному движению, будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial h_j}\right)_{h_i = h_i^*} = \left\{p_{s1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial h_j} + \ldots + p_{sr}\frac{\partial \varphi_r}{\partial h_j}\right\}_{h_i = h_i^*}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k;\ s = 1, 2, \ldots, r),$$

что и доказывает наше предложение.

2. Если система (15.1) допускает первый интеграл

$$F(t, x_1 \ldots, x_r) = \mathrm{const},$$

то система в вариациях (15.6) допускает первый интеграл

$$H = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right) y_2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_r}\right) y_r = \mathrm{const},$$

где скобки обозначают, что производные вычислены для невозмущенного движения.

В самом деле, имеем тождественно

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} X_\alpha \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество по x_i, получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha \partial x_i} X_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} \equiv 0. \tag{15.8}$$

С другой стороны, составляя производную функции H по t, предполагая, что величины y_s удовлетворяют уравнениям в вариациях, получим

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{\alpha=1} y_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\right)+\sum_{\alpha=1}^{r}\left(\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\right)(p_{\alpha 1}y_1+\ldots+p_{\alpha r}y_r)=$$

$$=\sum_{i=1}^{r} y_i\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)+\sum_{\alpha=1}^{r}\left(\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i}\right)\right\}. \qquad (15.9)$$

Так как в производных $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$ величины $x_1, \ldots, x_r$ удовлетворяют уравнениям (15.1), то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x_i}\right)+\sum_{\alpha=1}^{r}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_\alpha}\right)X_\alpha.$$

Подставляя в (15.9) и принимая во внимание (15.8), получим

$$\frac{dH}{dt}=0,$$

что и доказывает наше предложение.

Если правые части уравнений движения (15.1) периодичны относительно t и если исследуется устойчивость периодического решения, т. е. функции $\varphi_s(t)$ являются также периодическими, то правые части уравнений возмущенного движения и, следовательно, уравнений в вариациях будут периодическими относительно t. Таким образом, задача устойчивости периодических движений приводится прежде всего к исследованию системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

§ 16. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Характеристическое уравнение

Мы переходим сейчас к изложению основных положений теории линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Мы видели, что к исследованию таких уравнений приводится задача устойчивости периодических движений.

Мы видели также в § 5, что и задача отыскания периодических движений, в общем случае, тоже приводится к решению такого рода уравнений.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}(t)y_1 + \ldots + p_{sr}(t)y_r \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \tag{16.1}$$

где p_{sj} — непрерывные периодические функции t с одним и тем же периодом ω. Пусть

$$y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{rj} \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{16.2}$$

какая-нибудь фундаментальная система решений этих уравнений. Здесь, как и везде дальше, первый индекс обозначает номер функции, а второй индекс номер решения. Если в решениях (16.2) заменить t на $t+\omega$, то, в силу периодичности уравнений (16.1), мы снова получим решения этих уравнений. Поэтому должны иметь место тождества

$$y_{sj}(t+\omega) = a_{1j}y_{s1}(t) + \ldots + a_{rj}y_{sr}(t), \tag{16.3}$$

где a_{sj} — некоторые постоянные. Составим уравнение

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\rho, & a_{12}, \ldots, & a_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}-\rho, \ldots, & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1}, & a_{r2}, \ldots, & a_{rr}-\rho \end{vmatrix} = 0. \tag{16.4}$$

Это уравнение, играющее исключительно важную роль в теории линейных систем с периодическими коэффициентами, называется *характеристическим уравнением*, соответствующим периоду ω, или, короче, характеристическим уравнением.

Докажем некоторые свойства этого уравнения.

1. *Корни характеристического уравнения не зависят от взятой фундаментальной системы.* Другими словами, если вместо фундаментальной системы (16.2) выбрать другую фундаментальную систему решений $z_{sj}(t)$, то для нее будем иметь:

$$z_{sj}(t+\omega) = c_{1j}z_{s1}(t) + \ldots + c_{rj}z_{sr}(t), \tag{16.5}$$

где c_{sj} отличны от a_{sj}, но корни характеристического уравнения, составленного из коэффициентов c_{sj}, будут совпадать с корнями уравнения (16.4).

В самом деле, так как функции $z_{sj}(t)$ образуют фундаментальную систему, то должно быть

$$z_{sj}(t) = b_{1j}y_{s1}(t) + \ldots + b_{rj}y_{sr}(t), \qquad (16.6)$$
$$(s, j = 1, 2, \ldots, r),$$

где b_{sj} — некоторые постоянные. Обозначим через $y(t)$ матрицу коэффициентов $y_{sj}(t)$, через $z(t)$ матрицу коэффициентов $z_{sj}(t)$ и, соответственно, через a, b, c матрицы коэффициентов a_{sj}, b_{sj}, c_{sj}. Тогда зависимости (16.3), (16.5) и (16.6) перепишутся так:

$$y(t+\omega) = y(t)a, \quad z(t+\omega) = z(t)c, \quad z(t) = y(t)b.$$

Но

$$z(t+\omega) = y(t+\omega)b = y(t)ab = z(t)b^{-1}ab$$

и, следовательно

$$c \equiv b^{-1}ab.$$

Поэтому, если E — единичная матрица, то характеристический определитель из коэффициентов c_{sj} может быть преобразован следующим образом:

$$|c - \rho E| \equiv |b^{-1}ab - \rho E| \equiv |b^{-1}(a - \rho E)b| \equiv$$
$$\equiv |b^{-1}||b||a - \rho E| \equiv |a - \rho E|,$$

что и доказывает наше предложение.

2. *Характеристическое уравнение не изменится, если над переменными y_s совершить неособенное линейное преобразование с периодическими коэффициентами.*

В самом деле, преобразуем в уравнениях (16.1) переменные y_s при помощи подстановки

$$z_s = q_{s1}(t)y_1 + \ldots + q_{sr}(t)y_r,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r),$$

где q_{sj} — непрерывные периодические функции ω, с отличным при всех t от нуля детерминантом $|q_{sj}|$. Фундаментальной системе решений (16.2) будет в преобразованных уравнениях отвечать фундаментальная система решений z_{sj}, определяемая соотношениями:

$$z_{sj}(t) = q_{s1}y_{1j}(t) + q_{s2}y_{2j}(t) + \ldots + q_{sr}y_{rj}(t).$$

Имеем, таким образом,

$$z(t) \equiv q(t)y(t), \quad y(t) \equiv q^{-1}(t)z(t),$$

$$z(t+\omega) \equiv q(t+\omega)y(t+\omega) \equiv q(t)y(t)a \equiv$$
$$\equiv q(t)q^{-1}(t)z(t)a \equiv z(t)a,$$

и, следовательно, характеристическое уравнение для преобразованной системы совпадает с (16.4).

Напишем уравнение (16.4) в виде

$$\rho^r + A_1\rho^{r-1} + \ldots + A_{r-1}\rho + A_r = 0. \qquad (16.7)$$

Коэффициенты A_j являются, по доказанному, инвариантами как относительно выбора исходной фундаментальной системы, так и относительно линейного преобразования с периодическими коэффициентами самой системы дифференциальных уравнений. Для действительного вычисления коэффициентов A_j необходимо знать какую-нибудь фундаментальную систему решений уравнений (16.1). Однако, один из этих коэффициентов, а именно A_r, равный, очевидно, $(-1)^r|a|$, может быть вычислен непосредственно, без интегрирования системы (16.1). В самом деле, на основании известной теоремы Лиувилля о детерминанте фундаментальной системы решений, мы можем написать

$$|y(\omega)| = |y(0)|\, e^{\int\limits_0^\omega (p_{11}+p_{22}+\ldots+p_{rr})\,dt}$$

С другой стороны, на основании (16.3),

$$|y(\omega)| = |a|\,|y(0)|$$

и, следовательно,

$$(-1)^r A_r = |a| = e^{\int\limits_0^\omega (p_{11}+\ldots+p_{rr})\,dt} \qquad (16.8)$$

Формула (16.8), между прочим, показывает, что уравнение (16.7) не имеет корней, равных нулю.

Допустим, что в качестве исходной фундаментальной системы выбрана такая, что для нее выполняются начальные условия

$$y_{sj}(0)=\begin{cases} 0 & (s\neq j) \\ 1 & (s=j) \end{cases}.$$

Тогда, полагая в (16.3) $t=0$, будем иметь:

$$y_{sj}(\omega)=a_{sj} \quad (s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

и, следовательно, характеристическое уравнение может быть представлено в следующем виде

$$\begin{vmatrix} y_{11}(\omega)-\rho, & y_{12}(\omega), & \ldots, & y_{1r}(\omega) \\ y_{21}(\omega), & y_{22}(\omega)-\rho, & \ldots, & y_{2r}(\omega) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{r1}(\omega), & y_{r2}(\omega), & \ldots, & y_{rr}(\omega)-\rho \end{vmatrix}=0. \tag{16.9}$$

Этим видом характеристического уравнения мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

§ 17. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Аналитический вид решений

Система (16.1) не может быть проинтегрирована в замкнутой форме. Тем не менее, можно установить аналитический вид решений этой системы.

Пользуясь каким-нибудь определением логарифмов, рассмотрим величины

$$\alpha_k=\frac{1}{\omega}\ln\rho_k, \tag{17.1}$$

где ρ_k — корни характеристического уравнения.

Эти величины называются *характеристическими показателями* системы (16.1).

Покажем, что для каждого корня ρ_k характеристического уравнения можно подобрать частное решение системы (16.1) вида

$$y_s=e^{\alpha_k t}\varphi_s(t) \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ r), \tag{17.2}$$

где φ_s — периодические функции t периода ω.

С этой целью, постараемся подобрать r постоянных $\beta_1, \ldots, \beta_r$ таким образом, чтобы решение

$$y_s = \beta_1 y_{s1} + \beta_2 y_{s2} + \ldots + \beta_r y_{sr} \quad (s = 1, 2, \ldots, r)$$

удовлетворяло условиям

$$y_s(t+\omega) = \rho_k y_s(t) \quad (s = 1, 2, \ldots, r). \tag{17.3}$$

Эти условия дают

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i y_{si}(t+\omega) = \rho_k \sum_{i=1}^{r} \beta_i y_{si}(t)$$

или, на основании (16.3),

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \beta_i a_{ji} y_{sj}(t) = \rho_k \sum_{j=1}^{r} \beta_j y_{sj}(t).$$

Приравнивая коэффициенты при $y_{sj}(t)$, мы получим для определения $\beta_1, \ldots, \beta_r$ систему однородных уравнений

$$a_{j1}\beta_1 + \ldots + (a_{jj} - \rho_k)\beta_j + \ldots + a_{jr}\beta_r = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{17.4}$$

Так как ρ_k является корнем характеристического уравнения, то определитель системы (17.4) равен нулю и, следовательно, эта система допускает нетривиальное решение. Таким образом, наши дифференциальные уравнения допускают решение, удовлетворяющее соотношениям (17.3). Но это решение необходимо имеет вид (17.2), так как в силу (17.1) функции $y_s(t)e^{-\alpha_k t}$ являются периодическими. Таким образом, наше предложение доказано.

Установив это, допустим сначала, что характеристическое уравнение не имеет кратных корней. Тогда, рассматривая все его корни, мы получим r решений вида (17.2). Все эти решения будут, очевидно, независимыми и образуют, следовательно, фундаментальную систему.

Допустим теперь, что среди корней характеристического уравнения имеются кратные. Примем для определенности, что корень ρ_k является кратным и что кратность этого корня равна μ. Если этот корень не обращает в нуль, по крайней мере, одного из миноров $r-1$ порядка характеристического определителя, то, как мы сейчас покажем, для него может быть построена система из μ независимых решений вида

$$y_{si}=e^{\alpha_k t}P_{si}(t)\ (s=1, 2, \ldots, r;\ i=1, 2, \ldots \mu).$$

Здесь $P_{si}(t)$ полиномы относительно t с периодическими (периода ω) коэффициентами. При этом степени полиномов P_{s1} не превосходят $\mu-1$ и степень хотя бы одного из них равна $\mu-1$. Следовательно, мы можем писать

$$P_{s1}=\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\varphi_{s,\mu-1}(t)+\frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\varphi_{s,\mu-2}(t)+\ldots+\varphi_{s0}(t),$$
$$(s=1, 2, \ldots, r),$$

где φ_{sj} периодические функции t, причем хотя бы одна из функций $\varphi_{s,\mu-1}$ не равна тождественно нулю.

Что же касается полиномов $P_{s2}, \ldots, P_{s\mu}$, то они могут быть получены из P_{s1} последовательным дифференцированием по t в предположении, что φ_{sj} рассматриваются как постоянные. Другими словами, если такого рода операцию дифференцирования обозначить через $\frac{D}{Dt}$, то будем иметь:

$$P_{si}=\frac{D^{i-1}}{Dt^{i-1}}P_{s1}\ (i=2, \ldots, \mu;\ s=1, 2, \ldots, r).$$

Мы будем говорить, что в рассматриваемом случае, кратному корню ρ_k отвечает одна группа решений.

Допустим, однако, что кратный корень ρ_k обращает в нуль все миноры характеристического определителя до порядка $r-p+1$ включительно, не обращая в нуль, по крайней мере, одного из миноров $r-p$-го порядка. Тогда этому кратному корню будет попрежнему соответствовать μ независимых частных решений, но эти решения разбиваются на p самостоятельных групп. И если мы обозначим через n_j число решений в j-ой группе[1] $(n_1+n_2+\ldots+n_p=\mu)$, то решения этой группы имеют вид:

$$y_{si}^{(j)}=e^{\alpha_k t}\frac{D^{i-1}}{Dt^{i-1}}P_s^{(j)}\ (i=1, 2, \ldots, n_j;\ s=1, 2, \ldots, r), \quad (17.5)$$

[1] Более подробный анализ, которым мы здесь не занимаемся, показывает, что число решений в каждой группе равно степеням элементарных делителей характеристического определителя, соответствующих рассматриваемому корню. Наиболее простое известное нам изложение этого вопроса можно найти в книге Н. Г. Четаева: Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.

где

$$P_s^{(j)} = \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\varphi_{s,n_j-1}^{(j)} + \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!}\varphi_{s,n_j-2}^{(j)} + \ldots + \varphi_{s0}^{(j)}$$

и φ_{sl} — периодические функции t периода ω.

Число p не может, очевидно, превзойти кратности μ рассматриваемого корня, но может этого предела достигать. В последнем случае каждая группа будет состоять из одного решения. Каждое такое решение будет при этом иметь вид (17.2).

Все эти утверждения можно считать доказанными при $\mu = 1$.

Поэтому, чтобы доказать их в общем случае, мы можем применить метод индукции. А именно, мы допустим, что все эти утверждения справедливы, если кратность корня равна $\mu - 1$ и покажем, что они остаются справедливыми, если эта кратность равна μ.

Итак, допустим, что ρ_k есть корень μ-ой кратности характеристического уравнения. Этому корню, по доказанному соответствует, по крайней мере, одно решение системы (16.1) вида (17.2).

Перейдем в уравнениях (16.1) от переменных y_s к переменным z_s при помощи подстановки

$$y_s = \varphi_s(t)\,z_1 + b_{s2}z_2 + \ldots + b_{sr}z_r \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \qquad (17.6)$$

где b_{si} — произвольные непрерывные периодические функции t периода ω, подчиненные лишь условию, что подстановка (17.6) не является особенной, т. е., что определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2, \ldots, & \varphi_r \\ b_{12}, & b_{22}, \ldots, & b_{r2} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ b_{1r}, & b_{2r}, \ldots, & b_{rr} \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль ни при каких значениях t. Такой выбор функций b_{si} может быть сделан бесчисленным множеством способов,[1] так как функции φ_s не могут обращаться одновременно в нуль ни при каких значениях t. Последнее вытекает из того обстоятельства, что система уравнений (16.1) не имеет решения, отличного от тривиального $y_1 = \ldots = y_r = 0$, в котором все функции y_s одновременно обращаются в нуль при каком-нибудь значении t.

Так как исходная система имеет частное решение (17.2), то преобразованная система должна допускать частное решение

$$z_1 = e^{\alpha_k t}, \quad z_2 = z_3 = \ldots = z_r = 0. \tag{17.7}$$

Поэтому преобразованная система необходимо распадается на систему

$$\frac{dz_s}{dt} = q_{s2} z_2 + \ldots + q_{sr} z_r \quad (s = 2, \ldots, r), \tag{17.8}$$

состоящую из $r - 1$ уравнений, и на одно уравнение

$$\frac{dz_1}{dt} = \alpha_k z_1 + q_{12} z_2 + \ldots + q_{1r} z_r. \tag{17.9}$$

Здесь q_{si} — периодические функции t периода ω. Уравнения (17.8) образуют самостоятельную систему, определяющую $r - 1$ функций $z_2, \ldots, z_r$. После того, как эти функции будут найдены, мы сумеем найти z_1 из уравнения (17.9) при помощи простой квадратуры. В частности, если мы найдем q ($q \leqslant r - 1$) линейно независимых решений $z_{2i}, \ldots z_{ri}$, ($i = 1, 2, \ldots, q$) уравнений (17.8), то функции $z_{1i}, z_{2i}, \ldots, z_{ri}$, где z_{1i} определяются формулами

$$z_{1i} = e^{\alpha_k t} \int_0^t e^{-\alpha_k t} (q_{12} z_{2i} + \ldots + q_{1r} z_{ri})\, dt, \tag{17.10}$$

определяют q независимых решений полной системы (17.8) и (17.9). Присоединяя к ним уже известное решение (17.7),

---

[1] Можно, например, поступить следующим образом. Будем рассматривать $b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ri}$ как компоненты $r - 1$ векторов в пространстве r измерений. Тогда выбрав эти вектора так, чтобы они были перпендикулярны между собой и к вектору ($\varphi_1, \ldots, \varphi_r$) и чтобы они имели постоянную (или периодически меняющуюся и никогда не обращающуюся в нуль) длину, мы удовлетворим поставленному условию.

мы получим $q+1$ решений этой системы, которые будут, очевидно, также независимыми.

Составим характеристическое уравнение полной системы (17.8) и (17.9). Рассмотрим фундаментальную систему решений $z_{2l}, \ldots, z_{rl}$ ($l=1, 2, \ldots, r-1$) уравнений (17.8), определяемую начальными условиями

$$z_{sl}(0)=\begin{cases} 1 & (\text{для } s=l+1) \\ 0 & (\text{для } s\neq l+1) \end{cases}.$$

Тогда система функций $z_{1l}, z_{2l}, \ldots, z_{rl}$, где z_{1l} определяются формулами (17.10), вместе с решением (17.7) образуют фундаментальную систему решений уравнений (17.8) и (17.9) как раз того вида, который фигурирует в форме (16.9) характеристического уравнения. Поэтому характеристическое уравнение системы (17.8) и (17.9) может быть представлено в виде

$$D(\rho)=\begin{vmatrix} \rho_k-\rho, & 0, \ldots, & 0 \\ z_{11}(\omega), & z_{21}(\omega)-\rho, \ldots, & z_{r1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ z_{1,r-1}(\omega), & z_{2,r-1}(\omega), \ldots, & z_{r,r-1}(\omega)-\rho \end{vmatrix}=$$

$$=(\rho_k-\rho)\,D'(\rho)=0, \qquad (17.11)$$

где $D'(\rho)$ — характеристический определитель системы (17.8).

Как было показано в предыдущем параграфе, характеристическое уравнение остается инвариантным при линейном преобразовании переменных. Поэтому уравнение (17.11) совпадает с характеристическим уравнением исходной системы (16.1). Что же касается последнего, то для него ρ_k является корнем μ-й кратности. Следовательно, из (17.11) вытекает, что ρ_k является корнем $\mu-1$-й кратности характеристического уравнения системы (17.8).

Но тогда, по предположению, этому корню отвечает $\mu-1$ независимых решений уравнений (17.8), распадающиеся на группы вышеуказанного типа. Допустим, для определенности, что имеются две такого рода группы. Все наши рассуждения останутся, однако, справедливыми при любом числе групп. Пусть первая группа состоит из l решений

$$z_{s\alpha}=e^{\varkappa_k t}\frac{D^{\alpha-1}}{Dt^{\alpha-1}}\left(\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}u_{s,l-1}+\ldots+tu_{s1}+u_{s0}\right),\qquad(17.12)$$

$$(s=2,\ldots,r;\quad \alpha=1,2,\ldots,l),$$

а вторая группа из m решений

$$\overset{*}{z}_{s\beta}=e^{\varkappa_k t}\frac{D^{\beta-1}}{Dt^{\beta-1}}\left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}v_{s,m-1}+\ldots+tv_{s1}+v_{s0}\right),\qquad(17.13)$$

$$(s=2,\ldots,r;\quad \beta=1,2,\ldots,m).$$

Здесь u_{sj}, v_{sj} суть периодические функции t и $l+m=\mu-1$. Как было указано выше, функции (17.12) и (17.13) вместе с функциями

$$\left.\begin{aligned}z_{1\alpha}&=e^{\varkappa_k t}\int_0^t e^{-\varkappa_k t}\,(q_{12}z_{2\alpha}+\ldots+q_{1r}z_{r\alpha})\,dt,\\ \overset{*}{z}_{1\beta}&=e^{\varkappa_k t}\int_0^t e^{-\varkappa_k t}\,(q_{12}\overset{*}{z}_{2\beta}+\ldots+q_{1r}\overset{*}{z}_{r\beta})\,dt,\end{aligned}\right\}\qquad(17.14)$$

$$(\alpha=1,2,\ldots,l;\quad \beta=1,2,\ldots,m)$$

образуют систему $\mu-1$ независимых решений уравнений (17.8) и (17.9).

На основании (17.12) и (17.13) подынтегральные выражения в функциях (17.14) не содержат показательных функций, и мы можем писать

$$\left.\begin{aligned}z_{1\alpha}&=e^{\varkappa_k t}\int_0^t\frac{D^{\alpha-1}}{Dt^{\alpha-1}}\left(\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}u_{l-1}+\ldots+tu_1+u_0\right)dt,\\ \overset{*}{z}_{1\beta}&=e^{\varkappa_k t}\int_0^t\frac{D^{\beta-1}}{Dt^{\beta-1}}\left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}v_{m-1}+\ldots+tv_1+v_0\right)dt,\end{aligned}\right\}\qquad(17.15)$$

где u_j, v_j — периодические функции, периода ω.

Пусть $\varphi(t)$ — произвольная непрерывная периодическая функция с периодом ω. Из тождества

$$\int_0^{t+\omega}\varphi(t)\,dt-\int_0^{t}\varphi(t)\,dt=\int_t^{t+\omega}\varphi(t)\,dt=\int_0^{\omega}\varphi(t)\,dt$$

вытекает, что для того, чтобы интеграл от функции φ был периодическим, необходимо и достаточно, чтобы ее среднее значение равнялось нулю. В общем случае, полагая

$$g=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\varphi(t)\,dt,$$

будем иметь

$$\int_0^{t}\varphi\,dt=gt+\int_0^{t}(\varphi-g)\,dt=gt+\psi(t),$$

где $\psi(t)$ — периодическая функция.

Далее легко находим

$$\int_0^{t}\frac{t^m}{m!}\varphi(t)\,dt=\frac{gt^{m+1}}{(m+1)!}+\frac{t^m}{m!}\psi(t)-\int_0^{t}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\psi(t)\,dt,$$

$$\frac{D}{Dt}\int_0^{t}\frac{t^m}{m!}\varphi(t)\,dt=\int_0^{t}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\varphi(t)\,dt=\int_0^{t}\frac{D}{Dt}\left[\frac{t^m}{m!}\varphi(t)\right]dt$$

и потому выражения (17.15) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&z_{1\alpha}=e^{\varkappa_k t}\frac{D^{\alpha-1}}{Dt^{\alpha-1}}\left(G\frac{t^l}{l!}+P\right),\\
&\overset{*}{z}_{1\beta}=e^{\varkappa_k t}\frac{D^{\beta-1}}{Dt^{\beta-1}}\left(G^*\frac{t^m}{m!}+Q\right),\\
&(\alpha=1,\ \ldots,\ l;\ \beta=1,\ \ldots,\ m),
\end{aligned}\right\}\qquad(17.16)$$

где

$$G=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega u_{l-1}dt,$$

$$G^*=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega v_{m-1}dt,$$

а P и Q суть полиномы t с периодическими коэффициентами, причем степень первого не превосходит $l-1$, а степень второго не превосходит $m-1$.

Подставляя (17.12), (17.13) и (17.16) в (17.6), мы получим для системы (16.1) l решений вида

$$y_{s\alpha}=e^{\varkappa_k t}\frac{D^{\alpha-1}}{Dt^{\alpha-1}}\left(G\varphi_s\frac{t^l}{l!}+Y_s(t)\right), \tag{17.17}$$

$$(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ l)$$

и m решений вида

$$y^*_{s\beta}=e^{\varkappa_k t}\frac{D^{\beta-1}}{Dt^{\beta-1}}\left(G^*\varphi_s\frac{t^m}{m!}+Y^*_s(t)\right), \tag{17.18}$$

$$(\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где Y_s и Y^*_s некоторые полиномы с периодическими коэффициентами, степени которых не превосходят, соответственно, $l-1$ и $m-1$. Вместе с решением (17.2) мы получаем, таким образом, для рассматриваемого корня $l+m+1=\mu$ независимых решений системы (16.1).

Допустим, сначала, что обе величины G и G^* отличны от нуля. Допустим также, для определенности, что $l\geqslant m$. Тогда, если мы к решениям (17.17) присоединим решение (17.2), умножив его предварительно на G, то мы получим $l+1$ решений, образующих группу. Что же касается решений (17.18), то комбинируя их с m последними решениями (17.17), мы получим m новых решений

$$\bar{y}_{s\beta}=e^{\varkappa_k t}\frac{D^{\beta-1}}{Dt^{\beta-1}}\left(G^*\frac{D^{l-m}}{Dt^{l-m}}Y_s-GY^*_s\right),$$

$$(\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

также образующих группу. В самом деле, степень хотя бы одного из полиномов, заключенных в скобках, в выражениях для $\overline{y}_{sp}$ равна $m-1$. Ибо, если бы все указанные полиномы имели меньшие степени, то, по крайней мере, все функции $\overline{y}_{sm}$ равнялись бы нулю и, следовательно, не все решения (17.17) и (17.18) были независимыми, что противоречит условию.

Таким образом, в рассматриваемом случае, наше утверждение о виде решений, отвечающих кратному корню характеристического уравнения, справедливо.

Допустим теперь, что $G=0$, но G^* отлично от нуля. В этом случае степень хотя бы одного из полиномов $Y_s(t)$ равна $l-1$, ибо, в противном случае, все функции y_{sl} равнялись бы нулю и, следовательно, в (17.17) содержалось бы меньше чем l решений. Поэтому, решения (17.17) образуют группу нужного нам вида. Присоединяя решение (17.2), умноженное предварительно на G^*, к решениям (17.18), мы получим еще одну группу. Следовательно, так же как и в предыдущем случае, мы будем иметь μ решений, разбивающихся на две группы. Если, наконец, G^* также равно нулю, то решения (17.18) также образуют группу, и решение (17.2) следует рассматривать как отдельную *третью* группу, состоящую из одного решения.

Таким образом, во всех случаях, наши утверждения об аналитическом виде решений системы (16.1) можно считать доказанными. Нам остается еще только показать, что число групп решений, отвечающих кратному корню, в точности равно $r-p$, где p — ранг характеристического определителя для рассматриваемого корня. Это утверждение легко доказывается следующим образом.

Число групп решений, отвечающих рассматриваемому кратному корню, равно, очевидно, числу независимых решений вида (17.2), которыми этот корень обладает. А это число равно числу линейно независимых решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (17.4), т. е. $r-p$.

Таким образом все наши утверждения полностью доказаны.

Справедливо и обратное предложение. Если для системы (16.1) удалось найти μ решений, разбивающихся на q групп вида (17.5), то $\rho_k = e^{\alpha_k \omega}$ является корнем μ-й кратности характеристического уравнения, и ранг характеристического определителя для этого корня будет равен $r-q$. Мы предлагаем читателю самому доказать это предложение. Укажем лишь только, что при составлении характетистического уравнения следует включить в исходную фундаментальную систему все заданные решения и непосредственно вычислить соответствующие этим решениям коэффициенты a_{sj}.

Примечание 1. Допустим, что для системы (16.1) удалось найти частное решение вида

$$y_s = e^{\alpha t}\left(\frac{t^m}{m!}\varphi_{sm} + \ldots + t\varphi_{s1} + \varphi_{s0}\right),$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r),$$

где φ_{sj} — периодические функции.

Подставляя это решение в уравнения (16.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, мы получим некоторые соотношения, которым должны удовлетворять функции φ_{sj}. Из этих соотношений сразу будет видно, что функции

$$y_{sl} = e^{\alpha t}\frac{D^l}{Dt^l}\left(\frac{t^m}{m!}\varphi_{sm} + \ldots + t\varphi_{s1} + \varphi_{s0}\right),$$
$$(l = 1, 2, \ldots, m;\ s = 1, 2, \ldots, r)$$

определяют еще m решений системы (16.1). Мы предоставляем читателю самому проделать указанные выкладки, которые, впрочем, чрезвычайно просты.

Примечание 2. Рассмотрим систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_s}{dt} = a_{s1}y_1 + \ldots + a_{sr}y_r \quad (s = 1, 2, \ldots, r)$$

и составим ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & \ldots, & a_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1}, & \ldots, & a_{rr}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — корни этого уравнения. Среди чисел λ_i могут быть одинаковые. Каждому корню λ_i отвечают, как известно, решения вида

$$y_s = e^{\lambda_i t}P_s(t) \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \tag{17.19}$$

где P_s — некоторые полиномы с постоянными коэффициентами.

С другой стороны, мы можем рассматривать наши уравнения как имеющие периодические коэффициенты периода ω, где ω — произвольное число. Но тогда из вида решений (17.19) вытекает, что величины $e^{\lambda_t \omega}$ являются корнями характеристического уравнения (в смысле предыдущего параграфа)

$$\begin{vmatrix} y_{11}(\omega)-\rho, & \ldots, & y_{1r}(\omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{r1}(\omega), & \ldots, & y_{rr}(\omega)-\rho \end{vmatrix} = 0,$$

где y_{sj} — фундаментальная система решений с единичной матрицей начальных значений. Следовательно, при произвольном ω, имеем тождественно

$$\begin{vmatrix} y_{11}(\omega)-\rho, & \ldots, & y_{1r}(\omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{r1}(\omega), & \ldots, & y_{rr}(\omega)-\rho \end{vmatrix} \equiv (e^{\lambda_1\omega}-\rho)(e^{\lambda_2\omega}-\rho)\ldots(e^{\lambda_r\omega}-\rho).$$

Это тождество, которым мы неоднократно пользовались, может быть, конечно, получено и непосредственно без обращения к теории уравнений с периодическими коэффициентами.

§ 18. Теорема Ляпунова о корнях характеристических уравнений сопряженных систем

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dz_s}{dt}+p_{1s}z_1+\ldots+p_{rs}z_r=0 \quad (s=1,\,2,\,\ldots,\,r), \tag{18.1}$$

сопряженную с системой (16.1). Как хорошо известно, два любых решения систем (16.1) и (18.1) связаны между собой соотношением

$$z_1y_1+z_2y_2+\ldots+z_ry_r=\text{const}.$$

Поэтому, если в этом соотношении величины $y_1, \ldots, y_r$ рассматривать как независимые переменные, а вместо $z_1, \ldots, z_r$ подставить r независимых решений системы (18.1), то мы получим r независимых первых интегралов системы (16.1).

Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_m$ — корни характеристического уравнения системы (18.1) и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — соответствующие характеристические показатели. При этом каждый кратный корень мы выписываем столько раз, сколько групп решений ему соответствует. Таким образом, среди чисел ρ_j могут быть и равные, но каждому из них соответствует только одна группа решений.

Обозначим через n_p число решений в группе, отвечающей корню ρ_p. При этом, очевидно,

$$n_1+n_2+\ldots+n_m=r.$$

Тогда, как было показано в предыдущем параграфе, система (18.1) имеет r независимых решений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}
z_{s1}^{(p)} &= e^{\alpha_p t}\varphi_{s,n_p-1}^{(p)}(t)\\
z_{s2}^{(p)} &= e^{\alpha_p t}\left(t\varphi_{s,n_p-1}^{(p)}+\varphi_{s,n_p-2}^{(p)}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_{sn_p}^{(p)} &= e^{\alpha_p t}\left(\frac{t^{n_p-1}}{(n_p-1)!}\varphi_{s,n_p-1}^{(p)}+\ldots+t\varphi_{s1}^{(p)}+\varphi_{s0}^{(p)}\right)\\
&(s=1,2,\ldots,r;\quad p=1,2,\ldots,m),
\end{aligned}\right\}\qquad(18.2)$$

где $\varphi_{sj}^{(p)}$ — периодические функции t периода ω. Мы придерживаемся при этом следующей системы обозначения решений: верхний индекс в $z_{sj}^{(p)}$ обозначает номер группы (номер корня), к которой принадлежит решение, а второй нижний индекс — номер решения в группе. Положим

$$\left.\begin{aligned}
&z_j^{(p)}=\varphi_{1,n_p-j}y_1+\ldots+\varphi_{r,n_p-j}y_r,\\
&(j=1,\ 2,\ldots,n_p;\quad p=1,\ 2,\ldots,m).
\end{aligned}\right\}\qquad(18.3)$$

Тогда, на основании вышесказанного, мы будем иметь следующие r первых интегралов системы (16.1):

$$\left.\begin{aligned}
&e^{\alpha_p t}z_1^{(p)}=\mathrm{const}\\
&e^{\alpha_p t}\left(tz_1^{(p)}+z_2^{(p)}\right)=\mathrm{const}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&e^{\alpha_p t}\left(\frac{t^{n_p-1}}{(n_p-1)!}z_1^{(p)}+\frac{t^{n_p-2}}{(n_p-2)!}z_2^{(p)}+\ldots+z_{n_p}^{(p)}\right)=\mathrm{const}\\
&(p=1,\ 2,\ldots,m).
\end{aligned}\right\}\qquad(18.4)$$

Соотношения (18.3) определяют линейную подстановку с периодическими коэффициентами, которая ни при каких значениях t не является особенной. В самом деле, определитель, составленный из r^2 функций (18.2), отличен от нуля, так как эти функции образуют фундаментальную систему решений линейных уравнений. Но этот определитель, как легко видеть, отличается никогда не обращающимся в нуль множителем

$$e^{(n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\ldots+n_m\alpha_m)t}$$

от определителя подстановки (18.3) и, следовательно, эта подстановка не является особенной ни при каком значении t.

Установив это, преобразуем систему (16.1) при помощи подстановки (18.3). Для этого учтем, что выражения (18.4) являются первыми интегралами этой системы. Дифференцируя эти интегралы по t и приравнивая производные нулю, легко получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dz_1^{(p)}}{dt}=-\alpha_p z_1^{(p)}\\
&\frac{dz_2^{(p)}}{dt}=-\alpha_p z_2^{(p)}-z_1^{(p)}\qquad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ m)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dz_{n_p}^{(p)}}{dt}=-\alpha_p z_{n_p}^{(p)}-z_{n_p-1}^{(p)}.
\end{aligned}\right\}\tag{18.5}$$

Таким образом, подстановкой (18.3) система уравнений (16.1) с периодическими коэффициентами преобразована в систему уравнений с постоянными коэффициентами. Эта последняя имеет, очевидно, фундаментальную систему независимых частных решений, распадающуюся на m групп таких, что первое решение в какой-нибудь p-ой группе имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&z_1^{(p)}=e^{-\alpha_p t}\\
&z_2^{(p)}=-te^{-\alpha_p t}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&z_{n_p}^{(p)}=\frac{(-t)^{n_p-1}}{(n_p-1)!}e^{-\alpha_p t}\\
&z_1^{(k)}=z_2^{(k)}=\ldots=z_{n_k}^{(k)}=0\\
&\quad(k=1,2,\ldots,p-1,p+1,\ldots,m)
\end{aligned}\right\}\tag{18.6}$$

и остальные $n_p - 1$ решений этой группы могут быть получены последовательным применением оператора $\frac{D}{Dt}$ к коэффициентам при $e^{-\alpha_p t}$.

Но система (18.5) может быть рассматриваема как частный случай системы с периодическими коэффициентами периода ω и вид (18.6) ее решений показывает, что величины $-\alpha_p$ являются ее характеристическими показателями и, следовательно, величины $\frac{1}{\rho_p}$ — корнями ее характеристического (в смысле § 16) уравнения. При этом мы видим, что в системе (18.5) корень $\frac{1}{\rho_p}$ имеет такую же кратность, как и корень ρ_p в системе (18.1) и что этим корням в обеих системах отвечает одинаковое число групп решений с одинаковым числом решений в каждой группе.

Но как было показано в § 15, характеристическое уравнение инвариантно относительно линейного преобразования переменных и, следовательно, характеристические уравнения систем (16.1) и (18.5) совпадают. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме Ляпунова.

Теорема Если ρ — корень характеристического уравнения системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами, то величина $\frac{1}{\rho}$ будет корнем характеристического уравнения сопряженной системы. При этом кратности обоих корней, числа групп решений, им соответствующие, и числа решений в соответствующих группах одинаковы.

§ 19. Приведение уравнений с периодическими коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами

В предыдущем параграфе, при доказательстве теоремы о характеристических уравнениях сопряженных систем, мы установили попутно важное свойство систем линейных уравнений с периодическими коэффициентами. А именно, мы показали, что любую систему линейных уравнений с периодическими коэффициентами можно преобразовать в систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами. При этом преобразование может быть выполнено при помощи не-особенной линейной подстановки с периодическими коэффициентами.

Как мы показали, преобразованная система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz_1^{(p)}}{dt} = \alpha_p z_1^{(p)}, \\ &\frac{dz_j^{(p)}}{dt} = \alpha_p z_j^{(p)} - A_{j-1}^{(p)} z_{j-1}^{(p)}, \\ &(j = 2, \ldots, n_p;\quad p = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}\right\} \tag{19.1}$$

причем коэффициенты $A_i^{(p)}$ равны все единице, а α_p — характеристические показатели преобразуемой системы (а не сопряженной системы, как в предыдущем параграфе).

Рассмотрим подробнее эту систему. Покажем, прежде всего, что $A_i^{(p)}$ можно сделать отличными от единицы и равными любым наперед заданным постоянным величинам. С этой целью преобразуем уравнения (19.1) при помощи подстановки

$$u_j^{(p)} = A_1^{(p)} \ldots A_{j-1}^{(p)} z_j^{(p)} \quad (j = 2, \ldots, n_p),$$
$$u_1^{(p)} = z_1^{(p)},$$

где $A_i^{(p)}$ — произвольные постоянные. Тогда, преобразованная система будет совпадать с системой (19.1), если в последней, вместо $z_j^{(p)}$ писать $u_j^{(p)}$. Мы будем, однако, предполагать, что такое преобразование было уже выполнено и будем переменные попрежнему обозначать через $z_j^{(p)}$. Мы можем, следовательно, предполагать, что в уравнениях (19.1) постоянные $A_i^{(p)}$ имеют наперед заданные значения.

Полученная нами система (19.1) будет иметь комплексные коэффициенты, так как величины α_p будут, вообще говоря, комплексными. Поэтому, если мы желаем иметь дело только с вещественными уравнениями, то необходимы будут дальнейшие преобразования. Покажем, как это сделать.

Величина α_p будет комплексной либо тогда, когда соответствующий корень ρ_p характеристического уравнения является комплексным, либо когда этот корень является вещественным, но отрицательным. Рассмотрим сначала первый случай. Допустим, что корень ρ_i является комплексным.

Так как коэффициенты уравнений (16.1) вещественны, то все комплексные корни характеристического уравнения и все комплексные решения системы (16.1) распадаются на пары сопряженных.

Поэтому, принимая во внимание соотношения (18.3), определяющие переменные $z_j^{(s)}$ $(s=1, 2, \ldots, m)$, легко находим, что среди этих переменных имеются величины, комплексно сопряженные с $z_j^{(i)}$ $(j=1, 2, \ldots, n_i)$. Эти величины отвечают корню, комплексно сопряженному с ρ_i и, следовательно, если этим корнем является ρ_l, то эти величины будут $z_j^{(l)}$ $(j=1, 2, \ldots, n_l=n_i)$.

Пусть

$$z_j^{(i)}=u_j^{(i)}+\sqrt{-1}\,v_j^{(i)},$$

$$\rho_i=\lambda_i+\sqrt{-1}\,\mu_i.$$

Примем $u_j^{(i)}$ и $v_j^{(i)}$ за новые переменные вместо $z_j^{(i)}$ и $z_j^{(l)}$. Тогда простым выделением вещественных и мнимых частей (величины $A_j^{(i)}$ считаем при этом вещественными) найдем, что i-ая и l-ая группы уравнений (19.1), состоящие из $n_i=n_l$ уравнений каждая, могут быть объединены в одну группу $2n_i$ уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du_1^{(i)}}{dt}=\lambda_i u_1^{(i)}-\mu_i v_1^{(i)}, \qquad \frac{dv_1^{(i)}}{dt}=\lambda_i v_1^{(i)}+\mu_i u_1^{(i)}\\
&\frac{du_j^{(i)}}{dt}=\lambda_i u_j^{(i)}-\mu_i v_j^{(i)}+A_{j-1}^{(i)}u_{j-1}^{(i)},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j=2, \ldots, n_i)\\
&\frac{dv_j^{(i)}}{dt}=\lambda_i v_j^{(i)}+\mu_i u_j^{(i)}+A_{j-1}^{(i)}v_{j-1}^{(i)},
\end{aligned}\right\} \tag{19.2}$$

с вещественными коэффициентами.

Допустим теперь, что ρ_i является вещественным отрицательным числом. В этом случае, взяв арифметическое значение логарифма, мы можем писать

$$\alpha_i=\frac{1}{\omega}\ln(-\rho_i)+\frac{(2n+1)\pi\sqrt{-1}}{\omega}=$$

$$=\lambda_i+\frac{(2n+1)\pi\sqrt{-1}}{\omega},$$

где n — целое число и величина λ_i — вещественна. Решения (18.2), отвечающие корню ρ_i, будут получаться комплексными. Но так как коэффициенты уравнений (16.1) вещественны, то вещественные части этих решений будут также являться решениями. Отсюда непосредственно вытекает, что если в подстановке (18.3) мы заменим величины $\varphi_{\alpha\beta}^{(i)}$ вещественными частями величин $\varphi_{\alpha\beta}^{(i)} e^{\frac{(2n+1)\pi\sqrt{-1}}{\omega}t}$, то для полученных таким образом вещественных переменных $z_j^{(i)}$ будем иметь уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1^{(i)}}{dt} &= \lambda_i z_1^{(i)}, \\ \frac{dz_j^{(i)}}{dt} &= \lambda_i z_j^{(i)} + A_{j-1}^{(i)} z_{j-1}^{(i)} \quad (j = 2, \ldots, n_i), \end{aligned}\right\} \tag{19.3}$$

где, как и прежде, величины $A_{j-1}^{(i)}$ путем дополнительного преобразования можно сделать какими угодно. Заметим, что в рассматриваемом случае коэффициенты линейных форм $z_j^{(i)}$, равные вещественным частям функций $e^{\frac{1}{\omega}(2n+1)\pi\sqrt{-1}}\varphi_{\alpha\beta}^{(i)}$, хотя и остаются периодическими, но период этих функций будет не ω, а 2ω.

Таким образом, можно считать доказанным, что систему (16.1) с периодическими коэффициентами можно всегда преобразовать при помощи вещественной линейной подстановки в систему уравнений с постоянными коэффициентами. При этом коэффициенты подстановки будут периодическими функциями t периода ω или 2ω и эта подстановка ни при каких значениях t не будет особенной. Преобразованная система распадается на группы уравнений вида (19.2) или (19.3), где λ_i — вещественные части характеристических показателей.

Рассмотрим группу уравнений типа (19.3). Предполагая, что $\lambda_i \neq 0$, составим квадратичную форму

$$2V_i = \lambda_i \left(z_1^{(i)2} + z_2^{(i)2} + \ldots + z_{n_i}^{(i)2}\right)$$

и вычислим ее производную по времени, считая, что $z_j^{(i)}$ удовлетворяют рассматриваемым уравнениям. Будем иметь:

$$\frac{dV_i}{dt}=\lambda_i^2(z_1^{(i)2}+\ldots+z_{n_i}^{(i)2})+\lambda_i\sum_{j=2}^{n_i}A_{j-1}^{(i)}z_{j-1}^{(i)}z_j^{(i)}.$$

Следовательно, если постоянные $A_{j-1}^{(i)}$ достаточно малы, что мы всегда можем предполагать, то производная будет определенно-положительной квадратичной формой от $z_1^{(i)}$, ..., $z_{n_i}^{(i)}$. Точно так же, для группы уравнений типа (19.2), квадратичная форма

$$2W_i=\lambda_i(u_1^{(i)2}+v_1^{(i)2}+\ldots+v_{n_i}^{(i)2}+v_{n_i}^{(i)2})$$

будет иметь производную

$$\frac{dW_i}{dt}=\lambda_i^2(u_1^{(i)2}+v_1^{(i)2}+\ldots+u_{n_i}^{(i)2}+v_{n_i}^{(i)2})+$$
$$+\lambda_i\sum_{j=1}^{n_i}A_{j-1}^{(i)}(u_{j-1}^{(i)}u_j^{(i)}+v_{j-1}^{(i)}v_j^{(i)}),$$

являющуюся определенно-положительной квадратичной формой от $u_j^{(i)}$, $v_j^{(i)}$ ($j=1, 2, \ldots, n_i$), если только λ_i не равно нулю.

Следовательно, если мы составим сумму произведений квадратов всех r переменных, входящих в преобразованную систему, на вещественные части соответствующих характеристических показателей, то производная по t от полученной таким образом квадратичной формы будет определенно-положительной формой этих переменных, если только вещественные части всех характеристических показателей отличны от нуля.

Этим важным свойством преобразованной системы мы воспользуемся в дальнейшем для доказательства основных теорем Ляпунова.

Для удобства записи перенумеруем все переменные, входящие в преобразованную систему, в каком-нибудь определенном порядке и обозначим их через $z_1, z_2, \ldots, z_r$. Преобразованная система запишется в виде

$$\frac{dz_s}{dt}=a_{s1}z_1+a_{s2}z_2+\ldots+a_{sr}z_r, \qquad (19.4)$$
$$(s=1, 2, \ldots, r),$$

где a_{sj} — постоянные, причем уравнения (19.4) распадаются на группы вида (19.2) и (19.3). Обозначим, попрежнему, все корни характеристического уравнения через $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$, выписывая теперь, однако, каждый корень столько раз, какова его кратность. Нумерацию корней выбираем при этом так, чтобы переменная z_k входила в системе (19.4) в ту группу уравнений, которая соответствует корню ρ_k.

Мы можем теперь вышеуказанное свойство преобразованной системы выразить следующим образом:

если ни одна из величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ не равна нулю, то полная производная по t от квадратичной формы

$$2V=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\ldots+\lambda_rz_r^2,$$

составленная в силу системы (19.4), *т. е. выражение*

$$W=\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{r}\lambda_sz_s(a_{s1}z_1+\ldots+a_{sr}z_r) \qquad (19.5)$$

есть форма определенно-положительная. Здесь, попрежнему, λ_s обозначает вещественную часть характеристического показателя, соответствующего корню ρ_s.

Допустим теперь, что среди величин λ_s имеются равные нулю. Выберем положительную величину α таким образом, чтобы ни одна из величин $\lambda_s-\alpha$ не равнялась нулю. Тогда, если мы рассмотрим квадратичную форму

$$2V^*=(\lambda_1-\alpha)z_1^2+(\lambda_1-\alpha)z_2^2+\ldots+(\lambda_r-\alpha)z_r^2 \qquad (19.6)$$

и составим ее полную производную по времени в силу уравнений, отличающихся от (19.4) тем, что все величины λ_s заменены на $\lambda_s-\alpha$, то, по предыдущему, полученная производная будет формой определенно-положительной. Но по структуре уравнений (19.4), распадающихся на системы типа (19.2) и (19.3), замена всех величин λ_s на $\lambda_s-\alpha$ равносильна замене всех диагональных коэффициентов a_{ss} на $a_{ss}-\alpha$. Следовательно, мы приходим к заключению, что квадратичная форма

$$W^* = \sum_{s=1}^{r}(\lambda_s-\alpha)z_s(a_{s1}z_1+\ldots+a_{sr}z_r-\alpha z_s) \quad (19.7)$$

является определенно-положительной.

§ 20. Теоремы Ляпунова об устойчивости периодических движений

Мы переходим теперь к установлению общих теорем Ляпунова об устойчивости периодических движений. Пусть

$$x_s=\varphi_s(t) \quad (s=1, 2, \ldots, r) \qquad (20.1)$$

какое-нибудь периодическое решение периода ω системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(t, x_1, \ldots, x_r) \quad (s=1, 2, \ldots, r),$$

где X_s — аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_r$ в некоторой области G, в которой лежит также и решение (20.1). По отношению к t, X_s являются непрерывными периодическими функциями периода ω. В частности, функции X_s могут и вовсе не зависеть от t. Для исследования устойчивости решения (20.1) составим дифференциальные уравнения возмущенного движения. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{dy_s}{dt}=p_{s1}y_1+\ldots+p_{sr}y_r+Y_s(t, y_1, \ldots, y_r), \quad (20.2)$$

$$(s=1, 2, \ldots, r),$$

где

$$p_{sj}=\left(\frac{\partial X_s}{\partial x_j}\right)_{x_i=\varphi_i(t)}$$

являются известными периодическими функциями t периода ω, а Y_s — аналитические функции переменных $y_1, \ldots, y_r$ в окрестности точки $y_1=y_2=\ldots=y_r=0$, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка, причем коэффициенты этих разложений суть также периодические функции t периода ω.

Рассмотрим уравнения в вариациях решения (20.1), т. е. систему *линейных уравнений*

$$\frac{dy_s}{dt}=p_{s1}y_1+\ldots+p_{sr}y_r \quad (s=1, 2, \ldots, r). \quad (20.3)$$

Характеристические показатели этой системы уравнений называются, по Пуанкаре, *характеристическими показателями периодического решения* (20.1).

Результаты § 18, устанавливающие общий вид решений уравнений с периодическими коэффициентами, показывают, что, по крайней мере, в первом приближении вопрос об устойчивости решения (20.1) разрешается его характеристическими показателями. Если вещественные части всех этих показателей отрицательны, то на основании (17.5) все решения уравнений (20.3) стремятся к нулю при $t=\infty$ и, следовательно, невозмущенное движение в первом приближении устойчиво и притом асимптотически. Напротив, если среди характеристических показателей невозмущенного движения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то соответствующее ему решение уравнений (20.3) неограниченно возрастает при $t=\infty$ и, следовательно, невозмущенное движение в первом приближении неустойчиво. Если же вещественные части некоторых характеристических показателей равны нулю, а остальных — отрицательны, то невозмущенное движение в первом приближении может быть как устойчивым, так и неустойчивым. А именно, если характеристические показатели с нулевыми вещественными частями являются простыми, то соответствующие решения уравнений (20.3) будут ограниченными и, следовательно, невозмущенное движение будет устойчиво (но не асимптотически). То же самое будет справедливо и в том случае, когда некоторые характеристические показатели с равными нулю вещественными частями будут кратными, если только число групп решений, соответствующих каждому такому показателю, равно его кратности. Но если кратность хотя бы одного показателя, с равной нулю вещественной частью, превышает число соответствующих ему групп решений, то среди этих решений будут такие, которые содержат вековые члены[1], и поэтому невозмущенное движение будет в первом приближении неустойчивым.

Таким образом, в первом приближении, задача устойчивости приводится к исследованию корней характеристического уравнения системы (20.3). Что, однако, получится, если мы учтем также и нелинейные члены в уравнениях возмущенного движения? Исчерпывающий ответ на этот вопрос дал Ляпунов, который показал, что имеют место нижеследующие теоремы.

Теорема I. Если вещественные части всех характеристических показателей периодического движения отрицательны, то это движение будет устойчиво и притом асимптотически, каковы бы ни были члены высших порядков в уравнениях возмущенного движения.

Доказательство. Как было показано в предыдущем параграфе, существует система независимых переменных $z_1, z_2, \ldots, z_r$, связанных с $y_1, y_2, \ldots, y_r$ линейной подстановкой с периодическими (периода ω или 2ω) коэффициентами и обладающих тем свойством, что уравнения в вариациях (20.3), выраженные в этих переменных, принимают вид

$$\frac{dz_s}{dt} = a_{s1}z_1 + a_{s2}z_2 + \ldots + a_{sr}z_r \quad (s = 1, 2, \ldots, r),$$

где a_{sj} — постоянные. При этом постоянные a_{sj} таковы, что квадратичная форма

$$W = \sum_{s=1}^{r} \lambda_s z_s (a_{s1}z_1 + \ldots + a_{sr}z_r) \tag{20.4}$$

определенно-положительна. Здесь λ_s — вещественные части характеристических показателей.

Подстановка, о которой идет речь, не является особенной ни при каких значениях t и, будучи периодической, она обладает определителем, модуль которого имеет отличный от нуля нижний предел. Поэтому задача устойчивости по отношению к величинам y_j равносильно той же задаче по

[1] Вековыми мы называем члены вида $t^m\varphi(t)$, где m — целое положительное число, а φ — ограниченные функции.

отношению к величинам z_j. Следовательно, мы можем эти последние величины принять за новые переменные. При такой подстановке дифференциальные уравнения возмущенного движения примут вид:

$$\frac{dz_s}{dt} = a_{s1}z_1 + \ldots + a_{sr}z_r + Z_s(t, z_1, \ldots, z_r), \quad (20.5)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, r),$$

где Z_s — аналитические функции переменных $z_1, \ldots, z_r$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка. Коэффициенты этих разложений суть ограниченные (периодические) функции t.

Рассмотрим квадратичную форму

$$V = -(\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2).$$

Так как все величины λ_s по условию отрицательны, то форма V будет определенно-положительной. Рассматривая в этой форме величины z_j как функции t, удовлетворяющие уравнениям (20.5), составим ее производную по t. Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = -W - \sum_{s=1}^{r} \lambda_s z_s Z_s. \quad (20.6)$$

Но $-W$ — определенно-отрицательная квадратичная форма, а разложение $\sum \lambda_s z_s Z_s$ содержит члены не ниже третьего порядка, причем коэффициенты этого разложения ограничены. Поэтому, можно найти такое достаточно малое положительное число H, что выражение (20.6) при всех значениях t и при всех значениях z_s, удовлетворяющих неравенствам

$$|z_s| \leqslant H \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \quad (20.7)$$

будет принимать отрицательные значения и обращаться в нуль только при $z_1 = \ldots = z_r = 0$. Более того, для всякого положительного числа h найдется положительное число $l(h)$ такое, что будем иметь

$$\frac{dV}{dt} < -l(h) \quad \text{при} \quad \sum z_s^2 > h. \quad (20.8)$$

Установив это, рассмотрим произвольное положительное число ε, меньшее H. Обозначим, соответственно, через m и M наименьшее и наибольшее числа из $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_r$ и пусть η — положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\eta < \varepsilon \sqrt{\frac{m}{rM}}.$$

Покажем, что для любого решения $z_1(t), \ldots, z_r(t)$ уравнений (20.5), для которого в начальный момент времени t_0 выполняются неравенства

$$|z_s(t_0)| \leqslant \eta \quad (s = 1, 2, \ldots, r),$$

будут при всех $t > t_0$ выполняться неравенства

$$|z_s(t)| < \varepsilon \quad (s = 1, 2, \ldots, r) \tag{20.9}$$

и, следовательно, невозмущенное движение устойчиво. В самом деле, число η, очевидно, меньше ε и поэтому неравенства (20.9) будут выполняться в силу непрерывности функций $z_s(t)$ по крайней мере при значениях t, достаточно близких к t_0. Допустим, что эти неравенства впервые нарушаются при $t = T$, т. е., хотя бы одна из величин $|z_s|$ достигает к этому моменту времени значения ε. Так как в интервале $(t_0, t_0 + T)$ неравенства (20.7) выполняются, то в этом интервале производная (20.6) будет отрицательной, и мы можем поэтому писать:

$$(V)_{t=T} = (V)_{t=t_0} + \int_{t_0}^{T} \frac{dV}{dt}\,dt < (V)_{t=t_0}$$

или

$$-\sum_{s=1}^{r} \lambda_s z_s^2(T) < -\sum_{s=1}^{r} \lambda_s z_s^2(t_0),$$

откуда

$$m\sum_{s=1}^{r} z_s^2(T) < M\sum_{s=1}^{r} z_s^2(t_0) \leqslant Mr\eta^2 < m\varepsilon^2,$$

что, однако, невозможно, так как при $t = T$ хотя бы одна из величин $|z_s|$ достигает значения ε.

Из полученного противоречия мы заключаем, что неравенства (20.9) никогда не нарушаются, т. е. невозмущенное движение устойчиво.

Покажем, что, кроме того,

$$\lim_{t\to\infty} z_s(t) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \tag{20.10}$$

т. е. что невозмущенное движение устойчиво асимптотически. С этой целью заметим, что поскольку, по доказанному, неравенства (20.9) выполняются при всех $t \geqslant t_0$, то и производная (20.6) будет все время оставаться отрицательной. Поэтому положительная форма V, рассматриваемая как функция t, будет монотонно-убывающей и, следовательно, при неограниченном возрастании t она будет стремиться к определенному пределу. Покажем, что этот предел равен нулю. Допустим противное, что этот предел равен отличному от нуля положительному числу a. Тогда при всех $t \geqslant t_0$ будем иметь

$$M \sum_{s=1}^{r} z_s^2 \geqslant V > a$$

и, следовательно, на основании (20.8)

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -l\left(\frac{a}{M}\right),$$

что дает

$$V = (V)_{t=t_0} + \left| \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\,dt \leqslant (V)_{t=t_0} - l(t - t_0). \right. \tag{20.11}$$

Неравенство (20.11) не может, однако, выполняться при всех $t \geqslant t_0$, так как V может принимать только положительные значения. Следовательно, мы должны заключить, что функция V с неограниченным возрастанием t стремится к нулю, откуда непосредственно вытекает справедливость (20.10).

Таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема 2. Если вещественная часть хоть одного характеристического показателя периодического движения положительна, то это движение неустойчиво, каковы бы ни были члены высших порядков в уравнениях возмущенного движения.

Доказательство. Воспользуемся теми же переменными $z_1, z_2, \ldots, z_r$, что и при доказательстве предыдущей теоремы. В рассматриваемом случае некоторые из величин λ_j могут быть равны нулю. Поэтому форма W, определяемая формулой (19.5), не будет определенно-положительной, но таким свойством будет обладать форма W^*, определяемая формулой (19.7), где α — положительная постоянная, не равная ни одной из величин λ_j.

Рассмотрим квадратичную форму

$$2V^* = (\lambda_1 - \alpha) z_1^2 + (\lambda_2 - \alpha) z_2^2 + \ldots + (\lambda_r - \alpha) z_r^2$$

и составим ее производную по t в силу уравнений возмущенного движения (20.5). Будем иметь:

$$\frac{dV^*}{dt} = \sum_{s=1}^{r} (\lambda_s - \alpha) z_s \{ a_{s1} z_1 + \ldots + a_{sr} z_r - \alpha z_s +$$

$$+ Z_s + \alpha z_s \} = 2\alpha V^* + W^* + \sum_{s=1}^{r} (\lambda_s - \alpha) z_s Z_s.$$

Так как форма W^* определенно-положительна, а разложение функции $\sum (\lambda_s - \alpha) z_s Z_s$ начинается членами не ниже третьего порядка, причем коэффициенты этого разложения ограничены, то можно найти такую достаточно малую положительную постоянную H, что при выполнении неравенств (20.7) будет выполняться также неравенство

$$\frac{dV^*}{dt} > \alpha V^*. \tag{20.12}$$

Установив это, допустим, для определенности, что λ_1 является той из величин λ_j, которая по условию теоремы положительна. Величину α выберем настолько малой, чтобы величина $\lambda_1 - \alpha$ была также положительной.

Чтобы доказать неустойчивость движения, достаточно показать, что существует решение уравнений (20.5) со сколь угодно малыми начальными значениями, для которого хотя бы одна из величин $|z_s|$ превзойдет в некоторый момент времени какое-нибудь фиксированное число. В качестве такого числа мы примем величину H и рассмотрим решение уравнений (20.5) с начальными значениями $z_1(t_0) > 0$, $z_2(t_0) = \ldots = z_r(t_0) = 0$. Покажем, что это решение выйдет из области (20.7), как бы мала ни была величина $|z_1(t_0)|$. Допустим противное, что для рассматриваемого решения условия (20.7) всегда выполняются.

Тогда для этого решения будет всегда выполняться неравенство (20.12), из которого вытекает

$$V > (V)_{t=t_0} e^{2\alpha t},$$

так как величина $(V)_{t=t_0} = (\lambda_1 - \alpha) z_1(t_0)$ — положительна. Следовательно, для рассматриваемого решения функция V с неограниченным возрастанием t неограниченно возрастает, что, очевидно, противоречит предположению о том, что неравенства (20.7) никогда не нарушаются. Таким образом, рассматриваемое решение покидает в некоторый момент времени область (20.7) и это будет справедливо, как бы мала ни была величина $|z_1(t_0)|$. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво, что и доказывает теорему.

Нам осталось рассмотреть еще тот случай, когда периодическое движение, не имея характеристических показателей с положительными вещественными частями, имеет показатели с вещественными частями, равными нулю. Как мы видели выше, при этих условиях, рассматриваемое движение, в первом приближении, может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Однако, как показал Ляпунов, задача устойчивости в этом случае первым приближением не решается. А именно, члены высших порядков в уравнениях возмущенного движения могут быть выбраны таким образом, чтобы получить по желанию как устойчивость, так и неустойчивость, независимо от того, будет ли невозмущенное движение в первом приближении устойчивым или неустойчивым.

Доказательства этого предложения Ляпунова мы здесь не приводим.

Пусть ρ_j — корни характеристического уравнения уравнений в вариациях исследуемого периодического движения. Вещественные части характеристических показателей этого решения будут отрицательными, равными нулю или положительными, в зависимости от того, будут ли модули соответствующих величин ρ_j больше, равны или меньше единицы.

Поэтому мы можем теоремы Ляпунова выразить следующим образом:

для того, чтобы периодическое движение было устойчивым, необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$|\rho_j| \leqslant 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{20.13}$$

Эти условия будут также и достаточными для устойчивости, если они выполняются со знаком неравенства.

§ 21. Теорема Андронова и Витта об устойчивости периодических движений автономных систем

Допустим, что

$$x_s = \varphi_s(t) \tag{21.1}$$

есть периодическое решение периода ω автономной системы. Покажем, что по крайней мере один характеристический показатель этого решения имеет вещественную часть, равную нулю. В самом деле, так как рассматриваемая система автономна, то решение (21.1) зависит от произвольной постоянной h, которая может быть добавлена к t. Но тогда по свойству уравнений в вариациях (см. § 15) функции

$$\left(\frac{d\varphi_s(t+h)}{dt}\right)_{h=0} = \frac{d\varphi_s(t)}{dt}$$

определяют решение этих уравнений. Это решение является, очевидно, периодическим, откуда вытекает, что по крайней мере один характеристический показатель уравнений в вариациях имеет вещественную часть, равную нулю[1].

Допустим, что этот характеристический показатель является простым и что вещественные части остальных характеристических показателей отрицательны. Тогда, согласно результатам Ляпунова, вопрос об устойчивости движения (21.1) должен разрешаться членами высших порядков в уравнениях возмущенного движения. Однако в рассматриваемом случае,

---

[1] Мнимая часть этого показателя равна, очевидно, $\frac{2\pi m i}{\omega}$, где m — целое число, а соответствующий корень характеристического уравнения равен единице.

эти члены высших порядков не являются вполне произвольными. То обстоятельство, что решение (21.1) содержит произвольную постоянную, накладывает определенные зависимости не только на уравнения в вариациях, но и на члены высших порядков в уравнениях возмущенного движения. Эти зависимости как раз таковы, что имеет место следующая теорема, установленная Андроновым и Виттом[1], которую мы здесь приводим без доказательства.

Если характеристический показатель с равной нулю вещественной частью какого-нибудь периодического движения автономной системы является простым и если вещественные части остальных характеристических показателей этого движения отрицательны, то это движение устойчиво.

§ 22. Приближенное вычисление характеристических показателей. Форма Пуанкаре характеристического уравнения

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\rho^r + A_1\rho^{r-1} + \ldots + A_{r-1}\rho + A_r = 0 \qquad (22.1)$$

уравнений в вариациях какого-нибудь периодического решения. Мы видели в предыдущих параграфах, что задача устойчивости рассматриваемого периодического решения приводится к исследованию корней уравнений (22.1) и, следовательно, требует прежде всего нахождения инвариантов $A_1, \ldots, A_r$. Одна из этих величин, а именно A_r, может быть вычислена сразу по формуле (16.8).

Что же касается остальных инвариантов, то для нахождения их мы должны проинтегрировать уравнения в вариациях, что в общем случае невозможно. Однако, для задачи устойчивости, нам нет необходимости знать точное значение корней уравнения (22.1). Достаточно лишь определять, будут ли модули этих величин меньше или больше единицы.

---

[1] Андронов и Витт. Об устойчивости по Ляпунову. Журн. эксп. и теор. физики, т. 3, вып. 5, 1933. Обобщение этой теоремы дано Н. Ф. Отроковым (Уч. зап. Горьковского гос. университета вып. 6, 1939) и И. Г. Малкиным (Прикл. мат. и мех., т. VIII, 1944).

Следовательно, мы можем ограничиться приближенными значениями инвариантов A_j.

Все вышесказанное справедливо при исследовании устойчивости периодических движений любых систем. Мы переходим теперь к нашей задаче, когда для вычисления периодических движений мы пользуемся методом Пуанкаре. В этом случае правые части уравнений движения зависят еще аналитически от параметра μ. Этим можно воспользоваться для приближенного вычисления инвариантов A_j.

Пусть

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sr}y_r \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \qquad (22.2)$$

где

$$p_{sj} = \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_j}\right)_{x_i = \varphi_i(t)}$$

— уравнения в вариациях рассматриваемого периодического движения. Уравнение (22.1) может быть представлено, как мы знаем, в виде

$$\begin{vmatrix} y_{11}(\omega) - \rho, & y_{12}(\omega), & \ldots, & y_{1r}(\omega) \\ y_{21}(\omega), & y_{22}(\omega) - \rho, & \ldots, & y_{2r}(\omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{r1}(\omega), & y_{r2}(\omega), & \ldots, & y_{rr}(\omega) - \rho \end{vmatrix} = 0, \qquad (22.3)$$

где y_{sj} — фундаментальная система решений уравнений (22.2), определяемая начальными условиями

$$y_{sj}(t_0) = \begin{cases} 1 & (\text{при } s = j), \\ 0 & (\text{при } s \neq j). \end{cases} \qquad (22.4)$$

Если коэффициенты p_{sj} зависят от какого-нибудь параметра, то величины y_{sj} и, следовательно, также инварианты A_j, будут также функциями этого параметра. В частности, если p_{sj} являются аналитическими функциями параметра, то и y_{sj} будут зависеть от этого параметра также аналитически. В нашей задаче коэффициенты p_{sj} зависят от параметра μ, так как от этого параметра зависят как функции X_s, так и само периодическое решение. Функции X_s зависят от μ аналитически. Что же касается периодического решения, то оно может быть и не аналитическим относительно μ. Допустим, однако, что мы имеем дело с тем случаем, когда рассматриваемое периодическое решение является аналитическим относительно μ.

Пусть

$$\varphi_s(t)=\varphi_s^{(0)}(t)+\mu\varphi_s^{(1)}(t)+\ldots$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

где $\varphi_s^{(j)}(t)$ — периодические функции t периода ω, причем функции $\varphi_s^{(0)}$ определяют порождающее решение. Имеем далее,

$$p_{sj}=p_{sj}^{(0)}+\mu p_{sj}^{(1)}+\ldots \quad (s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

где $p_{sj}^{(0)}$, $p_{sj}^{(1)}$, ... — известные периодические функции. В частности,

$$p_{sj}^{(0)}=\left(\frac{\partial X_s}{\partial x_j}\right)_{x_i=\varphi_i(t),\ \mu=0},$$

откуда следует, что уравнения

$$\frac{dy_s^{(0)}}{dt}=p_{s1}^{(0)}y_1^{(0)}+\ldots+p_{sr}^{(0)}y_r^{(0)} \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ r) \tag{22.5}$$

являются уравнениями в вариациях порождающей системы, причем в качестве невозмущенного решения принято порождающее решение.

Будем искать фундаментальную систему решений y_{sj} уравнений (22.2) под видом рядов

$$y_{sj}=y_{sj}^{(0)}+\mu y_{sj}^{(1)}+\ldots \quad (s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

расположенных по степеням μ. Функции $y_{sj}^{(0)}$ будут удовлетворять уравнениям (22.5) и начальным условиям

$$y_{sj}^{(0)}(t_0)=\begin{cases}1 & (s=j)\\ 0 & (s\neq j)\end{cases},$$

а функции $y_{sj}^{(k)}$ — начальным условиям

$$y_{sj}^{(k)}(t_0)=0 \quad (s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ r;\quad k=1,\ 2,\ \ldots)$$

и уравнениям вида

$$\frac{dy_{sj}^{(k)}}{dt}=p_{s1}^{(0)}y_{1j}^{(k)}+\ldots+p_{sr}^{(0)}y_{rj}^{(k)}+f_{sj}^{(k)},$$

где $f_{sj}^{(k)}$ — линейные функции с периодическими коэффициентами от $y_{sj}^{(0)}, y_{sj}^{(1)}, \ldots, y_{sj}^{(k-1)}$. Отсюда видно, что определение функций $y_{sj}^{(k)}$ приводится к интегрированию уравнений в вариациях порождающей системы, и если последнюю задачу удастся разрешить, то величины y_{sj}, а вместе с ними и величины A_j, можно будет вычислить с какой угодно степенью точности. Но в § 5 мы видели, что нахождение самого периодического решения также требует интегрирования уравнений в вариациях порождающей системы. Поэтому если вообще методом Пуанкаре удастся вычислить периодическое решение, то приближенное вычисление его характеристических показателей не представит особых трудностей.

Можно указать другой способ приближенного вычисления характеристических показателей, который не предполагает аналитичности периодического решения относительно μ. Этот способ основывается на форме характеристического уравнения, установленной Пуанкаре. К выводу этой формы характеристического уравнения мы сейчас и переходим.

Пусть $\varphi_s^0(0)+\beta_s(\mu)$ — начальные значения рассматриваемого периодического решения. Функции $\beta_s(\mu)$ удовлетворяют, как мы знаем, уравнениям (2.4). Рассмотрим решение уравнений (1.2) с начальными значениями $\varphi_s^0(0)+\beta_s(\mu)+\gamma_s$, где γ_s — произвольные достаточно малые постоянные. Это решение, которое мы обозначим через $x_s(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ будет аналитическим относительно $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ и мы можем писать:

$$x_s(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)=x_s(t, 0, \ldots, 0)+\Gamma_{s1}\gamma_1+\ldots+\Gamma_{sr}\gamma_r+\ldots$$

$$(s=1, 2, \ldots, r).$$

Величины Γ_{sj} удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\Gamma_{sj}}{dt}=p_{s1}\Gamma_{1j}+\ldots+p_{sr}\Gamma_{rj} \quad (s=1, 2, \ldots, r)$$

и начальным условиям

$$\Gamma_{sj}(0)=\begin{cases}1 & (s=j)\\ 0 & (s\neq j)\end{cases}.$$

Следовательно,

$$\Gamma_{sj}=y_{sj}.$$

Функции $x_s(t, 0, \ldots, 0)$ определяют, очевидно, рассматриваемое периодическое решение и будут, следовательно, периодическими относительно t с периодом ω. Поэтому, составляя разности

$$[x_s]=x_s(\omega, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)-x_s(0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r),$$

будем иметь:

$$\left(\frac{\partial [x_s]}{\partial \gamma_j}\right)_{\gamma_1=\ldots=\gamma_r=0}=y_{sj}(\omega)-y_{sj}(0).$$

Но функции $x_s(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ могут быть, очевидно, получены из функций $x_s(t, \beta_1, \ldots, \beta_r, \mu)$, рассмотренных в § 2, простой заменой величин β_j величинами $\beta_j(\mu)+\gamma_j$. Отсюда легко находим, что

$$y_{sj}(\omega)-y_{sj}(0)=\frac{\partial \psi_s(\beta_1(\mu), \ldots, \beta_r(\mu))}{\partial \beta_j},$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_r$ — левые части уравнений (2.4). Следовательно, принимая во внимание (22.4), мы можем характеристическое уравнение (22.3) переписать в следующем виде:

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1}+1-\rho, & \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_2}, & \ldots, & \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_r}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_1}, & \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2}+1-\rho, & \ldots, & \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\psi_r}{\partial\beta_1}, & \frac{\partial\psi_r}{\partial\beta_2}, & \ldots, & \frac{\partial\psi_r}{\partial\beta_r}+1-\rho\end{matrix}\right|_{\beta_j=\beta_j(\mu)}=0 \qquad (22.6)$$

Это и есть форма Пуанкаре для характеристического уравнения. Этой формой характеристического уравнения можно пользоваться для приближенного вычисления инвариантов A_j во всех случаях, независимо от того, является ли рассматриваемое периодическое решение аналитическим относительно μ или нет. При этом малыми являются величины μ и $\beta_j(\mu)$, так как последние при $\mu=0$ обращаются в нуль.

Заметим, что, как было показано в § 5, вычисление функций ψ_j также требует интегрирования уравнений в вариациях порождающей системы.

§ 23. Критерии устойчивости

Допустим, что тем или иным способом мы вычислили приближенно коэффициенты характеристического уравнения. Задача теперь заключается в том, чтобы выразить условия устойчивости непосредственно через эти коэффициенты, а не через корни характеристического уравнения. Эта задача может быть разрешена следующим образом.

Подстановка

$$\rho=\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \tag{23.1}$$

преобразует круг единичного радиуса с центром в начале координат плоскости комплексного переменного ρ в левую полуплоскость комплексного переменного λ. Следовательно, условия устойчивости, заключающиеся в том, что модули всех корней характеристического уравнения не должны превосходить единицу, могут быть выражены следующим образом.

Для устойчивости необходимо, чтобы вещественные части всех корней уравнения

$$\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^r+A_1\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^{r-1}+\ldots+A_r=0$$

не были положительными. При этом, если эти вещественные части все отрицательны, то устойчивость действительно будет иметь место.

Таким образом, задача сводится к установлению условий отрицательности вещественных частей алгебраического уравнения. Эти условия даются хорошо известной теоремой Гурвица[1].

Рассмотрим частный случай системы второго порядка. Пусть характеристическое уравнение этой системы будет

$$\rho^2 - 2A\rho + B = 0. \tag{23.2}$$

Для того, чтобы это уравнение имело корни, не превосходящие по модулю единицу, необходимо, очевидно, чтобы выполнялось условие

$$|B| \leqslant 1. \tag{23.3}$$

Это условие будет также и достаточным, если корни уравнения (23.2) комплексны. Но если эти корни вещественны, то необходимы добавочные условия. Чтобы получить эти условия, сделаем в уравнении (23.2) подстановку (23.1) и потребуем, чтобы корни полученного квадратного уравнения имели вещественные части отрицательные или равные нулю. Таким путем получим еще два условия

$$\left.\begin{aligned} 2A + B + 1 &\geqslant 0, \\ -2A + B + 1 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{23.4}$$

Если воспользоваться формой Пуанкаре характеристического уравнения, то в рассматриваемом случае будем иметь:

$$2A = 2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2}\right)_{\beta_i = \beta_i(\varphi)}$$

$$B = 1 + \left\{\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2}\right) + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1}, & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\beta_2} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\beta_1}, & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2} \end{vmatrix}\right\}_{\beta_i = \beta_i(\varphi)}$$

[1] Хорошее изложение теоремы Гурвица можно найти в вышецитированной книге Четаева: Устойчивость движения.

и условия устойчивости (23.4) примут вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1}, & \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_2} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_1}, & \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2} \end{vmatrix}_{\beta_i=\beta_i(\mu)} > 0 \tag{23.5}$$

$$4 + 2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2}\right)_{\beta_i=\beta_i(\mu)} + \Delta \geqslant 0. \tag{23.6}$$

Что же касается условия (23.3), то на основании (16.8) и выражений для ρ_{sj}, оно может быть записано следующим образом:

$$\int_0^\omega \left\{\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)\right\}_{x_i=\varphi_i(t)} dt \leqslant 0. \tag{23.7}$$

Таким образом, для системы второго порядка мы получаем три необходимых условия устойчивости. Заметим, что эти условия являются также и достаточными, если они выполняются со знаком неравенства.

Заметим, в заключение, что при $\mu = 0$, характеристические показатели рассматриваемого решения переходят в характеристические показатели порождающего решения. Отсюда следует, что при достаточно малых значениях μ рассматриваемое периодическое решение будет неустойчивым, если хотя бы один из характеристических показателей уравнений в вариациях порождающей системы имеет положительную вещественную часть. Наоборот, если указанные характеристические показатели имеют только отрицательные вещественные части, то рассматриваемое периодическое решение будет асимптотически устойчивым. Когда же некоторые из этих характеристических показателей имеют вещественные части, равные нулю, в то время как вещественные части остальных показателей отрицательны, то для решения задачи устойчивости потребуется более точное вычисление характеристических показателей.

§ 24. Устойчивость колебаний, исследованных в предыдущей главе

Приложим полученные результаты к исследованию устойчивости колебаний, рассмотренных в предыдущей главе. Мы ограничиваемся при этом системами с одной степенью свободы.

а) *Неавтономная система с одной степенью свободы вдали от резонанса.*

Рассмотрим систему, описываемую уравнением (6.1). В этом случае функции ψ_1 и ψ_2 определяются формулами (6.7) и левые части неравенств (23.5) и (23.6), если ограничиться только свободными членами, будут, соответственно, равны $2(1-\cos 2k\pi)$ и 4. Следовательно, при достаточно малых μ условия (23.5) и (23.6) выполняются со знаком неравенства. Что же касается условия (23.7), то в рассматриваемом случае оно принимает вид

$$\mu \int_0^{2\pi} \frac{\partial F(t, x, \dot{x}, \mu)}{\partial \dot{x}} dt \leqslant 0, \tag{24.1}$$

где в выражении $F(t, x, x, \mu)$ величины x и x должны быть заменены их значениями в рассматриваемом периодическом движении, т. е. функцией (6.8) и ее производной. Ограничиваясь, однако, первой степенью μ, мы можем условие (24.1) заменить условием

$$\mu \int_0^{2\pi} \frac{\partial F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} dt \leqslant 0, \tag{24.2}$$

где x_0 определяется формулой (6.4).

Условие (24.2) является единственным необходимым для устойчивости. Если это условие выполняется со знаком неравенства, то оно будет также и достаточным и при этом устойчивость будет асимптотической.

б) *Неавтономная система с одной степенью свободы при резонансе.*

Рассмотрим систему, описываемую уравнением (7.1). В этом случае условие (23.7) попрежнему имеет вид

$$\mu \int_0^{2\pi} \frac{\partial F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0}\, dt \leqslant 0, \tag{24.3}$$

но функция x_0 определяется теперь формулой (7.3), в которой M_0 и N_0 суть корни уравнений (7.6), соответствующие рассматриваемому периодическому решению. Рассмотрим условия (23.5) и (23.6).

Функции ψ_1 и ψ_2 определяются теперь формулами (7.4). Из этих формул видно, что ψ_1 и ψ_2 обращаются в нуль при $\mu = 0$. Следовательно, условие (23.6) выполняется со знаком неравенства. Что же касается условия (23.5), то, отбрасывая величины высших порядков малости, мы можем, на основании (7.8), записать его в следующем виде

$$\mu \frac{\partial (P, Q)}{\partial (M_0, N_0)} \geqslant 0. \tag{24.4}$$

Итак, для устойчивости необходимо, чтобы выполнялись условия (24.3) и (24.4). Если эти условия выполняются со знаком неравенства, то устойчивость действительно будет иметь место и притом асимптотическая.

в) *Автономная система с одной степенью свободы.*

Рассмотрим, наконец, автономную систему с одной степенью свободы, описываемую уравнением (11.1). Так как система является автономной, то как было показано в § 21, один из корней характеристического уравнения (23.2) обращается в единицу. Следовательно, второй корень этого уравнения равен B и для устойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие (23.7). Если это условие выполняется со знаком неравенства, то, на основании теоремы Андронова и Витта, устойчивость действительно будет иметь место (но она не будет асимптотической).

В рассматриваемом случае условие (23.7) принимает вид

$$\mu \int_0^{\omega} \frac{\partial f(x, \dot{x}, \mu)}{\partial \dot{x}}\, dt \leqslant 0. \tag{24.5}$$

Здесь ω — период рассматриваемого решения, определяемый формулой (11.11), и величины x и $\dot{x}$ суть функции t, соответствующие этому решению. Отбрасывая старшие степени μ, мы можем в условии (24.5) заменить x, $\dot{x}$ и ω их значениями в порождающем решении. Тогда вместо (24.5) будем иметь:

$$\mu \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \frac{\partial f(M_0 \cos kt, -M_0 k \sin kt, 0)}{\partial \dot{x}}\, dt =$$

$$= \frac{\mu}{k} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f(M_0 \cos \alpha, -kM_0 \sin \alpha, 0)}{\partial \dot{x}}\, d\alpha \leqslant 0, \qquad (24.6)$$

где M_0 определяется из уравнения (11.8).

Неравенство (24.6) может быть представлено в другом виде. Преобразуем с этой целью левую часть уравнения (11.8), определяющего M_0. После интегрирования по частям и элементарных преобразований, будем иметь:

$$P(M_0) \equiv -M_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial f(M_0 \cos \alpha, -kM_0 \sin \alpha, 0)}{\partial x} \sin \alpha + \right.$$

$$\left. + k \frac{\partial f(M_0 \cos \alpha, -kM_0 \sin \alpha, 0)}{\partial \dot{x}} \cos \alpha \right\} \cdot \cos \alpha \, d\alpha =$$

$$= -kM_0 \int_0^{2\pi} \frac{\partial f(M_0 \cos \alpha, -kM_0 \sin \alpha, 0)}{\partial \dot{x}}\, d\alpha -$$

$$-M_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial f(M_0 \cos \alpha, -kM_0 \sin \alpha, 0)}{\partial x} \cos \alpha - \right.$$

$$\left. - k \frac{\partial f(M_0 \cos \alpha, -kM_0 \sin \alpha, 0)}{\partial \dot{x}} \sin \alpha \right\} \sin \alpha \, d\alpha =$$

$$= -kM_0 \int_0^{2\pi} \frac{\partial f(M_0 \cos \alpha, -kM_0 \sin \alpha, 0)}{\partial \dot{x}}\, d\alpha - M_0 \frac{dP(M_0)}{dM_0} = 0.$$

Следовательно, неравенство (24.6) может быть представлено следующим образом

$$\mu \frac{dP(M_0)}{dM_0} \geqslant 0. \tag{24.7}$$

Это и есть искомое необходимое условие устойчивости. Как мы уже говорили, оно будет также и достаточным, если оно выполняется со знаком неравенства.

В § 12 мы видели, что периодическим решениям уравнения (11.1) отвечают на фазовой плоскости предельные циклы. Следовательно, неравенство (24.7) выражает также условие устойчивости этих предельных циклов.

ГЛАВА IV

ТЕОРИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛЯПУНОВА

§ 25. Системы Ляпунова

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений r-го порядка вида

$$\frac{dx_s}{dt}=a_{s1}x_1+\ldots+a_{sr}x_r+X_s(x_1,\ldots,x_r) \qquad (25.1)$$
$$(s=1, 2, \ldots, r),$$

где a_{sj} — некоторые постоянные, а X_s — независящие от t аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_r$ в окрестности точки $x_1=\ldots=x_r=0$, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка.

К исследованию систем вида (25.1) приводятся многие задачи свободных колебаний механических систем. Так, например, дифференциальные уравнения колебаний системы около положения равновесия, или около стационарного состояния движения, когда учитываются также члены высших порядков в разложениях кинетической и потенциальной энергий, являются частным случаем систем вида (25.1). Поэтому вопрос о периодических решениях системы (25.1) является весьма важным для теории нелинейных колебаний. Вопросом о периодических решениях уравнений (25.1) занимался Ляпунов в связи с задачей устойчивости движения. Ляпунов показал, что при весьма общих *предположениях* система (25.1) допускает периодические решения определенного вида и указал эффективный способ вычисления этих решений. Изложению теории Ляпунова и посвящена эта глава.

Относительно системы (25.1) мы сделаем следующие основные предположения.

1. Мы будем предполагать, что характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho, & a_{12}, \ldots, & a_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}-\rho, \ldots, & a_{2r} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ a_{r1}, & a_{r2}, \ldots, & a_{rr}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (25.2)$$

имеет, по крайней мере, одну пару чисто мнимых корней $\pm\lambda i$.

При таком предположении, как это было показано в § 10, система (25.1) может быть преобразована к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots, x_m) \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots, x_m) \\ \frac{dx_s}{dt} &= b_{s1}x_1 + \ldots + b_{sm}x_m + a_s x + b_s y + \\ &\quad + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_m) \end{aligned}\right\} \qquad (25.3)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, m).$$

Здесь $r = m - 2$, X, Y, X_s — аналитические функции переменных x, y, x_j, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка и b_{sj}, a_s, b_s — некоторые вещественные постоянные.

2. Мы будем предполагать, что корни $\pm\lambda i$ являются простыми и что их целые кратности не являются корнями уравнения (25.2) и что это уравнение не имеет также нулевого корня.

Так как характеристическое уравнение (25.2) должно совпадать с характеристическим уравнением линейной части системы (25.3), которое, очевидно, распадается на уравнение второго порядка

$$\rho^2 + \lambda^2 = 0$$

и уравнение m-го порядка

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} b_{11}-\rho, & b_{12}, \ldots, & b_{1m} \\ b_{21}, & b_{22}-\rho, \ldots, & b_{2m} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ b_{m1}, & b_{m2}, \ldots, & b_{mm}-\rho \end{vmatrix} = 0, \qquad (25.4)$$

то из сделанного предположения вытекает, что уравнение (25.4) не имеет ни нулевого корня, ни корней вида $\pm p\lambda i$, где p — любое целое число.

Кроме того, из сделанного предположения вытекает, что величины a_s и b_s в уравнениях (25.3) можно принять равными нулю. В самом деле, сделав дополнительное преобразование переменных

$$\bar{x}_s = x_s + \alpha_s x + \beta_s y \quad (s = 1, 2, \ldots, m),$$

где α_s и β_s — некоторые постоянные, будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}_s}{dt} = b_{s1}\bar{x}_1 + \ldots \\ \ldots + b_{sm}\bar{x}_m - (b_{s1}\alpha_1 + \ldots + b_{sm}\alpha_m - \lambda\beta_s - a_s)\, x - \\ - (b_{s1}\beta_1 + \ldots + b_{sm}\beta_m + \lambda\alpha_s - b_s)\, y + \ldots \\ (s = 1, 2, \ldots, m).\end{aligned}$$

Следовательно, если мы постоянные α_s и β_s выберем согласно уравнениям

$$\left.\begin{aligned} b_{s1}\alpha_1 + \ldots + b_{sm}\alpha_m - \lambda\beta_s = a_s, \\ b_{s1}\beta_1 + \ldots + b_{sm}\beta_m + \lambda\alpha_s = b_s, \\ (s = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}\right\} \qquad (25.5)$$

то в преобразованных уравнениях, величины, играющие роль a_s и b_s, будут равны нулю. Обращаясь к уравнениям (25.5), мы видим, что определитель Δ этих уравнений будет такого же типа, как и определитель (9.5), рассмотренный в § 9, и мы можем писать:

$$\Delta = D(\lambda i) \cdot D(-\lambda i).$$

Так как величины $\pm\lambda i$ не являются корнями уравнения (25.4), то определитель Δ отличен от нуля, и, следовательно, величины α_s и β_s могут быть действительно определены согласно уравнениям (25.5).

Таким образом, не нарушая общности рассуждений, мы можем предположить, что в уравнениях (25.3) величины a_s и b_s равны нулю и, следовательно, эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\lambda y+X(x, y, x_1, \ldots, x_m),\\ \frac{dy}{dt}&=\lambda x+Y(x, y, x_1, \ldots, x_m),\\ \frac{dx_s}{dt}&=b_{s1}x_1+\ldots+b_{sm}x_m+X_s(x, y, x_1, \ldots, x_m),\end{aligned}\right\} \qquad (25.6)$$
$$(s=1, 2, \ldots, m).$$

Этим видом уравнений колебаний мы и будем пользоваться в дальнейшем.

3. Мы будем, наконец, предполагать, что рассматриваемая система допускает первый интеграл вида

$$H(x, y, x_1, \ldots, x_m)=\mathrm{const}, \qquad (25.7)$$

где H — аналитическая функция переменных $x, y, x_1, \ldots, x_m$, разложение которой по степеням этих переменных содержит члены второго порядка, причем последние не обращаются все в нуль при $x_1=\ldots=x_m=0$.

Уточним вид функции H. Пусть

$$H=Cx^2+2Dxy+Ey^2+\sum_{s=1}^{m}C_s xx_s+\sum_{s=1}^{m}D_s yx_s+$$
$$+W(x_1, \ldots, x_m)+S(x, y, x_1, \ldots, x_m)+$$
$$+Ax+By+\sum_{s=1}^{m}A_s x_s,$$

где W — квадратичная форма переменных $x_1, \ldots, x_m$, а S — аналитическая функция от $x, y, x_1, \ldots, x_m$, разложение которой начинается членами не ниже третьего порядка. Так как функция H определяет первый интеграл уравнений (25.6), то имеет место тождество

$$\frac{\partial H}{\partial x}(-\lambda y+X)+\frac{\partial H}{\partial y}(\lambda x+Y)+$$
$$+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial x_s}(b_{s1}x_1+\ldots+b_{sm}x_m+X_s)=0. \qquad (25.8)$$

Приравнивая в этом тождестве нулю коэффициенты при первых степенях величин x, y, x_j, получим:

$$A=0, \quad B=0,$$

$$b_{1j}A_1+b_{2j}A_2+\ldots+b_{mj}A_m=0 \quad (j=1, 2, \ldots, m).$$

Отсюда вытекает, что

$$A_1=\ldots=A_m=0,$$

так как определитель коэффициентов b_{sj}, в силу условия о корнях уравнения (25.4), отличен от нуля. Таким образом, функция H не содержит членов первого порядка.

Приравнивая в тождестве (25.8) нулю коэффициенты при xx_j и yx_j, получим, что величины C_j и D_j удовлетворяют линейным однородным уравнениям

$$\begin{gathered}\lambda D_j+b_{1j}C_1+\ldots+b_{mj}C_m=0 \\ \hfill (j=1, 2, \ldots, m) \\ -\lambda C_j+b_{1j}D_1+\ldots+b_{mj}D_m=0.\end{gathered}$$

Определитель этой системы уравнений, как мы уже указывали выше, отличен от нуля. Поэтому все величины C_j, D_j также равны нулю. Что же касается величин C, D, E, то, согласно условию, по крайней мере, одна из них отлична от нуля. С другой стороны, приравнивая нулю в тождестве (25.8) коэффициенты при x^2, y^2 и xy, находим

$$D=0, \quad C=E,$$

и, следовательно, равные между собой величины C и E должны быть отличны от нуля. Не нарушая общности рассуждений, мы можем эти величины принять равным единице, так как интеграл (25.7) может быть поделен на произвольный множитель.

Таким образом, интеграл (25.7) имеет вид

$$H=x^2+y^2+W(x_1, \ldots, x_m)+S=\text{const}. \tag{25.9}$$

Системы уравнений типа (25.1), удовлетворяющие вышеуказанным трем условиям, мы будем называть *системами Ляпунова*. Так же мы будем называть и механические системы, описываемые этими уравнениями.

Рассмотрим в качестве примера систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=-\lambda_i y_i+\frac{\partial F}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{dt}=\lambda_i x_i-\frac{\partial F}{\partial x_i} \tag{25.10}$$

$$(i=1, 2, \ldots, k),$$

где F — аналитическая функция переменных x_j, y_j, разложение которой начинается членами не ниже третьего порядка. Такого рода уравнениями описываются нелинейные колебания консервативной системы с k степенями свободы около положения устойчивого равновесия или около стационарного состояния движения.

Если не все величины λ_i равны между собой, то система (25.10) удовлетворяет всем вышеуказанным условиям и является частным случаем систем Ляпунова.

§ 26. Периодические решения систем Ляпунова

Мы переходим к исследованию вопроса о существовании периодических решений систем Ляпунова. С этой целью преобразуем уравнения (25.6) при помощи подстановки

$$x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta,\quad x_s=\rho z_s \tag{26.1}$$

$$(s=1, 2, \ldots, m).$$

Преобразованная система имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt}=\rho^2 R(\rho, z_j, \vartheta),\\
&\frac{d\vartheta}{dt}=\lambda+\rho\Theta(\rho, z_j, \vartheta),\\
&\frac{dz_s}{dt}=b_{s1}z_1+\ldots+b_{sm}z_m+\rho Z_s(\rho, z_j, \vartheta),\\
&\qquad (s=1, 2, \ldots, m).
\end{aligned}\right\} \tag{26.2}$$

Здесь R, Θ и Z_s суть аналитические функции переменных ρ, $z_1, \ldots, z_m$, разложения которых по степеням этих переменных сходятся, когда модули этих величин не превосходят некоторых постоянных пределов. Коэффициенты этих разложений суть периодические функции ϑ периода 2π, являющиеся полиномами относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$.

Исключая из системы (26.2) t и используя интеграл (25.9), мы можем эту систему $m+2$-го порядка привести к системе m-го порядка. В самом деле, имеем, прежде всего,

$$\frac{dz_s}{d\vartheta}=c_{s1}z_1+\ldots+c_{sm}+z_m+\rho Z_s^*(\rho,\ z_j,\ \vartheta),\qquad (26.3)$$
$$(s=1,\ 2,\ldots,\ m),$$

где

$$c_{sj}=\frac{b_{sj}}{\lambda},\qquad (26.4)$$

а Z_s^* — функции такого же типа, как и Z_s. Обозначая далее через μ^2 произвольную постоянную в интеграле (25.9) и переходя в нем к новым переменным, получим

$$\rho^2[1+\rho F(\rho,\ z_j,\ \vartheta)]=\mu^2,\qquad (26.5)$$

где F — аналитическая функция переменных ρ, $z_1,\ldots,z_m$, коэффициенты разложения которой являются полиномами относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$. Уравнение (26.5) может быть разрешено относительно ρ. Для этого необходимо, прежде всего, извлечь квадратный корень, что дает

$$\rho[1+\rho F^*(\rho,\ z_j,\ \vartheta)]=\pm\mu,\qquad (26.6)$$

где F^* — функция такого же типа, как и F. Так как μ является произвольной постоянной, то не нарушая общности, мы можем в полученном уравнении взять перед ней знак плюс. Разрешая теперь (26.6) относительно ρ, получим

$$\rho=\mu+\mu^2G(\mu,\ z_j,\ \vartheta),$$

где G — аналитическая функция переменных μ, $z_1,\ldots,z_m$, разложение которой по степеням этих переменных сходится, когда модули этих величин не превосходят некоторых достаточно малых постоянных пределов. При этом коэффициенты разложения являются полиномами относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$.

Подставляя ρ в уравнения (26.3), получим окончательно следующую систему m-го порядка:

$$\frac{dz_s}{dt}=c_{s1}z_1+\ldots+c_{sm}z_m+\mu U_s(\mu,\ z_j,\ \vartheta),\qquad (26.7)$$
$$(s=1,\ 2,\ldots,\ m),$$

определяющую величины $z_1, \ldots, z_m$ как функции ϑ. Здесь U_s — функции такого же типа, как и G, т. е. аналитические относительно μ, $z_1, \ldots, z_m$ и периодические относительно ϑ.

Так как уравнение (25.4) не имеет, по условию, корней вида $\pm p\lambda i$, где p — любое целое число, включая и нуль, то уравнение

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\rho, & c_{12}, & \ldots, & c_{1m} \\ c_{21}, & c_{22}-\rho, & \ldots, & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1}, & c_{m2}, & \ldots, & c_{mm}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (26.8)$$

на основании (26.4) не имеет корней вида $\pm pi$. Отсюда следует, что система (26.7) является частным случаем систем, рассмотренных нами в § 9. Поэтому эта система допускает при достаточно малых значениях μ периодическое решение, обращающееся в порождающее при $\mu=0$. (В рассматриваемом частном случае, порождающим решением является тривиальное решение $z_1^{(0)} = \ldots = z_m^{(0)} = 0$ системы

$$\frac{dz_s^0}{d\vartheta} = c_{s1}z_1^0 + \ldots + c_{sm}z_m^0 \qquad (s=1, 2, \ldots, m),$$

в которую обращается (26.6) при $\mu=0$.) Это решение будет аналитическим относительно μ и мы можем для него писать

$$z_s = \mu z_s^{(1)}(\vartheta) + \mu z_s^{(2)}(\vartheta) + \ldots \qquad (s=1, 2, \ldots, m), \qquad (26.9)$$

где $z_s^{(j)}$ — периодические функции ϑ периода 2π.

Подставляя выражения (26.9) для z_s в выражение для ρ, мы получим, что ρ также является периодической функцией ϑ вида

$$\rho = \mu + \mu^2\rho^{(2)}(\vartheta) + \mu^3\rho^{(3)}(\vartheta) + \ldots \qquad (26.10)$$

где $\rho^{(j)}(\vartheta)$ — периодические функции ϑ периода 2π.

Таким образом, доказано существование периодического решения системы (26.2), если в качестве независимого переменного принять величину ϑ. Это решение зависит аналитически от произвольной постоянной μ.

Подставляя (26.9) и (26.10) в (26.1), мы получим частное решение уравнений (25.6), в котором величины x, y, x_s являются периодическими функциями ϑ периода 2π. Эти величины будут также аналитическими функциями постоянной μ. Покажем, что если мы снова перейдем к независимой переменной t, то полученное решение будет попрежнему периодически и что оно попрежнему будет аналитическим относительно μ и что период решения будет также аналитической функцией μ. С этой целью рассмотрим второе уравнение (26.2) определяющее ϑ. Подставляя в это уравнение значения ρ и z_s и разделяя переменные, получим:

$$t = \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\lambda + \rho\vartheta} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\vartheta (1 + \vartheta_1(\vartheta)\mu + \vartheta_2(\vartheta)\mu^2 + \ldots)\,d\vartheta,$$

где ϑ_j — периодические функции ϑ периода 2π и ряд, стоящий под знаком интеграла, сходится при достаточно малых значениях μ. При этом, постоянная интегрирования выбрана так, чтобы в начальный момент $t = 0$ величина ϑ также обращалась в нуль.

Составляя разность

$$t(\vartheta + 2\pi) - t(\vartheta) = \frac{1}{\lambda}\int_\vartheta^{\vartheta+2\pi} (1 + \vartheta_1\mu + \vartheta_2\mu^2 + \ldots)\,d\vartheta,$$

мы видим, что она является постоянной, не зависящей от ϑ величиной, равной

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \ldots), \qquad (26.11)$$

где α_j — постоянные, определяемые формулами

$$\alpha_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \vartheta_j(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Отсюда следует, что всякая величина, являющаяся периодической функцией ϑ периода 2π, будет также периодической по отношению к t с периодом, равным T. В частности, и величины x, y, x_s в вышеуказанном частном решении, также являются периодическими функциями t периода T. Вместе с тем из выражения для периода мы видим, что он является аналитической функций μ, обращающейся в $\frac{2\pi}{\lambda}$ при $\mu=0$.

Покажем, что величины x, y, x_s, выраженные через t, являются также аналитическими функциями μ. В самом деле, величины x, y, x_s в рассматриваемом периодическом решении, так же, как и во всяком другом решении уравнений (25.6), являются аналитическими функциями своих начальных значений. Что же касается этих начальных значений, то, полагая в формулах (26.1), (26.9) и (26.10) величину ϑ равной нулю, мы видим, что они в свою очередь являются аналитическими функциями величины μ. Отсюда непосредственно вытекает справедливость нашего предложения.

Обозначим через c начальное значение величины ρ.

Из (26.10) имеем:

$$c=\mu+\mu^2\rho^{(2)}(0)+\ldots, \tag{26.12}$$

т. е. c является аналитической функцией величины μ, обращающейся в нуль вместе с нею. Разрешая (26.12) относительно μ, мы видим, что μ в свою очередь является аналитической функцией c, обращающейся в нуль при $c=0$. Мы можем в полученном периодическом решении заменить величину μ ее выражением через c и тогда это решение, так же, как и его период, будут аналитическими относительно c.

Заметим, что так как при $t=0$ величина ϑ также обращается в нуль, то величина c совпадает с начальным значением величины x, а начальное значение величины y равно нулю.

Кроме того, из (26.10) вытекает, что при $c=0$ величины x, y, x_s также обращаются в нуль. Что же касается периода T, то, как показывает (26.11), при $c=0$ он обращается в $\frac{2\pi}{\lambda}$.

Подводя итоги, мы можем высказать следующее основное предложение:

система (25.6) *Ляпунова допускает в достаточно малой окрестности начала координат периодическое решение, зависящее от произвольного параметра. Этим пара-*

метром является начальное значение величины x, которое предполагается достаточно малым. Начальное значение y равно нулю. Начальные значения величин x_s являются некоторыми аналитическими функциями величины c. Период решения является аналитической функцией c, обращающейся в $\frac{2\pi}{\lambda}$ при $c=0$. Само решение является также аналитическим относительно c и при $c=0$ обращается в тривиальное решение $x=y=x_1=\ldots=x_m=0$.

Так как система (25.6) автономна, то мы можем в рассматриваемом периодическом решении заменить t на $t+h$, где h — произвольная постоянная. Таким путем получится периодическое решение, зависящее от двух произвольных постоянных.

§ 27. Практический способ вычисления периодических решений систем Ляпунова

Для действительного вычисления периодического решения, существование которого мы установили в предыдущем параграфе, Ляпунов предположил очень удобный метод, некоторым видоизменением которого мы уже пользовались в §§ 11 и 13.

Искомое периодическое решение, так же как и его период, являются аналитическими функциями параметра c, представляющего собой начальное значение величины x. Мы могли бы поэтому искать это решение под видом рядов, расположенных по степеням c. Однако, как об этом уже указывалось в § 11, такого рода ряды практически весьма неудобны, так как вследствие зависимости периода от величины c коэффициенты этих рядов не будут периодическими функциями. Чтобы получить ряды с периодическими коэффициентами, поступаем следующим образом.

Пусть

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}(1+h_2c+h_3c^2+\ldots) \tag{27.1}$$

— период искомого решения.

Здесь h_j — некоторые, хотя и неизвестные, но вполне определенные постоянные. Введем в уравнения (25.6), вместо независимой переменной t, переменную τ при помощи подстановки

$$t=\frac{\tau}{\lambda}(1+h_1c+h_2c^2+\ldots).$$

Уравнения (25.6) примут вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau}&=\left(-y+\frac{1}{\lambda}X\right)(1+h_1c+h_2c^2+\ldots),\\
\frac{dy}{d\tau}&=\left(x+\frac{1}{\lambda}Y\right)(1+h_1c+h_2c^2+\ldots),\\
\frac{dx_s}{d\tau}&=\left(c_{s1}x_1+\ldots+c_{sm}x_m+\frac{1}{\lambda}X_s\right)(1+h_1c+\\
&\quad+h_2c^2+\ldots),\\
&\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ m),
\end{aligned}\right\}\qquad(27.2)$$

где c_{sj} имеют те же значения, что и в формулах (26.4).

Искомому периодическому решению уравнений (25.6) периода T соответствует периодическое решение уравнений (27.2) периода 2π. Это решение будет также аналитическим относительно c. В самом деле, любое решение уравнений (27.2), в том числе и рассматриваемое периодическое, будет аналитическим относительно параметра c, входящего непосредственно в эти уравнения, и своих начальных значений. Начальные значения периодического решения будут такими же, как и до преобразования, так как величины t и τ одновременно обращаются в нуль. Как мы видели в предыдущем параграфе, эти начальные значения будут: для x — величина c, для y — нуль, а для x_s — некоторые, хотя и неизвестные, но вполне определенные аналитические функции c. Таким образом, рассматриваемое периодическое решение, будучи аналитическим относительно c и своих начальных значений, будет, в конечном счете, аналитическим относительно c. Мы можем поэтому писать:

$$\left.\begin{aligned}
x&=cx^{(1)}+c^2x^{(2)}(\tau)+\ldots,\\
y(\tau)&=cy^{(1)}(\tau)+c^2y^{(2)}(\tau)+\ldots,\\
x_s(\tau)&=cx_s^{(1)}(\tau)+c^2x_s^{(2)}(\tau)+\ldots,
\end{aligned}\right\}\qquad(27.3)$$

где $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $x_s^{(i)}$ — некоторые периодические функции τ периода 2π. При этом начальные значения дают:

$$\left.\begin{aligned} &x^{(1)}(0)=1, \quad x^{(2)}(0)=x^{(3)}(0)=\ldots=0, \\ &y^{(1)}(0)=y^{(2)}(0)=\ldots=0. \end{aligned}\right\} \qquad (27.4)$$

Подставляя разложения (27.3) в (27.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, мы получим уравнения для нахождения этих коэффициентов. В частности, имеем:

$$\frac{dx^{(1)}}{d\tau}=-y^{(1)}, \quad \frac{dy^{(1)}}{d\tau}=x^{(1)},$$

$$\frac{dx_s^{(1)}}{d\tau}=c_{s1}x_1^{(1)}+\ldots+c_{sm}x_m^{(1)} \quad (s=1, 2, \ldots, m).$$

Так как характеристическое уравнение (26.8) не имеет корней вида $\pm mi$, где m — целое число или нуль, то уравнения для $x_s^{(1)}$ имеют единственное периодическое решение: $x_1^{(1)}=x_2^{(1)}=\ldots=x_m^{(1)}=0$. Для $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ на основании (27.4) находим:

$$x^{(1)}=\cos\tau, \quad y^{(1)}=\sin\tau.$$

Далее имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx^{(2)}}{d\tau}=-y^{(2)}-h_1\sin\tau+X^{(2)}(\tau), \\ &\frac{dy^{(2)}}{d\tau}=x^{(2)}+h_1\cos\tau+Y^{(2)}(\tau), \\ &\frac{dx_s^{(2)}}{d\tau}=c_{s1}x_1^{(2)}+\ldots+c_{sm}x_m^{(2)}+X_s^{(2)}(\tau) \\ &\qquad (s=1, 2, \ldots, m), \end{aligned}\right\} \qquad (27.5)$$

где $X^{(2)}$, $Y^{(2)}$ и $X_s^{(2)}$ — некоторые известные периодические функции τ периода 2π. В силу уже отмеченного свойства корней характеристического уравнения (26.8), уравнения для $x_s^{(2)}$, как это было показано в § 9, допускают для этих величин вполне определенное периодическое решение. Что же касается уравнений для $x^{(2)}$ и $y^{(2)}$, то, как было показано в § 10, для того, чтобы они допускали периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при $\sin\tau$ в уравнении для $x^{(2)}$ равнялся коэффициенту при $\cos\tau$ в уравнении для $y^{(2)}$, а коэффициент при $\cos\tau$ в уравнении для $x^{(2)}$ — взятому с обратным знаком коэффициенту при $\sin\tau$ в уравнении для $y^{(2)}$. Таким образом, мы получаем следующие два условия:

$$\left.\begin{aligned} 2h_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (X^{(2)}(\tau)\sin\tau - Y^{(2)}(\tau)\cos\tau)\,d\tau, \\ 0 &= \int_0^{2\pi} (X^{(2)}(\tau)\cos\tau + Y^{(2)}(\tau)\sin\tau)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (27.6)$$

Первое из этих условий однозначно определяет постоянную h_1. Что же касается второго условия, то в отличие от §§ 11 и 13, где мы пользовались аналогичным методом построения периодического решения, у нас сейчас нет еще одной неопределенной постоянной, которой мы могли бы распорядиться, чтобы удовлетворить этому условию. Поэтому, если это условие удовлетворяется само по себе, то уравнения (27.5) имеют периодическое решение для $x^{(2)}$ и $y^{(2)}$, в противном случае — такого решения не будет. Но так как, по доказанному, существует, по крайней мере, одна система рядов (27.3), формально удовлетворяющих уравнениям (27.2), то второе условие (27.6) необходимо удовлетворяется. Но в таком случае, уравнения (27.5) допускают для $x^{(2)}$ и $y^{(2)}$ периодическое решение вида

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= A\cos\tau + B\sin\tau + \varphi_2(\tau) \\ y^{(2)} &= A\sin\tau - B\cos\tau + \psi_2(\tau), \end{aligned}$$

где φ_2 и ψ_2 — некоторые вполне определенные периодические функции τ периода 2π, а A и B — произвольные постоянные. Эти постоянные вполне определяются начальными условиями (27.4).

Таким образом, мы получили вполне определенные функции для $x^{(2)}$ и $y^{(2)}$ и вполне определенное значение для постоянной h_1. Заметим, что постоянная h_1 всегда получается равной нулю, ибо функции $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ представляют собой, как легко видеть, квадратичные формы от $\cos\tau$ и $\sin\tau$. Ниже будет показано, что вообще первая неравная нулю величина h_j имеет всегда четный индекс.

Допустим, теперь, что все функции $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $x_s^{(i)}$, для которых $i<l$, и все величины h_j, для которых $j<l-1$, уже вычислены и получились вполне определенными. Тогда, для нахождения $x^{(l)}$, $y^{(l)}$ и $x_s^{(l)}$, мы получим уравнения вида

$$\frac{dx^{(l)}}{d\tau}=-y^{(l)}-h_{l-1}\sin\tau+X^{(l)}(\tau),$$

$$\frac{dy^{(l)}}{d\tau}=x^{(l)}+h_{l-1}\cos\tau+Y^{(l)}(\tau),$$

$$\frac{dx_s^{(l)}}{d\tau}=c_{s1}x_1^{(l)}+\ldots+c_{sm}x_m^{(l)}+X_s^{(l)}(\tau),$$

где $X^{(l)}$, $Y^{(l)}$, $X_s^{(l)}$ — некоторые полиномы с постоянными коэффициентами, зависящими только от $h_1, \ldots, h_{l-2}$ и от тех $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $x_s^{(i)}$, для которых $i<l$. Следовательно, $X^{(l)}$, $Y^{(l)}$, $X_s^{(l)}$ являются известными периодическими функциями τ, периода 2π.

Уравнения для $x_s^{(l)}$ имеют единственное решение, в котором эти величины являются периодическими функциями τ. Что же касается уравнений для $x^{(l)}$ и $y^{(l)}$, то для того, чтобы они допускали периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$2h_{l-1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(X^{(l)}(\tau)\sin\tau-Y^{(l)}(\tau)\cos\tau)\,d\tau,$$

$$0=\int_0^{2\pi}(X^{(l)}\cos\tau+Y^{(l)}\sin\tau)\,d\tau.$$

Первое из этих условий однозначно определяет величину h_{l-1}, а второе условие, в силу того, что ряды (27.3) необходимо существуют, удовлетворяется само по себе. Вследствие этого, уравнения для $x^{(l)}$ и $y^{(l)}$ допускают периодическое решение вида

$$x^{(l)} = A\cos\tau + B\sin\tau + \varphi^{(l)}(\tau),$$

$$y^{(l)} = A\sin\tau - B\cos\tau + \psi^{(l)}(\tau),$$

где $\varphi^{(l)}$ и $\psi^{(l)}$ — периодические функции τ периода 2π, а A и B — произвольные постоянные. Для этих постоянных мы получаем из начальных условий (27.4) вполне определенные значения:

$$A = -\varphi^{(l)}(0),$$

$$B = \psi^{(l)}(0).$$

Из вышесказанного вытекает, что существует одна и только одна система рядов вида (27.3), формально удовлетворяющих уравнениям (27.2). Эти ряды будут, следовательно, сходиться и действительно представляют искомое периодическое решение. Вместе с тем, мы получили простой и практически удобный способ вычисления как самого решения, так и его периода. При этом решение получается в виде, очень удобном для практики.

Пример. Рассмотрим в качестве примера дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x - \gamma x^3 = 0, \tag{27.7}$$

описывающее многие важные случаи свободных колебаний консервативных механических систем с одной степенью свободы. Уравнение (27.7) является, очевидно, весьма частным случаем систем Ляпунова и поэтому к нему может быть приложена предыдущая теория.

Полагая

$$t = \frac{\tau}{k}(1 + h_2c^2 + h_3c^3 + \ldots), \tag{27.8}$$

получим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(x - \frac{\gamma}{k^2}x^3\right)(1 + h_2c^2 + \ldots)^2 = 0.$$

Этому уравнению пытаемся удовлетворить рядом

$$x = c\cos\tau + c^3x_3(\tau) + c^5x_5(\tau) + \ldots, \tag{27.9}$$

где $x_j(\tau)$ — периодические функции τ периода 2π, удовлетворяющие начальным условиям

$$x_3(0) = x_5(0) = \ldots = \dot{x}_3(0) = \dot{x}_5(0) = \ldots = (0). \qquad (27.10)$$

Ряд (27.9) может содержать только нечетные степени c, а ряд (27.8) — только четные степени c, так как уравнение (27.7) не изменяется при замене x на $-x$. Имеем

$$\frac{d^2x_3(\tau)}{d\tau} + x_3 = -2h_2 \cos\tau + \frac{\gamma}{k^2}\cos^3\tau =$$
$$= \left(\frac{3}{4}\frac{\gamma}{k^2} - 2gh_2\right)\cos\tau + \frac{1}{4}\frac{\gamma}{k^2}\cos 3\tau. \qquad (27.11)$$

Условие периодичности дает

$$h_2 = \frac{3}{8}\frac{\gamma}{k^2},$$

после чего из уравнения (27.11), принимая во внимание начальные условия (27.10), получим:

$$x_3 = -\frac{\gamma}{32k^2}\cos 3\tau + \frac{\gamma}{32k^2}\cos\tau.$$

Для x_5 имеем уравнение

$$\frac{d^2x_5}{d\tau^2} + x_5 = \left(-2h_4 + \frac{57}{128}\frac{\gamma^2}{k^4}\right)\cos\tau + \frac{3}{16}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos 3\tau - \frac{3}{128}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos 5\tau,$$

из которого находим:

$$h_4 = \frac{57}{256}\frac{\gamma^2}{k^4},$$

$$x_5 = \frac{23}{1024}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos\tau - \frac{3}{128}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos 3\tau + \frac{1}{1024}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos 5\tau.$$

Этим приближением мы и ограничиваемся. Таким образом, периодическое решение уравнения (27.7) и его период выражаются приближенно следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
t &= \frac{\tau}{k}(1 + h_2c^2 + h_4c^4),\\
x &= c\cos\tau + c^3x_3(\tau) + c^5x_5(\tau),\\
x_3(\tau) &= -\frac{\gamma}{32k^2}\cos 3\tau + \frac{\gamma}{32k^2}\cos\tau,\\
x_5(\tau) &= \frac{23}{1024}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos\tau - \frac{3}{128}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos 3\tau + \frac{1}{1024}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos 5\tau,\\
h_2 &= \frac{3}{8}\frac{\gamma}{k^2}; \qquad h_4 = \frac{57}{256}\frac{\gamma^2}{k^4};\\
T &= \frac{2\pi}{k}(1 + h_2c^2 + h_4c^4).
\end{aligned}\right\} \qquad (27.12)$$

Заменяя t на $t+h$, где h — произвольная постоянная, мы получим периодическое решение уравнения (27.7), содержащее две произвольные постоянные, которое, вследствие этого, будет являться его общим решением.

§ 28. Некоторые свойства периодических решений систем Ляпунова

Отметим здесь некоторые свойства периодических решений систем Ляпунова, которые нам понадобятся в дальнейшем. Рассмотрим сначала систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y) \tag{28.1}$$

и пусть

$$H = x^2 + y^2 + S(x, y) = \mathrm{const} \tag{28.2}$$

ее первый интеграл. Здесь S — аналитическая функция x и y, разложения которой начинаются членами не ниже третьего порядка. Система (28.1) допускает, по доказанному, периодическое решение, зависящее от двух произвольных постоянных, из которых одна является начальным значением величины x, а другая начальным значением времени. Так как, в рассматриваемом случае, дифференциальные уравнения имеют второй порядок, то это периодическое решение является общим решением этих уравнений. Следовательно, каковы бы ни были начальные значения a и b величин x и y, решение уравнений (28.1) с этими начальными значениями будет периодическим. Требуется лишь только, чтобы численные значения величин a и b были достаточно малы, так как рассмотренные нами периодические решения систем Ляпунова существуют в достаточно малой окрестности начала координат.

Рассмотрим фазовую плоскость xy для уравнений (28.1). Все фазовые траектории, расположенные в достаточно малой окрестности начала координат, будут замкнуты, так как соответствующие решения уравнений (28.1) — периодичны. Следовательно, так же, как и для соответствующих линейных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x, \tag{28.3}$$

начало координат является особой точкой типа центра. Уравнение фазовых траекторий определяется интегралом (28.2), из которого следует, что эти фазовые траектории, в достаточно малой окрестности начала координат, мало отличаются от окружностей, являющихся фазовыми траекториями линейных уравнений (28.3). Таким образом, в достаточно малой окрестности начала координат, фазовые плоскости уравнений (28.1) и линейных уравнений (28.3) мало отличаются друг от друга. Однако здесь имеется одно принципиальное различие: период обращения для всех фазовых траекторий уравнений (28.3) равен 2π, в то время как для уравнений (28.1) каждая фазовая траектория имеет свой собственный период обращения. Это различие, как мы увидим ниже, имеет существенное значение.

Рассмотрим теперь систему Ляпунова произвольного порядка. Покажем, что эта система, так же, как и система второго порядка, имеет периодическое решение, в котором начальные значения x и y являются произвольными достаточно малыми величинами a и b. При этом, начальные значения x_s получаются вполне определенными аналитическими функциями от a и b. С этой целью будем искать такое частное решение уравнений (25.6), в котором x_s являются аналитическими функциями от x и y. Эти функции, если они существуют, должны, очевидно, удовлетворять системе уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial x_s}{\partial x}(-\lambda y+X)+\frac{\partial x_s}{\partial y}(\lambda x+Y)=$$
$$=c_{s1}x_1+\ldots+c_{sm}x_m+X_s, \qquad (28.4)$$
$$(s=1, 2, \ldots, m).$$

Попытаемся удовлетворить этим уравнениям формальными рядами вида:

$$x_s(x, y)=A_s x+B_s y+C_s x^2+D_s xy+E_s y^2+\ldots \qquad (28.5)$$
$$(s=1, 2, \ldots, m)$$

с неопределенными коэффициентами. Подставляя эти ряды в уравнения (28.4) и приравнивая коэффициенты при первых степенях x и y, мы получим для нахождения A_s и B_s систему линейных однородных уравнений

$$\lambda B_s = c_{s1}A_1 + \ldots + c_{sm}A_m,$$
$$-\lambda A_s = c_{s1}B_1 + \ldots + c_{sm}B_m,$$
$$(s = 1, 2, \ldots m).$$

Определитель этой системы, как мы уже знаем, отличен от нуля и поэтому все величины A_s и B_s равны нулю. Таким образом, функции $x_s(x, y)$ не могут содержать линейных членов.

Приравнивая в уравнениях (28.4) коэффициенты при членах второго порядка, мы также получим систему линейных уравнений для определения величин C_s, D_s и E_s. Однако эти уравнения будут неоднородными и поэтому если их определитель отличен от нуля, мы получим вполне определенные значения для искомых коэффициентов, причем хотя бы один из них будет отличным от нуля. Вообще, если в рядах (28.5) коэффициенты при всех членах порядка ниже k будут уже вычислены, то для коэффициентов членов k-го порядка получится система линейных неоднородных уравнений, число которых равно числу этих коэффициентов. Ляпунов показал, что определители всех этих систем уравнений, при сделанных допущениях относительно уравнений (25.6), отличны от нуля и, следовательно, существует одна и только одна система рядов (28.5), формально удовлетворяющих уравнениям (28.4). Более того, Ляпунов показал, что полученные таким образом ряды сходятся при достаточно малых значениях x и y и, следовательно, действительно представляют решение системы (28.4). Этого доказательства мы здесь не приводим.

Подставляя полученные таким образом функции $x_s(x, y)$ в первые два уравнения (25.6), мы получим для определения x и y уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, x_1(x, y), \ldots, x_m(x, y)) \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, x_1(x, y), \ldots, x_m(x, y)) \end{aligned}\right\} \qquad (28.6)$$

Пусть $x(t, a, b)$, $y(t, a, b)$ общее решение этих уравнений, где a и b — начальные значения величин x и y, которые мы считаем достаточно малыми. Тогда функции

$$x(t, a, b), \quad y(t, a, b), \quad x_s[x(t, a, b), y(t, a, b)] \quad (s = 1, 2, \ldots, m) \tag{28.7}$$

определяют частное решение уравнений (25.6), содержащее две произвольных постоянных. Это решение будет периодическим. В самом деле, так как система (25.6) допускает первый интеграл (25.9), то и система (28.6) также допускает первый интеграл

$$x^2 + y^2 + W(x_1(x, y), \ldots, x_m(x, y)) + \ldots = \text{const}. \tag{28.8}$$

Этот интеграл будет вида (28.2), так как разложения функций $x_s(x, y)$ начинаются членами не ниже второго порядка. Следовательно, система (28.6) является системой Ляпунова и поэтому ее общее решение при достаточно малых a и b будет периодическим. Но тогда и решение (28.7) уравнений (25.6) будет также периодическим. При этом начальные значения величин x_s, равные, очевидно, $x_s(a, b)$, будут аналитическими функциями a и b.

Таким образом, система Ляпунова (25.6) допускает периодическое решение, зависящее от двух параметров a и b, являющихся начальными значениями величин x и y. Эти параметры могут быть выбраны совершенно произвольно, лишь бы они были достаточно малыми.

Если в решении (28.7) положить $a = c$, а $b = 0$, то получится периодическое решение, рассмотренное нами в двух предыдущих параграфах. В самом деле, при такой замене, в решении (28.7) x обратится в начальный момент в c, y в нуль, а x_s в некоторые аналитические функции от c. А эти условия, как мы знаем, вполне определяют периодическое решение, рассмотренное в предыдущих параграфах. Заменяя теперь t на $t + h$, где h — произвольная постоянная, мы получим периодическое решение, зависящее опять от двух произвольных постоянных. Это решение отличается, очевидно, от решения (28.7) только выбором параметров.

Исследуем теперь, какой вид примет период решения, если в качестве параметров принять величины a и b. Рассмотрим сначала систему второго порядка (28.1). Полагая в ней

$$x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\sin\vartheta,$$

получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \cos\vartheta\, X(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) + \sin\vartheta\, Y(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \lambda + \frac{1}{\rho}\{\cos\vartheta\, Y(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) - \\ &\qquad - \sin\vartheta X(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\}. \end{aligned}\right\} \tag{28.9}$$

Как мы видели в § 26, период решения определяется формулой

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\vartheta}{\lambda\rho + \cos\vartheta\, Y(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) - \sin\vartheta\, X(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)}. \tag{28.10}$$

Здесь ρ должен быть выражен как функция от ϑ. Для этого можно воспользоваться либо первым уравнением (28.9), либо, как мы это делали в § 26, интегралом (28.2), который в переменных ρ и ϑ имеет вид

$$\rho^2\left[1 + \frac{1}{\rho^2} S(\rho\cos\vartheta, \ \rho\sin\vartheta)\right] = \mu^2, \tag{28.11}$$

где μ^2 — произвольная постоянная. Из уравнения (28.11) мы получаем для ρ два решения

$$\rho = \pm\mu + u^{(2)}\mu^2 \pm u^{(3)}\mu^3 + \ldots \tag{28.12}$$

где $u^{(2)}, u^{(3)}, \ldots$, — периодические функции ϑ периода 2π. Подставляя какое-нибудь из этих решений в (28.10), мы получим выражение периода в виде аналитической функции μ. Покажем, что это выражение содержит только четные степени μ. С этой целью заметим, что уравнение (28.11) не изменяется при замене ρ на $-\rho$ и ϑ на $\vartheta + \pi$. Поэтому, если в каком-нибудь одном из решений (28.12) заменить ϑ на $\vartheta + \pi$ и затем переменить все знаки на обратные, то получится снова решение, которое, очевидно, не может совпадать с исходным. Отсюда следует, что при замене ϑ на $\vartheta + \pi$ все функции $u^{(m)}$ с нечетным m не изменяются, а с четным m принимают свое первоначальное значение с противоположным знаком. Поэтому, каждая из функций ρ при замене μ на $-\mu$ и θ на $\theta+\pi$ примет свое первоначальное значение с противоположным знаком. Но тогда период T, как это видно из структуры подинтегрального выражения в (28.10), при такой замене совсем не изменится. С другой стороны, замена в выражении T величины θ на $\theta+\pi$, равносильная, очевидно, смещению обоих пределов интегрирования на π, не изменит величины T, так как подинтегральная функция периодична и интегрирование распространяется на целый период. Поэтому период T не изменяется при замене μ на $-\mu$ и, следовательно, его разложение содержит только четные степени μ.

Таким образом, имеем:

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}(1+H_2\mu^2+H_4\mu^4+\ldots). \tag{28.13}$$

Величина μ^2, выраженная через a и b, имеет, очевидно, вид

$$\mu^2=a^2+b^2+S(a,\ b). \tag{28.14}$$

Рассмотрим теперь случай системы любого порядка. Как было показано выше, нахождение периодического решения этой системы приводится к нахождению периодического решения системы второго порядка. Отсюда следует, что период T будет попрежнему выражаться формулой (28.13), но μ^2, на основании (28.8), будет иметь вид:

$$\mu^2=a^2+b^2+W(x_1(a,\ b),\ \ldots,\ x_r(a,\ b))+\ldots$$

Если в (28.13) положить $a=c$ и $b=0$, то полученное выражение периода должно совпадать с (27.1). Отсюда следует, что младшая степень c в выражении (27.1) для периода будет обязательно четной.

§ 29. Заключительные замечания

Теория Ляпунова находит применение во многих вопросах механики. Рассмотрим, в частности, систему, описываемую уравнениями вида (25.10). Если все числа λ_s таковы, что отношение любой пары из них не является целым числом, то каждая пара переменных x_s, y_s, может играть роль

x и y в уравнениях (25.6). Поэтому уравнения (25.10) допускают k периодических решений, содержащих каждое по две произвольных постоянных. Этими постоянными являются начальные значения a_s и b_s соответствующей пары переменных x_s и y_s. Периодами этих решений являются величины, обращающиеся в $\frac{2\pi}{\lambda_s}$ при $a_s = b_s = 0$.

Если функция F равна нулю и, следовательно, уравнения (25.10) обращаются в линейные, то рассматриваемые периодические решения принимают вид:

$$x_i = y_i = 0 \quad (i \neq s),$$

$$x_s = a_s \cos t - b_s \sin t,$$
$$y_s = a_s \sin t + b_s \cos t,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, k).$$

Эти решения являются главными колебаниями полученной линейной системы.

Когда функция F не равна тождественно нулю, мы тоже можем говорить о главных колебаниях системы, называя так вышеуказанные k периодических решений. Таким образом, главные колебания имеют место и тогда, когда учитываются члены высших порядков в уравнениях колебаний вида (25.10). Однако, для нелинейных систем, общее решение уравнений колебаний не является комбинацией решений, представляющих главные колебания. Кроме того, периоды главных колебаний нелинейных систем, в отличие от линейных, зависят от начальных условий.

В двух последующих главах мы занимаемся исследованием колебаний систем, близких к системам Ляпунова. Другими словами, применяя метод Пуанкаре, мы принимаем в качестве порождающих систем системы Ляпунова. Класс получающихся таким образом систем значительно шире класса систем квазилинейных.

Эта общность достигается, главным образом, за счет того, что периоды периодических решений систем Ляпунова зависят от начальных условий. И это проявляется в особенности тогда, когда рассматриваются системы неавтономные. Чтобы это уяснить, рассмотрим случай систем второго порядка. Как мы видели в предыдущем параграфе, фазовая плоскость для систем Ляпунова второго порядка, в достаточно малой окрестности начала координат, имеет такую же структуру, как и фазовая плоскость для соответствующей линейной системы. А именно, фазовыми траекториями являются замкнутые кривые, окружающие начало координат. Перейдем теперь от этой системы к системе, мало от нее отличающейся, т. е. содержащей параметр μ и переходящей в нее при $\mu = 0$. Допустим сначала, что новая система является автономной. Тогда, как это следует из общей теории, в общем случае, только несколько дискретно расположенных фазовых траекторий, которые соответствуют периодическим решениям полной системы, останутся замкнутыми. Остальные траектории, как это можно показать, обратятся в спирали, навивающиеся на эти замкнутые траектории. Таким образом, с качественной стороны все обстоит совершенно так же, как и для квазилинейных систем.

Совершенно иначе будет обстоять дело, когда мы от системы Ляпунова перейдем к близкой системе неавтономной. Хотя структура фазовой плоскости для системы Ляпунова и для соответствующей линейной системы одинакова, существенное различие заключается в том, что для линейной системы имеется вполне определенная частота колебания, в то время, как для системы Ляпунова эта частота зависит аналитически от начальных условий и, следовательно, образует непрерывный спектр. В этом отношении система Ляпунова с одной степенью свободы богаче линейной системы, имеющей даже бесконечное число степеней свободы. И физически понятно, что это свойство систем Ляпунова резко выявляется при воздействии на них внешними периодическими силами. Поэтому в неавтономных системах, близких к системам Ляпунова, мы встречаемся с рядом особенностей, которые не имеют места в системах квазилинейных.

В следующей главе мы занимаемся детальным исследованием неавтономных систем с одной степенью свободы, близких к системам Ляпунова. Так как системы Ляпунова с одной степенью свободы мало отличаются от системы консервативной, то для упрощения выкладок, мы ограничиваемся исследованием систем, близких к консервативным. Системами, близкими к консервативным, но автономными, занимался Л. Понтрягин[1], который ограничился, однако, определением только нулевого приближения.

В гл. VI мы занимаемся колебаниями систем, близких к системам Ляпунова, с любым числом степеней свободы.

---

[1] Л. С. Понтрягин. О динамических системах, близких к Гамильтоновым. Журн. эксп. и теор. физики, т. 3, вып. 5, 1933.

ГЛАВА V

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМАМ ЛЯПУНОВА

§ 30. Порождающие решения

В этой главе мы рассматриваем колебания систем, описываемых уравнениями вида:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y) + \mu f(t, x, y, \mu),\\
\frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y) + \mu F(t, x, y, \mu).
\end{aligned}\right\} \qquad (30.1)
$$

Здесь X и Y — аналитические функции переменных x, y, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка. f и F суть аналитические функции x, y и малого параметра μ. Эти функции зависят также от t, по отношению к которому они непрерывны, периодичны с периодом 2π и разлагаются в ряды Фурье.

Рассмотрим порождающею систему

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx_0}{dt} &= -\lambda y_0 + X(x_0, y_0),\\
\frac{dy_0}{dt} &= \lambda x_0 + Y(x_0, y_0).
\end{aligned}\right\} \qquad (30.2)
$$

Мы будем предполагать, что эта система принадлежит к классу систем Ляпунова и что, следовательно, она допускает аналитический первый интеграл. Более того, мы будем предполагать, что система (30.2) консервативна, т. е. что имеют место соотношения

$$
X(x,\ v,) = -\frac{\partial S}{\partial y}, \quad Y(x, y) = \frac{\partial S}{\partial x},
$$

где S — аналитическая функция от x и y, разложения которой начинаются членами не ниже третьего порядка. В этом случае справедливо тождество

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0, \tag{30.3}$$

и первый интеграл уравнений (30.2) имеет вид:

$$x_0^2+y_0^2+\frac{2}{\lambda}S(x_0, y_0)=\text{const}. \tag{30.4}$$

Как было показано в предыдущей главе, общее решение уравнений (30.2) в окрестности начала координат является периодическим. Это решение и его период T представляются следующими формулами:

$$\begin{aligned} x_0 &= c\cos\tau+c^2x_{02}(\tau)+c^3x_{03}(\tau)+\ldots,\\ y_0 &= c\sin\tau+c^2y_{02}(\tau)+c^3y_{03}(\tau)+\ldots,\\ t+h &= \frac{\tau}{\lambda}(1+h_2c^2+h_3c^3+\ldots), \end{aligned} \tag{30.5}$$

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}(1+h_2c^2+h_3c^3+\ldots),$$

где x_{0k}, y_{0k} — периодические функции τ периода 2π, удовлетворяющие начальным условиям

$$x_{0k}(0)=y_{0k}(0)=0 \qquad (k=2, 3, \ldots); \tag{30.6}$$

h_2, h_3, ... — некоторые определенные постоянные, а c и h — произвольные постоянные, из которых первая достаточно мала.

Согласно методу Пуанкаре, для нахождения периодических решений полной системы уравнений (30.1), мы должны, прежде всего, найти все решения уравнений порождающей системы, имеющие период 2π. Из выражения для T следует, что для нахождения этих решений мы должны, оставляя величину h произвольной, величину c определить из соотношения

$$T=\frac{2\pi}{n}, \tag{30.7}$$

где n — произвольное целое число.

Полученное таким образом значение c мы будем обозначать через c_n, а соответствующее ему решение уравнений (30.2) через $\{x_0^{(n)}(t+h),\ y_0^{(n)}(t+h)\}$. Эти решения определяются, на основании (30.5), формулами

$$
\begin{aligned}
x_0^{(n)}(t+h) &= c_n\cos\tau + c_n^2 x_{02}(\tau) + \ldots \\
y_0^{(n)}(t+h) &= c_n\sin\tau + c_n^2 y_{02}(\tau) + \ldots \\
\tau &= n(t+h).
\end{aligned}
\tag{30.8}
$$

Мы получили, таким образом, семейство порождающих решений, зависящее от одного произвольного параметра h. Как это следует из общей теории, только некоторым решениям этого семейства будут действительно соответствовать периодические системы (30.1).

Рассмотрим подробнее уравнение, определяющее c_n. Пусть h_{2s} — первая из постоянных h_2, h_3, ... не обращающаяся в нуль. Как мы знаем, эта постоянная будет обязательно иметь четный индекс. Уравнение (30.7) имеет вид:

$$
h_{2s}c^{2s} + h_{2s+1}c^{2s+1} + \ldots = \frac{\lambda - n}{n}. \tag{30.9}
$$

Это уравнение всегда имеет $2s$ решений, обращающихся в нуль при $\lambda - n = 0$. Если $h_{2s}(\lambda - n) < 0$, то все эти решения будут комплексными. Если $h_{2s}(\lambda - n) > 0$, то два и только два решения будут вещественными и, при этом, одно из них будет положительным, а другое отрицательным. Следовательно, при $h_{2s} > 0$, мы можем числу n придавать любые целые значения, меньшие λ, а при $h_{2s} < 0$ любые целые значения, большие λ. Выбирая таким образом число n, мы получим для каждого n и h два порождающих решения $\{x_0^{(n)}(t+h),\ y_0^{(n)}(t+h)\}$.

Кроме $\{x_0^{(n)}(t+h),\ y_0^{(n)}(t+h)\}$, порождающим решением будет также являться тривиальное решение $x_0 = y_0 = 0$ системы (30.2), которое можно рассматривать как периодическое периода 2π.

§ 31. Уравнения в вариациях порождающей системы

В дальнейшем будут играть основную роль уравнения в вариациях порождающей системы, когда в качестве невозмущенного принимается порождающее решение $\{x_0^{(n)}(t+h),$

$y_0^{(n)}(t+h)\}$. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{dy_1}{dt}=p_{11}y_1+p_{12}y_2, \quad \frac{dy_2}{dt}=p_{21}y_1+p_{22}y_2, \tag{31.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} p_{11}&=\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right), \quad p_{12}=-\lambda+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right),\\ p_{21}&=\lambda+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right), \quad p_{22}=\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \tag{31.2}$$

и скобки обозначают, что после дифференцирования величины x и y заменяются их значениями в порождающем решении, т. е. величинами $x_0^{(n)}(t+h)$ и $y_0^{(n)}(t+h)$. Коэффициенты p_{sj} являются, очевидно, периодическими функциями t с периодом 2π. Кроме того, на основании (30.3), имеем тождественно

$$p_{11}+p_{22}=0. \tag{31.3}$$

Так как для порождающей системы известно общее решение (30.5), зависящее от двух произвольных постоянных c и h, то, как было показано в § 15, производные от x_0 и y_0 по c и h, вычисленные для невозмущенного решения, определяют частные решения уравнений в вариациях. Таким образом, получаем два следующих частных решения уравнений (31.1):

$$\left.\begin{aligned} y_{11}^*&=\left(\frac{dx_0}{dh}\right)_{c=c_n}, \quad y_{21}^*=\left(\frac{dy_0}{dh}\right)_{c=c_n},\\ y_{12}^*&=\left(\frac{dx_0}{dc}\right)_{c=c_n}, \quad y_{22}^*=\left(\frac{dy_0}{dc}\right)_{c=c_n},\end{aligned}\right\} \tag{31.4}$$

где x_0 и y_0 определяются формулами (30.5).

Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(t+h)&=\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau}\right)_{c=c_n}=\\ &=\left(-c\sin\tau+c^2\frac{dx_{02}}{d\tau}+\ldots\right)_{c=c_n},\\ \varphi_2(t+h)&=\left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau}\right)_{c=c_n}=\\ &=\left(c\cos\tau+c^2\frac{dy_{02}}{d\tau}+\ldots\right)_{c=c_n}\end{aligned}\right\} \tag{31.5}$$

или принимая во внимание (30.8),

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(t+h) &= \frac{1}{n}\frac{dx_0^{(n)}(t+h)}{dt},\\ \varphi_2(t+h) &= \frac{1}{n}\frac{dy_0^{(n)}(t+h)}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (31.6)$$

Продифференцируем x_0 и y_0 по c, предполагая, что τ не зависит от c. Заменяя затем c через c_n, обозначим полученные выражения через $\psi_1(t+h)$ и $\psi_2(t+h)$. Имеем, следовательно:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(t+h) &= \left(\frac{\partial x_0}{\partial c}\right)_{c=c_n} = \cos n(t+h) + \\ &\quad + 2c_n x_{02}(n(t+h)) + 3c_n^2 x_{03}(n(t+h)) + \ldots \\ \psi_2(t+h) &= \left(\frac{\partial y_0}{\partial c}\right)_{c=c_n} = \sin n(t+h) + \\ &\quad + 2c_n y_{02}(n(t+h)) + 3c_n^2 y_{03}(n(t+h)) + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (31.7)$$

Обозначим, далее

$$\left.\begin{aligned} N &= \left(\frac{d}{dc}\frac{\lambda}{1+h_2c^2+\ldots}\right)_{c=c_n} = \\ &= -\frac{n^2}{\lambda}(2h_2c_n + 3h_3c_n^2 + \ldots), \\ M &= \frac{1}{n}[\lambda c_n + Y(c_n, 0)]. \end{aligned}\right\} \qquad (31.8)$$

Тогда будем иметь для уравнений (31.1) два частных решения:

$$\left.\begin{aligned} y_{11} &= \varphi_1(t+h), \quad y_{21} = \varphi_2(t+h), \\ y_{12} &= \psi_1(t+h) + Nt\,\varphi_1(t+h), \\ y_{22} &= \psi_2(t+h) + Nt\,\varphi_2(t+h), \end{aligned}\right\} \qquad (31.9)$$

из которых первое совпадает с первым решением (31.4), а второе есть линейная комбинация решений (31.4).

Функции φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 играют большую роль в дальнейшем. Отметим их основные свойства.

1. Все эти функции — периодические с периодом $\frac{2\pi}{n}$ и, следовательно, также с периодом 2π. Это свойство не-

посредственно вытекает из формул (31.6) и (31.7), определяющих эти функции.

2. Функции φ_1 и φ_2 удовлетворяют уравнениям в вариациях (31.1).

3. Имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \frac{1}{n} X(c_n, 0), \\ \varphi_2(0) &= \frac{1}{n} [\lambda c_n + Y(c_n, 0)] = M. \end{aligned}\right\} \tag{31.10}$$

Эти равенства непосредственно вытекают из того обстоятельства, что $x_0^{(n)}(t+h)$ и $y_0^{(n)}(t+h)$ удовлетворяют уравнениям (30.2) и начальным условиям (при $t+h=0$) $x_0^{(n)}(0)=c_n$, $y_0^{(n)}(0)=0$.

4. Функции ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= p_{11}\psi_1 + p_{12}\psi_2 - N\varphi_1, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= p_{21}\psi_1 + p_{22}\psi_2 - N\varphi_2. \end{aligned}\right\} \tag{31.11}$$

Справедливость этого утверждения вытекает из того, что функции y_{12} и y_{22} удовлетворяют уравнениям (31.1).

5. Имеют место равенства

$$\psi_1(0) = 1, \quad \psi_2(0) = 0, \tag{31.12}$$

(так как $x_{02}(0) = x_{03}(0) = \ldots = y_{02}(0) = y_{03}(0) = \ldots = 0$).

6. Справедливо тождество

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{vmatrix} = M = \text{const}. \tag{31.13}$$

В самом деле, применяя теорему Лиувилля к детерминанту Вронского из решений (31.9), получим:

$$\Delta(t+h) = \begin{vmatrix} \psi_1 + Nt\varphi_1, & \psi_2 + Nt\varphi_2 \\ \varphi_1, & \varphi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta(0)\, e^{-\int\limits_h^t (p_{11}+p_{22})\,dt},$$

откуда, на основании (31.3), (31.10) и (31.12), вытекает тождество (31.13).

Рассмотрим теперь неоднородную систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + p(t), \\ \frac{dy_2}{dt} &= p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + q(t), \end{aligned}\right\} \qquad (31.14)$$

где p и q — произвольные функции времени. Легко убедиться непосредственной проверкой, что общее решение этих уравнений определяется формулами:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= u\psi_1(t+h) + v\varphi_1(t+h), \\ y_2 &= u\psi_2(t+h) + v\varphi_2(t+h), \end{aligned}\right\} \qquad (31.15)$$

где

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{M}\int_a^t [\varphi_2(t+h)p(t) - \varphi_1(t+h)q(t)]\,dt, \\ v &= \frac{1}{M}\int_b^t [NMu - \psi_2(t+h)p(t) + \psi_1(t+h)q(t)]\,dt \end{aligned}\right\} \qquad (31.16)$$

и a, b — произвольные постоянные.

§ 32. Условия существования периодического решения $\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t)\}$

Мы переходим теперь к вопросу о существовании для полной системы (30.1) периодического решения, обращающегося при $\mu = 0$ в порождающее решение $\{x_0^{(n)}(t+h),\ y_0^{(n)}(t+h)\}$. Это решение полной системы мы будем обозначать через $\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t)\}$.

Обозначим, как обычно, через $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$, $y(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ решение уравнений (30.1) с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) &= x_0^{(n)}(h) + \beta_1, \\ y(0, \beta_1, \beta_2, \mu) &= y_0^{(n)}(h) + \beta_2. \end{aligned}$$

Будем иметь:

$$x(t, \beta_1, \beta_2, \mu) = A_1\beta_1 + B_1\beta_2 + C_1\mu + \ldots$$
$$y(t, \beta_1, \beta_2, \mu) = A_2\beta_1 + B_2\beta_2 + C_2\mu + \ldots$$

Условия периодичности дают два следующих уравнения для определения β_1 и β_2:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) &= [A_1]\beta_1 + [B_1]\beta_2 + [C_1]\mu + \ldots = 0 \\ \psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) &= [A_2]\beta_1 + [B_2]\beta_2 + [C_2]\mu + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \quad (32.1)$$

Мы пользуемся при этом попрежнему обозначением

$$[\varphi(t)] = \varphi(2\pi) - \varphi(0).$$

Функции A_1, A_2 и B_1, B_2 удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{dA_1}{dt} = p_{11}A_1 + p_{12}A_2, \quad \frac{dB_1}{dt} = p_{11}B_1 + p_{12}B_2$$

$$\frac{dA_2}{dt} = p_{21}A_1 + p_{22}A_2, \quad \frac{dB_2}{dt} = p_{21}B_1 + p_{22}B_2$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} A_1(0) = 1, \quad A_2(0) = 0, \\ B_1(0) = 0, \quad B_2(0) = 1. \end{aligned}\right\} \quad (32.2)$$

Следовательно, A_1, A_2 и B_1, B_2 должны быть линейными комбинациями решений (31.9). Принимая во внимание начальные условия (32.2), легко находим:

$$A_1 = \frac{1}{M}[-\psi_2(h)y_{11} + \varphi_2(h)y_{12}],$$

$$B_1 = \frac{1}{M}[\psi_1(h)y_{11} - \varphi_1(h)y_{12}],$$

$$A_2 = \frac{1}{M}[-\psi_2(h)y_{21} + \varphi_2(h)\cdot y_{22}],$$

$$B_2 = \frac{1}{M}[\psi_1(h)y_{21} - \varphi_1(h)y_{22}]$$

и, следовательно, уравнения (32.1) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}\psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) &= \frac{2\pi N\varphi_1(h)\varphi_2(h)}{M}\beta_1 - \frac{2\pi N\varphi_1^2(h)}{M}\beta_2 + \\ &\quad + [C_1]\mu + \ldots = 0, \\ \psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) &= \frac{2\pi N\varphi_2^2(h)}{M}\beta_1 - \frac{2\pi N\varphi_1(h)\varphi_2(h)}{M}\beta_2 + \\ &\quad + [C_2]\mu + \ldots = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (32.3)$$

Функциональный определитель $\dfrac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)}$ этих уравнений обращается в нуль при $\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$. Этого и следовало ожидать, согласно общей теории, так как порождающее решение зависит от произвольного параметра h. Однако при этом не все миноры первого порядка этого определителя равны нулю. В самом деле, величины $\varphi_1(h)$ и $\varphi_2(h)$ не могут одновременно обратиться в нуль ни при каких значениях h, так как они пропорциональны производным $\dfrac{dx_0^{(n)}(h)}{dh}$ и $\dfrac{dy_0^{(n)}(h)}{dh}$, которые могут одновременно обратиться в нуль при каком-нибудь значении h только для тривиального решения $x_0 = y_0 = 0$.

Допустим, для определенности, что $\varphi_2(h)$ отлична от нуля. Тогда второе уравнение (32.3) может быть разрешено относительно β_1. При этом для β_1 получится аналитическая функция от β_2 и μ, обращающаяся в нуль при $\beta_2 = \mu = 0$. Подставляя эту функцию в первое уравнение (32.3), мы получим уравнение для определения β_2. Как было показано в § 3, уравнение для β_2 будет иметь вид:

$$\mu(P^* + Q\beta_2 + R\mu + \ldots) = 0. \qquad (32.4)$$

Для того, чтобы это уравнение имело решение, обращающееся в нуль при $\mu = 0$, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$P^* = 0. \qquad (32.5)$$

Коэффициент P^* зависит от h, и условие (32.5) является уравнением, определяющим эту величину. В § 3 было показано, что каждому некратному корню уравнения (32.5) действительно отвечает периодическое решение уравнений (30.1), обращающееся в порождающее при $\mu = 0$, и это решение будет аналитическим относительно μ.

Напишем подробнее уравнение (32.5). Производя действительно исключение β_1 из уравнений (32.3), легко найдем, что коэффициент P^* имеет вид:

$$P^* = [C_1] - \frac{\varphi_1(h)}{\varphi_2(h)}[C_2]. \tag{32.6}$$

Коэффициенты C_1 и C_2 удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{dC_1}{dt} = p_{11}C_1 + p_{12}C_2 + f_0,$$

$$\frac{dC_2}{dt} = p_{21}C_1 + p_{22}C_2 + F_0$$

и начальным условиям

$$C_1(0) = C_2(0) = 0.$$

Здесь, для краткости, положено:

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= f[t, x_0^{(n)}(t+h), y_0^{(n)}(t+h), 0], \\ F_0 &= F[t, x_0^{(n)}(t+h), y_0^{(n)}(t+h), 0]. \end{aligned}\right\} \tag{32.7}$$

Уравнения для C_1 и C_2 имеют вид уравнений (31.14), общее решение которых определяется формулами (31.15). Принимая во внимание начальные условия, будем, очевидно, иметь:

$$C_1 = \frac{\psi_1}{M}\int_0^t (\varphi_2 f_0 - \varphi_1 F_0)\,dt + \frac{\varphi_1}{M}\int_0^t (NMu - \psi_2 f_0 + \psi_1 F_0)\,dt,$$

$$C_2 = \frac{\psi_2}{M}\int_0^t (\varphi_2 f_0 - \varphi_1 F_0)\,dt + \frac{\varphi_2}{M}\int_0^t (NMu - \psi_2 f_0 + \psi_1 F_0)\,dt,$$

где функции φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 вычисляются для аргумента $t+h$. Отсюда легко находим:

$$P^* = \frac{1}{\varphi_2(h)}\int_0^{2\pi} (\varphi_2 f_0 - \varphi_1 F_0)\,dt.$$

Принимая во внимание (31.6), мы приходим, таким образом, к следующему результату.

Для того, чтобы существовало периодическое решение $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$, необходимо, чтобы h было корнем уравнения

$$P(h)=\int_0^{2\pi}\left\{f_0\frac{dy_0^{(n)}(t+h)}{dt}-F_0\frac{dx_0^{(n)}(t+h)}{dt}\right\}dt=0. \qquad (32.8)$$

Для каждого некратного корня этого уравнения существует одно и только одно периодическое решение $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$ и это решение будет аналитическим относительно μ.

§ 33. Практический способ вычисления периодического решения $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$

Пусть h — простой корень уравнения (32.8). Тогда, по доказанному, периодическое решение $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$ существует и оно будет аналитическим относительно μ. Для вычисления этого решения будем искать его в виде рядов, расположенных по степеням μ с периодическими коэффициентами. Пусть

$$\left.\begin{aligned} x^{(n)}(t)&=x_0^{(n)}(t+h)+\mu x_1(t)+\mu^2x_2(t)+\ldots\\ y^{(n)}(t)&=y_0^{(n)}(t+h)+\mu y_1(t)+\mu^2y_2(t)+\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (33.1)$$

Так как периодическое решение существует, то существует, по крайней мере, одна система рядов (33.1) с периодическими коэффициентами, формально удовлетворяющих уравнениям (30.1). Если окажется, что существует только одна такая система рядов, то эти ряды будут сходиться и действительно представят искомое решение.

Подставляя ряды (33.1) в уравнения (30.1), мы получим для x_k и y_k дифференциальные уравнения вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt}&=p_{11}x_k+p_{12}y_k+f_k,\\ \frac{dy_k}{dt}&=p_{21}x_k+p_{22}y_k+F_k,\end{aligned}\right\} \qquad (33.2)$$

где коэффициенты p_{sj} имеют те же значения, что и раньше, а f_k и F_k суть целые рациональные функции с периодическими коэффициентами от $x_0^{(n)}(t+h)$, $y_0^{(n)}(t+h)$ и тех x_s и y_s, для которых $s \leqslant k-1$. В частности, для функций f_1 и F_1 имеем:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= f\,[t,\ x_0^{(n)}(t+h),\ y_0^{(n)}(t+h),\ 0] = f_0, \\ F_1 &= F\,[t,\ x_0^{(n)}(t+h),\ y_0^{(n)}(t+h),\ 0] = F_0. \end{aligned}\right\} \tag{33.3}$$

Уравнения (33.2) дают возможность последовательно определять функции x_k и y_k. Общее решение этих уравнений, на основании (31.15), может быть представлено в виде

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \psi_1(t+h)\,u_k + \varphi_1(t+h)\,v_k, \\ y_k &= \psi_2(t+h)\,u_k + \varphi_2(t+h)\,v_k, \end{aligned}\right\} \tag{33.4}$$

где

$$u_k = \frac{1}{M}\int \{\varphi_2(t+h)f_k - \varphi_1(t+h)\,F_k\}\,dt + \beta_k,$$

$$v_k = \frac{1}{M}\int \{NMu_k - \psi_2(t+h)f_k + \psi_1(t+h)\,F_k\}\,dt + \alpha_k$$

и α_k, β_k — произвольные постоянные.

Нас интересует, однако, не общее решение уравнений (33.2), а такое частное, которое является периодическим периода 2π. Для этого необходимо произвольные постоянные h, α_k и β_k подобрать таким образом, чтобы функции u_k и v_k вышли периодическими. Рассмотрим сначала функции u_1 и v_1. Так как выражение

$$\varphi_2(t+h)f_0 - \varphi_1(t+h)\,F_0, \tag{33.5}$$

стоящее под интегралом в функции u_1, является периодическим, то для того, чтобы функция u_1 вышла периодической, необходимо и достаточно, чтобы разложение Фурье выражения (33.5) не содержало свободного члена, т. е. чтобы h было корнем уравнения

$$\int_0^{2\pi} \{\varphi_2(t+h)f_0 - \varphi_1(t+h)\,F_0\}\,dt = 0.$$

Мы снова пришли, таким образом, к уравнению (32.8). Так как по условию h является корнем этого уравнения, то функция u_1 получится периодической. Эта функция содержит произвольную постоянную β_1. Этой постоянной мы можем распорядиться таким образом, чтобы функция v_1 получилась также периодической. Для этого, очевидно, нужно положить:

$$\beta_1 = \frac{1}{2\pi NM}\int_0^{2\pi} \{\psi_2(t+h)f_0 - \psi_1(t+h)F_0\}\,dt, \qquad (33.6)$$

если в качестве неопределенного интеграла, которым выражается u_1^*, принять ту первообразную функцию, разложение Фурье которой не содержит свободного члена.

Допустим, что β_1 действительно выбрано по формуле (33.6). Тогда функции x_1 и y_1 получатся периодическими и будут содержать произвольную постоянную α_1. Через эти функции постоянная α_1 войдет также и в функции f_2 и F_2. Это дает нам возможность сделать периодической функцию u_2. Для этого необходимо постоянную α_1 выбрать так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\int_0^{2\pi} \{\varphi_2(t+h)f_2 - \varphi_1(t+h)F_2\}\,dt = 0.$$

После этого, постоянная β_2 однозначно определится из условия периодичности v_2. Продолжая аналогичным образом дальше, мы видим, что если мы будем неопределенные интегралы в формулах (33.4) определять так, чтобы разложения Фурье первообразных функций не содержали свободных членов, постоянные β_k вычислять по формулам

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi NM}\int_0^{2\pi} \{\psi_2(t+h)f_k - \psi_1(t+h)F_k\}\,dt, \qquad (33.7)$$

постоянные α_k определять из уравнений:

$$\int_0^{2\pi} \{\varphi_2(t+h)f_{k+1} - \varphi_1(t+h)F_{k+1}\}\,dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad (33.8)$$

то ряды (33.1) будут формально удовлетворять уравнениям (30.1), и их члены, определяемые формулами (33.4), будут периодическими функциями t с периодом 2π.

Рассмотрим уравнения (33.8), определяющие величины α_k. Покажем, что эти уравнения линейны и, если h — простой корень уравнения (32.8), всегда разрешимы. Допустим для этого, что все величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ уже вычислены и, следовательно, функции $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k$ получились периодическими. Пусть

$$x_k = \overset{*}{x}_k + \alpha_k\varphi_1,$$
$$y_k = \overset{*}{y}_k + \alpha_k\varphi_2,$$

где $\overset{*}{x}_k$, $\overset{*}{y}_k$ — вполне определенные периодические функции времени, вычисленные по формулам (33.4) в предположении, что α_k принято равным нулю. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
f_2 &= \alpha_1\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\varphi_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\varphi_2\right\} + R_2(t) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)(\overset{*}{x}_1 + \alpha_1\varphi_1)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y}\right)(\overset{*}{x}_1 + \alpha_1\varphi_1)\times\right. \\
&\qquad \left.\times(\overset{*}{y}_1 + \alpha_1\varphi_2) + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)(\overset{*}{y}_1 + \alpha_1\varphi_2)^2\right\}, \\
F_2 &= S_2(t) + \alpha_1\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\varphi_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\varphi_2\right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)(\overset{*}{x}_1 + \alpha_1\varphi_1)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}\right)(\overset{*}{x}_1 + \alpha_1\varphi_1)\times\right. \\
&\qquad \left.\times(\overset{*}{y}_1 + \alpha_1\varphi_2) + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)(\overset{*}{y}_1 + \alpha_1\varphi_2)^2\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (33.9)$$

и, для $k > 1$,

$$\left.\begin{aligned}
f_{k+1} &= R_{k+1}(t) + \alpha_k\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\varphi_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\varphi_2\right\} + \\
&\quad + \alpha_k\left\{\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)x_1\varphi_1 + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y}\right)(x_1\varphi_2 + y_1\varphi_1) + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)y_1\varphi_2\right\}, \\
F_{k+1} &= S_{k+1}(t) + \alpha_k\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\varphi_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\varphi_2\right\} + \\
&\quad + \alpha_k\left\{\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)x_1\varphi_1 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}\right)(x_1\varphi_2 + y_1\varphi_1) + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)y_1\varphi_2\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (33.10)$$

$$(k = 2, 3, \ldots),$$

где S_2, R_2, S_{k+1}, R_{k+1} — вполне определенные периодические функции времени. Здесь круглые скобки, в которые заключены производные, обозначают, что после дифференцирования величины x и y должны быть заменены их значениями в порождающем решении, т. е. функциями $x_0^{(n)}(t+h)$ и $y_0^{(n)}(t+h)$, а величина μ положена равной нулю.

Введем обозначение

$$W(\xi, \eta)=\int_0^{2\pi}\left\{\varphi_2\left(\frac{dp_{11}}{dt}\xi+\frac{dp_{12}}{dt}\eta\right)-\varphi_1\left(\frac{dp_{21}}{dt}\xi+\frac{dp_{22}}{dt}\eta\right)\right\}dt. \tag{33.11}$$

Уравнения (33.8), на основании (33.9) и (33.10) имеют вид:

$$P_k a_k^2+Q_k a_k+L_k=0 \quad (k=1, 2, \ldots),$$

где L_k — некоторые постоянные,

$$\left.\begin{aligned} P_1&=\frac{1}{2n}W(\varphi_1, \varphi_2),\\ Q_1&=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left(\varphi_2\frac{df_0}{dh}-\varphi_1\frac{dF_0}{dh}\right)dt+\frac{1}{n}W(x_1^*, y_1^*),\end{aligned}\right\} \tag{33.12}$$

$$\left.\begin{aligned} P_j&=0,\\ Q_j&=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left(\varphi_2\frac{df_j}{dh}-\varphi_1\frac{dF_j}{dh}\right)dt+\frac{1}{n}W(x_1, y_1)\\ &\qquad (j=2, 3, \ldots)\end{aligned}\right\} \tag{33.13}$$

Чтобы получить эти формулы, следует принять во внимание, что на основании (31.2) и (31.6), имеют место следующие тождества:

$$\frac{dp_{11}}{dt}=n\left\{\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)\varphi_1+\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y}\right)\varphi_2\right\},$$

$$\frac{df_0}{dh}=n\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\varphi_1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\varphi_2\right\}$$

и аналогичные тождества для

$$\frac{dp_{12}}{dt}, \quad \frac{dp_{21}}{dt}, \quad \frac{dp_{22}}{dt} \text{ и } \frac{dF_0}{dh}.$$

Преобразуем выражение (33.11), предполагая, что функции ξ и η удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= p_{11}\xi + p_{12}\eta + p(t), \\ \frac{d\eta}{dt} &= p_{22}\xi + p_{21}\eta + q(t), \end{aligned}\right\} \tag{33.14}$$

где p и q — произвольные непрерывные функции времени. Интегрируя это выражение по частям и пользуясь уравнениями (33.14), получим:

$$\left.\begin{aligned} W(\xi, \eta) = &\int_0^{2\pi} \left\{\varphi_2\left(\frac{d\xi}{dt} - p\right) - \varphi_1\left(\frac{d\eta}{dt} - q\right)\right\} - \\ &- \int_0^{2\pi} \left\{\varphi_2\left(p_{11}\frac{d\xi}{dt} + p_{12}\frac{d\eta}{dt}\right) - \varphi_1\left(p_{21}\frac{d\xi}{dt} + \right.\right. \\ &\left.\left. + p_{22}\frac{d\eta}{dt}\right)\right\} dt - \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\frac{d\xi}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt}\frac{d\eta}{dt}\right) dt + \\ &+ \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\varphi_2}{dt} p - \frac{d\varphi_1}{dt} q\right) dt. \end{aligned}\right\} \tag{33.15}$$

Но функции φ_1 и φ_2 удовлетворяют уравнениям в вариациях

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= p_{11}\varphi_1 + p_{12}\varphi_2 \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= p_{21}\varphi_1 + p_{22}\varphi_2, \end{aligned}\right\} \tag{33.16}$$

т. е. уравнениям (33.14) при p и q равных нулю. Заменим во втором интеграле выражения (33.15) $\frac{d\varphi_1}{dt}$ и $\frac{d\varphi_2}{dt}$ их выражениями из уравнений (33.16), а в третьем интеграле равными им величинами $\frac{d\varphi_1}{dh}$ и $\frac{d\varphi_2}{dh}$. Тогда, принимая во внимание (31.3), легко найдем:

$$W(\xi, \eta) = \int_0^{2\pi} \left\{\varphi_2\left(\frac{d\xi}{dt} - p\right) - \varphi_1\left(\frac{d\eta}{dt} - q\right)\right\} + \\ + \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\varphi_2}{dh} p - \frac{d\varphi_1}{dh} - q\right) dt. \qquad (33.17)$$

Заметим теперь, что функции x_1 и y_1, x_1^* и y_1^*, на основании (33.2) и (33.3), удовлетворяют уравнениям (33.14) с p и q, равными, соответственно, f_0 и F_0. Кроме того, все эти функции периодичны. Поэтому формула (33.17) дает:

$$W(x_1^*, y_2^*) = W(x_1, y_1) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\varphi_2}{dh} f_0 - \frac{d\varphi_1}{dh} F_0\right) dt.$$

Для функций φ_1 и φ_2 имеем:

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Следовательно, на основании (33.12) и (33.13),

$$P_k = 0,$$

$$Q_k = \frac{1}{n} \frac{d}{dh} \int_0^{2\pi} (\varphi_2 f_0 - \varphi_1 F_0) dt,$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

и уравнения (33.8) принимают вид:

$$\left\{\frac{d}{dh} \int_0^{2\pi} (\varphi_2 f_0 - \varphi_1 F_0) dt\right\} \alpha_k = -nL_k. \qquad (33.18)$$

Таким образом, уравнения (33.8) линейны относительно α_k и если h — простой корень уравнения (32.8), то все α_k получаются вполне определенными. В этом случае существует только одна система рядов (33.1) с периодическими коэффициентами, формально удовлетворяющих уравнениям

(30.1). Эти ряды сходятся при достаточно малых μ и действительно представляют искомое периодическое решение. Подводя итоги, мы приходим окончательно к следующему результату.

Пусть h простой корень уравнения

$$P(h)=\int_0^{2\pi}\left\{\frac{dy_0^{(n)}(t+h)}{dt}f_0-\frac{dx_0^{(n)}(t+h)}{dt}F_0\right\}dt=0, \qquad (33.19)$$

где

$$f_0=f\,(t,\ x_0^{(n)}(t+h),\ y_0^{(n)}(t+h),\ 0),$$
$$F_0=F\,(t,\ x_0^{(n)}(t+h),\ y_0^{(n)}(t+h),\ 0).$$

Тогда существует одно и только одно периодическое решение $\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t)\}$ уравнений (30.1), обращающееся в порождающее $\{x_0^{(n)}(t+h),\ y_0^{(n)}(t+h)\}$ при $\mu=0$, и это решение определяется формулами

$$\left.\begin{aligned} x^{(n)}(t)&=x_0^{(n)}(t+h)+\mu x_1+\mu^2x_2+\ldots,\\ y^{(n)}(t)&=y_0^{(n)}(t+h)+\mu y_1+\mu^2y_2+\ldots,\end{aligned}\right\} \qquad (33.20)$$

$$x_k=\psi_1(t+h)\,u_k+\varphi_1(t+h)\,v_k,$$
$$y_k=\psi_2(t+h)\,u_k+\varphi_2(t+h)\,v_k,$$
$$u_k=\frac{1}{M}\int\left\{\varphi_2(t+h)\,f_k-\varphi_1\,(t+h)\,F_k\right\}dt+\beta_k,$$
$$v_k=\frac{1}{M}\int\left\{NMu_k-\psi_2(t+h)f_k+\psi_1(t+h)\,F_k\right\}dt+\alpha_k,$$
$$\beta_k=\frac{1}{2\pi NM}\int_0^{2\pi}\{\psi_2(t+h)f_k-\psi_1(t+h)\,F_k\}\,dt,$$

где постоянные α_k определяются линейными уравнениями

$$\int_0^{2\pi}\{\varphi_2(t+h)f_{k+1}-\varphi_1\,(t+h)\,F_{k+1}\}\,dt=0 \qquad (33.21)$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots)$$

f_k и F_k — неоднородные части линейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции x_k и y_k,

постоянные M и N определяются формулами (31.8) *и неопределенные интегралы, которыми выражаются u_k и v_k, определяются так, что разложения Фурье их первообразных функций не содержат свободных членов.*

Заметим, что так как свободный член в уравнениях (33.21) равен, очевидно,

$$\left\{\int_0^{2\pi}[\varphi_2(t+h)f_{k+1}-\varphi_1(t+h)F_{k+1}]\,dt\right\}_{\alpha_k=0},$$

то эти уравнения, на основании (33.18), (33.19) и (31.6), могут быть представлены в следующем виде

$$\frac{dP(h)}{dh}\alpha_k=$$

$$=n\left\{\int_0^{2\pi}[\varphi_2(t+h)f_{k+1}-\varphi_1(t+h)F_{k+1}]\,dt\right\}_{\alpha_k=0}. \quad (33.22)$$

§ 34. Периодическое решение $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$. Резонансные и нерезонансные случаи

В § 30 мы указывали, что в качестве порождающего может быть принято также тривиальное решение $x_0=y_0=0$ уравнений (30.2). Соответствующее периодическое решение уравнений (30.1) обозначим через $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$. Найдем это решение.

Пусть β_1 и β_2 — начальные значения x и y в этом решении. Имеем:

$$x^{(0)}=A_1\beta_1+B_1\beta_2+C_1\mu+\ldots,$$

$$y^{(0)}=A_2\beta_1+B_2\beta_2+C_2\mu+\ldots,$$

где

$$\frac{dA_1}{dt}=-\lambda A_2,\quad \frac{dA_2}{dt}=\lambda A_1,$$

$$\frac{dB_1}{dt}=-\lambda B_2,\quad \frac{dB_2}{dt}=\lambda B_1,$$

$$A_1(0)=1,\quad A_2(0)=0,\quad B_1(0)=0,\quad B_2(0)=1.$$

Следовательно:

$$A_1 = \cos\lambda t, \qquad A_2 = \sin\lambda t,$$
$$B_1 = -\sin\lambda t, \quad B_2 = \cos\lambda t.$$

Условия периодичности имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) &= [x^{(0)}] = (\cos 2\pi\lambda - 1)\,\beta_1 + \\ &\quad + \sin 2\pi\lambda\cdot\beta_2 + [C_1]\,\mu + \ldots = 0 \\ \psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) &= [y^{(0)}] = -\sin 2\pi\lambda\cdot\beta_1 + \\ &\quad + (\cos 2\pi\lambda - 1)\,\beta_2 + [C_2]\,\mu + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \tag{34.1}$$

Имеем далее

$$\Delta = \left\{\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)}\right\}_{\beta_1=\beta_2=\mu=0} = (\cos 2\pi\lambda - 1)^2 + \\ + \sin^2 2\pi\lambda = 2\,(1 - \cos 2\pi\lambda).$$

Отсюда мы видим, что если λ не равна целому числу, то определитель Δ отличен от нуля. Следовательно, если λ не равна целому числу, то существует одно и только одно периодическое решение $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$, обращающееся при $\mu=0$ в тривиальное решение $x_0=y_0=0$ порождающей системы, и это решение будет аналитическим относительно μ.

Для практического вычисления этого решения ищем его в виде рядов

$$\left.\begin{aligned} x^{(0)} &= \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots \\ y^{(0)} &= \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{34.2}$$

формально удовлетворяющих уравнениям (30.1) и обладающих периодическими коэффициентами. Для этих коэффициентов получаем линейные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\lambda y_1 + f(t, 0, 0, 0) \\ \frac{dy_1}{dt} &= \lambda x_1 + F(t, 0, 0, 0) \end{aligned}\right\} \tag{34.3}$$

$$\frac{dx_k}{dt} = -\lambda y_k + f_k(t), \quad \frac{dy_k}{dt} = \lambda x_k + F_k(t) \tag{34.4}$$
$$(k = 2, 3, \ldots)$$

где $f_k(t)$, $F_k(t)$ — целые рациональные функции от x_s, y_s $(s \leqslant k-1)$ с периодическими коэффициентами. Так как λ отлична от целого числа, то уравнения (34.3) имеют одно и только одно периодическое решение, которое легко вычисляется обычными элементарными способами. Точно так же из уравнений (34.4) последовательно вычисляются все остальные коэффициенты x_k и y_k. Полученные таким способом формальные ряды, будучи единственными, сходятся и действительно представляют искомое решение.

Все эти вычисления по существу не отличаются от тех, которыми мы пользовались в § 6 при исследовании колебаний квазилинейной системы с одной степенью свободы. И так же, как и в § 6, все эти вычисления теряют смысл, когда λ обращается в целое число. Когда λ не равна целому числу, но мало от него отличается, ряды (34.2) будут содержать в знаменателях малые делители и при фиксированном μ величину λ можно взять настолько близкой к целому числу, чтобы эти ряды стали расходящимися. Случай, когда величина λ равна целому числу или мало от него отличается, мы будем, как и в § 6, называть резонансным. Этот случай требует особого исследования.

Все сказанное относительно решения $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}(t)\}$ остается справедливым также и для решения $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$, если величина $\lambda - n$ равна нулю или очень мала. В самом деле, при $\lambda = n$ величина c_n, как это видно из (30.9), обращается в нуль и, следовательно, решение $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$ сливается с решением $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}(t)\}$, которое в этом случае теряет смысл. При $\lambda \to n$ величина c_n стремится к нулю, а эта величина, как это видно из формул, определяющих $x^{(n)}(t)$ и $y^{(n)}(t)$, входит (через постоянные β_k) в знаменатели разложений этих функций. Следовательно, случай, когда величина $\lambda - n$ равна нулю или мало от него отличается, должен рассматриваться как резонансный и для решения $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$. Теорией резонанса для рассматриваемых сейчас нами систем мы занимаемся в следующем параграфе.

§ 35. Колебания при резонансе

Рассмотрим систему (30.1) в предположении, что λ отличается от некоторого целого числа n на величину порядка малости μ.

Тогда, полагая

$$\lambda = n + \mu a$$

и относя члены $-ay$ и ax к функциям f и F, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ny + X(x, y) + \mu f(t, x, y, \mu) \\ \frac{dy}{dt} &= nx + Y(x, y) + \mu F(t, x, y, \mu). \end{aligned}\right\} \qquad (35.1)$$

Для этих уравнений построенные нами ряды решений $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}(t)\}$ и $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$ перестанут существовать. Что же касается решений $\{x^{(m)}(t), y^{(m)}(t)\}$, $(m \neq n)$, то они, очевидно, сохраняются. Нам необходимо, следовательно, исследовать вопрос о возможности нахождения для уравнений (35.1) периодического решения, обращающегося при $\mu = 0$ в тривиальное решение $x_0 = y_0 = 0$ порождающей системы. Это решение мы будем в дальнейшем обозначать через $\{x^{(p)}, y^{(p)}\}$.

Если мы попытаемся удовлетворить уравнениям (35.1) формальными рядами

$$\begin{aligned} x &= x_1(t)\mu + x_2(t)\mu^2 + \ldots \\ y &= y_1(t)\mu + y_2(t)\mu^2 + \ldots \end{aligned}$$

с периодическими коэффициентами, то уже для первого приближения мы получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -ny_1 + f(t, 0, 0, 0) \\ \frac{dy_1}{dt} &= nx_1 + F(t, 0, 0, 0), \end{aligned}\right\} \qquad (35.2)$$

которые, вообще говоря, не допускают периодических решений. В самом деле, если

$$\left.\begin{aligned} f(t, 0, 0, 0) &= a_{10} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{1m}\cos mt + b_{1m}\sin mt), \\ F(t, 0, 0, 0) &= a_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{2m}\cos mt + b_{2m}\sin mt) \end{aligned}\right\} \qquad (35.3)$$

разложения Фурье правых частей уравнений (35.2), то, как мы знаем, для того, чтобы эти уравнения допускали периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\left.\begin{aligned} b_{1n} - a_{2n} &= 0, \\ a_{1n} + b_{2n} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{35.4}$$

Мы рассматриваем здесь только тот случай, когда хотя бы одна из величин (35.4) отлична от нуля, т. е., когда способ построения решения $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}(t)\}$, установленный в предыдущем параграфе, оказывается непригодным уже в первом приближении. Мы будем говорить, что в этом случае имеет место *главный резонанс*, или *резонанс первого порядка*.

Для резонанса первого порядка имеет место следующая основная теорема.

Теорема. Пусть $2s$ — младшая степень величины c в разложении периода решения уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= -ny_0 + X(x_0, y_0), \\ \frac{dy_0}{dt} &= nx_0 + Y(x_0, y_0) \end{aligned}\right\} \tag{35.5}$$

с начальными условиями

$$x_0(0) = c, \quad y_0(0) = 0.$$

Тогда, в случае главного резонанса, существует одно и *только одно* периодическое решение $\{x^{(p)}(t), y^{(p)}(t)\}$ уравнений (35.1), для которого функции $x^{(p)}(t)$, $y^{(p)}(t)$ обращаются в нуль при $\mu = 0$ и эти функции разлагаются в ряды по целым положительным степеням величины

$$\nu = \mu^{\frac{1}{2s+1}},$$

сходящиеся при достаточно малых значениях μ.

Доказательство. Обозначим через $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ и $y(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ функции, удовлетворяющие уравнениям (35.1) и начальным условиям

$$x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = \beta_1, \quad y(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = \beta_2.$$

Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x(t,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \mu) &= A_1\beta_1 + B_1\beta_2 + C_1\mu + \ldots, \\ y(t,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \mu) &= A_2\beta_1 + B_2\beta_2 + C_2\mu + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (35.6)$$

и, из условия периодичности,

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(\beta_1,\ \beta_2,\ \mu) &= [A_1]\,\beta_1 + [B_1]\,\beta_2 + [C_1]\,\mu + \ldots = 0, \\ \psi_2(\beta_1,\ \beta_2,\ \mu) &= [A_2]\,\beta_1 + [B_2]\,\beta_2 + [C_2]\,\mu + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (35.7)$$

Покажем, прежде всего, что в случае главного резонанса, по крайней мере одна из величин $[C_1]$, $[C_2]$ отлична от нуля. В самом деле, C_1 и C_2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dC_1}{dt} = -nC_2 + f(t,\ 0,\ 0,\ 0),$$

$$\frac{dC_2}{dt} = nC_1 + F(t,\ 0,\ 0,\ 0)$$

и начальным условиям

$$C_1(0) = C_2(0) = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание (35.3), находим:

$$C_1 = \frac{1}{2}(b_{1n} - a_{2n})\,t\sin nt + \frac{1}{2}(a_{1n} + b_{2n})\cos nt + \overset{*}{C_1}(t),$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(a_{1n} + b_{2n})\,t\sin nt - \frac{1}{2}(b_{1n} - a_{2n})\,t\cos nt + \overset{*}{C_2}(t),$$

где $\overset{*}{C_1}$, $\overset{*}{C_2}$ — периодические функции периода 2π. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} [C_1] &= (a_{1n} + b_{2n})\,\pi, \\ [C_2] &= (b_{1n} - a_{2n})\,\pi, \end{aligned}\right\} \qquad (35.8)$$

что и доказывает наше предположение, так как при главном резонансе, по крайней мере, одно из условий (35.4) не выполняется.

Далее, имеем:

$$A_1 = \cos nt, \quad B_1 = \sin nt,$$

$$A_2 = -\sin nt, \quad B_2 = \cos nt$$

и, следовательно,

$$[A_1]=[A_2]=[B_1]=[B_2]=0.$$

Отсюда вытекает, что уравнения (35.7) могут быть записаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\psi_1=\varphi_1(\beta_1,\ \beta_2)+\mu\{[C_1]+\Phi_1(\beta_1,\ \beta_2,\ \mu)\}=0,\\ \psi_2=\varphi_2(\beta_1,\ \beta_2)+\mu\{[C_2]+\Phi_2(\beta_1,\ \beta_2,\ \mu)\}=0,\end{aligned}\right\}\quad(35.9)$$

где Φ_1 и Φ_2 обращаются в нуль при $\beta_1=\beta_2=\mu=0$, а независящие от μ функции φ_1 и φ_2 начинаются членами не ниже второго порядка. Найдем младшие члены этих функций.

Имеем, очевидно,

$$\varphi_1(\beta_1,\ \beta_2)=[x(t,\ \beta_1,\ \beta_2,\ 0)],$$

$$\varphi_2(\beta_1,\ \beta_2)=[y(t,\ \beta_1,\ \beta_2,\ 0)].$$

Но $x(t,\ \beta_1,\ \beta_2,\ 0)$ и $y(t,\ \beta_1,\ \beta_2,\ 0)$ являются решением уравнений (30.2) с начальными условиями

$$x(0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ 0)=\beta_1,\quad y(0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ 0)=\beta_2\qquad(35.10)$$

и, как всякое решение этих уравнений, они будут периодическими функциями времени. Период этих функций определяется формулой (28.13). Выписывая в этой формуле только младшие члены, получим:

$$T=\frac{2\pi}{n}\{1+h_{2s}(\beta_1^2+\beta_2^2)^s+\ldots\},$$

так как, очевидно, $H_{2s}=h_{2s}$.

Поэтому, полагая

$$h=-2\pi\{h_{2s}(\beta_1^2+\beta_2^2)^s+\ldots\},$$

мы можем написать

$$\varphi_1(\beta_1,\ \beta_2)=x(nT+h,\ \beta_1,\ \beta_2,\ 0)-\beta_1,$$

$$\varphi_2(\beta_1,\ \beta_2)=y(nT+h,\ \beta_1,\ \beta_2,\ 0)-\beta_2.$$

Разлагая в ряд по h и принимая во внимание периодичность и уравнения (30.2), получим

$$\varphi_1(\beta_1, \beta_2) = \left\{\frac{dx(t, \beta_1, \beta_2, 0)}{dt}\right\}_{t=nT} \cdot h + \ldots = -nh\beta_2 + \ldots,$$

$$\varphi_2(\beta_1, \beta_2) = \left\{\frac{dy(t, \beta_1, \beta_2, 0)}{dt}\right\}_{t=nT} \cdot h + \ldots = nh\beta_1 + \ldots.$$

Следовательно, уравнения (35.9) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 = 2\pi nh_{2s}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^s\beta_2 + \ldots + \\ + \mu\{[C_1] + \Phi_1(\beta_1, \beta_2, \mu)\} = 0 \\ \psi_2 = -2\pi nh_{2s}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^s\beta_1 + \ldots + \\ + \mu\{[C_2] + \Phi_2(\beta_1, \beta_2, \mu)\} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (35.11)$$

Нам нужно найти корни β_1 и β_2 этих уравнений, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$. С этой целью положим:

$$\nu = \mu^{\frac{1}{2s+1}}, \quad \beta_1 = \nu\alpha_1, \quad \beta_2 = \nu\alpha_2.$$

Тогда, сокращая на ν^{2s+1}, получим:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi nh_{2s}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^s\alpha_2 + [C_1] + \nu\Phi_1^*(\alpha_1, \alpha_2, \nu) = 0, \\ -2\pi nh_{2s}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^s\alpha_1 + [C_2] + \nu\Phi_2^*(\alpha_1, \alpha_2, \nu) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (35.12)$$

Эти уравнения при $\nu = 0$ имеют единственное вещественное решение:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^{(0)} = \frac{[C_2]}{\sqrt[2s+1]{2\pi nh_{2s}\{[C_1]^2 + [C_2]^2\}^s}}, \\ \alpha_2^{(0)} = \frac{-[C_1]}{\sqrt[2s+1]{2\pi nh_{2s}\{[C_1]^2 + [C_2]^2\}^s}}. \end{aligned}\right\} \quad (35.13)$$

Так как при этом соответствующий функциональный определитель, равный

$$4(1 + 2s)\pi^2 n^2 h_{2s}^2 (\alpha_1^{(0)2} + \alpha_2^{(0)2})^{2s}$$

отличен от нуля, то уравнения (35.12) допускают в окрестности $\nu=0$ только одно вещественное решение и это решение имеет вид:

$$\alpha_1=\alpha_1^{(0)}+\nu\alpha_1^{(1)}+\ldots$$
$$\alpha_2=\alpha_2^{(0)}+\nu\alpha_2^{(1)}+\ldots,$$

где правые части суть аналитические функции ν в окрестности $\nu=0$.

Следовательно, уравнения (35.11) допускают вещественное решение:

$$\left.\begin{aligned}\beta_1&=\alpha_1^{(0)}\nu+\alpha_1^{(1)}\nu^2+\ldots\\ \beta_2&=\alpha_2^{(0)}\nu+\alpha_2^{(1)}\nu^2+\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(35.14)$$

Нетрудно видеть, что это единственное вещественное решение уравнений (35.11), для которого β_1 и β_2 обращаются в нуль при $\mu=0$. Действительно, для каждого такого решения, как это известно из теории уравнений типа (35.11), величины β_1 и β_2 являются аналитическими функциями от $\mu^{\frac{1}{m}}$, где m — целое число. Но, как это легко проверить, уравнениям (35.11) можно удовлетворить рядами, расположенными по $\mu^{\frac{1}{m}}$, лишь только при условии $m=2s+1$.

Подставляя найденные величины β_1 и β_2 в выражения (35.6), мы получим единственное вещественное периодическое решение уравнений (35.1) с порождающим решением $x_0=y_0=0$ и это решение удовлетворяет всем условиям теоремы. Таким образом, теорема доказана.

§ 36. Практический способ вычисления резонансного решения

Для практического вычисления решения $\{x^{(p)}(t), y^{(p)}(t)\}$ поступаем следующим образом.

Ищем вещественные ряды с периодическими коэффициентами

$$\left.\begin{aligned}x^{(p)}&=x_1(t)\,\mu^{\frac{1}{2s+1}}+x_2(t)\,\mu^{\frac{2}{2s+1}}+\ldots,\\ y^{(p)}&=y_1(t)\,\mu^{\frac{1}{2s+1}}+y_2(t)\,\mu^{\frac{2}{2s+1}}+\ldots,\end{aligned}\right\}\qquad(36.1)$$

формально удовлетворяющие уравнениям (35.1). На основании доказанной теоремы, такие ряды всегда найдутся. Для коэффициентов этих рядов мы будем получать уравнения вида:

$$\left.\begin{gathered}
\frac{dx_1}{dt}=-ny_1, \qquad \frac{dy_1}{dt}=nx_1,\\
\frac{dx_k}{dt}=-ny_k+f_k(t), \quad \frac{dy_k}{dt}=nx_k+F_k(t),\\
(k=2,\ 3,\ \ldots,),
\end{gathered}\right\} \tag{36.2}$$

где f_k и F_k — целые рациональные функции с периодическими коэффициентами от тех x_j, y_j, для которых $j<k$. Из этих уравнений находим:

$$x_1=A_1\cos nt+B_1\sin nt, \quad y_1=A_1\sin nt-B_1\cos nt,$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные.

Так как ряды (36.1) обязательно существуют, то уравнения (36.2) обязательно допускают периодическое решение. Допустим, что все x_s, y_s, для которых $s<k$, уже вычислены и получились периодическими. Тогда f_k и F_k будут периодическими функциями времени. Обозначим через $\overset{*}{x}_k$ и $\overset{*}{y}_k$ какое-нибудь периодическое решение уравнений для x_k и y_k. Тогда и общее решение этих уравнений, выражаемое формулами

$$\begin{gathered}
x_k=A_k\cos nt+B_k\sin nt+\overset{*}{x}_k,\\
y_k=A_k\sin nt-B_k\cos nt+\overset{*}{y}_k,
\end{gathered}$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные, будет также периодическим. Таким образом, каждое приближение вводит две произвольные постоянные. Эти постоянные необходимо определить так, чтобы уравнения для последующих приближений допускали периодические решения.

Если мы обозначим, соответственно, через $a_{1n}^{(k)}$ и $b_{1n}^{(k)}$ коэффициенты при $\cos nt$ и $\sin nt$ в разложении Фурье функции f_k, а через $a_{2n}^{(k)}$, $b_{2n}^{(k)}$ те же коэффициенты для функции F_k, то необходимые и достаточные условия периодичности функций x_k и y_k выражаются равенствами:

$$a_{1n}^{(k)}+b_{2n}^{(k)}=0, \quad b_{1n}^{(k)}-a_{2n}^{(k)}=0. \tag{36.3}$$

Эти уравнения и определяют произвольные постоянные A_j и B_j.

Не приводя здесь подробного анализа, укажем следующие свойства уравнений (36.3).

1. Эти уравнения тождественно удовлетворяются при $k < 2s+1$.

2. При $k=2s+1$ эти уравнения содержат только постоянные A_1 и B_1 и будут нелинейными (но имеющими единственное вещественное решение).

3. При $k=2s+j$ $(j>1)$ эти уравнения содержат только A_j и B_j (кроме величин $A_1, \ldots, A_{j-1}, B_1, \ldots, B_{j-1}$, уже вычисленных из предыдущих уравнений) и будут линейными относительно этих величин.

Легко также видеть, что A_1 и B_1 равны, соответственно, $\alpha_1^{(0)}$ и $\alpha_2^{(0)}$ и, следовательно, могут быть вычислены по формулам (35.13).

Пример. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x + \beta x^2 = \mu a \cos nt.$$

Мы видели в § 7, что нельзя найти периодического решения этого уравнения, если его трактовать как квазилинейное. Однако периодическое решение этого уравнения можно легко найти, применяя метод настоящего параграфа.

Если для вычисления периода свободных колебаний, определяемых уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x + \beta x^2 = 0,$$

применить метод Ляпунова, то сейчас же обнаружится, что уже величина h_2 отлична от нуля. Поэтому, полагаем:

$$x = x_1\mu^{\frac{1}{3}} + x_2\mu^{\frac{2}{3}} + \ldots$$

Для коэффициентов разложений имеем уравнения:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + n^2x_1 = 0,$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + n^2x_2 = -\beta x_1^2,$$

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} + n^2x_3 = -2\beta x_1x_2 + a\cos nt,$$

$$\frac{d^2x_4}{dt^2} + n^2x_4 = -\beta x_2^2 - 2\beta x_1x_3.$$

Так как рассматриваемое уравнение не содержит ни синусов, ни $\frac{dx}{dt}$, то разложение Фурье функции x будет, очевидно, содержать только косинусы. Поэтому,

$$x_1 = A_1 \cos nt,$$

$$x_2 = A_2 \cos nt - \frac{\beta A_1^2}{2n^2} + \frac{\beta A_1^2}{6n^2} \cos 2nt.$$

Для того, чтобы уравнение для x_3 допускало периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при $\cos nt$ в правой части этого уравнения обращался в нуль. Это дает:

$$\frac{5\beta^2}{6n^2} A_1^3 + a = 0, \quad A_1 = -\sqrt[3]{\frac{6an^2}{5\beta^2}}$$

и

$$x_3 = -\frac{\beta A_1 A_2}{n^2} + \frac{\beta A_1 A_2}{3n^2} \cos 2nt + \frac{\beta^2 A_1^3}{48n^4} \cos 3nt + A_3 \cos nt.$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\cos nt$ в уравнении для x_4, находим

$$A_2 = 0$$

и, следовательно,

$$x = -\sqrt[3]{\frac{6an^2\mu}{5\beta^2}} \cos nt + \left(\sqrt[3]{\frac{6an^2\mu}{5\beta^2}}\right)^2 \left(-\frac{\beta}{2n^2} + \frac{\beta}{6n^2} \cos 2nt\right) + \ldots$$

Этим приближением для x мы и ограничиваемся.

§ 37. Устойчивость периодических решений, рассмотренных в предыдущих параграфах

Пользуясь общими критериями устойчивости, установленными в § 23, исследуем устойчивость периодических решений, рассмотренных в предыдущих параграфах.

а) *Решение* $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$.

В рассматриваемом случае, функции $\psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu)$ и $\psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu)$ определяются формулами (32.3). Если мы обозначим через $\overline{\psi}_1(\beta_2, \mu)$ результат исключения β_1 из уравнений (32.3), т. е. левую часть уравнения (32.4), то будем иметь:

$$-\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} = \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_1}\frac{\partial\overline{\psi}_1}{\partial\beta_2}$$

и, следовательно, с точностью до величин первого порядка относительно μ,

$$-\Delta = -\left\{\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)}\right\}_{\beta_i=\beta_i(\mu)} = \frac{2\pi N\varphi_2^2(h)\,Q}{M}\,\mu.$$

Величина Q может быть вычислена по общей формуле (3.17), установленной в § 3. Применяя эту формулу, получим:

$$Q = \frac{1}{n\,\varphi_2(h)}\,\frac{dP^*(h)}{dh},$$

где $P^*(h)$ определяется формулой (32.6). Переходя от функции P^* к функции $P(h)$, определяемой формулой (32.8), и принимая во внимание, что h есть корень функции $P(h)$, окончательно находим, что с точностью величин первого порядка относительно μ, имеет место равенство:

$$-\Delta = -\left\{\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)}\right\}_{\beta_i=\beta_i(\mu)} = \frac{2\pi N}{nM}\,\frac{dP(h)}{dh}\,\mu.$$

Из этого равенства видно, что Δ обращается в нуль при $\mu = 0$. Точно так же, как это непосредственно видно из (32.3), обращается в нуль при $\mu = 0$ и функция

$$\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2}\right\}_{\beta_i=\beta_i(\mu)}.$$

Поэтому при достаточно малых значениях μ условие устойчивости (23.6) выполняется само по себе со знаком неравенства. Что же касается условий (23.5) и (23.7), то на основании (30.3), они принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \mu\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right\}dt \leqslant 0, \\ \mu\frac{N}{M}\,\frac{dP(h)}{dh} \leqslant 0, \end{aligned}\right\} \qquad (37.1)$$

где в производных $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ и $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$ x и y заменяются функциями $x_0^{(n)}(t+h)$, $y_0^{(n)}(t+h)$, а величина μ полагается равной нулю.

Мы получили, таким образом, необходимые условия устойчивости решения $\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t)\}$. Эти условия будут и достаточными, если они выполняются со знаком неравенства.

б) *Решение* $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$.

В этом случае функции $\psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu)$ и $\psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu)$ определяются формулами (34.1) и левые части неравенств (23.5) и (23.6), если ограничиться только свободными членами, равны, соответственно, $2(1-\cos 2\pi\lambda)$ и 4. Поэтому при достаточно малом μ условия (23.5) и (23.6) выполняются со знаком неравенства. Следовательно, для устойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие (23.7), которое в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\mu \int_0^{2\pi} \left\{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\right\}_{x=y=\mu=0} dt \leqslant 0. \tag{37.2}$$

Этого условия будет также и достаточно, если оно выполняется со знаком неравенства.

в) *Резонансное решение.*

В рассматриваемом случае функции $\psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu)$ и $\psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu)$ являются левыми частями уравнений (35.7), которые, как мы показали, имеют вид (35.11). Поэтому, удерживая только младшие степени μ и принимая во внимание, что $\beta_1(\mu)$ и $\beta_2(\mu)$ определяются формулами (35.14), находим:

$$\Delta = \left\{\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)}\right\}_{\beta_i=\beta_i(\mu)} = 4\pi^2 n^2 h_{2s}^2 (1+2s)(\beta_1^2+\beta_2^2)^{2s} =$$

$$= 4\pi^2 n^2 h_{2s}^2 (1+2s)(\alpha_1^{(0)2}+\alpha_2^{(0)2})^{2s} \mu^{\frac{4s}{2s+1}} > 0.$$

Следовательно, условие (23.5) здесь выполняется со знаком неравенства. Очевидно, что и условие (23.6) также выполняется со знаком неравенства. Поэтому остается только одно необходимое условие устойчивости:

$$\mu \int_0^{2\pi} \left\{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\right\}_{x=y=\mu=0} dt \leqslant 0, \tag{37.3}$$

которое является также и достаточным, если оно выполняется со знаком неравенства.

§ 38. Пример приложения предыдущих методов

Этот параграф посвящен детальному исследованию вынужденных колебаний системы, описываемых дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x-\gamma x^3=\mu\left(a\cos mt+b\cos nt-2H\frac{dx}{dt}\right), \quad (38.1)$$

$$(\gamma>0, \quad H>0, \quad \mu>0),$$

где m и n — целые числа.

Уравнение (38.1) имеет многочисленные технические применения. Частный случай этого уравнения, в предположении, что возмущающая сила состоит только из одной гармоники, рассмотрел впервые Duffing[1]. После Duffing'а этой же задачей занимались и многие другие исследователи. Как Duffing, так и большинство других исследователей применяли для решения задачи нестрогие приближенные методы. Но и эти нестрогие методы, не дающие уверенности в правильности полученных результатов, практически пригодны лишь только тогда, когда либо возмущающая сила содержит только одну гармонику, либо когда отсутствует сопротивление, т. е. когда коэффициент H равен нулю. Мы исследуем здесь уравнение (38.1) при помощи методов, развитых в этой главе. Эти методы дают возможность строгого решения задачи без вышеуказанных ограничений. Более того, вычисления мало усложнятся, если мы вместо возмущающей силы, состоящей из двух гармоник, рассмотрим возмущающую силу, состоящую из большего числа гармоник, или вместо кубической характеристики нелинейности введем характеристику нелинейности более общего вида.

Уравнение (38.1) может быть представлено в виде системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-ky,\\ \frac{dy}{dt}&=kx-\frac{\gamma}{k}x^3-\frac{\mu}{k}(a\cos mt+b\cos nt+2Hy),\end{aligned}\right\} \quad (38.2)$$

---

[1] G. Duffing. Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig, 1918.

и, следовательно, в рассматриваемом случае,

$$\left.\begin{aligned} &X=0, \quad Y=-\frac{\gamma}{k}x^3, \quad f=0, \\ &F=-\frac{1}{k}(a\cos mt+b\cos nt+2Hy). \end{aligned}\right\} \tag{38.3}$$

Мы исследуем для системы (38.2) решения $\{x^{(m)}(t), y^{(m)}(t)\}$ и $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$, решение $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}(t)\}$, резонансное решение, устойчивость всех этих решений и характер развития колебаний. Мы начнем с решения $\{x^{(m)}(t), y^{(m)}(t)\}$. Решение $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$ получится простой перестановкой чисел m и n.

а) *Решение* $\{x^{(m)}(t), y^{(m)}(t)\}$.

Порождающее уравнение

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}+k^2x_0-\gamma x_0^3=0$$

рассмотрено нами в § 27 в качестве примера. Общее решение этого уравнения определяется формулами (27.12). Поэтому, на основании (30.8), имеем:

$$x_0^{(m)}(t+h)=c_m\cos\tau+c_m^3x_{03}(\tau)+c_m^5x_{05}(\tau)+\ldots \tag{38.4}$$
$$\tau=m(t+h),$$

где

$$\left.\begin{aligned} &x_{03}(\tau)=\frac{1}{32}\frac{\gamma}{k^2}\cos\tau-\frac{1}{32}\frac{\gamma}{k^2}\cos 3\tau, \\ &x_{05}(\tau)=\frac{23}{1024}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos\tau-\frac{3}{128}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos 3\tau+\frac{1}{1024}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos 5\tau. \end{aligned}\right\} \tag{38.5}$$

Величина c_m определяется уравнением (30.9), которое в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\frac{3}{8}\frac{\gamma}{k^2}c_m^2+\frac{57}{256}\frac{\gamma^2}{k^4}c_m^4+\ldots=\frac{k-m}{m}. \tag{38.6}$$

Это уравнение имеет вещественные решения только при $k>m$. Таких решений будут два и они будут численно равны между собой и противоположны по знаку.

Для функций φ_1 и ψ_1 имеем:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= -c_m \sin m(t+h) + c_m^3 \frac{dx_{03}(\tau)}{d\tau} + c_m^5 \frac{dx_{05}(\tau)}{d\tau}, \\ \psi_1 &= \cos m(t+h) + 3c_m^2 x_{03}(\tau) + 5c_m^4 x_{05}(\tau) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{38.7}$$

$$\tau = m(t+h).$$

Функции φ_2 и ψ_2 мы не выписываем, так как они не войдут в выражение периодического решения.

Для вычисления функции $x^{(m)}(t)$ пользуемся правилами и формулами § 33. Имеем:

$$x^{(m)}(t) = x_0^{(m)}(t+h) + \mu x_1 + \ldots \tag{38.8}$$

Для практики вполне достаточно ограничиться только написанными членами. При этом, для вычисления x_1 достаточно взять только первые члены в разложении φ_1 и ψ_1. При такой степени приближения, формулы (33.20) дают:

$$\begin{aligned} x_1 = {} & \frac{a \cos mh}{2kNM} \cos m(t+h) + \left(\frac{Hc_m}{2kM} - \frac{HNc_m^2}{8mkM} - \alpha_1 c_m\right) \times \\ & \times \sin m(t+h) + \left(\frac{ac_m}{4kmM} - \frac{ac_m^2 N}{16kMm^2}\right) \cos mt + \\ & + \left(\frac{bmc_m}{k(m^2-n^2)} - \frac{Nbc_m^2(m^2+n^2)}{2kM(m^2-n^2)^2}\right) \cos nt + \\ & + \frac{aNc_m^2}{16km^2M} \cos(3mt + 2mh) + \frac{bc_m^2 N}{4k(m+n)^2 M} \times \\ & \times \cos(2mt + nt + 2mh) + \frac{bc_m^2 N}{4k(m-n)^2 M} \times \\ & \times \cos(2mt - nt + 2mh) + \frac{Hc_m^2 N}{8kmM} \sin 3m(t+h), \end{aligned} \tag{38.9}$$

где, на основании (31.8),

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{kc_m}{m}\left(1 - \frac{\gamma}{k^2} c_m^2\right), \\ N &= -\frac{m^2}{k}\left(\frac{3}{4}\frac{\gamma}{k^2} c_m + \frac{57}{64}\frac{\gamma^2}{k^4} c_m^3 + \ldots\right). \end{aligned}\right\} \tag{38.10}$$

Величины h и α_1 определяются из уравнений (33.19) и (33.22), которые имеют вид:

$$P(h)=\int\limits_0^{2\pi}\left\{\frac{a}{k}\cos mt+\frac{b}{k}\cos nt-\frac{2H}{k}\frac{dx_0^{(m)}(t+h)}{dt}\right\}\times$$

$$\times\frac{dx_0^{(m)}(t+h)}{dt}\,dt=0, \quad (38.11)$$

$$\frac{dP(h)}{dh}\alpha_1=$$

$$=m\left\{\int\limits_0^{2\pi}\left(f_2\frac{dy_0^{(m)}(t+h)}{dt}-F_2\frac{dx_0^{(m)}(t+h)}{dt}\right)dt\right\}_{\alpha_1=0}. \quad (38.12)$$

Рассмотрим подробнее эти уравнения. Имеем, на основании (38.9) и (38.5),

$$x_0^{(m)}(t+h)=\sum_{j=0}^{\infty}A_{2j+1}\cos(2j+1)\,m\,(t+h),$$

где

$$A_1=c_m+\frac{1}{32}\frac{\gamma}{k^2}c_m^3+\frac{23}{1024}\frac{\gamma^2}{k^4}c_m^5+\ldots$$

$$A_3=-\frac{1}{32}\frac{\gamma}{k^2}c_m^3-\frac{3}{128}\frac{\gamma^2}{k^4}c_m^5+\ldots$$

Мы будем предполагать, что отношение $\frac{n}{m}$ не является целым числом, или, по крайней мере, целым нечетным числом. При таком предположении уравнение (38.11) принимает вид

$$P(h)=\frac{a\pi mA_1}{k}\sin mh-\frac{2\pi Hm^2}{k}\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^2A_{2j+1}^2=0. \quad (38.13)$$

Это уравнение определяет два значения для угла mh, причем сумма этих значений равна π. Величина $P'(h)$ для этих значений h отлична от нуля. Если мы теперь примем во внимание, что мы имеем два различных значения для c_m, равных по величине и противоположных по знаку, то, на основании результатов § 33, мы должны заключить, что существуют четыре периодических решения $\{x^{(m)}(t),\ y^{(m)}(t)\}$. Однако, в действительности имеется только два различных периодических решения $\{x^{(m)}(t),\ y^{(m)}(t)\}$. В самом деле, так как функция $x_0^{(m)}(t+h)$ содержит только нечетные степени c_m и только нечетные кратности угла $m(t+h)$, то замена величины mh на величину $\pi - mh$ эквивалентна, как это легко видеть из (38.13), переходу от порождающего решения $\{x_0^{(m)}(t+h),\ y_0^{(m)}(t+h)\}$ с выбранным значением c_m к порождающему решению $\{x_0^{(m)}(t+h),\ y_0^{(m)}(t+h)\}$ с противоположным по знаку значением c_m. Мы можем поэтому предполагать, что угол h является острым.

Если в уравнении (38.13) сохранить только младшие (относительно c_m) члены, то мы придем к следующей приближенной формуле:

$$\sin mh = \frac{2Hmc_m}{a}. \tag{38.14}$$

Эта приближенная формула будет, очевидно, справедливой и в том случае, когда $\frac{n}{m}$ есть целое число.

Заметим, что уравнение (38.13) накладывает некоторые ограничения на величину c_m и, следовательно, на величину $k - m$. В самом деле, из (38.13) находим, что должно выполняться неравенство

$$\frac{2Hm\sum\limits_{j=1}^{\infty}(2j+1)^2 A_{2j+1}^2}{|aA_1|} \leqslant 1. \tag{38.15}$$

Переходим к вычислению величины α_1. В рассматриваемом случае

$$f_2 = 0, \quad F_2 = -\frac{3\gamma}{k} x_0^{(m)}(t+h)\, x_1^2 + \frac{2H}{k}\frac{dx_1}{dt}.$$

Поэтому, если при вычислении α_1 ограничиться младшим членом (относительно c_m) в выражении (38.9) для x_1, т. е. членом

$$\frac{a\cos mh}{2kNM}\cos m(t+h),$$

а также младшим членом в $P(h)$, то из уравнения (38.12) получим:

$$\alpha_1 = -\frac{H}{kNM} = \frac{4}{3}\frac{kH}{\gamma c_m^2}. \qquad (38.16)$$

Формулы (38.8), (38.9), (38.10), (38.13), (38.16) определяют решение $\{x^{(m)}(t),\ y^{(m)}(t)\}$.

б) *Решение* $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$.

Рассмотрим периодическое решение уравнения (38.1), обращающееся в нуль при $\mu = 0$. Полагая

$$x^{(0)}(t) = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots \qquad (38.17)$$

и поступая, как указано в § 34, найдем:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{a}{k^2-m^2}\cos mt + \frac{b}{k^2-n^2}\cos nt,\\
x_2 &= \frac{2Hma}{(k^2-m^2)^2}\sin mt + \frac{2Hnb}{(k^2-n^2)^2}\sin nt,\\
x_3 &= A_m\cos mt + A_n\cos nt + A_{3m}\cos 3mt +\\
&\quad + A_{3n}\cos 3nt + A_{2m+n}\cos(2m+n)t +\\
&\quad + A_{2m-n}\cos(2m-n)t +\\
&\quad + A_{2n+m}\cos(2n+m)t + A_{2n-m}\cos(2n-m)t,
\end{aligned}\right\} \qquad (38.18)$$

где

$$A_m = \frac{3}{2}\gamma\left[\frac{a^3}{2(k^2-m^2)^4} + \frac{ab^2}{(k^2-m^2)^2(k^2-n^2)^2}\right] - \frac{4Hm^2a}{(k^2-m^2)^3},$$

$$A_n = \frac{3}{2}\gamma\left[\frac{b^3}{2(k^2-n^2)^4} + \frac{a^2b}{(k^2-m^2)^2(k^2-n^2)^2}\right] - \frac{4Hn^2b}{(k^2-n^2)^3},$$

$$\left.\begin{aligned}
A_{3m} &= \frac{\gamma a^3}{4(k^2-m^2)^3(k^2-9m^2)},\\
A_{3n} &= \frac{\gamma b^3}{4(k^2-n^2)^3(k^2-9n^2)},
\end{aligned}\right\} \qquad (38.19)$$

$$A_{2m\pm n} = \frac{3\gamma a^2b}{4(k^2-m^2)^2(k^2-n^2)[k^2-(2m\pm n)^2]},$$

$$A_{2n\pm m} = \frac{3\gamma ab^2}{4(k^2-n^2)^2(k^2-m^2)[k^2-(2n\pm m)^2]}.$$

Формулы (38.17), (38.18) и (38.19) определяют решение $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$.

в) *Резонансное решение.*

Найдем колебание системы в окрестности резонанса $k = m$. С этой целью, полагаем

$$m^2 - k^2 = \mu\lambda,$$

после чего уравнение (38.1) примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x - \gamma x^3 = \mu\left(a\cos mt + b\cos nt - 2h\frac{dx}{dt} + \lambda x\right). \quad (38.20)$$

Следуя методу § 36, ищем решение этого уравнения под видом ряда

$$x^{(p)} = x_1\mu^{\frac{1}{3}} + x_2\mu^{\frac{2}{3}} + x_3\mu + \ldots \quad (38.21)$$

с периодическими коэффициентами.

Имеем

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + m^2x_1 = 0, \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} + m^2x_2 = 0,$$

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} + m^2x_3 = \gamma x_1^3 + a\cos mt + b\cos nt,$$

$$\frac{d^2x_4}{dt^2} + m^2x_4 = 3\gamma x_1^2x_2 - 2H\frac{dx_1}{dt} + \lambda x_1,$$

$$\frac{d^2x_5}{dt^2} + m^2x_5 = 3\gamma x_1^2x_3 + 3\gamma x_1x_2^2 - 2H\frac{dx_2}{dt} + \lambda x_2.$$

Отсюда находим:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos mt + B_1\sin mt, \\ x_2 &= A_2\cos mt + B_2\sin mt, \end{aligned}\right\} \quad (38.22)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos mt$ и $\sin mt$ в уравнении для x_3, получаем:

$$A_1 = -\sqrt[3]{\frac{4a}{3\gamma}}, \quad B_1 = 0, \quad (38.23)$$

после чего имеем:

$$x_3 = \frac{a}{24m^2}\cos 3mt + \frac{b}{m^2-n^2}\cos nt + A_3\cos mt + B_3\sin mt. \qquad (38.24)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos mt$ и $\sin mt$ в уравнениях для x_4 и x_5, найдем следующие значения для коэффициентов A_2, B_2, A_3, и B_3:

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= \frac{4\lambda}{9\gamma}\sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}}, \quad B_2 = \frac{8Hm}{3\gamma}\sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}}, \\ A_3 &= -\frac{a}{72m^2} + \frac{32H^2m^2}{a\gamma}, \quad B_3 = -\frac{16Hm\lambda}{9a\gamma}. \end{aligned}\right\} \qquad (38.25)$$

Формулы (38.21), ..., (38.25) и определяют резонансное решение.

г) *Характер развития колебаний.*

Допустим, для определенности, что $a > 0$, $b > 0$, $n > m$. Пусть частота k лежит в интервале

$$l < k \leqslant l + 1, \qquad (38.26)$$

где l — целое число. Так как в рассматриваемом случае

$$h_2 = \frac{3}{8}\frac{\gamma}{k^2} > 0,$$

то, на основании § 30, уравнение колебаний допускает $2l+1$ периодических решений: решение $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}(t)\}$ и $2l$ решений $\{x^{(1)}(t), y^{(1)}(t)\}, \ldots, \{x^{(l)}(t), y^{(l)}(t)\}$. По какому из этих решений будет в действительности развиваться колебание?

При приближенном исследовании задачи колебаний, для случая внешней силы, состоящей из одной гармоники, Duffing и другие авторы искали решение в виде

$$x = A\cos mt + B\sin mt$$

и, следовательно, молчаливо вводили физическую гипотезу, что преобладающая гармоника в вынужденном колебании имеет такую же частоту, как и возмущающая сила. Эта гипотеза хорошо подтверждается экспериментальными данными.

Мы будем также предполагать, что в вынужденном колебании преобладают гармоники с частотами m и n или хотя бы одна из них.

Из всех рассмотренных нами периодических решений этой гипотезе будут удовлетворять семь решений: решение $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$, два решения $\{x^{(m)}(t),\ y^{(m)}(t)\}$, два решения $\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t)\}$ и два резонансных решения (в окрестности $k=m$ и в окрестности $k=n$). Из этих решений физически могут осуществляться лишь те, которые обладают устойчивостью.

Так как для уравнения (38.1) имеет место неравенство:

$$\mu\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\right\}dt=-4\pi H\mu<0,$$

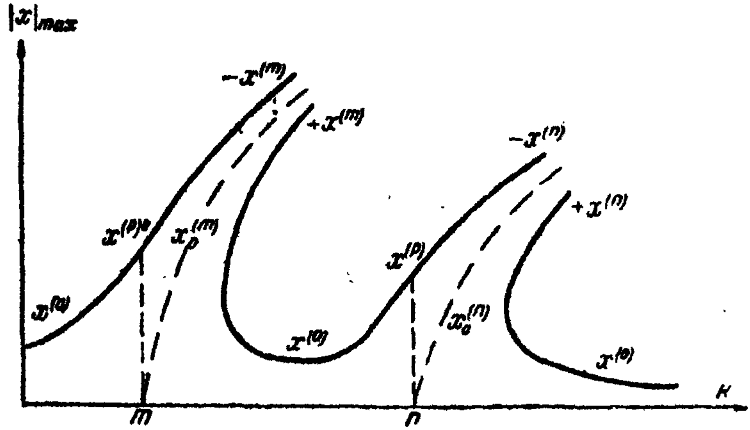
то на основании результатов § 37, решение $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$ и резонансные решения, безусловно, устойчивы. Что же касается решений $\{x^{(m)}(t),\ y^{(m)}(t)\}$ и $\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t)\}$, то для их устойчивости необходимо выполнение второго из условий (37.1). Простое вычисление показывает, что при достаточно малом c_m из двух решений $\{x^{(m)}(t),\ y^{(m)}(t)\}$ решение, отвечающее положительному значению c_m, неустойчиво, а решение, отвечающее отрицательному значению c_m, устойчиво. То же самое справедливо и для решений $\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t)\}$.

Из всего вышесказанного можно уже сделать определенные выводы о характере развития колебаний.

Допустим сначала, что $k<m$. Тогда колебание будет развиваться по устойчивому решению $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$, которое при $k<m$ является единственным, удовлетворяющим принятой выше гипотезе. При приближении k к m ряды, определяющие решение $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$, начинают расходиться. Отсюда, однако, не следует, что решение $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$ перестает существовать. Оно может сохраниться, но иметь другое аналитическое выражение. Более детальный анализ показывает, что при приближении k к m, решение $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$ непрерывно переходит в резонансное (в окрестности $k=m$), а последнее, при дальнейшем увеличении k, непрерывно переходит в возникающее после резонанса решение $\{x^{(m)}(t),\ y^{(m)}(t)\}$, отвечающее отрицательному значению c_m.

При таком значении k (или несколько большем) будет также существовать решение $\{x^{(m)}(t), y^{(m)}(t)\}$, отвечающее положительному значению c_m, и снова решение $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}(t)\}$. Первое из этих решений, как уже указывалось, — неустойчиво.

При дальнейшем увеличении k величина c_m, как это вытекает из определяющего ее уравнения, будет численно возрастать, т. е. амплитуда колебаний будет увеличиваться, вслед-

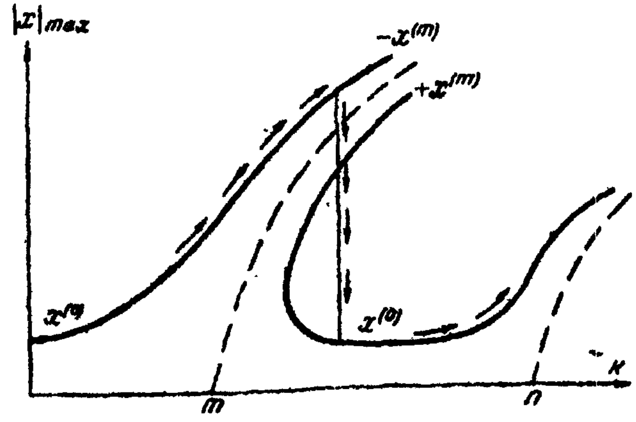


Черт. 6.

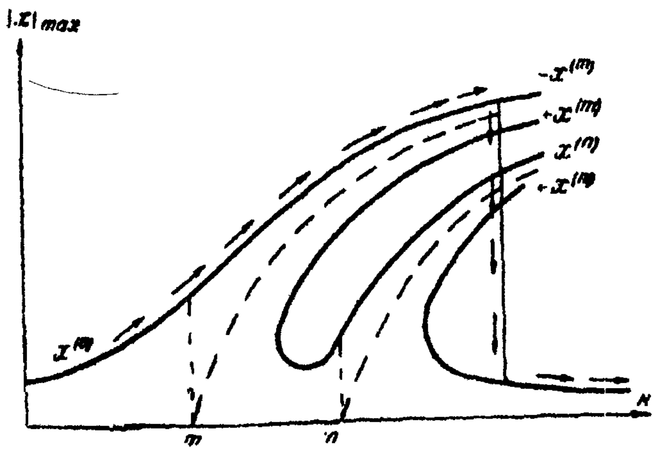
ствие чего эти колебания в некоторый момент станут неустойчивы. Допустим, что это произойдет при $k = k^*$. Как будут развиваться колебания при $k > k^*$? Здесь придется рассмотреть два различных случая, в зависимости от того, будет ли величина $n - m$ достаточно большой или нет.

Допустим сначала, что разность $n - m$ достаточно велика, а именно, допустим, что $n > k^*$. В этом случае, при $k = k^*$ единственным устойчивым решением, удовлетворяющим вышепринятой гипотезе, является $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}(t)\}$. Вследствие этого, колебание скачкообразно перейдет на это решение. При дальнейшем возрастании k, решение $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}(t)\}$ непрерывно перейдет через резонансное решение (в окрестности $k = n$) в решение $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$, отвечающее отрицательному значению c_n, а затем, после потери устойчивости, снова в решение $\{x_{(0)}(t), y^{(0)}(t)\}$ (скачкообразно).

Допустим теперь, что разность $n-m$ мала, а именно, допустим, что $n < k^*$. В этом случае, колебания будут развиваться по решению $\{x^{(m)}(t),\ y^{(m)}(t)\}$ с отрицательным c_m



Черт. 7.



Черт. 8.

при значениях k, не только меньших, но даже равных и превосходящих n. Следовательно, несмотря на то, что в резонансе будет находиться вторая гармоника, в вынужденном колебании будет преобладать первая гармоника. При $k > k^*$

колебания сорвутся или на решение $\{x^{(0)}(t),\ y^{(0)}(t)\}$, или на решение $\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t)\}$ (с отрицательным c_n), которое еще может оказаться устойчивым.

Все вышеизложенное хорошо уясняется, если построить резонансные кривые (по горизонтальной оси откладывается собственная частота k, а по вертикальной оси максимальное значение $|x|$). На черт. 6 показана связь, существующая между различными периодическими решениями. Пунктирные линии соответствуют порождающим решениям $\{x^{(m)}(t+h),\ y^{(m)}(t+h)\}$ и $\{x^{(n)}(t+h),\ y^{(n)}(t+h)\}$ (так называемые „скелетные" кривые). На черт. 7 стрелками показано развитие колебаний при постепенном увеличении k для случая, когда разность $n-m$ достаточна велика. На черт. 8 показан один из возможных вариантов развития колебаний для случая, когда величина $n-m$ мала.

ГЛАВА VI

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМАМ ЛЯПУНОВА

§ 39. Порождающие решения

В этой главе мы будем рассматривать периодические колебания систем, описываемых дифференциальными уравнениями вида:

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sr}x_r + X_s(x_1, \ldots, x_r) + \\ + \mu f_s(t, x_1, \ldots, x_r, \mu), \qquad (39.1)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, r),$$

где a_{sj} — постоянные, X_s — аналитические функции $x_1, \ldots, x_r$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка, f_s — аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_r$ и малого параметра μ, разложения которых по степеням $x_1, \ldots, x_r$ могут содержать как линейные, так и свободные члены. Функции f_s зависят также и от t, по отношению к которому они непрерывны, периодичны с периодом 2π и разлагаются в ряды Фурье. Областью аналитичности функций X_s и f_s относительно переменных $x_1, \ldots, x_r$ является некоторая окрестность начала координат.

Мы предполагаем, кроме того, что порождающая система

$$\frac{dx_s^{(0)}}{dt} = a_{s1}x_1^{(0)} + \ldots + a_{sr}x_r^{(0)} + X_s(x_1^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}) \qquad (39.2)$$

является системой Ляпунова.

Пусть $\pm\lambda i$ — пара чисто мнимых корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho, & a_{12}, & \ldots, & a_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}-\rho, & \ldots, & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots, & a_{rr}-\rho \end{vmatrix} = 0, \tag{39.3}$$

удовлетворяющая условиям § 25, так что эта пара корней может быть принята за ведущую и уравнения (39.2) могут быть представлены в виде уравнений (25.3), для которых существует первый интеграл (25.9).

Представив порождающую систему в виде (25.3) и выделив тем самым ведущие переменные x и y, мы можем записать уравнения (39.1) в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots, x_m) + \\ &\qquad + \mu f(t, x, y, x_1, \ldots, x_m, \mu), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots, x_m) + \\ &\qquad + \mu F(t, x, y, x_1, \ldots, x_m, \mu), \\ \frac{dx_s}{dt} &= b_{s1}x_1 + \ldots + b_{sm}x_m + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_m) + \\ &\qquad + \mu f_s(t, x, y, x_1, \ldots, x_m, \mu), \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}\right\} \tag{39.4}$$

где $m = r - 2$. Напомним, что при этом характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\rho, & b_{12}, & \ldots, & b_{1m} \\ b_{21}, & b_{22}-\rho, & \ldots, & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1}, & b_{m2}, & \ldots, & b_{mm}-\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{39.5}$$

не имеет ни нулевого корня, ни корней вида $\pm p\lambda i$, где p — целое число.

В дальнейшем мы будем пользоваться уравнениями колебаний как в форме (39.1), так и в форме (39.4).

До сих пор мы обозначали переменные в порождающей системе уравнений теми же буквами, что и в полной системе, снабжая лишь их индексом нуль. Однако, при исследовании уравнений колебаний в форме (39.4) такой способ записи окажется слишком громоздким. Поэтому для порождающей системы уравнений (39.4) мы будем пользоваться другими буквенными обозначениями переменных и будем эту систему писать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\lambda\eta + X(\xi, \eta, \xi_1, \ldots, \xi_m),\\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda\xi + Y(\xi, \eta, \xi_1, \ldots, \xi_m),\\ \frac{d\xi_s}{dt} &= b_{s1}\xi_1 + \ldots + b_{sm}\xi_m + X_s(\xi, \eta, \xi_1, \ldots, \xi_m). \end{aligned}\right\} \tag{39.6}$$

Как было показано в гл. IV, система (39.6) допускает периодическое решение, зависящее от двух произвольных постоянных c и h, имеющее вид

$$\left.\begin{aligned} \xi &= c\cos\tau + c^2\xi^{(2)}(\tau) + \ldots\\ \eta &= c\sin\tau + c^2\eta^{(2)}(\tau) + \ldots\\ \xi_s &= c\xi_s^{(1)}(\tau) + c^2\xi_s^{(2)}(\tau) + \ldots (s = 1, 2, \ldots, m)\\ \tau &= \lambda(t + h)(1 + h_2c^2 + \ldots)^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{39.7}$$

Здесь $\xi^{(k)}(\tau)$, $\eta^{(k)}(\tau)$ и $\xi_s^{(k)}(\tau)$ суть периодические функции τ периода 2π, удовлетворяющие условиям

$$\xi^{(k)}(0) = \eta^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

а h_2, h_3, ... — некоторые постоянные, из которых первая неравная нулю имеет четный индекс. Ряды (39.7) сходятся при всех значениях h и при достаточно малых значениях c. Период решения (39.7) определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2c^2 + \ldots). \tag{39.8}$$

Отсюда следует, что для получения порождающих решений системы (39.4), необходимо, оставляя величину h произвольной, величину c определить из уравнения

$$T=\frac{2\pi}{n},$$

где n — произвольное целое число. Полученное таким образом число c мы будем, как и в § 30, обозначать через c_n, а соответствующее порождающее решение через $\{\xi^{(n)}(t+h), \eta^{(n)}(t+h), \xi_s^{(n)}(t+h)\}$. Это решение, на основании (39.7), выражается формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\xi^{(n)}(t+h)=c_n\cos\tau+c_n^2\xi^{(2)}(\tau)+\ldots,\\ &\eta^{(n)}(t+h)=c_n\sin\tau+c_n^2\eta^{(2)}(\tau)+\ldots,\\ &\xi_s^{(n)}(t+h)=c_n\xi_s^{(1)}(\tau)+c_n^2\xi_s^{(2)}(\tau)+\ldots\\ &\qquad (s=1, 2, \ldots, m),\\ &\qquad \tau=n(t+h). \end{aligned}\right\} \tag{39.9}$$

Уравнение, определяющее c_n, имеет вид:

$$h_{2l}c_n^{2l}+h_{2l+1}c_n^{2l+1}+\ldots=\frac{\lambda-n}{n}, \tag{39.10}$$

где h_{2l} — первая из постоянных $h_2, h_3, \ldots$, не равная нулю. Так же, как и в § 30, заключаем, что уравнение (39.10) определяет два значения c_n и, следовательно, имеются два порождающих решения $\{\xi^{(n)}(t+h), \eta^{(n)}(t+h), \xi_s^{(n)}(t+h)\}$. При этом, если $h_{2l}>0$, то величине n можно придавать любые целые значения, меньшие λ, а если $h_{2l}<0$, то величине n можно придавать любые целые значения, бо́льшие λ.

Кроме $\{\xi^{(n)}(t+h), \eta^{(n)}(t+h), \xi_s^{(n)}(t+h)\}$, порождающим решением будет также тривиальное решение $\xi=\eta=\xi_1=\ldots=\xi_m=0$ системы (39.6).

§ 40. Периодическое решение $\{x_s^{(0)}(t)\}$

Исходя из вида (39.1) уравнений колебаний, будем сначала искать периодическое решение этих уравнений, обращающееся при $\mu=0$ в тривиальное решение $x_1^{(0)}=\ldots=x_r^{(0)}=0$ порождающей системы. Это решение мы будем обозначать символом $\{x_s^{(0)}(t)\}$. Если мы будем пользоваться уравнениями колебаний в форме (39.4), то это же решение мы будем обозначать через $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}(t), x_s^{(0)}(t)\}$.

Обозначая через $\beta_1, \ldots, \beta_r$ начальные значения в искомом решении, будем иметь:

$$x_s^{(1)} = A_{s1}\beta_1 + A_{s2}\beta_2 + \ldots + A_{sr}\beta_r + C_s\mu + \ldots \quad (40.1)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r)$$

и условия периодичности имеют вид:

$$[A_{s1}]\beta_1 + \ldots + [A_{sr}]\beta_r + [C_s]\mu + \ldots = 0 \quad (40.2)$$
$$(s = 1, 2, \ldots r).$$

Но, как легко видеть, A_{sj} представляют собой фундаментальную систему решений линейных уравнений

$$\frac{dA_{sj}}{dt} = a_{s1}A_{1j} + \ldots + a_{sr}A_{rj} \quad (s, j = 1, 2, \ldots, r),$$

удовлетворяющую начальным условиям

$$A_{sj} = \begin{cases} 0 & (s \neq j) \\ 1 & (s = j) \end{cases}$$

и поэтому

$$D = \left\{\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_r)}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_r)}\right\}_{\beta_j = \mu = 0} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_{11}(2\pi) - 1, & A_{12}(2\pi), \ldots, & A_{1r}(2\pi) \\ A_{21}(2\pi), & A_{22}(2\pi) - 1, \ldots, & A_{2r}(2\pi) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1}(2\pi), & A_{r2}(2\pi), \ldots, & A_{rr}(2\pi) - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (e^{2\pi\rho_1} - 1)(e^{2\pi\rho_2} - 1)\ldots(e^{2\pi\rho_r} - 1),$$

где ρ_j — корни характеристического уравнения (39.3). Следовательно, если это уравнение не имеет корней вида $\pm pi$, где p — целое число, то определитель D отличен от нуля и система (39.1) будет допускать одно и только одно периодическое решение $\{x_s^0(t)\}$. Это решение будет аналитическим относительно μ.

Допустим, что только что указанное условие относительно корней уравнения (39.3) действительно выполняется, и, следовательно, решение $\{x_s^0(t)\}$ существует. Для практического вычисления этого решения ищем его в виде рядов

$$x_s^0(t) = \mu x_{s1}(t) + \mu^2 x_{s2}(t) + \ldots \qquad (40.3)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r)$$

с периодическими коэффициентами, формально удовлетворяющих уравнениям (39.1). Для коэффициентов этих рядов мы получим уравнения вида

$$\frac{dx_{sk}}{dt} = a_{s1}x_{1k} + \ldots + a_{sr}x_{rk} + f_{sk}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r),$$

где f_{sk} суть целые рациональные функции с периодическими коэффициентами от тех x_{ij}, для которых $j < k$. Эти уравнения дают возможность последовательно определять коэффициенты в виде периодических функций времени, причем эти коэффициенты получаются вполне определенными.

Ряды (40.3) при достаточно малом μ будут сходиться и действительно представят искомое решение.

Если характеристическое уравнение (39.3) имеет чисто мнимые корни вида $\pm pi$, где p — целое число, то будет иметь место резонанс. Резонансными следует также считать и те случаи, когда характеристическое уравнение имеет корни, отличающиеся от $\pm pi$ на величину порядка малости μ. Теорией резонанса мы будем заниматься в следующем параграфе.

§ 41. Периодическое решение при резонансе

Мы переходим к вопросу о существовании периодического решения уравнений (39.1) обращающегося при $\mu = 0$ в тривиальное решение $x_1^0 = \ldots = x_r^0$ порождающей системы, в случае резонанса. Допустим, следовательно, что характеристическое уравнение имеет пару корней, отличающихся от $\pm pi$, где p — целое число, на величину порядка малости μ. Предположим, что уравнение (39.3) не имеет других корней такого типа. Относя поправочные члены к функциям f_s, мы можем считать, так же как и в исследованных ранее случаях резонанса, что вышеуказанные „критические" корни равны $\pm pi$. Мы будем предполагать, что эта пара чисто мнимых корней удовлетворяет всем условиям, указанным в § 25, так что эти корни могут быть приняты за ту основную пару чисто мнимых корней, которая фигурирует в форме (39.4) уравнений колебаний.

Таким образом, уравнения колебаний могут быть представлены в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -py + X + \mu f(t, x, y, x_1, \ldots, x_m, \mu), \\ \frac{dy}{dt} &= px + Y + \mu F(t, x, y, x_1, \ldots, x_m, \mu), \\ \frac{dx_s}{dt} &= b_{s1}x_1 + \ldots + b_{sm}x_m + X_s + \mu f_s \\ &\quad (s = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \tag{41.1}$$

Если мы попытаемся удовлетворить этим уравнениям формальными рядами вида

$$x = \mu x^{(1)}(t) + \mu^2 x^{(2)}(t) + \ldots$$
$$y = \mu y^{(1)}(t) + \mu^2 y^{(2)}(t) + \ldots$$
$$x_s = \mu x_s^{(1)}(t) + \mu^2 x_s^{(2)}(t) + \ldots$$

с периодическими коэффициентами, то для коэффициентов первого приближения мы получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= -py^{(1)} + f(t\ 0, \ldots, 0) \\ \frac{dy^{(1)}}{dt} &= px^{(1)} + F(t, 0, \ldots, 0), \end{aligned}\right\} \tag{41.2}$$

$$\frac{dx_s^1}{dt} = b_{s1}x_1^{(1)} + \ldots + b_{sm}x_m^{(1)} + f_s(t, 0, \ldots, 0). \tag{41.3}$$

Так как по предположению, характеристическое уравнение системы (41.3) не имеет корней вида $\pm pki$, где k — целое число, то эта система допускает периодическое решение для $x_s^{(1)}$. Что же касается уравнений (41.2), то для того, чтобы они допускали периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы величины

$$\delta_1 = B_{1p} - A_{2p}, \quad \delta_2 = A_{1p} + B_{2p} \tag{41.4}$$

обращались в нуль. Здесь положено

$$f(t,0,\ldots,0) = A_{10} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_{1n}\cos nt + B_{1n}\sin nt),$$

$$F(t,0,\ldots,0) = A_{20} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_{2n}\cos nt + B_{2n}\sin nt).$$

Мы будем предполагать, что хотя бы одна из величин (41.4) отлична от нуля. В этом случае, так же, как и в § 35, мы будем говорить, что имеет место *главный резонанс*.

При главном резонансе справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $2l$ — младшая степень величины c в разложении периода

$$T = \frac{2\pi}{p}(1 + h_{2l}c^{2l} + h_{2l+1}c^{2l+1} + \ldots)$$

периодического решения порождающей системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -p\eta + X(\xi, \eta, \xi_1, \ldots, \xi_m), \\ \frac{d\eta}{dt} &= p\xi + Y(\xi, \eta, \xi_1, \ldots, \xi_m) \\ \frac{d\xi_s}{dt} &= b_{s1}\xi_1 + \ldots + b_{sm}\xi_m + X_s(\xi, \eta, \xi_1, \ldots, \xi_m) \\ &(s = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}\right\} \tag{41.5}$$

с начальными условиями

$$\xi(0) = c, \quad \eta(0) = 0.$$

Тогда, при главном резонансе, существует одно и только одно периодическое решение $\{x^{(p)}(t), y^{(p)}(t), x_s^{(p)}(t)\}$ уравнений (41.1), для которого функции $x^{(p)}(t)$, $y^{(p)}(t)$, $x_s^{(p)}(t)$ обращаются в нуль при $\mu = 0$ и эти функции разлагаются в ряды по целым положительным степеням величины $\nu=\mu^{\frac{1}{2l+1}}$, сходящиеся при достаточно малом значении μ.

Доказательство. Рассмотрим порождающую систему (41.5). Как было показано в § 28, для этой системы существует периодическое решение, содержащее две произвольные постоянные a и b, являющиеся начальными значениями величин ξ и η. Величины ξ_s являются в этом решении аналитическими функциями $w_s(\xi, \eta)$ от ξ и η, удовлетворяющими уравнениям с частными производными

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_s(\xi,\eta)}{\partial\xi}(-p\eta+X(\xi,\eta,w_1,\ldots,w_m))+\\+\frac{\partial w_s(\xi,\eta)}{\partial\eta}(p\xi+Y(\xi,\eta,w_1,\ldots,w_m))=\\=b_{s1}w_1+\ldots+b_{sm}w_m+X_s(\xi,\eta,w_1,\ldots,w_m)\\(s=1,2,\ldots,m).\end{aligned}$$

Заменим в уравнениях (41.1) переменные x_s переменными u_s при помощи подстановки

$$u_s=x_s-w_s(x,y)\quad(s=1,2,\ldots,m).$$

Как было указано в § 28, разложения функций w_s начинаются членами не ниже второго порядка, и поэтому линейные члены в уравнениях (41.1) не изменятся. Функции же X, Y, X_s, f, F, f_s заменяются другими функциями аналогичного вида, которые мы обозначим, соответственно, через X^*, Y^*, X_s^*, f^*, F^*, f_s^*.

Таким образом, уравнения (41.1) перейдут в уравнения

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}=-py+X^*(x,y,u_1,\ldots,u_m)+\\+\mu f^*(t,x,y,u_1,\ldots,u_m,\mu),\\\frac{dy}{dt}=px+Y(x,y,u_1,\ldots,u_m)+\\+\mu F^*(t,x,y,u_1,\ldots,u_m,\mu),\\\frac{du_s}{dt}=b_{s1}u_1+\ldots+b_{sm}u_m+X_s^*(x,y,u_1,\ldots,u_m)+\\+\mu f_s^*(t,x,y,u_1,\ldots,u_m,\mu),\\(s=1,2,\ldots,m),\end{aligned}\right\}\quad(41.6)$$

а уравнения (41.5) примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= -p\eta + X^*(\xi, \eta, \xi_1, \ldots, \xi_m),\\
\frac{d\eta}{dt} &= p\xi + Y^*(\xi, \eta, \xi_1, \ldots, \xi_m),\\
\frac{d\xi_s}{dt} &= b_{s1}\xi_1 + \ldots + b_{sm}\xi_m + X_s^*(\xi, \eta, \xi_1, \ldots, \xi_m)\\
&\qquad (s = 1, 2, \ldots, m).
\end{aligned}\right\} \qquad (41.7)$$

Сделанное преобразование таково, что задача отыскания периодического решения системы (41.1) эквивалентна той же задаче для системы (41.6). При этом, очевидно, имеем

$$f^*(t, 0, \ldots, 0) = f(t, 0, \ldots, 0),$$
$$F^*(t, 0, \ldots, 0) = F(t, 0, \ldots, 0),$$

так что величины (41.4) не изменяются и, следовательно, для системы (41.6) также имеет место главный резонанс.

Периодическое решение порождающей системы (41.5) переходит в периодическое решение порождающей системы (41.7). Последнее при этом обладает тем свойством, что для него величины ξ_s равны тождественно нулю. Это непосредственно вытекает из формул преобразования. Следовательно, решение уравнений (41.7) с начальными условиями

$$\xi(0) = a, \quad \eta(0) = b, \quad \xi_s(0) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, m), \qquad (41.8)$$

где a и b — произвольные постоянные, будет периодическим. Период решения, на основании (28.13), имеет вид:

$$T = \frac{2\pi}{p}\{1 + H_{2l}(a^2 + b^2)^l + \ldots\}, \qquad (41.9)$$

где величина $H_{2l} = h_{2l}$, по условию теоремы, отлична от нуля.

Из того обстоятельства, что уравнения (41.7) имеют решение, в котором все ξ_s равны нулю, вытекает также, что

$$X_s^*(x, y, 0, \ldots, 0) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, m). \qquad (41.10)$$

Установив это, обозначим через

$$x(t, a, b, \beta_j, \mu), \; y(t, a, b, \beta_j, \mu), \; u_s(t, a, b, \beta_j, \mu) \qquad (41.11)$$

решение уравнений (41.6) с начальными условиями

$$x(0,\ a,\ b,\ \beta_j,\ \mu)=a,\quad y(0,\ a,\ b,\ \beta_j,\ \mu)=b$$
$$u_s(0,\ a,\ b,\ \beta_j,\ \mu)=\beta_s\quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Имеем тождественно

$$\{x(pT,\ a,\ b,\ \beta_j,\ 0)\}_{\beta_j=0}\equiv a,\ \{y(pT,\ a,\ b,\ \beta_j,\ 0)\}_{\beta_j=0}\equiv b. \quad (41.12)$$

В самом деле, рассматриваемое решение при $\mu=0$ обращается в решение системы (41.7), которое при начальных условиях (41.8) будет периодическим с периодом T и, следовательно, также с периодом pT.

Далее, на основании (41.10),

$$\{u_s(t,\ a,\ b,\ \beta_j,\ 0)\}_{\beta_j=0}\equiv 0. \quad (41.13)$$

Для того, чтобы рассматриваемое решение полной системы было периодическим периода 2π, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись уравнения

$$\left.\begin{aligned}[x]&=x(2\pi,\ a,\ b,\ \beta_j,\ \mu)-a=0,\\ [y]&=y(2\pi,\ a,\ b,\ \beta_j,\ \mu)-b=0,\\ [u_s]&=u_s(2\pi,\ a,\ b,\ \beta_j,\ \mu)-\beta_s=0\\ &(s=1,\ 2,\ \ldots,\ m).\end{aligned}\right\} \quad (41.14)$$

Рассмотрим подробнее эти уравнения. Выписывая только линейные члены, имеем:

$$\left.\begin{aligned}x(t,\ a,\ b,\ \beta_j,\ \mu)&=A_1a+B_1b+C_1\mu+\ldots\\ y(t,\ a,\ b,\ \beta_j,\ \mu)&=A_2a+B_2b+C_2\mu+\ldots\\ u_s(t,\ a,\ b,\ \beta_j,\ \mu)&=A_{s1}\beta_1+\ldots+\\ &\qquad+A_{sm}\beta_m+D_s\mu+\ldots\\ (s=1,\ 2,\ \ldots,\ m).&\end{aligned}\right\} \quad (41.15)$$

(остальные линейные члены, как это легко видеть из уравнений (41.6), обращаются тождественно в нуль).

Величины A_{sj} удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dA_{sj}}{dt}=b_{s1}A_{1j}+\ldots+b_{sm}A_{mj}$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

и начальным условиям

$$A_{sj}(0)=\begin{cases}1 & (s=j),\\ 0 & (s\neq j).\end{cases}$$

Поэтому функциональный определитель m последних уравнений (41.14) относительно величин $\beta_1, \ldots, \beta_m$ при $a=b=\beta_1=\ldots=\beta_m=\mu=0$ имеет значение

$$D=(e^{2\pi\rho_1}-1)\ldots(e^{2\pi\rho_m}-1),$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_m$ — корни характеристического уравнения (39.5). Но все эти корни, в силу сделанных выше предположений, таковы, что величина D отлична от нуля. Поэтому последние m уравнений (41.14) разрешимы относительно величин β_j и дают для последних аналитические функции

$$\beta_j=\beta_j^*(a, b, \mu) \quad (j=1, 2, \ldots, m), \tag{41.16}$$

обращающиеся в нуль при $a=b=\mu=0$. Однако, функции β_j^* будут обращаться в нуль при $\mu=0$ и a и b, отличных от нуля. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что функции $u_s(t, a, b, \beta_j, \mu)$ на основании (41.13), необходимо обращаются в нуль при $\beta_1=\ldots=\beta_m=\mu=0$, каковы бы ни были значения величин t, a, b.

Итак,

$$\beta_j^*(a, b, 0)=0 \quad (j=1, 2, \ldots, m). \tag{41.17}$$

Подставим теперь полученные значения β_j в первые два уравнения (41.14). Будем иметь:

$$x(2\pi, a, b, \beta_j^*(a, b, \mu), \mu)-a=0$$

$$y(2\pi, a, b, \beta_j^*(a, b, \mu), \mu)-b=0.$$

Выделяя члены, независящие от μ, и учитывая при этом (41.15), находим:

$$x(2\pi, a, b, \beta_j^*(a, b, 0), 0)-a+\mu\{[C_1]+\Phi_1(a, b, \mu)\}=0,$$

$$y(2\pi, a, b, \beta_j^*(a, b, 0), 0)-b+\mu\{[C_2]+\Phi_2(a, b, \mu)\}=0,$$

где Φ_1 и Φ_2 — аналитические функции, обращающиеся в нуль при $a=b=\mu=0$. Или, принимая во внимание (41.17),

$$\{x(2\pi,\ a,\ b,\ \beta_j,\ 0)\}_{\beta_j=0}-a+\mu\{[C_1]+\Phi_1(a,\ b,\ \mu)\}=0,$$

$$\{y(2\pi,\ a,\ b,\ \beta_j,\ 0)\}_{\beta_j=0}-b+\mu\{[C_2]+\Phi_2(a,\ b,\ \mu)\}=0.$$

Заменяя в этих уравнениях величину 2π ее значением из (41.9):

$$2\pi=pT+h,\quad h=-2\pi H_{2l}(a^2+b^2)^l+\ldots$$

и разлагая в ряд по h, будем иметь:

$$\{x(pT,\ a,\ b,\ \beta_j,\ 0\}_{\beta_j=0}+\left\{\frac{dx(t,\ a,\ b,\ \beta_j,0)}{dt}\right\}_{\beta_j=0,\ t=pT}\times$$
$$\times h+\ldots-a+\mu\{[C_1]+\Phi_1\}=0,$$

$$\{y(pT,\ a,\ b,\ \beta_j,\ 0\}_{\beta_j=0}+\left\{\frac{dy(t,\ a,\ b,\ \beta_j,0)}{dt}\right\}_{\beta_j=0,\ t=pT}\times$$
$$\times h+\ldots-b+\mu\{[C_2]+\Phi_2\}=0.$$

Учитывая (41.12), периодичность функций

$$\{x(t,\ a,\ b,\ \beta_j,\ 0)\}_{\beta_j=0}\quad \text{и}\quad \{y(t,\ a,\ b,\ \beta_j,\ 0\}_{\beta_j=0},$$

а также то обстоятельство, что эти функции удовлетворяют уравнениям (41.5), найдем окончательно

$$\left.\begin{aligned}&2\pi pH_{2l}(a^2+b^2)^l\cdot b+\ldots+\\&\qquad+\mu\{[C_1]+\Phi_1(a,\ b,\ \mu)\}=0\\&-2\pi pH_{2l}(a^2+b^2)^l a+\ldots+\\&\qquad+\mu\{[C_2]+\Phi_2(a,\ b,\ \mu)\}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(41.18)$$

где ненаписанные члены зависят только от a и b и имеют относительно этих величин порядок, больший $2l+1$.

Величины C_1 и C_2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dC_1}{dt}=-pC_2+f(t,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

$$\frac{dC_2}{dt}=pC_1+F(t,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

и начальным условиям

$$C_1(0) = C_2(0) = 0.$$

Отсюда, на основании (41.4),

$$[C_1] = \delta_2\pi, \quad [C_2] = -\delta_1\pi.$$

Следовательно, хотя бы одна из величин $[C_1]$ и $[C_2]$ отлична от нуля и уравнения (41.18), как это было показано в § 35, имеют одно и только одно вещественное решение для a и b, при котором эти величины обращаются в нуль при $\mu = 0$. Это решение будет, при этом, аналитическим относительно $\mu^{\frac{1}{2l+1}}$. Но тогда, на основании (41.16), величины β_j получаются также аналитическими относительно $\mu^{\frac{1}{2l+1}}$. Подставляя a, b и β_j в (41.11), мы получим периодическое решение, удовлетворяющее всем условиям теоремы.

Таким образом, теорема доказана.

Для действительного вычисления искомого периодического решения нет необходимости производить все проделанные здесь вычисления. В частности, нет необходимости переходить к переменным u_s. Проще всего, исходя непосредственно из уравнений (41.1), пытаться удовлетворить им формальными рядами

$$x = x^{(1)}\mu^{\frac{1}{2l+1}} + x^{(2)}\mu^{\frac{2}{2l+1}} + \ldots$$

$$y = y^{(1)}\mu^{\frac{1}{2l+1}} + y^{(2)}\mu^{\frac{2}{2l+1}} + \ldots,$$

$$x_s = x_s^{(1)}\mu^{\frac{1}{2l+1}} + x_s^{(2)}\mu^{\frac{2}{2l+1}} + \ldots$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m)$$

и в дальнейшем поступать так же, как и в § 36.

§ 42. Периодическое решение $\{x_s^{(n)}(t)\}$. Условия существования

Мы переходим теперь к исследованию периодического решения системы (39.4), обращающегося при $\mu = 0$ в порождающее решение $\{\xi^{(n)}(t+h), \eta^{(n)}(t+h), \xi_s^{(n)}(t+h)\}$. Это решение мы будем обозначать через $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t), x_s^{(n)}(t)\}$.

Введем обозначения:

$$x_{m+1}=x,\quad x_{m+2}=x_r=y,$$
$$\xi_{m+1}=\xi,\quad \xi_{m+2}=\xi_r=\eta,$$
$$f_{m+1}=f,\quad f_{m+2}=f_r=F,$$
$$-\lambda y+X(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_m)=F_{m+1}(x_1,\ \ldots,\ x_r),$$
$$\lambda x+Y(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_m)=F_{m+2}(x_1,\ \ldots,\ x_r)= \\ =F_r(x_1,\ \ldots,\ x_r),$$
$$b_{s1}x_1+\ldots+b_{sm}x_m+X_s(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_m)= \\ =F_s(x_1,\ \ldots,\ x_r) \\ (s=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Тогда уравнения колебаний (39.4) могут быть переписаны в виде:

$$\frac{dx_j}{dt}=F_j(x_1,\ \ldots,\ x_r)+\mu f_j(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_r,\ \mu) \quad (42.1)$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

и порождающая система в виде

$$\frac{d\xi_j}{dt}=F_j(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_r) \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ r). \quad (42.2)$$

При этом, решение $\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t);\ x_s^{(n)}(t)\}$ мы будем теперь просто обозначать через $\{x_j^{(n)}(t)\}$, а порождающее решение $\{\xi^{(n)}(t+h),\ \eta^{(n)}(t+h),\ \xi_s^{(n)}(t+h)\}$ через $\{\xi_j^{(n)}(t+h)\}$.

Поступая как обычно, обозначим через $x_j^{(n)}(t,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r,\ \mu)$ решение системы (42.1) с начальными условиями

$$x_j^{(n)}(0,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r,\ \mu)=\xi_j^{(n)}(h)+\beta_j.$$

Будем иметь:

$$x_j^{(n)}(t,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r,\ \mu)=\xi_j^{(n)}(t+h)+A_{j1}\beta_1+\ldots+ \\ +A_{jr}\beta_r+C_j\mu+\ldots \quad (42.3)$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Коэффициенты A_{ji} образуют фундаментальную систему решений уравнений

$$\frac{dA_j}{dt} = p_{j1}A_1 + \ldots + p_{jr}A_r \quad (j = 1, 2, \ldots, r), \tag{42.4}$$

удовлетворяющую начальным условиям

$$A_{ji} = \begin{cases} 1 & (j = i), \\ 0 & (j \neq i). \end{cases} \tag{42.5}$$

Здесь p_{ji} — периодические функции времени периода 2π, определяемые соотношениями

$$p_{ji} = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right),$$

в которых круглые скобки обозначают, что после дифференцирования все величины x_i должны быть заменены их значениями в порождающем решении, т. е. функциями $\xi_j^{(n)}(t+h)$.

Уравнения (42.4) являются уравнениями в вариациях для порождающей системы (42.2), когда в качестве невозмущенного решения принято решение $\{\xi_j^{(n)}(t+h)\}$. Это решение принадлежит к семейству (39.7), зависящему от двух произвольных параметров c и h, и соответствует значению $c = c_n$ одного из этих параметров. Поэтому на основании результатов § 15, мы можем найти два частных решения уравнений (42.4), продифференцировав (39.7) по h и c (считая при этом, конечно, $\xi = \xi_{m+1}$ и $\eta = \xi_{m+2}$) и положив затем $c = c_n$. Первое полученное таким образом решение будет, как легко видеть, иметь вид

$$A_j^{(1)} = \varphi_j(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, r), \tag{42.6}$$

где $\varphi_j(t)$ — некоторые периодические функции периода 2π. Что же касается второго решения, то деля его на постоянный множитель

$$\frac{\lambda}{n}\frac{d}{dc_n}(1 + h_2c_n^2 + \ldots)^{-1},$$

мы можем представить его в виде

$$A_j^{(2)} = t\varphi_j(t) + \psi_j(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, r), \tag{42.7}$$

где $\psi_j(t)$ суть также периодические функции t периода 2π.

Вид решений (42.6) и (42.7), на основании результатов § 17, показывает, что характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} A_{11}(2\pi)-\rho, & A_{12}(2\pi), & \ldots, & A_{1r}(2\pi) \\ A_{21}(2\pi), & A_{22}(2\pi)-\rho, & \ldots, & A_{2r}(2\pi) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ A_{r1}(2\pi), & A_{r2}(2\pi), & \ldots, & A_{rr}(2\pi)-\rho \end{vmatrix} = 0 \quad (42.8)$$

системы (42.4) имеет корень, равный единице, по меньшей мере второй кратности. Покажем, что, кроме особо исключительных случаев, кратность этого корня в точности равна двум.

В самом деле, величины $\xi_j^{(n)}(t+h)$ в порождающем решении $\{\xi_j^{(n)}(t+h)\}$ являются аналитическими функциями величины c_n. Поэтому коэффициенты p_{js} и вместе с ними и корни уравнения (42.8) являются также аналитическими функциями от c_n. При $c_n=0$ порождающее решение обращается в тривиальное решение $\xi_1=\ldots=\xi_\nu=0$ системы (42.2), и коэффициенты p_{js} становятся постоянными. При этом система (42.4) обратится в линейную часть порождающей системы (42.2), т. е. в ту систему уравнений с постоянными коэффициентами, для которой уравнение (39.3) является характеристическим. Отсюда непосредственно вытекает, что при $c_n=0$ корни $\overset{*}{\rho}_j$ уравнения (39.3) и корни ρ_j уравнения (42.8) связаны соотношениями

$$\overset{*}{\rho}_j=\frac{1}{2\pi}\ln\rho_j,$$

так как корни характеристического уравнения системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, если ее рассматривать как частный случай системы с периодическими коэффициентами, равны характеристическим показателям этой последней системы.

Но нулевое значение c_n соответствует значению λ, равному n. Следовательно, при $c_n=0$ уравнение (39.3) имеет пару мнимых корней $\pm ni$, которым соответствуют два единичных корня уравнения (42.8). Уравнение (39.3) может, конечно, иметь еще корни вида $\pm pi$, где p — целое число и, следовательно, уравнение (42.8), при $c_n=0$, может иметь единичный корень с кратностью, превышающей 2. При непрерывном изменении величины c_n, что соответствует непрерывному изменению величины λ, два корня уравнения (42.8), в силу самого характера связи между c_n и λ, будут сохранять значения, равные единице. Что же касается остальных единичных корней уравнения (42.8), то они, очевидно, могут сохранить единичные значения только в особо исключительных случаях. Во всяком случае, если уравнение (39.3) не имеет корней вида $\pm pi$, то при c_n достаточно малом, кратность единичного корня уравнения (42.8) не будет превышать двух. Заметим, наконец, что проверить последнее обстоятельство в каждом конкретном случае не представит особых трудностей, так как для этого потребуется лишь грубо приближенная оценка корней уравнения (42.8). Последнюю же задачу все равно придется решать в связи с исследованием устойчивости рассматриваемого периодического решения.

Итак, допустим, что кратность единичного корня уравнения (42.8) равна двум. Этому корню, как это следует из формул (42.6) и (42.7), отвечает только одна группа решений уравнений (42.4). Поэтому, на основании предложений § 17, мы приходим к заключению, что этот корень обращает в нуль определитель (42.8), но не обращает в нуль хотя бы один из его миноров $r-1$-го порядка. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} A_{11}(2\pi)-1, & A_{12}(2\pi), & \ldots, & A_{1r}(2\pi) \\ A_{21}(2\pi), & A_{22}(2\pi)-1, & \ldots, & A_{2r}(2\pi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1}(2\pi), & A_{r2}(2\pi), & \ldots, & A_{rr}(2\pi)-1 \end{vmatrix} = 0, \quad (42.9)$$

но хотя бы один из миноров $r-1$-го порядка этого определителя отличен от нуля.

Установив это, продолжим исследование вопроса о существовании периодического решения $\{x_j^{(n)}(t)\}$. Условия периодичности решения (42.3) дают для определения $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ следующие уравнения

$$[A_{j1}]\beta_1 + \ldots + [A_{jr}]\beta_r + [C_j]\mu + \ldots = 0, \quad (42.10)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, r).$$

На основании (42.5) и (42.10) функциональный определитель этих уравнений относительно $\beta_1, \ldots, \beta_r$ обращается в нуль при $\beta_1 = \ldots = \beta_r = \mu = 0$. Это вытекает также и из общей теории, изложенной в § 3, так как порождающее решение зависит от произвольной постоянной h. Однако, как мы только что показали, хотя бы один из миноров $r-1$-го порядка определителя (42.9) отличен от нуля. Поэтому, $r-1$ из уравнений (42.10) могут быть разрешены относительно $r-1$ из величин $\beta_1, \ldots, \beta_r$. Подставив эти величины в оставшееся уравнение, мы получим одно уравнение, связывающее μ и одну из величин $\beta_1, \ldots, \beta_r$. Допустим, для определенности, что этой величиной является β_k. Тогда, как было показано в § 3, уравнение, связывающее β_k и μ, имеет вид

$$\mu\{P + \Phi(\beta_k, \mu)\} = 0,$$

где коэффициент P зависит от параметра h, входящего в порождающее решение, а Φ — некоторая аналитическая функция от β_k и μ, обращающаяся в нуль при $\beta_k = \mu = 0$.

Отсюда следует, что для того, чтобы существовало периодическое решение $\{x_j^{(n)}(t)\}$, необходимо, чтобы h был корнем уравнения

$$P(h) = 0. \tag{42.11}$$

Согласно общим предложениям § 3, каждому некратному корню уравнения (42.11) действительно отвечает периодическое решение $\{x_j^{(n)}(t)\}$, и это решение будет аналитическим относительно μ.

§ 43. О практическом вычислении периодического решения $\{x_j^{(n)}(t)\}$

Допустим, что h является простым корнем уравнения (42.11). В этом случае, как мы показали в предыдущем параграфе, существует одно и только одно периодическое решение $\{x_j^{(n)}(t)\}$. Это решение является аналитическим относительно μ и, следовательно, имеет вид

$$x_j^{(n)}(t) = \xi_j^{(n)}(t+h) + x_{j1}(t)\mu + x_{j2}(t)\mu^2 + \ldots, \tag{43.1}$$

где x_{jk} — периодические функции t с периодом 2π.

Вычисление коэффициентов x_{jk}, каким бы способом это вычисление ни производилось, требует знания общего решения системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами (42.4). Мы знаем только два частных решения (42.6) и (42.7) этих уравнений и поэтому, в отличие от случая систем с одной степенью свободы, определение коэффициентов рядов (43.1) не может быть произведено в замкнутой форме. Однако для практики часто достаточно знать главные члены рядов (43.1), т. е. функции $\xi_j^{(n)}(t+h)$. А для этого, очевидно, достаточно знать величину h, т. е. уметь составлять уравнение (42.11). К выводу явного выражения для левой части этого уравнения мы сейчас и переходим.

Рассмотрим систему линейных неоднородных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dy_j}{dt} = p_{j1}y_1 + \ldots + p_{jr}y_r + \mu f_j^{(0)}(t) \tag{43.2}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, r),$$

где

$$f_j^{(0)}(t) = f_j(t, \xi_1^{(n)}(t+h), \ldots, \xi_r^{(n)}(t+h), 0). \tag{43.3}$$

Легко видеть, что решение $y_j(t, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ этих уравнений, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_j(0, \beta_1, \ldots, \beta_r) = \beta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

определяется формулами

$$y_j(t, \beta_1, \ldots, \beta_r) = A_{j1}\beta_1 + \ldots + A_{jr}\beta_r + \mu C_j, \tag{43.4}$$

где A_{jk} и C_j имеют те же значения, что и в (42.3). Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что A_{jk} удовлетворяют уравнениям (42.4) и начальным условиям (42.5), а C_j, как легко видеть, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dC_j}{dt} = p_{j1}C_1 + \ldots + p_{jr}C_r + f_j^{(0)}$$

и начальным условиям

$$C_1(0) = C_2(0) = \ldots = C_r(0) = 0.$$

Отсюда следует, что если в уравнениях (42.10) отбросить члены выше первого порядка относительно $\beta_1, \ldots, \beta_r$ и μ, то полученные таким образом линейные уравнения определяют те значения $\beta_1, \ldots, \beta_r$, при которых решение (43.4) будет периодическим. Но тогда, очевидно, уравнение (42.11) выражает необходимое и достаточное условие, чтобы такое решение существовало.

Итак, уравнение (42.11) выражает необходимое и достаточное условие, чтобы система линейных неоднородных уравнений (43.2) допускала периодическое решение. Это условие может быть, однако, получено и другим путем. Рассмотрим, с этой целью, систему уравнений

$$\frac{dB_j}{dt} + p_{1j}B_1 + \ldots + p_{rj}B_r = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r), \tag{43.5}$$

сопряженную с (42.4). Характеристическое уравнение этой системы, на основании предложения, установленного в § 18, имеет, как и характеристическое уравнение системы (42.4), двойной корень, равный единице, которому соответствует одна группа решений. Пусть

$$y_j^{(1)} = \varphi_j^*(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{43.6}$$

и

$$y_j^{(2)} = t\varphi_j^*(t) + \psi_j^*(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

оба решения уравнений (43.5), принадлежащие указанной группе. Здесь φ_j^* и ψ_j^* — некоторые периодические функции t периода 2π. Заметим, что (43.6) является единственным периодическим решением (43.5). Это обстоятельство весьма существенно для дальнейшего.

Перейдем теперь в уравнениях (43.2) к новым переменным $u, v, u_1, \ldots, u_{r-2} = u_m$ при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_1^* y_1 + \ldots + \varphi_r^* y_r, \\ v &= \psi_1^* y_1 + \ldots + \psi_r^* y_r, \\ u_s &= \varphi_{s1} y_1 + \ldots + \varphi_{sr} y_r \\ &(s = 1, 2, \ldots, m = r-2). \end{aligned}\right\} \tag{43.7}$$

Здесь φ_{sj} — некоторые периодические функции t периода 2π, выбранные таким образом, чтобы детерминант подстановки был отличен от нуля и чтобы однородная часть преобразованных уравнений имела постоянные коэффициенты. Как было показано в §§ 18 и 19, такой выбор функций φ_{sj} всегда возможен (хотя эти функции могут и не быть вещественными).

Учитывая, что величины u и $tu+v$ суть первые интегралы уравнений (42.4), легко находим, что уравнения (43.2) после преобразования примут следующий вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du}{dt}=\sum_{j=1}^{r}\varphi_j^* f_j^{(0)},\\
&\frac{dv}{dt}=-u+\sum_{j=1}^{r}\psi_j^* f_j^{(0)},\\
&\frac{du_s}{dt}=\alpha_{s1}u_1+\ldots+\alpha_{sm}u_m+\sigma_s u+\beta_s v+F_s(t)\\
&\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ m=r-2).
\end{aligned}\right\} \tag{43.8}$$

Здесь F_s суть линейные комбинации с периодическими коэффициентами от функций $f_j^{(0)}$, а α_{si} — постоянные. При этом, по общему свойству преобразований, переводящих уравнения с периодическими коэффициентами в уравнения с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение системы с постоянными коэффициентами имеет своими корнями величины

$$\frac{1}{2\pi}\ln\rho_j,$$

где ρ_j — корни уравнения (42.9).

Отсюда следует, что уравнение

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}-\lambda, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}-\lambda, & \ldots, & \alpha_{2m}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \alpha_{m1}, & \alpha_{m2}, & \ldots, & \alpha_{mm}-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{43.9}$$

не имеет ни нулевых корней, ни корней вида $\pm pi$, где p — целое число, так как уравнение (42.9) имеет только двукратный корень, равный единице, который переходит в двойной нулевой корень характеристического уравнения системы (43.8), имеющего, очевидно, вид

$$\lambda^2 D(\lambda) = 0.$$

Характер преобразования (43.7) таков, что задача о существовании периодического решения для системы (43.2) эквивалентна той же задаче по отношению к системе (43.8). Что же касается последней задачи, то она разрешается чрезвычайно просто. В самом деле, из уравнений (43.8) для функции u получается выражение

$$u = \int_0^t \sum_{j=1}^r \varphi_j^* f_j^{(0)} dt + \alpha = u^*(t) + \alpha,$$

где α — произвольная постоянная. Для того, чтобы функция u получилась периодической, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось соотношение

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^r \varphi_j^* f_j^{(0)} dt = 0. \qquad (43.10)$$

Если это соотношение выполняется, то, полагая

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-u^* + \sum_{j=1}^r \psi_j^* f_j^{(0)} \right) dt,$$

мы получим что и v выйдет также периодической. Но тогда, подставляя u и v в последние m уравнений (43.8), мы получим для нахождения u_s систему линейных уравнений, которая допускает для этих величин вполне определенное периодическое решение, так как характеристическое уравнение (43.9) не имеет ни нулевых корней, ни корней вида $\pm pi$ с целыми значениями для p.

Таким образом, для того, чтобы система (43.8) и, следовательно, система (43.2) допускали периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение (43.10). Это соотношение, так же как и (42.11), является уравнением для определения величины h. И поскольку (42.11) также выражает необходимое и достаточное условие существования периодического решения системы (43.2), то оба уравнения (42.11) и (43.10) эквивалентны. Другими словами, уравнение (43.10) является развернутым видом уравнения (42.11).

Нам остается найти явное выражение для функций φ_j^*. С этой целью заметим, что порождающая система является системой Ляпунова и, следовательно, для нее существует аналитический первый интеграл. Пусть

$$H(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \mathrm{const}$$

является этим интегралом. Тогда для уравнений (42.4), являющихся уравнениями в вариациях для порождающей системы, должен существовать, как это было показано в § 15, первый интеграл

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_1}\right)A_1 + \ldots + \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_n}\right)A_n = \mathrm{const},$$

где скобки обозначают, что после дифференцирования величины ξ_j должны быть заменены их значениями в порождающем решении, т. е. функциями $\xi_j^{(n)}(t+h)$. Отсюда вытекает, что система (43.5) допускает частное решение

$$B_j \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

которое, очевидно, является периодическим. Но уравнения (43.5) допускают единственное периодическое решение (43.6). Следовательно, функции φ_j^* могут отличаться лишь постоянным множителем от функций $\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\right)$. Поэтому, принимая во внимание (43.3), мы для уравнения, определяющего h, окончательно найдем следующее явное выражение

$$\sum_{j=1}^{r}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\right)f_j(t, \xi_1^{(n)}(t+h), \ldots, \xi_r^{(n)}(t+h), 0)\,dt = 0. \quad (43.11)$$

В частности, если уравнения колебаний имеют форму

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k)}{\partial y_i}+$$
$$+\mu f_i(t, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, \mu),$$
$$\frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k)}{\partial x_i}+$$
$$+\mu F_i(t, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, \mu)$$
$$(i=1, 2, \ldots, k),$$

т. е. порождающая система является канонической, то уравнение (43.11) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{k}\int_0^{2\pi}\left\{F_i^{(0)}\frac{dx_i^{(n)}(t+h)}{dt}-f_i^{(0)}\frac{dy_i^{(n)}(t+h)}{dt}\right\}dt=0.$$

Для случая системы с одной степенью свободы это уравнение совпадает с уже известным нам уравнением (33.19) предыдущей главы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения Харьков, 1892. Также ОНТИ, 1935.
2. Poincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste Paris, 1892.
3. Poincaré. Sur les courbes définies par des équatinos différentielles. Oeuvres, t. I. имеется русский перевод Е. Леонтович и А. Майер под редакцией А. Андронова. Гостехиздат, 1947.
4. А. Андронов и А. Витт. К математической теории захватывания. Журн. прикл. физики, VII, вып. 4, 1930.
5. Мандельштам и Папалекси. О явлениях резонанса n-го рода. Журн. тех. физики, т. II, вып. 7—8, 1932.
6. Бернштейн и Иконников. К математической теории вынужденных колебаний в автоколебательных системах с двумя степенями свободы. Журн. тех. физики, т. IV, вып. 1, 1934.
7. Андронов и Хайкин. Теория колебаний. ОНТИ, 1937.
8. Крылов и Н. Боголюбов. Введение в нелинейную механику. Киев, 1937.
9. А. Андронов и А. Витт. К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы. Журн. тех. физики, т. IV, вып. 1, 1934.
10. Б. В. Булгаков. О применении метода Пуанкаре к свободным псевдолинейным колебательным системам. Прик. мат. и мех., т. VI, вып. 4, 1942.
11. Н. Г. Четаев. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
12. А. Андронов и А. Витт. Об устойчивости по Ляпунову Журн. эксп. и теор. физики, т. 3, вып. 5, 1933.
13. Л. С. Понтрягин. О динамических системах, близких к гамильтоновым. Журн. эксп. и теор. физики, т. 4, вып. 9, 1934.
14. Duffing. Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz. Braunschweig, 1918.

Издательство УРСС

специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским фондом фундаментальных исследований и Российским гуманитарным научным фондом, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

Малкин И. Г. **Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.**
Малкин И. Г. **Теория устойчивости движения.**
Ляпунов А. М. **Работы по теории потенциала.**
Нелинейная динамика и управление. К 70-летию академика С. В. Емельянова. Под ред. *Коровина С. К.*
Dynamics of Non-homogeneous Systems. V. 1–8. Под ред. *Попкова Ю. С.*
Иванов Б. Н. **Мир физической гидродинамики.**
Стрэтт (Рэлей) Дж. В. **Волновая теория света.**
Добролюбов А. И. **Бегущие волны деформации.**
Добролюбов А. И. **Скольжение, качение, волна.**
Кравченко И. Т. **Теория волновых процессов.**
Шашков А. Г., Бубнов В. А., Янковский С. Ю. **Волновые явления теплопроводности.**
Гончаренко А. М., Карпенко В. А. **Основы теории оптических волноводов.**
Бардзокас Д. И. и др. **Распространение волн в электромагнитоупругих средах.**
Бардзокас Д. И., Зобнин А. И. **Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры.**
Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т. **Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье—Стокса.**
Планк М. **Введение в теоретическую физику. Теория электричества и магнетизма.**
Вайсбурд Ф. И., Панаев Г. А., Савельев Б. Н. **Электронные приборы и усилители.**
Зайцев Р. О. **Диаграммные методы в теории сверхпроводимости и ферромагнетизма.**
Реухин Л. Н. **Радиационно-стимулированные изменения диэлектрической дисперсии.**
Саржевский А. М. **Оптика. Полный курс.**
Федоров Ф. И. **Оптика анизотропных сред.**
Вильф Ф. Ж. **Логическая структура частной теории относительности.**
Сацункевич И. С. **Экспериментальные корни специальной теории относительности.**
Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. **Кватернионы в релятивистской физике.**
Богуш А. А. **Очерки по истории физики микромира.**
Кац М. **Вероятность и смежные вопросы в физике.**
Гаврюсев В. Г. **Измерение и свойства пространства-времени.**
Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А. **Гравитация.**

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс **(095) 135–42–16, 135–42–46**
или *электронной почтой* URSS@URSS.ru
Полный каталог изданий представлен
в *Интернет-магазине:* http://URSS.ru

Издательство УРСС
Научная и учебная литература

Издательство УРСС

Представляет Вам свои лучшие книги:

Учебники, задачники, популярные книги по физике

Иванов Б. Н. Законы физики.
Капитонов И. М. Введение в физику ядра и частиц.
Шепелев А. В. Оптика. Готовимся к экзаменам, зачетам, коллоквиумам.
Кириллов В. М. и др. Решение задач по физике.
Колокалов И. В. и др. Задачи по математическим методам физики.
Жукарев А. С. и др. Задачи повышенной сложности в курсе общей физики.
Варикаш В. М., Болсун А. И., Аксенов В. В. Сборник задач по статистической физике.
Розенблат Г. М. Механика в задачах и решениях.
Сурдин В. Г. Астрономические задачи с решениями.
Николаев О. С. Физика и астрономия: Курс практических работ для средней школы.
Гамов Г. Мистер Томпкинс в Стране Чудес, или истории о c, G и h.
Гамов Г. Мистер Томпкинс исследует атом.
Эддингтон А. Пространство, время и тяготение.

Механика

Арнольд В. И. Математические методы классической механики.
Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики.
Якоби К. Лекции по динамике.
Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика.
Розенблат Г. М. Первые интегралы и их применение при решении задач механики.
Гетлинг А. В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика.
Шмыглевский Ю. Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости.
Петкевич В. В. Основы механики сплошных сред.
Баранов А. А., Колпащиков В. Л. Релятивистская термомеханика сплошных сред.
Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости.
Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Лекции по теории упругости.
Георгиевский Д. В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел.
Сапунов В. Т. Классический курс сопротивления материалов в решениях задач.
Кузьмина Р. П. Математические модели небесной механики.

Теория поля

Рубаков В. А. Классические калибровочные поля.
Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля.
Сарданашвили Г. А. Современные методы теории поля. Т. 1–4.
Волобуев И. П., Кубышин Ю. А. Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля.
Маслов В. П., Шведов О. Ю. Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля.
Богуш А. А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий.
Богуш А. А., Мороз Л. Г. Ведение в теорию классических полей.

Издательство УРСС

Представляет Вам свои лучшие книги:

Термодинамика и статистическая физика

Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика. В 4 т.
Т. 1: Теория равновесных систем: Термодинамика.
Т. 2: Теория равновесных систем: Статистическая физика.
Т. 3: Теория неравновесных систем.
Т. 4: Термодинамика и статистическая физика. Спецкурс.
Квасников И. А. Молекулярная физика.
Агеев Е. П. Неравновесная термодинамика в вопросах и ответах.
Дуров В. А., Агеев Е. П. Термодинамическая теория растворов.
Мюнстер А. Химическая термодинамика.
Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики.
Шапкин А. И., Сидоров Ю. И. Термодинамические модели в космохимии и планетологии.
Базаров И. П. Заблуждения и ошибки в термодинамике.

Квантовая механика

Петрашень М. И., Трифонов Е. Д. Применение теории групп в квантовой механике.
Ван дер Верден Б. Л. Метод теории групп в квантовой механике.
Галицкий В. М., Карнаков Б. М., Коган В. И. Задачи по квантовой механике. Ч. 1, 2.
Горбацевич А. К. Квантовая механика в общей теории относительности.
Горбацевич А. К. Основы квантовой механики в искривленном пространстве-времени.
Килин С. Я. Квантовая оптика: поля и их детектирование.
Килин С. Я. Квантовая информация.
Вильф Ф. Ж. Логическая структура квантовой механики.
Эддингтон А. Относительность и кванты.

Астрономия и астрофизика

Ефремов Ю. Н. Вглубь Вселенной. Звезды, галактики и мироздание.
Чернин А. Д. Звезды и физика.
Сажин М. В. Современная космология в популярном изложении.
Левитан Е. П. Физика Вселенной: экскурс в проблему.
Бааде В. Эволюция звезд и галактик.
Шварцшильд М. Строение и эволюция звезд.
Архангельская И. Д., Чернин А. Д., Розенталь И. Л. Космология и физический вакуум.
Розенталь И. Л., Архангельская И. В. Геометрия, динамика, Вселенная.
Кинг А. Р. Введение в классическую звездную динамику.
Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии.
Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии.
Хлопов М. Ю. Космомикрофизика.
Хлопов М. Ю. Основы космомикрофизики.
Ипатов С. И. Миграция небесных тел в Солнечной системе.
Дорофеева В. А., Макалкин А. Б. Эволюция ранней Солнечной системы.
Тверской Б. А. Основы теоретической космофизики.

Издательство УРСС

Представляет Вам свои лучшие книги:

Философия физики

Гейзенберг В. Философские проблемы атомной физики.
Гейзенберг В. Часть и целое (беседы вокруг атомной физики).
Карнап Р. Философские основания физики. Введение в философию науки.
Бунге М. Философия физики.
Джеммер М. Понятие массы в классической и современной физике.
Аксенов Г. П. Причина времени.
Канке В. А. Формы времени.
Рейхенбах Г. Философия пространства и времени.
Рейхенбах Г. Направление времени.
Уитроу Дж. Естественная философия времени.
Грюнбаум А. Философские проблемы пространства и времени.
Вигнер Э. Инвариантность и законы сохранения. Этюды о симметрии.
Могилевский Б. М. Природа глазами физика.

Синергетика

Пригожин И. От существующего к возникающему.
Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики.
Олемской А. И., Кацнельсон А. А. Синергетика конденсированной среды.
Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике.
Эбелинг В., Энгель А., Файстель Р. Физика процессов эволюции.
Милованов В. П. Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация.
Милованов В. П. Гуманитарная биофизика.
Москальчук Г. Г. Структура текста как синергетический процесс.
Евин И. А. Искусство и синергетика.

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»

Трубецков Д. И. Введение в синергетику.
Арнольд В. И. Теория катастроф.
Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики.
Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики.
Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего.
Чернавский Д. С. Синергетика и информация (динамическая теория информации).
Баранцев Р. Г. Синергетика в современном естествознании.
Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И. Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте.
Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени.
Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой.
Пригожин И., Николис Г. Познание сложного. Введение.
Пригожин И., Гленсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.

Издательство УРСС

Представляет Вам свои лучшие книги:

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.

Фейнмановские лекции по физике. В 9 т.

Задачи и упражнения с ответами и решениями. В 2 т.

Вниманию читателя предлагается знаменитый курс лекций по общей физике, который выдающийся американский физик, Нобелевский лауреат Ричард Фейнман читал в *Калифорнийском* технологическом институте.

Лекции Фейнмана, записанные вначале на магнитофон, а затем «переведенные» на «письменный английский» профессорами М. Сэндсом и Р. Лейтоном, не похожи ни на один известный курс. Они отличаются оригинальным методом изложения, в котором отразилась яркая научная индивидуальность автора, его точка зрения на пути обучения студентов физике, его умение заразить читателей интересом к науке. Последовательность изложения и выбор материала также отличаются от традиционных. В лекциях не тратится время на объяснение «ученым языком» того, что современный читатель уже знает или слышал. Зато в них увлекательно рассказывается о том, как человек изучает окружающую его природу, какое положение занимает физика в ряде других наук, какие проблемы наука решает сегодня и будет решать завтра.

Курс будет полезен преподавателям, заставив их по-новому взглянуть на процесс обучения физике; студентам, которые найдут много нового в дополнение тому, что они узнают на лекциях; школьникам, у которых сформирует интерес к физике и поможет им войти в современную науку; а также всем интересующимся физикой.

Стивен Вайнберг

МЕЧТЫ ОБ ОКОНЧАТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Физика в поисках самых фундаментальных законов природы

В своей книге «Мечты об окончательной теории» Стивен Вайнберг — Нобелевский лауреат по физике — описывает поиск единой фундаментальной теории природы, которая для объяснения всего разнообразия явлений микро- и макромира не нуждалась бы в дополнительных принципах, не следующих из нее самой. Электромагнитные силы и радиоактивный распад, удержание кварков внутри нуклонов и разлет галактик — все это, как стремятся показать физики и математики, лишь разные проявления единого фундаментального закона.

Вайнберг дает ответ на интригующие вопросы: Почему каждая попытка объяснить законы природы указывает на необходимость нового, более глубокого анализа? Почему самые лучшие теории не только логичны, но и красивы? Как повлияет окончательная теория на наше философское мировоззрение?

Ясно и доступно Вайнберг излагает путь, который привел физиков от теории относительности и квантовой механики к теории суперструн и осознанию того, что наша Вселенная, быть может, сосуществует рядом с другими вселенными.

Книга написана удивительно живым и образным языком, насыщена афоризмами и остроумными эпизодами. Она распахивает читателю двери в новый мир и помогает понять то, с чем он там встретится.

Издательство УРСС

Представляет Вам свои лучшие книги:

Брайан Грин

ЭЛЕГАНТНАЯ ВСЕЛЕННАЯ

Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории

Книга Брайана Грина «Элегантная Вселенная» — увлекательнейшее путешествие по современной физике, которая как никогда ранее близка к пониманию того, как устроена Вселенная. Квантовый мир и теория относительности Эйнштейна, гипотеза Калуцы—Клейна и дополнительные измерения, теория суперструн и браны, Большой взрыв и мульти-вселенные — вот далеко не полный перечень обсуждаемых вопросов.

Используя ясные аналогии, автор переводит сложные идеи современной физики и математики на образы, понятные всем и каждому. Брайан Грин срывает завесу таинства с теории струн, чтобы представить миру 11-мерную Вселенную, в которой ткань пространства рвется и восстанавливается, а вся материя порождена вибрациями микроскопических струн.

Книга вызовет несомненный интерес как у специалистов естественно-научных дисциплин, так и у широкого круга читателей.

Роджер Пенроуз

НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ

О компьютерах, мышлении и законах физики

Монография известного физика и математика Роджера Пенроуза посвящена изучению проблемы искусственного интеллекта на основе всестороннего анализа достижений современных наук. Возможно ли моделирование разума? Чтобы найти ответ на этот вопрос, Пенроуз обсуждает широчайший круг явлений: алгоритмизацию математического мышления, машины Тьюринга, теорию сложности, теорему Геделя, телепортацию материи, парадоксы квантовой физики, энтропию, рождение вселенной, черные дыры, строение мозга и многое другое.

Член Лондонского королевского общества, профессор математики Оксфордского университета, сэр Роджер Пенроуз — выдающийся ученый современности, активно работающий в различных областях математики, общей теории относительности и квантовой теории; автор теории твисторов.

Книга вызовет несомненный интерес как у специалистов, так и у широкого круга читателей.

Издательство УРСС

(095) 135-42-46,
(095) 135-42-16,
URSS@URSS.ru

Наши книги можно приобрести в магазинах:

«Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (095) 928-2457)
«Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (095) 203-8242)
«Москва» (м. Охотный ряд, ул. Тверская, 8. Тел. (095) 229-7355)
«Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (095) 238-5083, 238-1144)
«Дом деловой книги» (м. Пролетарская, ул. Марксистская, 9. Тел. (095) 270-5421)
«Гнозис» (м. Университет, 1 гум. корпус МГУ, комн. 141. Тел. (095) 939-4713)
«У Кентавра» (РГГУ) (м. Новослободская, ул. Чаянова, 15. Тел. (095) 973-4301)
«СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 311-3954)

В настоящей книге дается изложение методов и результатов Ляпунова и Пуанкаре, имеющих непосредственное приложение в теории нелинейных колебаний. Труды этих выдающихся ученых весьма сложны по содержанию и велики по объему и к тому же не посвящены специально нелинейным колебаниям. Данная монография поможет читателю ознакомиться с тем, как общие результаты Ляпунова и Пуанкаре применяются к решению задач нелинейных колебаний. Рассмотрены практические приемы и методы вычислений.

Издательство УРСС рекомендует следующие книги:

С. Вайнберг
Мечты об окончательной теории: физика в поисках самых фундаментальных законов природы

Б. Грин
Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории

Р. Пенроуз
Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики

Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс
Фейнмановские лекции по физике. Т.1-9; Задачи и упражнения с ответами и решениями

2762 ID 23826

9 785354 009046

ИЗДАТЕЛЬСТВО **УРСС**
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Тел./факс: 7 (095) 135–42–16
Тел./факс: 7 (095) 135–42–46

E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернет: http://URSS.ru