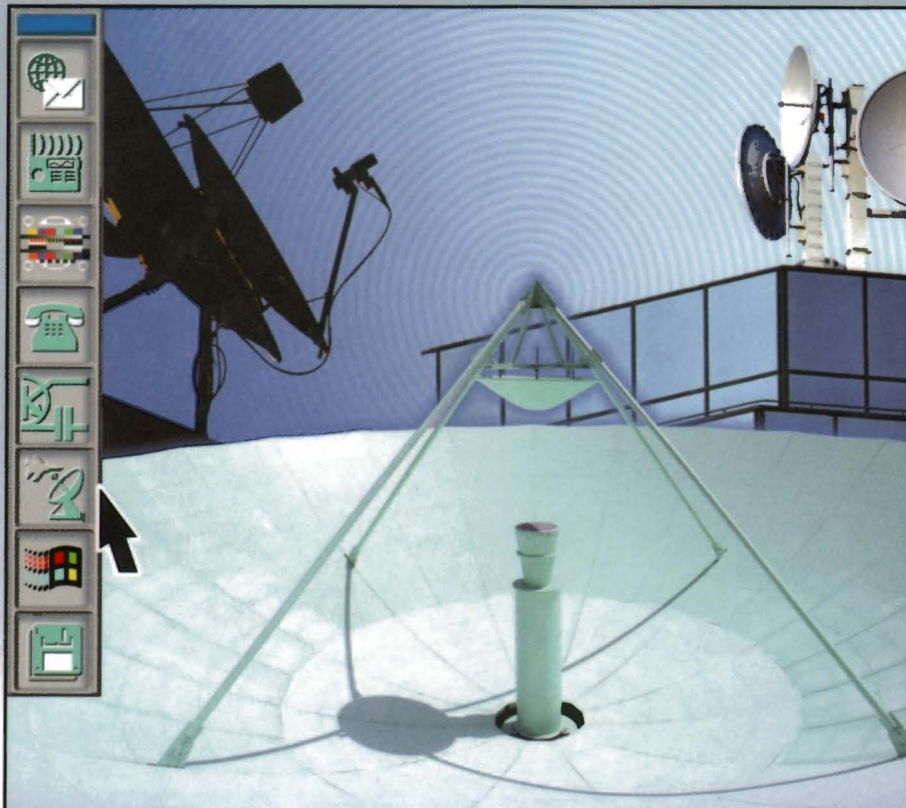


УЧЕБНИК

ДЛЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ



ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Горючая линия-Телеком



Б. М. ПЕТРОВ

Б. М. ПЕТРОВ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

2-е издание, исправленное

*Допущено Министерством образования
Российской Федерации в качестве учебника
для студентов вузов, обучающихся по направлению
«Радиотехника» и специальностям «Радиотехника»,
«Радиофизика и электроника»,
«Бытовая радиоэлектронная аппаратура»*

Москва
Горячая линия – Телеком
2007

УДК 538.3 (075.8)

ББК 32.88

П29

Петров Б. М.

П29 **Электродинамика и распространение радиоволн: Учебник для вузов. – 2-е изд., испр. – М.: Горячая линия–Телеком, 2007. – 558 с.; ил.**

ISBN 5-93517-073-6.

Систематически и подробно рассмотрены основные уравнения и положения электродинамики, изучаются возбуждаемые электромагнитные (ЭМ) поля в неограниченном однородном пространстве, теория направляющих систем, граничные задачи о возбуждении или возможности существования ЭМ волн в направляющих системах и в объемных резонаторах, явления рассеяния и дифракции волн, соответствующие прикладным задачам радиотехники; изложены основные положения геометрической оптики, понятия о нелинейных средах и о распространении ЭМ волн в неоднородных и анизотропных средах; рассмотрено влияние поверхности Земли, тропосферы и ионосферы на распространение ЭМ волн различных диапазонов. Особое внимание уделено физической интерпретации явлений электромагнетизма, имеется 378 иллюстраций. Даны примеры расчетов и сформулированы 132 контрольные задачи.

Для студентов радиотехнических специальностей.

ББК 32.88

Рецензенты:

Доктор техн. наук, профессор *Е. Н. Васильев* (Московский энергетический институт – технический университет).

Кафедра Систем радиосвязи и Антенн Поволжской Государственной Академии телекоммуникаций и информатики (доктор техн. наук, профессор *О. Н. Маслов*).

Кафедра Антенных устройств и теоретических основ радиотехнических систем Ростовского военного института ракетных войск (доктор техн. наук, профессор *Б. Д. Мануилов*).

ISBN 5-93517-073-6

© Б. М. Петров, 2003, 2007

© Оформление издательства

«Горячая линия–Телеком», 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга написана как учебник для студентов ВУЗов по дисциплине «Электродинамика и распространение радиоволн» для специальностей направления Радиотехника. Содержание книги соответствует требованиям «Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования. Направление подготовки дипломированного специалиста – 654200 – Радиотехника. Квалификация – инженер. Москва, 2000 г.» и программе дисциплины. Книга также может быть использована для подготовки бакалавров и магистров по направлению «Радиотехника».

При подготовке рукописи книги использован многолетний опыт чтения лекций по этой и смежным дисциплинам. Строгому и приближенному анализу электромагнитных явлений в книге сопутствует подробное обсуждение с помощью большого количества иллюстраций их физического содержания. По ключевым вопросам дисциплины даны примеры расчетов. Задачи в конце каждой главы могут быть использованы в качестве контрольных и при организации самостоятельной работы студентов над дисциплиной.

Математический аппарат соответствует программе дисциплины «Высшая математика». Предполагается, что студенты изучили следующие дисциплины «Физика»: «Электростатика», «Постоянный ток», «Электромагнетизм», «Оптика» и раздел «Теория длинных линий» дисциплины «Основы теории цепей».

При самостоятельном изучении курса «Электродинамика и распространение радиоволн», а также при первом чтении книги вопросы, напечатанные петитом, могут быть опущены.

Автор с благодарностью использовал советы и замечания доктора технических наук профессорв Е.Н. Васильева для улучшения содержания этой книги.

Помощь в оформлении рукописи книги оказали О.В. Алпатова, А.А. Белецкий, И.Э. Гамолина и И.Н. Краснокутская, за что выражаю им искреннюю признательность.

Во втором издании учебника устранены опечатки, допущенные при первом издании.

Советы и замечания по содержанию книги прошу направлять автору. Они будут приняты с благодарностью.

Основные обозначения и сокращения

$A(p, t)$	— мгновенное значение векторного потенциала,
$p = p(x, y, z)$	— точка наблюдения физической величины,
t	— время,
E, H	— векторы напряженностей электрического и магнитного полей,
ρ, τ, η	— плотности объемного, поверхностного и линейного электрических зарядов,
D, B	— векторы электрической и магнитной индукций,
j, J, I	— плотности объемного, поверхностного, линейного электрических токов,
M	— вектор намагничивания,
P	— вектор (электрической) поляризованности,
ϵ_0, μ_0	— электрическая и магнитная постоянные,
ϵ_a, μ_a	— диэлектрическая и магнитная проницаемости,
ϵ, μ	— относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости,
ϵ_a, μ_a	— комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости,
k_z, k_M	— диэлектрическая и магнитная восприимчивости,
σ	— удельная проводимость среды,
$Q(t)$	— электрический заряд,
Q	— добротность,
$i(t)$	— электрический ток,
v	— вектор скорости,
c	— скорость света в свободном пространстве,
$v_\Phi, v_{гр}$	— фазовая и групповая скорости,
ω, f	— частоты,
λ	— длина волны,
$p^{пт}, p^c$	— плотности мощностей потерь и стороннего источника,
$P^{пт}, P^c, P_\Sigma$	— мощности потерь, стороннего источника и излучения,
$w^э, w^м, w$	— плотности энергий электрического, магнитного и электромагнитного (ЭМ) полей,
$W^э, W^м, W(t)$	— энергии электрического, магнитного и электромагнитного полей,
W	— характеристическое сопротивление пространства,
П	— вектор Пойнтинга,
$\mathcal{E}(t)$	— электродвижущая сила (э.д.с.),
u	— напряжение,
Φ, ψ	— угол (фаза),
γ_0	— постоянная Фарадея,
k	— коэффициент распространения волны,

α, β	— коэффициенты затухания и фазы,
δ	— глубина проникновения поля в среду,
R_{Σ}, G_{Σ}	— активные составляющие сопротивления и проводимости излучения,
$G(p, q)$	— функция Грина,
$F(\theta, \varphi)$	— характеристика направленности излучателя,
Z_3, Z_M	— характеристические сопротивления электрической и магнитной волн,
Z_n	— волновое сопротивление линии,
V, S, L	— объем, поверхность (площадь), длина тела,
$\Delta V, \Delta S, \Delta l$	— элементы объема, поверхности (площади), длины,
$\delta(p, p_0)$	— дельта-функция,
S_{\perp}	— поверхность (площадь) поперечного сечения тела,
$\perp, $	— перпендикулярное, параллельное,
$\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$	— орты декартовой системы координат (ДСК),
$\mathbf{1}_r, \mathbf{1}_{\varphi}, \mathbf{1}_z$	— орты цилиндрической системы координат (ЦСК (r, φ, z)),
$\mathbf{1}_R, \mathbf{1}_{\theta}, \mathbf{1}_{\varphi}$	— орты сферической системы координат (ССК (R, θ, φ)),
i	— мнимая единица
$\mathbf{a}(p, \omega) = \mathbf{a}(p) = \mathbf{a}$	— комплексная амплитуда (мгновенного значения $\mathbf{a}(p, t)$),
$\arg \mathbf{a}$	— фаза комплексной величины,
$\operatorname{Re} \dot{\mathbf{a}}, \operatorname{Im} \dot{\mathbf{a}}$	— действительное и мнимое значение $\dot{\mathbf{a}}$,
$\dot{\mathbf{a}}^*$	— комплексно сопряженная величина.

Примечание: Индекс «м» над обозначенной физической величины означает — «магнитная». Например, \mathbf{A}^m — комплексная амплитуда магнитного векторного потенциала.

ВВЕДЕНИЕ

1. Электродинамика изучает электромагнитные (ЭМ) явления, возникающие при движении и взаимодействии электрически заряженных частиц. Ее содержанием является учение об особом виде материи — ЭМ поле и его связях с зарядами и токами. Одним из проявлений существования ЭМ поля является воздействие его с силой Лоренца \mathbf{F} на движущийся со скоростью \mathbf{v} электрический заряд Q

$$\mathbf{F}(p, t) = Q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \quad (\text{B.1})$$

где $\mathbf{E}(p, t)$ — вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{B}(p, t)$ — вектор магнитной индукции, p — точка наблюдения, t — время.

Кроме функций \mathbf{E} , \mathbf{B} для описания ЭМ поля вводится вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}(p, t)$ и вектор электрической индукции $\mathbf{D}(p, t)$. Векторы \mathbf{D} и \mathbf{H} характеризуют состояние среды под действием ЭМ поля. Векторы \mathbf{E} , \mathbf{D} описывают электрическое поле, а \mathbf{B} , \mathbf{H} — магнитное поле. В ЭМ поле электрическое и магнитное поля взаимосвязаны.

ЭМ волнами называют возмущения ЭМ поля, распространяющиеся в пространстве. Свойства ЭМ поля существенно зависят от скорости изменения во времени описывающих его векторов. Важным случаем является гармонический закон изменения, при котором, например,

$$\mathbf{E}(p, t) = \mathbf{E}(p) \cos[\omega t + \psi(p)],$$

где $\mathbf{E}(p)$ и $\omega t + \psi(p)$ — амплитуда и фаза (фаза колебаний) вектора напряженности электрического поля в точке p , ψ — начальная фаза (колебаний) — фаза при $t = 0$, $\omega = 2\pi f$ — круговая частота, $f = 1/T$ — частота колебаний, T — период колебаний. В пространстве с параметрами вакуума $f = c/\lambda$, где λ — длина волны, c — скорость распространения волны (в вакууме) $c = 2,997925 \cdot 10^8$ м/с $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

В частном случае, когда $\omega = 0$, электрические заряды и токи во времени не меняются (постоянны). Тогда поле зарядов описывается электростатическим полем, а поле токов — магнитостатическим полем (стационарные поля).

В современной физике различают радиоволны, световые волны (к последним относят видимую, инфракрасную и ультрафиолетовую части спектра), рентгеновское излучение и γ -излучение. Процессы возбуждения, приема, распространения ЭМ волн, их взаимодействия с веществом в диапазоне радиоволн достаточно полно описываются уравне-

ниями классической электродинамики — уравнениями Максвелла. В диапазонах более коротких волн определяющую роль играют процессы, имеющие квантовую природу. Поэтому в инфракрасном и микрометровом диапазонах используются комбинации методов классической электродинамики и квантовой электродинамики.

Классическая (макроскопическая) электродинамика приписывает ЭМ полю только волновые свойства, а элементарным частицам — только корпускулярные. ЭМ поля могут накладываться друг на друга и существовать в одном и том же пространстве, а частицы вещества не обладают этим свойством. ЭМ поля и частицы взаимно проницаемы и существуют в одном и том же объеме, взаимодействуя друг с другом.

Квантовая электродинамика изучает законы микромира. При этом свойствами материи являются единство волновой и корпускулярной природы всех микрообъектов и взаимопревращаемость различных видов материи. ЭМ поле трактуется состоящим из обладающих корпускулярно-волновой природой дискретных фотонов. Фотоны не имеют массы покоя, распространяются со скоростью света в вакууме и целиком поглощаются или излучаются атомами.

Используются следующие определения ЭМ поля и электрического заряда: ЭМ поле есть особый вид материи, отличающийся непрерывным распределением в пространстве (ЭМ волны, поле заряженных частиц) и обнаруживающий дискретность структуры (фотоны), характеризующийся в свободном состоянии способностью распространения в вакууме (при отсутствии сильных гравитационных полей) со скоростью, близкой к $3 \cdot 10^8$ м/с, оказывающий на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их скорости.

Электрический заряд есть свойство частиц материи (вещества) или тел, характеризующее их взаимосвязь с собственным ЭМ полем и их взаимодействие с внешним ЭМ полем; имеет два вида, известные как положительный заряд и отрицательный заряд; количественно определяется по силовому взаимодействию тел, обладающих электрическими зарядами.

В соответствии с Регламентом радиосвязи к радиоволнам (радиодиапазону) относят ЭМ волны с частотами от 3 кГц до 3 ТГц. Распределение радиоспектра по диапазонам приведено в табл. В.1, в которой указаны их названия и принятые сокращенные обозначения.

Применение радиоволн в радиосвязи, радиовещании, телевидении, радионавигации, радиолокации, космической радиосвязи и управлении космическими аппаратами, в медицине и биологии, измерительной технике, технологии и т.д. стимулировало развитие электродинамики. В свою очередь радиотехника и радиофизика являются опытной базой для электродинамики.

Таблица В.1*)

Номер полосы	Границы диапазона по частотам и по длинам волн	Название диапазона по частотам и по длинам волн	Сокращенное обозначение	
			русское	международное
4	3-30 кГц 100-10 км	Очень низкие частоты Мириаметровые волны (сверхдлинные волны)	ОНЧ (СДВ)	VLF
5	30-300 кГц 10-1 км	Низкие частоты Километровые волны (длинные волны)	НЧ (ДВ)	LF
6	300-3000 кГц 1000-100 м	Средние частоты Гектометровые волны (средние волны)	СЧ (СВ)	MF
7	3-30 МГц 100-10 м	Высокие частоты Декаметровые волны (короткие волны)	ВЧ (КВ)	HF
8	30-300 МГц 10-1 м	Очень высокие частоты Метровые волны (ультракороткие волны)	ОВЧ (УКВ)	VHF
9	300-3000 МГц 100-10 см	Ультравысокие частоты Дециметровые волны (ультракороткие волны)	УВЧ (УКВ)	UHF
10	3-30 ГГц 10-1 см	Сверхвысокие частоты Сантиметровые волны (ультракороткие волны)	СВЧ (УКВ)	SHF
11	30-300 ГГц 10-1 мм	Крайне высокие частоты Миллиметровые волны	КВЧ	EHF
12	300-3000 ГГц 1-0,1 мм	Гипервысокие частоты Децимиллиметровые волны	ГВЧ	

*) Множители и приставки для образования десятичных кратных единиц, их наименования (и обозначения): 10^1 - дека (да), 10^2 - гекто (г), 10^3 - кило (к), 10^6 - мега (М), 10^9 - гига (Г), 10^{12} - тера (Т).

Основные параметры радиотехнического устройства, применяемого для излучения, канализации или приема ЭМ волн, зависят от отношения геометрических размеров устройства к длине волны. Часто эти размеры должны быть равны сотням и даже тысячам длин волн. Яс-

но, что для уменьшения габаритов, веса, стоимости устройства, повышения информационной емкости каналов связи и т.д. желательно использовать ЭМ волны с возможно меньшими длинами волн. Однако, при этом могут возрастать стоимость генераторов ЭМ энергии, технические трудности реализации устройств (например, механические допуски на изготовление устройства связаны с λ), стоимость устройств обработки сигнала (радиоприемника). Следует иметь в виду, что радиоволны разных диапазонов по разному затухают при распространении в природных условиях или при их канализации по направляющим структурам.

Схемотехнические радиотехнические расчеты в полосах 4-8 радиодиапазона (табл. В.1) базируются на теории цепей с сосредоточенными параметрами. Применяются первый и второй законы Кирхгофа и понятия емкости, индуктивности, сопротивления. Элементы цепи, их реализующие, имеют геометрические размеры L , значительно меньшие длины волны λ . При этом пренебрежимо мало излучение ЭМ поля каждым элементом цепи. Но это условие можно выполнить только при (сравнительно) больших значениях λ , т.е. при (относительно) малых частотах, когда векторы ЭМ поля (и токи в цепи) во времени меняются медленно. Это условие ($L \ll \lambda$) называют условием квазистационарности. Уже начиная с 8-й полосы (диапазона метровых волн), условие квазистационарности выполнить трудно и расчеты радиотехнических устройств должны основываться на методах электродинамики. К таким устройствам относятся объемные резонаторы, направляющие и замедляющие структуры, согласующие устройства, фильтры, циркуляторы, гираторы, антенны, поляризаторы, отражатели ЭМ воли и др.

2. Классическая электродинамика основана на представлении о непрерывном электрическом заряде и сплошной (непрерывной) покоей среде. В среду вводится покоящаяся ортогональная система координат, в которой определена покоящаяся точка наблюдения p . В частности, в декартовой системе координат (ДСК) $p = p(x, y, z)$. В математическом смысле непрерывные функции координат $E(p, t)$, $H(p, t)$ и $D(p, t)$, $V(p, t)$ описывают реально существующее физическое поле в каждой точке p .

Величины, описывающие ЭМ поле, необходимо измерять и результаты измерений относить к «точке наблюдения p », рассматриваемой в физическом смысле. Эта последняя не может являться точкой p в математическом смысле. Считаем, что в «точке наблюдения p » расположен измерительный прибор, извлекающий энергию ЭМ поля из

некоторого расположенного вокруг точки p объема ΔV , хотя и малого, но конечных размеров.

При исследовании явлений электромагнетизма ниже применяется *математическое моделирование*. Замещение объекта O_1 объектом O_2 для изучения или фиксации важнейших свойств O_1 с помощью O_2 называется моделированием объекта O_1 объектом O_2 [1, 2]. *Оригиналом или натурой называют замещаемый (моделируемый) объект, моделью — заместитель оригинала*. Математические модели обеспечивают переход к оригиналу, фиксацию и приближенное описание его свойств и отношений с помощью математических методов.

3. Электрические и магнитные явления в природе люди наблюдали с древнейших времен. Но учение об этих явлениях родилось на границе только 16-17 вв., когда наука объявила опыт основным источником познания.

История электродинамики — это история эволюции фундаментальных физических понятий, теоретических представлений, это борьба конкурирующих концепций и гипотез [3, 4].

Начало учения об электричестве и магнетизме связано с 1600 г., когда появилась книга Гильберта «О магните». В ней впервые систематизированы результаты экспериментальных исследований электрических и магнитных явлений и намечен путь построения теории на основе опытных данных. До середины 18 века были установлены важные опытные результаты: обусловленное электричеством притяжение и отталкивание (1672 г., О. Герике), получена электрическая искра, открыто, но еще не осознано, деление веществ на проводники и изоляторы (1729 г., С. Грей), существование двух видов электричества (1733-1737 гг., Ш. Дюфе). Достигнуты успехи в изучении магнетизма. В трудах Ньютона отмечается специфика, но и общность, электрических, магнитных и гравитационных сил, утверждается концепция близкодействия и для объяснения природы электрических взаимодействий привлекается гипотеза существования эфира.

Практическое применение электричества и поиск путей построения математической теории на основе опытных данных началось со второй половины 18 века. С именем Б. Франклина (1706-1790 гг.) связано появление гипотезы об электричестве как особой материальной субстанции, применение устройства защиты от электричества — громоотвода. В физике появилось понятие положительного и отрицательного электричества (Р. Симмер). В 1785 г. Ш. Кулоном установлен закон взаимодействия двух точечных зарядов, служащий одним из экспериментальных оснований классической электродинамики; его обобщением является теорема Гаусса. С именем А. Вольты (1745-1827 гг.) связан ряд изобретений электроизмерительных приборов, «вольтова столба» — первого источника постоянного электрического тока, введение в электростатику количественной определенности, терминов «электрический заряд, напряжение, емкость». Найдено два вида э.д.с. — контактной и термоконтактной. В 1826 г. установлен закон Ома (Г. С. Ом).

В 1820 г. Г. Х. Эрстедом открыто магнитное действие электрического тока и 19-й век начался изучением электромагнетизма. В 1820 г. установлен закон Био-Савара (Ж. Био, Ф. Савар), затем он сформулирован в общей форме П. Лапласом. Тогда же установлен закон, определяющий механическую силу, с которой магнитное поле действует на внесенный в него элемент электрического тока, — закон Ампера. А. Ампером установлен также закон силового взаимодействия двух токов, им доказано, что круговой ток (виток тока) эквивалентен магнитному листку (знаменитый закон полного тока Ампера), что катушка с током подобна прямолинейному магниту. Особое значение в физике имеет гипотеза молекулярных токов, предложенная Ампером в 1820 г. для объяснения магнитных свойств вещества (гипотеза об электрической природе магнетизма). Это одна из са-

мых поразительных и плодотворных научных гипотез. Согласно ей источниками магнитного поля магнитов являются кольцевые электрические токи, циркулирующие в пределах отдельных атомов (молекул) вещества.

В 1831 г. М. Фарадеем открыт закон электромагнитной индукции. До Фарадея в теории электромагнетизма господствовала теория дальнего действия, роль среды не учитывалась, поле выступало как удобное математическое понятие по аналогии с гравитационным полем. Нужна была проницательность М. Фарадея, чтобы на основе огромного количества выполненных им экспериментов сформулировать представление об электрических и магнитных силовых линиях как реальных образованиях в пространстве, предположить существование ЭМ волн, распространяющихся с конечной скоростью в пространстве (близкого действия). Им открыты парамагнетизм и диамагнетизм, поворот плоскости поляризации линейно поляризованного света, распространяющегося в веществе вдоль силовых линий магнитного поля (эффект Фарадея), введено понятие диэлектрической проницаемости. Но физические воззрения Фарадея, изложенные без применения математического аппарата, были чужды традициям и теоретическим представлениям того времени, изложенным в безупречной математической форме и основанным на теории дальнего действия.

Понадобился гений Джеймса Клерка Максвелла (1831-1879 гг.), чтобы оценить всю глубину и плодотворность физических представлений Фарадея и концентрированно их изложить в коротких уравнениях (1873 г.), ставших теоретической основой электродинамики. Одним из следствий уравнений Максвелла явилось предсказание ЭМ природы света, он же предсказал возможность существования ЭМ волн. Максвелл для вывода уравнений ЭМ поля использовал модель, основанную на аналогии между свойствами ЭМ процессов и свойствами несжимаемой жидкости, им применялось понятие эфира [5].

Отказался от понятия эфира, как материального носителя ЭМ поля, эфира, не обнаруживаемого ни в одном электродинамическом опыте, основатель теории относительности А. Эйнштейн. Только постепенно в науке сложилось представление об ЭМ поле как самостоятельной материальной сущности, являющейся носителем ЭМ взаимодействий в пространстве.

В 1895 г. А. С. Попов сделал величайшее изобретение — радио. Оно оказало колоссальное воздействие на последующее развитие науки и техники. Электродинамика стала развиваться под воздействием практических потребностей радиотехники и таких ее разделов как радиолокация, антенно-фидерные устройства, электронные приборы.

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1.1. Плотности зарядов и токов

1. Понятие *электрического заряда* Q основано на опытных данных. Единицей его является кулон (Кл), т.е. размерность $[Q] = \text{Кл}$. Заряд некоторого тела в общем случае может меняться во времени, тогда $Q = Q(t)$. В природе существуют только два рода *электрических зарядов* — *положительные и отрицательные*. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. Электрические заряды существуют в виде заряженных частиц. Элементарной заряженной частицей является электрон, заряд и масса которого равны $e_e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_e = 0,911 \cdot 10^{-30}$ кг. В состав атома каждого элемента входит определенное количество электронов. Атом в целом электрически нейтрален, так как в нем имеется положительный заряд, равный по величине сумме зарядов всех электронов атома. Если атом теряет один или несколько электронов, то он становится положительно заряженным ионом. Если атом захватывает дополнительный электрон, то он становится отрицательно заряженным ионом.

Элементарные электрические заряды делят на *связанные и свободные*. Связанные заряды входят в состав электрически нейтральных атомов и молекул вещества или представляют собой ионы, закрепленные в узлах ионной решетки вещества так, что каждая элементарная ячейка решетки является электрически нейтральной. Свободные заряды — это те заряженные частицы, которые могут перемещаться в веществе на макроскопические расстояния; к свободным зарядам относятся и заряды, находящиеся на поверхности диэлектриков и нарушающие их нейтральность, и заряды, образовавшиеся в узлах ионной решетки из-за недостатка положительных или отрицательных ионов под воздействием на вещество каких-либо физических условий, когда решетку нельзя уже разделить на электрически нейтральные ячейки.

Классическая теория электромагнетизма опирается на экспериментальные результаты, полученные для макроскопических тел. Математические уравнения, количественно выражающие эти результаты, должны быть тоже макроскопическими. Однако в уравнениях ЭМ поля применяется понятие бесконечно малых длин (например, при выполнении дифференциальных операций в точке пространства). Чтобы приспособить известный математический аппарат к макроскопической тео-

рин, в его основу вводится понятие *физического бесконечно малого объема* $\Delta V(p)$, такого малого объема вокруг точки p , что среднее расстояние между заряженными частицами в нем намного меньше линейных размеров ΔV , а число N заряженных частиц велико (рис. 1.1,а). Если e_n — положительный или отрицательный заряд n -й частицы, то в ΔV имеется заряд

$$\Delta Q = \sum_{n=1}^N e_n.$$

Отношение $\Delta Q/\Delta V = dQ/dV$ определяет *плотность объемного электрического заряда* в точке p в момент времени t

$$\rho(p, t) = \sum_{n=1}^N e_n / \Delta V, \text{ Кл/м}^3. \quad (1.1)$$

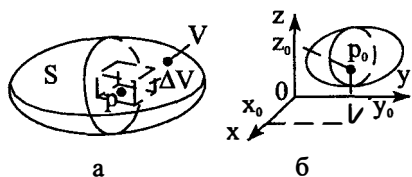
Пусть $A = (V)^{1/3}$ — характерный размер макроскопического объекта (V — объем объекта), а d — среднее расстояние между заряженными частицами в объеме ΔV . Условием того, что $\rho(p, t)$ меняется непрерывно по p , т.е. макроскопическим условием непрерывности распределения электрического заряда, является $d^3 \ll \Delta V \ll A^3$.

Найдем заряд Q , распределенный с плотностью ρ в объеме V . Элемент объема dV содержит заряд ρdV , а весь объем V — заряд

$$Q(t) = \int_V \rho(p, t) dV. \quad (1.2)$$

Пусть в точке $p_0 (p_0 \in V)$ расположен «точечный заряд» (рис. 1.1,б). Тогда объемную плотность заряда можно выразить через δ -функцию (см. Приложение 2): $\rho(p, t) = Q(p, t)\delta(p, p_0)$, где $\delta(p, p_0)$ — трехмерная δ -функция. Из (1.2)

$$Q = \int_V \rho(p, t) dV$$



— заряд в точке p_0 . При интегрировании здесь использовано основное свойство (П2.1) трехмерной δ -функции. Естественно, что при этом понятие «точечного заряда» должно соответствовать макроскопическим представлениям.

Рис. 1.1. К определению понятий физически бесконечно малого элемента объема и точечного заряда

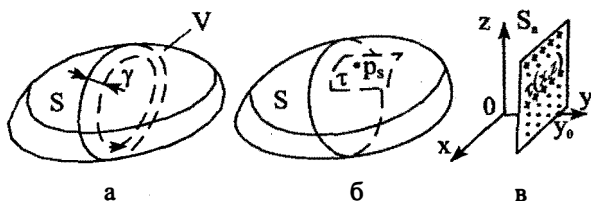


Рис. 1.2. К определению понятий физически бесконечно малого элемента поверхности и поверхностной плотности заряда

В теории ЭМ поля применяется понятие плотности поверхностного электрического заряда. Во многих случаях, особенно, когда частота ω ЭМ поля велика, заряд сосредоточивается в очень тонком слое у поверхности S тела V (рис. 1.2,а). В математических моделях при этом считают, что заряд становится чисто поверхностным (толщина слоя $y \rightarrow 0$, рис. 1.2,б). Пусть $\Delta S(p_s)$ — физически бесконечно малая площадка в окрестности точки p_s ($p_s \in S$) и на ней имеется большое количество N заряженных частиц со средним расстоянием между ними $d \ll (\Delta S)^{1/2}$.

Тогда отношение $\sum_{n=1}^N e_n / \Delta S$ определяет *плотность поверхностного электрического заряда* в точке p_s

$$\tau(p_s, t) = \sum_{n=1}^N e_n / \Delta S, \text{ Кл/м}^2. \quad (1.3)$$

Например, может быть заряжен плоский лист S_n с плотностью τ (рис. 1.2,в). Если декартову систему координат (ДСК) расположить так, что плоскость xz параллельна листу, то $\tau = \tau(x, z, t)$ при $p \in S_n$ и $\tau = 0$ при $p \notin S_n$. Тогда $\rho = \tau \delta(y - y_0)$. Пользуясь общей формулой (1.2), находим заряд плоского листа

$$Q = \int_V \tau \delta(y - y_0) dx dy dz = \int_S \tau(x, z, t) dx dz.$$

При интегрировании здесь использовано основное свойство (П2.1) δ -функции.

Заряды могут быть распределены так, что заряженной оказывается нить длины L (рис. 1.3,а). Тогда применяется понятие *плотности линейного электрического заряда*. В математических моделях считают, что нить вырождается в линию (контур) и заряженной полагают *линию*.

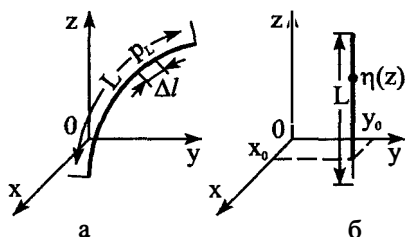


Рис. 1.3. Нить заряда

Пусть $\Delta l(p_L)$ — физически бесконечно малый элемент длины у точки p_L ($p_L \in L$) такой, что на нем находится большое количество заряженных частиц, а среднее расстояние между частицами $d \ll \Delta l$. Тогда отношение

$\sum_{n=1}^N e_n / \Delta l$ определяет *плот-*

ность линейного электрического заряда

$$\eta(p_L, t) = \sum_{n=1}^N e_n / \Delta l, \text{ Кл/м.} \quad (1.4)$$

Например, если расположить ДСК так, что ось z параллельна прямолинейной нити (рис. 1.3, б), то $\eta = \eta(z, t)$ при $p \in L$, и $\eta = 0$ при $p \notin L$. Тогда $\rho = \eta \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$, а заряд нити определяется общей формулой (1.2)

$$Q(t) = \int_V \rho dv = \int_V \eta \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx dy dz = \int_L \eta(z, t) dz.$$

Макроскопическими условиями непрерывности распределения электрического заряда по поверхности и вдоль нити соответственно являются $d^2 \ll \Delta S \ll S$, $d \ll \Delta l \ll L$.

Таким образом, в каждом из «физически бесконечно малых» элементов ΔV , ΔS и Δl должно быть большое количество заряженных частиц, при этом не проявляются *микроскопические* неоднородности среды и ЭМ поля. Но с другой стороны, размеры ΔV , ΔS и Δl должны быть намного меньше *макроскопических* неоднородностей среды и ЭМ поля.

2. Опытным путем установлен один из основных законов природы — закон сохранения электрического заряда: *электрический заряд не уничтожается и не создается из ничего, он может быть лишь перераспределен между телами при их непосредственном контакте*. Физический смысл этого закона стал ясен лишь после 1899 г., когда Дж. Дж. Томсоном была открыта первая элементарная частица — электрон, а Р. Миллиkenом было установлено, что заряд любого тела кратен заряду электрона (1909).

Упорядоченный перенос электрического заряда называется *электрическим током*. Линии, вдоль которых движутся заряженные частицы, называются *линиями тока*. За положительное направление

линии тока принимается направление движения положительно заряженных частиц (условно по А. Амперу). Природа электрического тока зависит от среды, в которой он течет. Различают электрический ток проводимости, связанный с движением относительно тела свободных заряженных частиц под действием поля в среде, обладающей электропроводностью, конвекционный ток (ток переноса), связанный с движением свободных заряженных частиц или макроскопического заряженного тела как целого в среде, не обладающей электропроводностью, ток смещения, поляризационный ток.

Электрический ток определяется *вектором плотности объемного тока и силой тока (или током)*. Плотность объемного тока равна заряду, проходящему в единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной линиям тока. Для того, чтобы пояснить это определение, выделим внутри тела, по которому течет ток, трубку, боковая поверхность которой состоит из линий тока (рис. 1.4). Заряженные частицы при движении не пересекают боковой поверхности трубки. Такая трубка называется *трубкой тока*. Поверхность металлического провода, находящегося в вакууме, является примером такой трубки тока. Рассмотрим заряд, переносимый частицами (носителями заряда) через поперечное сечение ΔS_{\perp} трубки за время Δt . Скорость m -й частицы, приобретаемая под воздействием силы (например, силы Лоренца), обозначим через \mathbf{v}_m . За время Δt m -я частица смещается на расстояние $|\mathbf{v}_m|\Delta t$. Если $|\mathbf{v}_m|$ — максимальное значение скорости, то длину образующей трубки выберем $\Delta l = |\mathbf{v}_m|\Delta t$. Объем трубки $\Delta V = \Delta l \Delta S_{\perp}$. Пусть M — число заряженных частиц, пересекающих ΔS_{\perp} за Δt , а \mathbf{n} — орт внешней относительно точки p ($p \in \Delta V$) нормали (\mathbf{n} — безразмерный единичный вектор, направленный наружу по отношению к объему, ограниченному замкнутой поверхностью и в котором находится точка наблюдения p). Тогда из объема ΔV за время Δt через площадку $\Delta S_{\perp} = \mathbf{n} \Delta S_{\perp}$ M частиц переносят заряд $\Delta Q = \Delta t \Delta S_{\perp} \sum_m e_m \mathbf{v}_m / \Delta V$, где Σ — сумма по m , $m = 1, 2, \dots, M$. Следовательно, $\Delta Q / \Delta t = \Delta S_{\perp} (\mathbf{n} \mathbf{j})$,

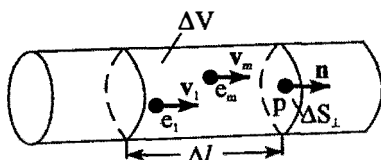


Рис. 1.4. Трубка тока

где $\mathbf{j} = \sum_m e_m \mathbf{v}_m / \Delta V$ — вектор

плотности объемного тока. Если скорости носителей заряда равны средней \mathbf{v} ($\mathbf{v}_m = \mathbf{v}$), то $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, где ρ — плотность объемного заряда в ΔV . Таким образом,

в единицу времени (за 1 с) через единичную площадь ΔS_{\perp} , перпендикулярную линиям тока ($\mathbf{jn} = j$) переносится заряд ΔQ , определяемый как плотность объемного тока. Единицей j является A/m^2 :

$$[j] = [\rho] \cdot [v] = \text{Кл}/\text{м}^3 \cdot \text{м}/\text{с} = \text{А}/\text{м}^2.$$

Пусть S — некоторая площадь поверхности в теле (или на теле), которую пересекают заряженные частицы. Тогда за время Δt через S проходит заряд $\Delta Q = \Delta t \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$. Значение $\Delta Q/\Delta t$ определяет ток $i(t)$

как *поток вектора плотности объемного тока через площадь поверхности S*

$$i(t) = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{j} dS \quad (1.5)$$

и значит, ток равен заряду, проходящему через (сквозь) S за 1 секунду. Единицей $i(t)$ является А, ($[i] = [j] \cdot [S] = (A/m^2) \cdot m^2 = A$).

Пусть объем тела V ограничен поверхностью S и заряженные частицы пересекают S . Тогда в соответствии с (1.1) и (1.5) заряд в объеме V и ток через замкнутую поверхность S

$$Q(t) = \int_V \rho dV, \quad i(t) = \oint_S \mathbf{j} dS.$$

Принято ток считать положительным, если заряд в объеме уменьшается. Тогда

$$i(t) = -\frac{dQ}{dt}, \quad \text{т.е.} \quad \oint_S \mathbf{j} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV.$$

Это закон сохранения электрического заряда в интегральной форме (для всего тела V). Но если применить теорему Остроградского–Гаусса (П1.3) к поверхностному интегралу, то

$$\oint_S \mathbf{j} dS = \int_V \text{div } \mathbf{j} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV.$$

Учитывая, что равенство справедливо для любого объема, приравнивая подынтегральные выражения, получаем *уравнение непрерывности линий тока в дифференциальной форме* (справедливое в точке пространства), математически выражающее закон сохранения электрического заряда

$$\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (1.6)$$

где использованы символы частных производных, поскольку ρ является функцией координат и времени.

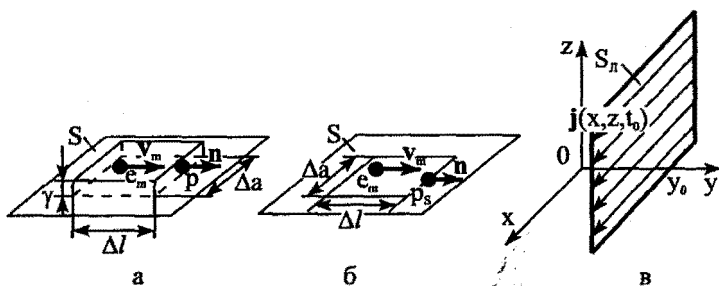


Рис. 1.5. К определению плотности поверхностного тока

3. В математических моделях наряду с плотностями поверхностного и линейного зарядов применяются понятия *плотностей поверхностного и линейного токов*. Чтобы определить плотность поверхностного тока, рассмотрим трубку тока, расположенную у поверхности тела S (рис. 1.5,а). Если толщина трубки $\gamma \rightarrow 0$, то трубка тока вырождается в *лист тока*. Линии тока проходят только по поверхности тела (рис. 1.5,б). Заряженные частицы, каждая со скоростью \mathbf{v}_m , пересекают сечение листа $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{n} \Delta a$ за время Δt . Выделим площадку на листе тока $\Delta S = \Delta l \Delta a$, где $\Delta l = |\mathbf{v}_m| \Delta t$. За время Δt с площадки ΔS через Δa M частиц переносят заряд $\Delta Q = \Delta t \Delta a n \sum_m e_m \mathbf{v}_m / \Delta S$. Значит,

$$\Delta Q / \Delta t = \Delta a n \mathbf{J}, \text{ где } \mathbf{J} = \sum_m e_m \mathbf{v}_m / \Delta S \text{ — вектор плотности поверхностного тока.}$$

Плотность поверхностного тока равна заряду, переносимому в единицу времени ($\Delta t = 1$ с) через единичный отрезок ($\Delta a = 1$ м) на поверхности тела, ориентированный перпендикулярно линиям тока. Единицей \mathbf{J} является А/м ($[J] = [e] \cdot [v] \cdot [S]^{-1} = (\text{Кл} \cdot \text{м/с}) \cdot \text{м}^{-2} = \text{А/м}$).

Плотности объемного и поверхностного токов могут быть связаны δ -функцией. Например, если ДСК расположить так, что плоскость xz станет параллельной плоскому листу тока (рис. 1.5,в), то $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x, z, t)$ при $p \in S_n$ и $\mathbf{J} = 0$ при $p \notin S_n$, поэтому $\mathbf{j}(p, t) = \mathbf{J}(x, z, t) \delta(y - y_0)$. Ток, проходящий через любой отрезок a , расположенный на поверхности тела, вычисляется по общей формуле (1.5).

Чтобы определить плотность линейного тока, рассмотрим трубку тока (рис. 1.4), поперечное сечение которой ΔS_{\perp} сжимается (вырождается) в линию. По этой линии тока движутся заряженные частицы, значит, она имеет поперечное сечение и является физической линией,

поэтому ее называют *нитью тока*, а в случае математической модели — *линией тока*. Через точку p_L по линии тока за время Δt проходит M заряженных частиц, скорость m -й частицы \mathbf{v}_m , а интервал Δt определим так же, как и выше. Тогда $\Delta Q_m = \eta_m \mathbf{v}_m \Delta t \cdot \mathbf{n}$, где $\eta_m = e_m / \Delta l$. M частиц переносят заряд $\Delta Q = \Delta t \mathbf{nI}$, где орт \mathbf{n} из-за вырождения трубки тока в линию направлен в точке p_L по касательной к линии тока, $\mathbf{I} = \sum_m e_m \mathbf{v}_m / \Delta l$ — вектор плотности линейного тока. Значит, $\Delta Q / \Delta t = \mathbf{nI}$ и, таким образом *плотность линейного тока* равна заряду, переносимому в единицу времени ($\Delta t = 1$ с) через точку p_L линии тока. Единицей \mathbf{I} является ампер

$$[I] = [e] \cdot [v] \cdot [l]^{-1} = \text{Кл} \cdot (\text{м/с}) \cdot \text{м}^{-1} = \text{А}.$$

Плотности объемного и линейного токов могут быть связаны δ -функциями. Например, если ДСК расположить так (рис. 1.3,б), что ось z станет параллельной прямолинейной линии тока, то $\mathbf{I} = I_z \mathbf{I}_z$ при $p \in L$ и $\mathbf{I} = 0$ при $p \notin L$. Тогда $\mathbf{j}(p) = \mathbf{I}(z) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$.

1.2. Векторы электромагнитного поля. Материальные уравнения

1. Сила взаимодействия покоящихся точечных зарядов определяется *экспериментальным законом Кулона*. Последний позволяет ввести понятие *электрического поля, задаваемого вектором напряженности \mathbf{E}* , т.е. силой $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$, действующей в электрическом поле в веществе на точечный заряд Q . Силу \mathbf{F} можно измерить, поэтому при известной величине Q заряда $\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q$. Это равенство рассматривается в качестве определения вектора \mathbf{E} . Вектор \mathbf{E} равен силе, с которой электрическое поле действует в данный момент времени в точке наблюдения p в веществе на единичный положительный заряд. Единицей измерения \mathbf{E} является вольт/м ($[E] = [F]/[Q] = \text{Н/Кл} = \text{В/м}$).

2. На движущийся в веществе со скоростью \mathbf{v} заряд в магнитном поле действует *сила Лоренца $\mathbf{F} = Q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$* , где вектор \mathbf{B} определен в каждой точке p и количественно описывает способность магнитного поля вызывать появление этой силы. Вектор \mathbf{B} называется *магнитной индукцией*. Выражение \mathbf{F} можно рассматривать как определение вектора \mathbf{B} . Единицей \mathbf{B} является тесла (Т):

$$[B] = [F]/[Q] \cdot [v] = \text{Н}/(\text{Кл} \cdot \text{м}/\text{с}) = (\text{Кл} \cdot \text{В}/\text{м})/(\text{Кл} \cdot \text{м}/\text{с}) = \\ = \text{В} \cdot \text{с}/\text{м}^2 = \text{вебер}/\text{м}^2 = \text{Вб}/\text{м}^2 = \text{тесла (Т)}.$$

Поток вектора \mathbf{B} сквозь (через) поверхность S называют магнитным потоком Φ :

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Единицей измерения магнитного потока является вебер (Вб).

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} описывают проявления механических сил в ЭМ поле, их называют *силовыми и основными векторами ЭМ поля*.

3. На основе экспериментального закона Кулона для электростатического поля (т.е. электрического поля неподвижного макроскопического постоянного во времени заряда) доказывается *закон Гаусса для вакуума*. Он устанавливает связь потока вектора \mathbf{E} через произвольную замкнутую поверхность S с алгебраической суммой Q свободных электрических зарядов, заключенных в объеме V , ограниченном поверхностью S :

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E} n dS = Q / \epsilon_0,$$

где $\epsilon_0 = 10^{-9} / 36\pi$ фарад/м (Ф/м) — электрическая постоянная.

В диэлектрике под действием внешнего электростатического поля изменяются средние положения связанных зарядов, входящих в состав молекул. В *неполярных молекулах* положительные и отрицательные заряды смещаются в противоположные стороны, образуются упорядоченно направленные элементарные электрические диполи, обладающие электрическими моментами. В *полярных молекулах*, которые обладают в отсутствие внешнего поля некоторым электрическим моментом, во внешнем поле появляется направление преимущественной ориентации этих моментов. Появление упорядоченно ориентированных элементарных электрических моментов приводит к *электрической поляризации* диэлектрика, при этом электрический момент единицы объема диэлектрика отличается от нуля. Количественно поляризацию диэлектрика описывают *вектором поляризованности* \mathbf{P} , численно равным электрическому моменту единицы объема диэлектрика в точке p . Замкнутая поверхность S в диэлектрике разделяет положительные и отрицательные заряды ориентированных диполей. В объеме V образуется связанный избыточный заряд $Q_{\text{св}} = -\int_S \mathbf{P} d\mathbf{S}$, влияющий на величину напряженности поля в точке p объема V . Поэтому для диэлектрика

величину заряда в законе Гаусса для вакуума надо изменить, добавив к заряду Q значение $Q_{\text{св}}$. Тогда получаем

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) d\mathbf{S} = Q.$$

Обозначив

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.7)$$

получаем

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q \quad (1.8)$$

— *обобщенный закон Гаусса для зарядов в диэлектрике*. Этот закон строго доказывается только для электростатических полей. Максвелл обобщил этот закон, постулировав его справедливость для произвольных веществ, зарядов и изменяющихся в пространстве и времени полей. В классической электродинамике этот закон — один из основных.

Вспомогательный вектор \mathbf{D} называется *вектором электрической индукции (электрического смещения)*. Его введение в теорию упрощает описание электрических полей в веществе, так как поля одних и тех же свободных зарядов в любых веществах (и в вакууме) описываются одними и теми же значениями вектора \mathbf{D} . Поэтому наряду с силовым вектором \mathbf{E} вектор \mathbf{D} характеризует электрическое поле в точке p . Вектор \mathbf{D} измеряется в кулонах/м².

4. Среды по макроскопическим параметрам делят на изотропные и анизотропные, линейные и нелинейные, однородные и неоднородные.

Изотропной называют среду, физические свойства которой одинаковы по всем направлениям в каждой точке p . В среде, изотропной по отношению к электрическому полю, элементарные электрические моменты диполей ориентированы преимущественно параллельно напряженности электрического поля. При этом $\mathbf{P} \parallel \mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$.

Линейной называют среду, физические свойства которой не зависят от величины векторов поля. В линейной и изотропной по отношению к электрическому полю среде вектор \mathbf{P} пропорционален и параллелен вектору \mathbf{E} : $\mathbf{P} = \epsilon_0 k_3 \mathbf{E}$, где безразмерный коэффициент k_3 называют *диэлектрической восприимчивостью*, последняя характеризует свойство вещества поляризоваться и зависит от физико-химических свойств вещества. К *линейным изотропным средам* относится большинство диэлектриков (фторопласт, полистирол и др.) Подставив значение $\mathbf{P} = k_3 \epsilon_0 \mathbf{E}$ в (1.7), имеем

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}, \quad (1.9)$$

где $\epsilon_a = \epsilon_0(1 + k_s)$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость (диэлектрическая проницаемость) — параметр, характеризующий макроскопические электрические свойства вещества и измеряемый в единицах фарадах/м.

Нелинейной называют среду, физические свойства которой зависят от величины векторов поля. В нелинейной изотропной по электрическому полю среде вектор \mathbf{P} нелинейно зависит от величины напряженности электрического поля и может иметь нелинейный гистерезисный характер. В последнем случае такие вещества называют ферроэлектриками или сегнетоэлектриками.

Анизотропной называют среду, физические свойства которой в точке p различны по различным направлениям. В анизотропной среде вектор \mathbf{P} не параллелен векторам \mathbf{E} и \mathbf{D} . Поэтому в общем случае каждая составляющая вектора \mathbf{D} зависит от трех составляющих вектора \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{axx}E_x + \epsilon_{axy}E_y + \epsilon_{axz}E_z, & D_y &= \epsilon_{ayx}E_x + \epsilon_{ayy}E_y + \epsilon_{ayz}E_z, \\ D_z &= \epsilon_{azx}E_x + \epsilon_{azy}E_y + \epsilon_{azz}E_z, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где ϵ_{ant} — компоненты тензора диэлектрической проницаемости ($n, t = x, y$ или z). Примерами анизотропных сред являются плазма (ионизированный газ), находящаяся в постоянном магнитном поле, и намагнитный феррит.

Однородной называют среду, физические свойства которой одинаковы во всех точках p . В однородной изотропной линейной по электрическому полю среде ϵ_a — постоянная величина, в *неоднородной* — $\epsilon_a = \epsilon_a(p)$, т.е. зависит от координат точки p .

5. В магнитном поле векторные линии магнитной индукции \mathbf{B} непрерывны, они не имеют ни начала, ни конца. Поэтому магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю (*принцип непрерывности магнитного потока*):

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.11)$$

Причиной этого является отсутствие в природе магнитных зарядов, которые могли бы стать источниками магнитного поля аналогично тому, как электрические заряды являются источниками электрического поля. Магнитное поле порождается электрическими токами, а линии \mathbf{B} замыкаются вокруг последних.

Опытным путем установлено, что вектор \mathbf{B} и постоянные токи (протекающие по замкнутым контурам) в вакууме связаны законом полного тока для вакуума

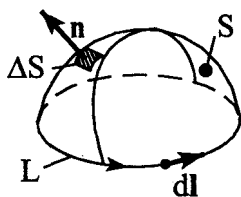


Рис. 1.6. Контур и опирающаяся на него поверхность

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 i(S) = \mu_0 \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} n dS, \quad (1.12)$$

где L — произвольный замкнутый контур, $d\mathbf{l}$ — элемент длины контура (рис. 1.6), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ генри/м (Г/м) — магнитная постоянная, $i(S)$ — ток через произвольную поверхность S , опирающуюся на контур L ; направление обхода контура (направление $d\mathbf{l}$) и направление орта \mathbf{n} связаны правилом правого винта.

Магнитные поля, порождаемые одним и тем же проводником с одинаковым током, помещенным в различные вещества, различаются. Объясняется это тем, что в любом веществе существуют замкнутые элементарные электрические токи, возникающие за счет вращения отрицательно заряженного электрона по орбите вокруг положительно заряженного ядра атома; за счет этого образуются элементарные рамки тока, обладающие магнитными моментами. Кроме того, электрон вращается вокруг собственной оси, образуя спиновый магнитный момент. При воздействии на вещество внешнего магнитного поля в ориентировке этих магнитных моментов возникает некоторая упорядоченность. В единице объема вещества появляется магнитный момент. Этот процесс называют *намагничиванием*, а вещества, способные намагничиваться, называют *магнетиками*. Магнитное состояние вещества при этом характеризуют с помощью *вектора намагничивания* \mathbf{M} — магнитного момента, которым обладает единица объема вещества в точке p .

Применим выражение (1.12) закона полного тока к *магнетикам*. Появление дополнительных токов в магнетиках должно учитываться в правой части этого выражения дополнительным слагаемым $\oint_L \mathbf{M} d\mathbf{l}$, оп-

ределяемым лишь теми токами элементарных рамок, которые охватывают собой контур интегрирования (сцепляются с контуром L). Тогда

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 [i(S) + \oint_L \mathbf{M} d\mathbf{l}],$$

или

$$\oint_L \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) d\mathbf{l} = i(S).$$

Если обозначить здесь

$$\mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{M} = \mathbf{H}, \quad (1.13)$$

то имеем закон полного тока, справедливый для любого вещества при постоянном во времени токе:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = i(S) = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (1.14)$$

Вектор \mathbf{H} называют вектором напряженности магнитного поля. Он является разностью физически разнородных векторных величин: магнитной индукции (деленной на магнитную постоянную) и вектора намагниченности вещества. Но введение в теорию вспомогательного вектора \mathbf{H} упрощает описание магнитных полей в веществах: поля, порождаемые одними и теми же макроскопическими токами, описываются в любых веществах и вакууме одними и теми же значениями вектора \mathbf{H} . Поэтому вектор представляет основную величину, характеризующую магнитное поле в точке p . Единицей измерения вектора \mathbf{H} является ампер/м= A/m .

6. Вещества по своим магнитным свойствам разделяются на изотропные и анизотропные, линейные и нелинейные, однородные и неоднородные.

В изотропном магнетике под воздействием внешнего магнитного поля элементарные магнитные моменты ориентируются преимущественно параллельно вектору \mathbf{B} . При этом вектор \mathbf{M} и, значит, вектор \mathbf{H} параллельны вектору \mathbf{B} . В линейном изотропном магнетике вектор \mathbf{M} пропорционален и параллелен вектору \mathbf{B} : $\mathbf{M} = b\mathbf{B}$, где b — коэффициент пропорциональности. Поэтому $\mathbf{H} = (\mu_0^{-1} - b)\mathbf{B}$. Однако, по традиции это выражение записывают в виде

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \quad (1.15)$$

где μ_a — абсолютная магнитная проницаемость вещества (магнитная проницаемость) — параметр, характеризующий макроскопические магнитные свойства вещества и измеряемый в единицах генри/м (Г/м).

Так как $\mathbf{M} = b\mu_a \mathbf{H} = k_m \mathbf{H}$, где безразмерный коэффициент k_m называется магнитной восприимчивостью вещества, то $\mu_a = \mu_0(1 + k_m)$.

Изотропные линейные магнетики делятся на две группы — парамагнетики и диамагнетики. У парамагнетиков векторы \mathbf{M} и \mathbf{H} примерно совпадают по направлению, поэтому $k_m > 0$ и $\mu_a > \mu_0$; к ним относятся, например, алюминий, натрий, калий, магний, кислород (O_2) и др. У диамагнетиков вектор \mathbf{M} направлен навстречу магнитному полю, поэтому $k_m < 0$ и $\mu_a < \mu_0$; к ним относятся, например, вода, медь, серебро, ртуть, углерод, гелий и др. И парамагнетики и диамагнетики слабо проявляют магнитные свойства, т.е. $k_m \ll 1$, поэтому часто полагают для таких веществ $\mu_a \approx \mu_0$.

К нелинейным магнетикам относятся ферромагнетики. Ферромагнетиками являются ферромагнитные металлы (железо, кобальт, кадмий и их сплавы между собой и с другими неферромагнитными элементами) и ферриты. У ферромагнетиков зависимости составляющих вектора \mathbf{M} от соответствующих составляющих вектора \mathbf{H} имеют нелинейный гистерезисный характер. В ферромагнетике при уменьшении до нуля значения \mathbf{H} сохраняется *остаточная намагниченность*. Тело, сохраняющее длительное время остаточную намагниченность, называется *постоянным магнитом*.

В анизотропном линейном магнетике векторы \mathbf{M} , \mathbf{H} и \mathbf{B} не параллельны. В этом случае $\mathbf{B} = \hat{\mu}_a \mathbf{H}$, где $\hat{\mu}_a$ — тензор магнитной проницаемости. Примером анизотропных магнетиков являются ферриты, находящиеся в постоянном магнитном поле, в них для переменного во времени ЭМ поля магнитная проницаемость становится тензором.

7. В общем случае ЭМ поле в среде наводит (индуцирует) токи проводимости — *вторичные токи* с плотностью \mathbf{j}^B . Опыт показывает, что в большинстве веществ \mathbf{j}^B определяется только напряженностью электрического поля, т.е. уравнение, связывающее \mathbf{j}^B и \mathbf{E} , имеет вид $\mathbf{j}^B = \mathbf{j}^B(\mathbf{E})$.

Зависимость (функция) $j_m^B(E_m)$ называется *вольтамперной характеристикой* вещества. Она устанавливается опытным путем для каждого вещества. Разлагая вольтамперную характеристику в случае ее однозначности в ряд Маклорена в окрестности точки $E_m = 0$, получаем

$$j_m^B(E_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} j_{m\nu}^B E_m^\nu,$$

где $j_{m\nu}^B = (1/\nu!) \partial^\nu j_m^B(E_m) / \partial E_m^\nu$ при $E_m = 0$.

Если нет поля, то ток отсутствует, т.е. $j_m^B(0) = 0$. Ограничиваясь только линейным приближением, находим $j_m^B = \sigma E_m$. Поскольку в изотропных средах $\mathbf{j}^B \parallel \mathbf{E}$, то имеем закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j}^B = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.16)$$

Величина $\sigma = \partial j_m^B / \partial E_m$ называется *удельной дифференциальной электропроводностью* или *удельной проводимостью* (или просто *проводимостью*) вещества. Ее единицей является сименс/м = См/м ($[\sigma] = [j]/[E] = (A/m^2) \cdot (m/V) = (1/\text{Ом}) \cdot m^{-1} = \text{См/м}$).

В случае, когда σ не зависит от положения точки p , среда называется *однородной в смысле электропроводности*. Если среда анизотропна в смысле электропроводности, то для описания ее свойств вводится *тензор электропроводности*.

У всех веществ σ отлично от нуля. Но значения σ разных веществ весьма существенно отличаются. Например, у серебра $\sigma = 6,14 \cdot 10^7$ См/м, у латуни $\sigma = 1,45 \cdot 10^7$ См/м, у железа $\sigma = 1 \cdot 10^7$ См/м, у полистирола $\sigma = 10^{-15}$ См/м в диапазонах частот от ОНЧ до ОВЧ, у слюды $\sigma = 10^{-11} \dots 10^{-15}$ См/м в диапазонах частот от ОНЧ до СЧ.

8. Известно, что ток в цепи с омическим сопротивлением сопровождается выделением джоулева тепла. Чтобы поддерживать ток, необходимо ввести в цепь *сторонний источник*.

Рассмотрим в цепи постоянного тока область *стороннего источника* V_n , расположенного на участке между сечениями проводника в точках 2 и 3 (рис. 1.7,а). Проводимость области V_n обозначим через σ_n , длину участка разреза — через ΔL . Между сечениями провода введена сторонняя напряженность поля $E_2^c = E^c$. Тогда на каждый носитель заряда в области стороннего источника V_n в соответствии с (В.1) воздействует сила и носитель заряда приобретает скорость. Наличие E^c приводит к появлению тока проводимости. Опытные данные показывают, что токи в проводящей среде могут быть вызваны не только электрическим полем, но и другими причинами. Например, при соприкосновении двух тел разного химического состава между ними происходит обмен носителями зарядов (возникает контактная разность потенциалов), разность температур тел создает токи термического происхождения и т.д. Сторонние силы действуют в аккумуляторах, термопарах, гальванических элементах и др. Во всех случаях причина, вызывающая

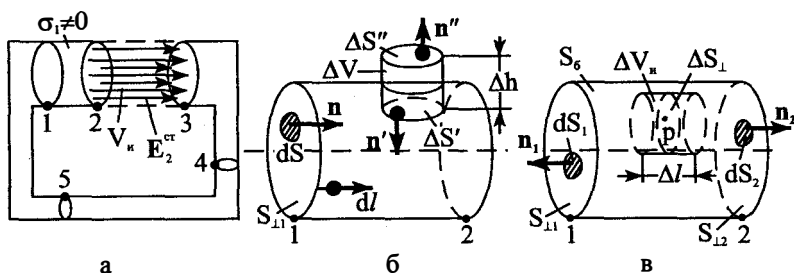


Рис. 1.7. Цепь постоянного тока и увеличенный участок проводника

ток, может быть описана дополнительным полем сторонних сил \mathbf{E}^c . За счет этого поля в каждой точке p области V_n появляется плотность тока проводимости $\sigma_n \mathbf{E}^c$. Если в V_n общее электрическое поле определяется суммой полей $\mathbf{E} + \mathbf{E}^c$, то в (1.16) вместо \mathbf{E} необходимо подставить сумму $\mathbf{E} + \mathbf{E}^c$. В проводнике с проводимостью σ плотность тока определяется значением (1.16). Значит, *обобщенный закон Ома в дифференциальной форме* имеет вид

$$\mathbf{j}(p) = \sigma_n (\mathbf{E} + \mathbf{E}^c), \quad p \in V_n; \quad \mathbf{j}(p) = \sigma \mathbf{E}, \quad p \notin V_n. \quad (1.17)$$

Если здесь величину $\sigma_n \mathbf{E}^c$ определить как сторонний ток, то тогда

$$\mathbf{j}(p) = \mathbf{j}^c + \sigma_n \mathbf{E}, \quad p \in V_n; \quad \mathbf{j}(p) = \sigma \mathbf{E}, \quad p \notin V_n. \quad (1.18)$$

Закон Ома (1.17), или (1.18), *считают справедливым и в нестационарном случае.*

9. Как материальный объект ЭМ поле может быть охарактеризовано совокупностью четырех векторов $\mathbf{E}(p, t)$ и $\mathbf{B}(p, t)$, $\mathbf{D}(p, t)$ и $\mathbf{H}(p, t)$, являющихся непрерывными функциями положения обыкновенной точки наблюдения p и времени t . *Обыкновенной точкой p* считают такую точку, в окрестности которой физические свойства среды непрерывны. При переходе точки наблюдения p через поверхность, ограничивающую материальное тело, векторы поля и их производные могут иметь разрывы. При этом точки p относятся к *особым точкам*. Характер разрывов устанавливается при изучении *граничных условий*. Пока граничные условия не изучены, особые точки из рассмотрения нами исключаются.

В линейных изотропных средах векторы \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{B} , \mathbf{H} связаны выражениями (1.9) и (1.15):

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \quad (1.19)$$

а вектор \mathbf{E} и плотность электрического тока — выражением (1.16):

$$\mathbf{j}^a = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.20)$$

Выражения (1.19) и (1.20) называют *материальными уравнениями (уравнениями состояния) линейной изотропной среды.*

В вакууме отсутствуют частицы вещества, поэтому $k_3 = k_m = 0$ и $\mathbf{P} = \mathbf{M} = 0$. Поэтому

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (1.21)$$

т.е. диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума равны соответственно электрической и магнитной постоянным ϵ_0 и μ_0 .

На практике часто пользуются безразмерными *относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями* $\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0$, $\mu = \mu_a / \mu_0$.

В случае нелинейных анизотропных сред материальные уравнения устанавливаются с помощью выражений (1.7) и (1.13). Для этого при заданных физических условиях состояния среды надо найти векторы поляризованности \mathbf{P} и намагничивания \mathbf{M} .

Для большинства нелинейных сред материальные уравнения в виде зависимостей $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ могут быть заданы только графически. Разлагая эти функции в ряд Тейлора в окрестности точек E_{0m} и H_{0m} , получаем для составляющих векторов D_m, E_m и B_m, H_m ($m = x, y$ или z):

$$D_m(E_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{m\nu} (E_m - E_{0m})^\nu, \quad B_m(H_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{m\nu} (H_m - H_{0m})^\nu,$$

где $d_{m\nu} = (1/\nu!) \cdot \partial^\nu D_m(E_m) / \partial E_m^\nu$ при $E_m = E_{0m}$, $b_{m\nu} = (1/\nu!) \cdot \partial^\nu B_m(H_m) / \partial H_m^\nu$ при $H_m = H_{0m}$.

При отсутствии поля среда не поляризуется, т.е. $D_m(0) = 0$, $B_m(0) = 0$.

В *слабых ЭМ полях* всеми членами ряда Тейлора, начиная с третьего, можно пренебречь, так как $(E_m - E_{0m})^\nu$, $(H_m - H_{0m})^\nu$ малы. В этом случае имеем линейные материальные уравнения (1.19).

10. Применимость материальных уравнений в простой форме (1.19), (1.20) ограничена. На высоких частотах в веществах наблюдаются явления *запаздывания*: векторы \mathbf{P} и \mathbf{M} в точке p не успевают мгновенно следовать за векторами поля в этой же точке, возникает линейный гистерезис. Электрическая поляризация и намагничивание отстают во времени от поля (проявляется инерционность) и становятся зависящими от истории процесса, т.е. от того, что наблюдалось в точке p в предыдущие моменты времени. При этом вместо (1.19) необходимо использовать более общие локальные соотношения:

$$\mathbf{D}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_a(t-t') \mathbf{E}(p, t') dt', \quad \mathbf{B}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_a(t-t') \mathbf{H}(p, t') dt',$$

$$\mathbf{j}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-t') \mathbf{E}(p, t') dt',$$

где функции $\epsilon_a(t-t')$, $\mu_a(t-t')$, $\sigma(t-t')$ должны быть определены с учетом поведения структуры вещества в ЭМ поле. Эти выражения означают: индукция в момент времени t определяется значениями напряженности поля в предыдущие, но не последующие моменты времени, что является следствием принципа причинности. Поэтому при $t > t'$ функции $\epsilon_a(t-t')$, $\mu_a(t-t')$, $\sigma(t-t')$ обращаются в нуль.

Параметры среды становятся зависящими от частоты ЭМ колебаний. Поэтому явление, определяемое последними выражениями, получило название *частотной (или временной) дисперсии среды*.

Между векторами \mathbf{D}, \mathbf{B} и \mathbf{j}^b и векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} могут существовать и нелокальные связи, когда, например, зависимость между \mathbf{D} и \mathbf{E} определяется интегральным соотношением

$$\mathbf{D}(p, t) = \int_V \epsilon_a (p - p') \mathbf{E}(p', t) dV'.$$

Связи подобного типа определяют так называемую *пространственную дисперсию*.

11. Векторное поле может быть описано семейством *силовых линий*.

Силовая линия вектора $\mathbf{a}(p, t)$ — это линия, направление касательной к которой в любой точке p в момент времени $t = t_0$ совпадает с направлением вектора \mathbf{a} , число силовых линий, проходящих через единичную площадь, перпендикулярную силовым линиям, пропорционально длине вектора $|\mathbf{a}(p, t_0)|$. Если обозначить через a_x, a_y и a_z — проекции $\mathbf{a}(p, t_0)$ на координатные оси в ДСК, а через dx, dy, dz — элементы длины силовой линии в точке $p(x, y, z)$, то $dx/a_x = dy/a_y = dz/a_z$. Интегрируя эту систему дифференциальных уравнений, в которой a_x, a_y, a_z — известные функции координат, получим аналитическое выражение силовой линии.

В ортогональной криволинейной системе координат ξ, η, ζ с ортами $\mathbf{1}_\xi, \mathbf{1}_\eta, \mathbf{1}_\zeta$ и метрическими коэффициентами L_ξ, L_η, L_ζ $\mathbf{a} = \mathbf{1}_\xi a_\xi + \mathbf{1}_\eta a_\eta + \mathbf{1}_\zeta a_\zeta$, где a_ξ, a_η и a_ζ — проекции вектора \mathbf{a} на оси ξ, η, ζ , получаем

$$L_\xi d\xi/a_\xi = L_\eta d\eta/a_\eta = L_\zeta d\zeta/a_\zeta. \quad (1.22)$$

1.3. Основные уравнения электродинамики

1. В обобщенном законе Гаусса (1.8) свободный заряд Q , находящийся в объеме V , ограниченном замкнутой поверхностью S , определяется выражением (1.2). Применим к левой части (1.8) теорему Остроградского–Гаусса (П1.3). Получаем

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Это равенство справедливо для любого объема. Поэтому подынтегральные выражения равны, т.е.

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(p, t) = \rho(p, t). \quad (1.23)$$

Уравнение (1.23), справедливое в любой обыкновенной точке пространства в любой момент времени, выражает *обобщенный закон Гаусса в дифференциальной форме*. Оно математически выражает физический факт: *источником или стоком векторного поля \mathbf{D} является плотность объемного электрического заряда*, линии вектора \mathbf{D} начинаются в точках, где $\rho > 0$ и заканчиваются в точках, где $\rho < 0$. Уравнение (1.23) называют *третьим уравнением Максвелла в дифференциальной форме*, а *обобщенный закон Гаусса (1.8) является его интегральной формой*.

2. Применяя к принципу непрерывности магнитного потока (1.11) теорему Остроградского–Гаусса, получаем

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0.$$

Поскольку объем V произволен, то равенство может выполняться только при

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.24)$$

Это уравнение, справедливое в любой обыкновенной точке пространства в любой момент времени, выражает в дифференциальной форме физический факт непрерывности векторных линий магнитной индукции; векторное поле \mathbf{B} не имеет истоков; в природе магнитные заряды отсутствуют. Уравнение (1.24) называют *четвертым уравнением Максвелла в дифференциальной форме*, а принцип непрерывности магнитного потока (1.11) является его интегральной формой.

3. Рассмотрим закон полного тока (1.14). Он справедлив для любого вещества, но при постоянном во времени токе. Применим к левой части (1.14) теорему Стокса (П1.4). Получаем

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Поскольку поверхность S произвольна, но одна и та же в поверхностных интегралах, то подынтегральные выражения поверхностных интегралов равны, т.е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}(p). \quad (1.25)$$

Это дифференциальная форма закона полного тока в *стационарном случае*. Действительно, применим к обеим частям уравнения (1.25) операцию дивергенции. Дивергенция ротора любого вектора по (П1.7) всегда равна нулю. Поэтому $\operatorname{div} \mathbf{j}(p) = 0$, т.е. получено уравнение (1.6), но справедливое только для случая постоянного тока (и заряда), когда $\partial \rho / \partial t = 0$.

Пусть плотность тока зависит от времени, т.е. $\mathbf{j} = \mathbf{j}(p, t)$. Если применить выражение (1.25) к нестационарному полю, то оно оказывается несправедливым, поскольку не удовлетворяется закон сохранения электрического заряда (1.6). Это указывает на то, что выражения (1.14) и (1.25) являются неполными. Допустим, что (1.25) дополнено некоторым слагаемым $\boldsymbol{\psi}(p, t)$: $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \boldsymbol{\psi}$. Применив здесь операцию дивергенции к обеим частям равенства, с учетом (П1.7) получаем $\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = -\operatorname{div} \mathbf{j}$.

Используя закон сохранения электрического заряда (1.6) и учитывая (1.23), имеем $\operatorname{div}(\boldsymbol{\psi} - \partial \mathbf{D} / \partial t) = 0$. Решением последнего уравнения

является $\boldsymbol{\psi} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \text{rot} \mathbf{a}$, где \mathbf{a} — произвольный вектор. Максвелл постулировал, что $\text{rot} \mathbf{a} = 0$, тогда $\boldsymbol{\psi} = \partial \mathbf{D} / \partial t$. Вектор $\partial \mathbf{D} / \partial t = \mathbf{j}_c$ называют *плотностью тока смещения*. При этом вместо (1.25) имеем

$$\text{rot} \mathbf{H}(p, t) = \mathbf{j}(p, t) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}(p, t). \quad (1.26)$$

Здесь сумма $\mathbf{j} + \mathbf{j}_c$ называется *вектором плотности полного электрического тока*. Интегральной формой уравнения является

$$\oint_L \mathbf{H}(p, t) d\mathbf{l} = \int_S [\mathbf{j}(p, t) + \mathbf{j}_c(p, t)] d\mathbf{S}. \quad (1.27)$$

Это закон полного тока в интегральной форме, справедливый в нестационарном случае.

Уравнение (1.26) выражает закон полного тока в дифференциальной форме. Оно устанавливает количественную связь между входящими в него векторными величинами в любой точке пространства и в любой момент времени. Изменяющаяся в момент времени t в точке пространства p плотность тока $\mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ порождает в этой точке и в этот момент времени вихрь вектора \mathbf{H} . Если даже в точке p в момент времени t плотность тока \mathbf{j} отсутствует, то вихрь меняющегося в пространстве магнитного поля порождается током смещения с плотностью $\partial \mathbf{D} / \partial t$, т.е. *меняющимся во времени электрическим полем*. Уравнение (1.26) называют *первым уравнением Максвелла*.

4. Пусть имеется поверхность S , опирающаяся на контур L (рис. 1.6). Поместим контур L во внешнее магнитное поле с индукцией \mathbf{B} . Изменение во времени магнитного потока Φ (см. п.1.2.2) через поверхность S , вызывает в этом контуре электродвижущую силу \mathcal{E} (э.д.с.), определяемую циркуляцией вектора \mathbf{E} вдоль контура L : $\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}$. Если контур L имеет некоторую проводимость, то под дей-

ствием э.д.с. в контуре возникает ток проводимости, который можно измерить. Опыт показывает, что величина э.д.с. равна скорости изменения магнитного потока Φ во времени: $\mathcal{E} = -d\Phi / dt$, т.е.

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.28)$$

Это закон электромагнитной индукции, открытый Фарадеем опытным путем.

Максвелл обобщил закон электромагнитной индукции, постулировав равенство (1.28) для произвольного замкнутого контура, проходящего в любой среде. В частном случае контур L может быть прово-

дядшим, он может быть и воображаемым. С учетом этого постулата (1.28) называют *обобщенным законом электромагнитной индукции*.

В электродинамике неподвижных сред контур L в (1.28) должен быть покоящимся (неподвижным). Поверхность S в (1.28) тоже считаем неподвижной, но произвольной. Тогда изменение магнитного потока во времени в (1.28) происходит только за счет изменения вектора \mathbf{B} во времени. Это значит, что производную по времени в (1.28) можно внести под знак интеграла, где интегрирование выполняется по пространственным координатам, в виде частной производной. При этом получаем

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} (p, t) d\mathbf{S}. \quad (1.29)$$

Из этого обобщенного закона электромагнитной индукции для неподвижных сред получают второе уравнение Максвелла.

Применим к левой части (1.29) теорему Стокса (П1.4). Получаем

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Так как поверхность S произвольна, то это равенство возможно только при равенстве подинтегральных выражений, т.е.

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.30)$$

Это второе *уравнение Максвелла*. Оно справедливо в любой точке пространства в любой момент времени и выражает *обобщенный закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме*. Из (1.30) следует, что изменение во времени в точке p магнитного поля сопровождается изменением в окрестности точки p (по пространственным координатам) электрического поля.

Выражение (1.29) является *интегральной формой второго уравнения Максвелла*.

5. Полная система уравнений Максвелла состоит из четырех уравнений

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.31)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (1.32)$$

Первые два уравнения обладают симметрией в следующем смысле: по первому уравнению изменение во времени электрической индукции порождает вихревое магнитное поле, вектор напряженности которого изменяется в пространстве; по второму уравнению изменение во времени магнитной индукции порождает вихревое электрическое

поле, ~~из~~меняющееся в пространстве. Из этого следует возможность существования ЭМ волн в средах вдали от тел с токами проводимости. Электрическое и магнитное поля могут существовать, *взаимно порождая друг друга*.

По аналогии с первым уравнением Максвелла величину $\partial \mathbf{B} / \partial t = \mathbf{j}_c^M$ в правой части второго уравнения Максвелла можно рассматривать как *плотность магнитного тока смещения*.

Система уравнений Максвелла — это результат обобщения основных законов электродинамики, установленных с помощью опытных данных. Эти уравнения правильно отражают законы электромагнетизма, так как выводы теории полностью подтверждаются опытными данными. Не обнаружено опытных данных, противоречащих теоретическим результатам, найденным на основе решения системы уравнений Максвелла. Поэтому система уравнений Максвелла принимается в качестве *аксиом*.

Применив операцию дивергенции к обеим частям первого уравнения Максвелла, получаем уравнение непрерывности линий электрического тока $\text{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_c) = 0$, откуда с помощью третьего уравнения Максвелла (1.23) — закон сохранения электрического заряда (1.6).

Применив к обеим частям второго уравнения Максвелла операцию дивергенции, получаем $\partial(\text{div} \mathbf{B}) / \partial t = 0$, т.е. $\text{div} \mathbf{B}$ не зависит от времени. Четвертое уравнение Максвелла устанавливает соленоидальный характер поля вектора \mathbf{B} .

Третье и четвертое уравнения Максвелла являются скалярными и определяют истоки векторов ЭМ поля.

Основные уравнения Максвелла удовлетворяют постулату относительности, и не нуждаются, как уравнения механики, в подгонке к нему.

А. Зоммерфельд пишет: «Необычайно важное значение, обширная как мир, область применения и изумительная красота этих уравнений побудили Больцмана процитировать: «То был Бог, кто написал эти строки» [6].

Уравнения Максвелла становятся понятными в процессе теоретического и экспериментального изучения ЭМ явлений. В отличие от электрических процессов в цепях с сосредоточенными параметрами, где соответствующие электрические величины (ток, напряжение) обычно являются одномерными скалярными функциями времени (зависят только от одной переменной t), величины, характеризующие ЭМ поле, являются четырехмерными векторными функциями, так как зависят от трех пространственных координат и времени. Естественно, что представлять и понимать картину ЭМ явления, развернувшегося в пространстве и времени, сложнее, чем представлять и понимать электрическое явление в цепи с сосредоточенными параметрами.

6. Каждое из двух векторных уравнений (1.31) эквивалентно трем скалярным уравнениям в частных производных первого порядка относительно 12 составляющих векторов \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{B} , \mathbf{H} . В случае, когда функции \mathbf{j} и ρ считаются заданными, система уравнений Максвелла

(1.31), (1.32) включает 8 скалярных уравнений, в которых содержится 12 неизвестных скалярных функций — составляющих векторов \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{V} , \mathbf{H} . Поэтому без дополнительных соотношений, связывающих векторы \mathbf{E} и \mathbf{D} , \mathbf{V} и \mathbf{H} , \mathbf{j} и \mathbf{E} уравнения (1.31), (1.32) недостаточны для определения ЭМ поля в среде. В этом смысле система уравнений Максвелла является неполной. Это естественно, поскольку произвольная неподвижная среда в этих уравнениях учитывается в обобщенном виде так, что не раскрывается механизм ее взаимодействия с ЭМ полем.

Для того, чтобы можно было произвести вычисление полей, систему уравнений (1.31), (1.32) дополняют материальными уравнениями, связывающими между собой величины \mathbf{D} , \mathbf{j} и \mathbf{E} , а также \mathbf{V} и \mathbf{H} . Для линейных изотропных сред материальные уравнения определяются выражениями (1.19), (1.20) и (1.17), (1.18).

1.4. Основные законы теории электрических цепей

1. Рассмотрим *граничные условия и первый закон Кирхгофа для цепи постоянного тока* (рис. 1.7,а). Постоянство тока и заряда означает, что их изменения во времени отсутствуют, поэтому $\partial\rho/\partial t = 0$ и для объема V , ограниченного поверхностью S , дифференциальная и интегральная формы закона сохранения электрического заряда в соответствии с (1.6) имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.33)$$

Эти уравнения называют *первым законом Кирхгофа* в дифференциальной и интегральной формах соответственно. Они утверждают, что *линии постоянного тока должны быть замкнуты*, не имея истоков или стоков. Это значит, что *цепь постоянного тока должна быть замкнутой*.

Выделим некоторый объем ΔV цилиндрической формы у проводника с постоянным током (рис. 1.7,б) такой, что часть его находится в теле проводника (с поверхностью торца $\Delta S' = \mathbf{n}' \Delta S'$), а другая — в окружающем проводящем пространстве (с поверхностью торца $\Delta S'' = \mathbf{n}'' \Delta S''$). Плотность тока в проводнике обозначим через \mathbf{j}_1 , а в окружающем пространстве — через \mathbf{j}_2 , $p \in \Delta V$. Применим (1.33) к цилиндру ΔV . Учтем, что при длине образующей цилиндра $\Delta h \rightarrow 0$ точка p ложится на поверхность проводника, площадь боковой поверхности цилиндра $\Delta S_h \rightarrow 0$ и, следовательно, значение интеграла по этой поверхности стремится к нулю. Поскольку при $\Delta h \rightarrow 0$ имеем $\Delta S' = \Delta S'' = \Delta S$, $\mathbf{n}'' = -\mathbf{n}'$, то

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_{\Delta S'} \mathbf{j}_1 d\mathbf{S}' + \int_{\Delta S''} \mathbf{j}_2 d\mathbf{S}'' + \int_{\Delta S_h} \mathbf{j} d\mathbf{S}_{\Delta h \rightarrow 0} = \Delta S (-\mathbf{n}' \mathbf{j}_1 + \mathbf{n}'' \mathbf{j}_2) = 0,$$

и точка p находится на поверхности проводника. Здесь $\mathbf{n}' \mathbf{j}_1 = j_{1n'}$, $\mathbf{n}'' \mathbf{j}_2 = j_{2n''}$ — нормальные составляющие плотностей тока в проводнике и окружающей среде. Получили *граничное условие для плотности постоянного тока* $j_{1n'} = j_{2n''}$, т.е. *на поверхности раздела сред — нормальные составляющие плотностей постоянных токов равны*. Но если проводимость окружающей среды, в которой находится электрическая цепь, равна нулю, $\sigma_2 = 0$, то плотность тока в ней по (1.20) равна нулю, $\mathbf{j}_2 = 0$ и поэтому $j_{2n''} = 0$, а значит,

$j_{in} = 0$ на поверхности проводника. Таким образом, в проводниках с постоянным током, находящихся в непроводящей среде, линии тока на поверхности провода направлены по касательным к поверхностям проводов, т.е. ток в окружающую среду не ответвляется.

Применим к объему проводника, расположенному в непроводящей среде и ограниченному поверхностями сечений ΔS_{11} , ΔS_{12} и боковой поверхностью S_6 (рис. 1.7, в), закон Кирхгофа (1.33)

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_{S_{11}} \mathbf{j} d\mathbf{S}_1 + \int_{S_{12}} \mathbf{j} d\mathbf{S}_2 + \int_{S_6} \mathbf{j} d\mathbf{S}_6 = 0.$$

Последний интеграл здесь равен нулю, так как ток в окружающую среду не ответвляется. Первый интеграл равен току i_1 через сечение S_{11} , а второй — току i_2 через сечение S_{12} . Таким образом, $i_1 + i_2 = 0$. Если направление орта нормали на S_{11} поменять на обратное, $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$, то

$$i_1 = \int_{S_{11}} \mathbf{j} d\mathbf{S}_1 = - \int_{S_{11}} \mathbf{j} n dS_1 = -i(S_{11}),$$

где $i(S_{11})$ — ток через сечение S_{11} , обратный току i_1 . При этом $i(S_{11}) = i_2$, т.е. токи одинаковы в каждом сечении провода цепи постоянного тока независимо от формы провода.

Применим первый закон Кирхгофа в интегральной форме (1.33) к разветвлению (узлу) электрической цепи, расположенной в непроводящей среде. Для этого окружим узел разветвления проводника замкнутой поверхностью S (рис. 1.8). Так как проводимость среды на S всюду равна нулю, за исключением участков S_1 , S_2 , S_3 , которые проходят по сечениям проводников, то получаем

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{j} n_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{j} n_2 dS + \int_{S_3} \mathbf{j} n_3 dS = 0,$$

т.е. $i_1 + i_2 + i_3 = 0$. Это есть первый закон Кирхгофа для разветвления цепи постоянного тока.

2. Обобщенный закон Ома в интегральной форме можно получить из (1.17). Для этого цепь постоянного тока, находящуюся в непроводящей среде, разделим на M цилиндрических участков (рис. 1.7, а). Длины участков между поперечными сечениями S_{11} , S_{12} , ..., S_{1m} , ..., S_{1M} в точках 1, 2, ..., m , ..., M обозначим через

$$l_{12}, l_{23}, \dots, l_{m,m+1}, \dots, l_{M,M+1}.$$

Пусть σ_m проводимость m -го участка, считаем ее однородной в пределах каждого участка. Между поперечными сечениями S_{1m} и S_{1m+1} введена напряженность стороннего поля \mathbf{E}_m^c . (На рис. 1.7, а \mathbf{E}_2^c введена на втором ($m=2$) участке).

Вычислим потоки векторов левой и правой частей равенства (1.17) через поперечное сечение m -го участка и проинтегрируем результат по длине $l_{m,m+1}$ этого участка:

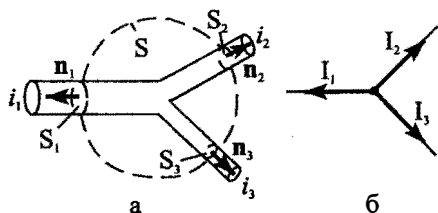


Рис. 1.8. Разветвление проводника и его схематическое изображение

$$\int_{l_{m,m+1}} \int_{S_{\perp m}} \mathbf{j}^b \mathbf{n} dS dl = \sigma_m \int_{l_{m,m+1}} \int_{S_{\perp m}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_m^c) \mathbf{n} dS dl.$$

Считаем, что плотность тока равномерно распределена по участку, а \mathbf{E}_m^c — однородна в сечении. Так как ток в любом поперечном сечении S_{\perp} провода цепи одинаков, а $\mathbf{j}^b \mathbf{n} = j^b$, то

$$\int_{S_{\perp m}} \mathbf{j}^b \mathbf{n} dS = j^b S_{\perp m} = i(S_{\perp m}) = i(S_{\perp}).$$

Учтем, что

$$\int_{l_{m,m+1}} dl = l_{m,m+1}, \quad \int_{S_{\perp m}} dS = S_{\perp m}.$$

Введем обозначения

$$R_m = l_{m,m+1} / \sigma_m S_{\perp m}, \quad u_{m,m+1} = \int_{l_{m,m+1}} \mathbf{E} dl, \quad \mathcal{E}_m^c = \int_{l_{m,m+1}} \mathbf{E}_m^c dl,$$

где R_m — омическое сопротивление m -го участка, $u_{m,m+1}$ — напряжение на m -м участке, \mathcal{E}_m^c — напряжение сторонних электродвижущих сил между поперечными сечениями в точках m и $m+1$, $dl = \mathbf{n} dl$. С учетом этих обозначений получаем

$$i(S_{\perp}) R_m = u_{m,m+1} + \mathcal{E}_m^c \quad (1.34)$$

— интегральную форму обобщенного закона Ома: произведение тока на сопротивление произвольного участка проводника равно сумме напряжения и сторонней э.д.с., приложенных к этому участку. Выражение (1.34) называют также *вторым законом Кирхгофа для участка цепи*. При $\mathcal{E}_m^c = 0$ получаем интегральную форму закона Ома: $i(S_{\perp}) R_m = u_{m,m+1}$, установленного опытным путем.

3. Второй закон Кирхгофа для замкнутой цепи постоянного тока можно получить, если разделить длину цепи L на M участков так, что $L = \sum_{m=1}^M l_{m,m+1}$ где $m=1, 2, \dots, M$, а точка $M+1$ совпадает с точкой 1. Просуммируем при этом (1.34) и учтем, что

$$\sum_{m=1}^M u_{m,m+1} = \sum_{m=1}^M \int_{l_{m,m+1}} \mathbf{E} dl = \int_L \mathbf{E} dl = 0$$

в соответствии с (1.28). Получаем

$$i(S_{\perp}) \sum_{m=1}^M R_m = \sum_{m=1}^M \mathcal{E}_m^c \quad (1.35)$$

— *второй закон Кирхгофа*: в замкнутой цепи постоянного тока сумма произведений тока на сопротивления всех участков цепи равна сумме сторонних э.д.с., приложенных на участках цепи.

Если на участках задана плотность стороннего тока в соответствии с (1.33), то все полученные здесь выражения остаются справедливыми, но под значением \mathcal{E}_m^c в (1.35) надо понимать величину интеграла по $l_{m,m+1}$ от $\mathbf{j}_m^c dl / \sigma_m$. Второй закон Кирхгофа можно получить в другой форме, при этом ток в цепи определяется суммой произведений сторонних токов источников тока на каждом участке на сопротивления этих участков, деленной на сумму сопротивлений всех участков.

4. В теории цепей с сосредоточенными параметрами применяется *математическая модель цепи постоянного тока*.

Пусть замкнутая цепь постоянного тока расположена в непроводящей среде. Так как ток одинаков в любом поперечном сечении (неразветвленного) провода, его можно заменить линейным током I , протекающим по линии (контуру), а омические сопротивления участков проводов — считать локализованными в точках линии. Таким образом от оригинала — цепи с проводами определенной толщины и проводимости — переходят к математической модели.

Второй закон Кирхгофа при этом получается из (1.35) заменой тока плотностью линейного тока

$$I \sum_{m=1}^M R_m = \sum_{m=1}^M \mathcal{E}_m^c.$$

Если разветвление провода цепи содержит N проводов (на рис. 1.8,а $N=3$), то оно заменяется математической моделью — узлом плотностей линейных токов (рис. 1.8,б), для которого первый закон Кирхгофа имеет вид $\sum I_n = 0$, где $n=1, 2, \dots, N$, I_n — плотности линейных токов.

Схематическое изображение цепи постоянного тока в совокупности с первым и вторым законами Кирхгофа составляют математическую модель цепи постоянного тока.

5. Закон Джоуля–Ленца в интегральной форме установлен экспериментально. Ток через проводник сопровождается выделением теплоты. Выделяемое в единицу времени количество теплоты — тепловая мощность — определяется выражением $P^{\text{тг}} = i(S_{\perp})u$, где u — падение напряжения на сопротивлении, $i(S_{\perp})$ — ток.

Причина нагревания проводника состоит в том, что в ЭМ поле за счет энергии последнего свободные электрические заряды за время Δt перемещаются из одного поперечного сечения в другое на расстояние Δl . При этом через эти сечения проводника за одно и то же время проходит одинаковый заряд. ЭМ поле совершает работу. Носители заряда в результате этой работы приобретают кинетическую энергию, которую расходуют затем при столкновениях с атомами (молекулами) и ионами проводника. Таким образом, в ЭМ поле происходит потеря мощности $P^{\text{тг}}$ на нагревание проводника.

Чтобы получить закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме, выделим в проводнике элемент объема ΔV_n вокруг точки p (рис. 1.7,в). Элемент помещен в ЭМ поле с напряженностью электрического поля \mathbf{E} .

Рассмотрим первый случай. В ΔV_n введена сторонняя напряженность электрического поля \mathbf{E}^c . Заряды с плотностью ρ^b движутся в линейной изотропной среде со средней скоростью \mathbf{v} вдоль линий тока. Тогда на заряд $\Delta Q = \rho^b \Delta V_n$ действует сила $\mathbf{F} = \rho^b \Delta V_n (\mathbf{E} + \mathbf{E}^c + [\mathbf{v}, \mathbf{B}])$, которая на пути Δl за время Δt совершает работу

$\Delta A = \mathbf{F}\Delta l = \rho^b \Delta V_n (\mathbf{E} + \mathbf{E}^c) \Delta l$ (так как $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]\Delta l = 0$, поскольку заряды движутся вдоль линий тока, т.е. $\mathbf{v} \parallel \Delta l$). При этом в объеме ΔV_n из ЭМ поля отбирается мощность $\Delta P = \Delta A / \Delta t = \rho^b \Delta V_n (\mathbf{E} + \mathbf{E}^c) \mathbf{v}$, где $\mathbf{v} = \Delta l / \Delta t$. Значит, плотность мощности

$$p = \Delta P / \Delta V_n = \rho^b \mathbf{v} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^c) = \mathbf{j}^b \mathbf{E} + \mathbf{j}^b \mathbf{E}^c = p^{\text{пт}} + p^c, \quad (1.36)$$

где $\mathbf{j}^b = \rho^b \mathbf{v}$ определяется законом Ома $\mathbf{j}^b = \sigma \mathbf{E}$,

$$p^{\text{пт}} = \mathbf{j}^b \mathbf{E}, \quad p^c = \mathbf{j}^b \mathbf{E}^c. \quad (1.37)$$

Здесь $p^{\text{пт}}$ — плотность мощности потерь ЭМ поля в ΔV_n ; с учетом закона Ома (1.20) $p^{\text{пт}} = \sigma E^2 = j^{b2} / \sigma$ и всегда не меньше нуля. Выражение закона Джоуля–Ленца в дифференциальной форме $p^{\text{пт}} = \mathbf{j}^b \mathbf{E}$ соответствует закону Джоуля–Ленца в интегральной форме $P^{\text{пт}} = i(S_{\perp})$. Размерность $[p^{\text{пт}}] = [p^c] = [j] \cdot [E] = \text{Вт}/\text{м}^3$.

Выражение $p^c = \mathbf{j}^b \mathbf{E}^c$ определяет плотность мощности стороннего поля в ΔV_n . С учетом закона Ома (1.20) $p^c = \sigma \mathbf{E} \mathbf{E}^c$ и может быть больше и меньше нуля.

Рассмотрим второй случай. Предположим, что в элементе объема ΔV_n сторонней напряженности поля нет, т.е. $\mathbf{E}^c = 0$, но за счет сторонних сил в ΔV_n поступают сторонние заряды с плотностью ρ^c . Если ρ^b — плотность имеющихся в объеме свободных зарядов, то $\Delta Q = (\rho^b + \rho^c) \Delta V_n$. В ΔV_n ЭМ поле совершает работу

$$\Delta A = \mathbf{F}\Delta l = (\rho^b + \rho^c) \Delta V_n \mathbf{E} \Delta l.$$

Мощность равна $\Delta P = \Delta A / \Delta t$, а плотность мощности $p = \Delta P / \Delta V_n$,

$$p = (\rho^b + \rho^c) \mathbf{v} \mathbf{E} = (\mathbf{j}^b + \mathbf{j}^c) \mathbf{E} = \mathbf{j}^b \mathbf{E} + \mathbf{j}^c \mathbf{E} = p^{\text{пт}} + p^c, \quad (1.38)$$

где $\mathbf{j}^b = \rho^b \mathbf{v} = \sigma \mathbf{E}$, а

$$p^{\text{пт}} = \mathbf{j}^b \mathbf{E}, \quad p^c = \mathbf{j}^c \mathbf{E} \quad (1.39)$$

— плотности мощностей потерь $p^{\text{пт}}$ и стороннего источника тока p^c в ΔV_n . Последняя может быть больше и меньше нуля.

1.5. Источники электромагнитного поля

1. Все среды имеют отличающуюся от нуля проводимость. Поэтому всякое ЭМ явление в среде сопровождается *релаксацией* — энергия ЭМ поля переходит в тепло, происходит ее *диссипация* (рассеяние). Рассмотрим релаксацию ЭМ поля, когда источников энергии ЭМ поля в среде нет.

Из третьего уравнения Максвелла (1.32) для однородной среды с учетом материального уравнения (1.19) получаем $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_a$. Из закона сохранения заряда (1.6) и закона Ома (1.20), учитывая, что при однородной проводимости среды $\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} \sigma \mathbf{E} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E}$, имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_a = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \rho = 0, \quad \gamma = \sigma / \epsilon_a.$$

Решением последнего дифференциального уравнения является функция $\rho(p, t) = \rho(p, 0) \exp(-\gamma t)$, где $\rho(p, 0)$ — значение заряда в начальный момент времени. Аналогичной получается и зависимость от времени $\mathbf{j}(p, t)$. Поэтому векторы поля с течением времени t убывают по закону $\exp(-\gamma t)$. Уменьшение интенсивности (длины) векторов поля во времени в каждой точке пространства в $e = 2.718$ раз происходит за время $t_p = \gamma^{-1}$. Для сред с малым значением σ (диэлектриков) это время велико. Например, для полистирола (в диапазонах ВЧ и ОВЧ $\sigma = 10^{-15}$ См/м, $\epsilon_a = 2,55\epsilon_0$) $t_p = 2,2 \cdot 10^4$ с, а для морской воды (в диапазоне УВЧ $\sigma \approx 1 \dots 4,3$ См/м, $\epsilon_a \approx 80\epsilon_0$) $t_p = (7 \div 1,6) \cdot 10^{-10}$ с.

Таким образом, при *отсутствии сторонних источников энергии с течением времени ЭМ поле затухает*. Для его возбуждения и компенсации потерь энергии на нагревание среды *необходимы сторонние источники*.

2. Пусть имеем объем V . Область V_n расположена внутри объема V и ограничена поверхностью S_n (рис. 1.9,а). Среда в области V_n линейна изотропна и описывается параметрами ϵ_n , μ_n , σ_n . Векторы ЭМ поля в области V_n обозначим через \mathbf{E}' , \mathbf{D}' и \mathbf{H}' , \mathbf{B}' .

Обозначим через V_0 объем, ограниченный поверхностями S_0 и S_n . Среда в объеме V_0 линейна, изотропна и описывается параметрами ϵ_a , μ_a , σ . Векторы ЭМ поля в объеме V_0 обозначим через \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{H} , \mathbf{B} . Поверхность S_n является границей раздела сред.

Рассмотрим первый случай. Пусть сторонние силы создают в области V_n стороннюю напряженность поля E^c . Тогда по закону Ома (1.17) в области V_n $\mathbf{j} = \sigma_n(\mathbf{E}' + \mathbf{E}^c)$. В объеме V_0 $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Таким образом, в общем виде

$$\mathbf{j} = \sigma_n(\mathbf{E}' + \mathbf{E}^c), \quad p \in V_n; \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \quad p \in V_0. \quad (1.40)$$

В области V_n плотности мощностей потерь $p^{\text{пт}}$ и стороннего источника p^c определяются по (1.37), где $\mathbf{j}^b = \sigma_n\mathbf{E}'$. Поэтому мощность потерь $P_n^{\text{пт}}$ и мощность источника сторонней напряженности поля P_n^c

$$P_n^{\text{пт}} = \int_{V_n} p^{\text{пт}} dV = \int_{V_n} \sigma_n E'^2 dV, \quad P_n^c = \int_{V_n} p^c dV = \int_{V_n} \mathbf{j}^b \mathbf{E}^c dV. \quad (1.41)$$

Всегда $P_n^{\text{пт}} \geq 0$. Если $P_n^c < 0$, то область V_n называют *источником энергии ЭМ поля, или источником сторонней э.д.с.*

Рассмотрим второй случай. Пусть в область V_n за счет сторонних сил поступают сторонние заряды с плотностью ρ^c (рис. 1.9,б). Тогда в поле с напряженностью \mathbf{E}' носители зарядов приобретают скорость и образуется сторонний ток с плотностью $\mathbf{j}^c = \rho^c\mathbf{v}$. В области V_n сторонние силы возбуждают при этом по (1.18) ток с плотностью $\mathbf{j} = \sigma_n\mathbf{E}' + \mathbf{j}^c$. В объеме V_0 в соответствии с законом Ома (1.16) $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Таким образом, в общем виде

$$\mathbf{j}(p, t) = \sigma_n\mathbf{E}' + \mathbf{j}^c, \quad p \in V_n; \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \quad p \in V_0. \quad (1.42)$$

В области V_n с учетом (1.39)

$$P_n^{\text{пт}} = \int_{V_n} \sigma_n E'^2 dV, \quad P_n^c = \int_{V_n} \mathbf{j}^c \mathbf{E}' dV.$$

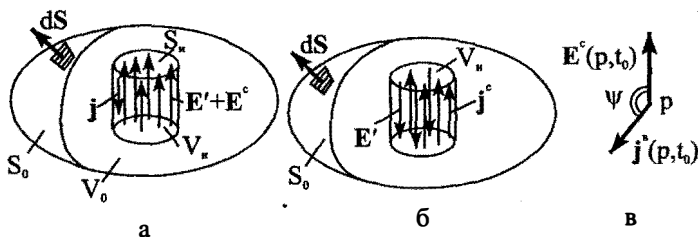


Рис. 1.9. Сторонние напряженность электрического поля и плотность тока в области V_n

Если $P_n^c < 0$, то область V_n называют источником энергии ЭМ поля или в данном случае — *источником стороннего тока*.

3. Рассмотрим примеры. Пусть область V_n является цилиндр. Направим ось z вдоль оси последнего. Пусть вектор E^c в (1.40) направлен вдоль орта 1_z ($E^c = 1_z E^c$), а вектор j^b — под углом ψ к 1_z (рис. 1.9, в). Тогда $j^b E^c = j^b E^c \cos \psi$. Определим мощность стороннего источника в области V_n по (1.41). Если ψ постоянный угол, то

$$P_n^c = \int_{V_n} j^b E^c dV = \cos \psi \int_{S_{\perp}} \int_L j^b E^c dS dz,$$

где S_{\perp} и L — площадь поперечного сечения и длина цилиндра. Пусть j^b и E^c в поперечном сечении цилиндра не меняются, а j^b не зависит от z . Тогда

$$P_n^c = i_n \mathcal{E}^c \cos \psi, \quad \mathcal{E}^c = \int_L E^c dz,$$

где i_n — ток в поперечном сечении S_{\perp} цилиндра, а \mathcal{E}^c — сторонняя э.д.с., приложенная на длине L цилиндра. Если угол $\psi > 90^\circ$, то $P_n^c < 0$ и V_n представляет собой источник ЭМ энергии (источник э.д.с.). Если же $\psi < 90^\circ$, то $P_n^c > 0$ и в области V_n происходит дополнительное поглощение энергии ЭМ поля. При $\psi = 90^\circ$ стороннее поле с ЭМ полем не взаимодействует.

Пусть теперь при тех же условиях вектор j^c направлен вдоль оси орта 1_z , а вектор E^c — под углом ψ к 1_z . Тогда $j^c E^c = j^c E^c \cos \psi$ и получаем тем же путем

$$P_n^c = i^c u \cos \psi, \quad u = \int_L E^c dz,$$

где i^c и u — сторонний ток в поперечном сечении S_{\perp} цилиндра и напряжение на цилиндре.

Если $\psi > 90^\circ$, то $P_n^c < 0$ и область V_n является источником ЭМ энергии (источником тока).

При макроскопическом подходе эти результаты можно трактовать так. В ЭМ поле свободные заряженные частицы за счет энергии ЭМ поля ускоряются, приобретают кинетическую энергию. Ускоренные частицы излучают ЭМ поле. Свободные носители заряда сталкиваются с тяжелыми частицами (атомами, молекулами, ионами), при этом отдают им всю или часть кинетической энергии, которая переходит в тепло. Значит, за счет торможения заряженных частиц происходят потери энергии ЭМ поля. Сторонний источник энергии действует в обратном направлении — он не тормозит заряженные частицы, а, наоборот, увеличивает их ускорение и (кинетическую энергию). При макроскопической трактовке явлений это эквивалентно отрицательному значению P^c .

4. Примером источника сторонней э.д.с. может служить разрез в металлическом проводе, к которому подключена двухпроводная длинная линия (рис. 1.10, а). Последняя возбуждена генератором так, что в разрезе между торцами проводов имеется напряженность электрического поля. Если провод с разрезом представляет нагрузку для линии, то между торцами разреза образуется электрическое поле с напряженностью E^c . Область разреза V_n в окружающем пространстве V_0 порождает ЭМ поле с напряженностью E .

Суммарное поле в разрезе равно $E + E^c$. В V_n образуется плотность мощности P^c .

Примером источника стороннего тока может быть тот же случай подключения двухпроводной линии к разрезу провода, но ток на проводе задается на основе измерений или приближенных представлений. Например, источник тока V_n получается таким деформированием разомкнутой на конце двухпроводной длинной линии (рис. 1.11,а), когда в точках 1 и 2 провода разводятся в пространстве на 90° (рис. 1.11,б). Тогда в каждом

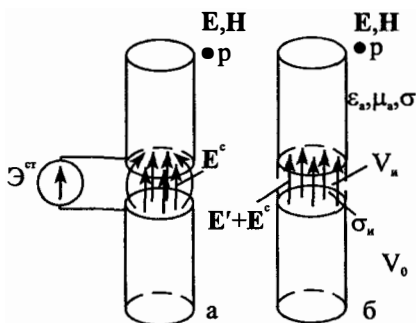


Рис. 1.10. Область источника в разрезе провода

сечении провода при $z = z_1$ можно определить приближенно ток и задать плотность стороннего тока в проводах (рис. 1.11,в). Сами провода становятся областью V_n — источником стороннего тока плотности j^c , возбуждающего ЭМ поле в окружающем пространстве.

5. Рассмотрим понятия плотностей токов и зарядов электрической и магнитной поляризации. Пусть среды в области источника V_n и в объеме V_0 имеют параметры вакуума: $\sigma_n = \sigma = 0$, $\epsilon_n = \epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_n = \mu_a = \mu_0$. Тогда по (1.42) $j = j^c$

при $p \in V_n$ и $j = 0$ при $p \in \bar{V}_n$, справедливы материальные уравнения (1.21). При этом уравнения Максвелла (1.31), (1.32) в объеме V имеют вид

$$\text{rot } \mathbf{H}_0 = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \mathbf{j}^c; \quad \text{rot } \mathbf{E}_0 = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial t};$$

$$\text{div } \epsilon_0 \mathbf{E}_0 = \rho^c; \quad \text{div } \mu_0 \mathbf{H}_0 = 0,$$

где $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ — напряженности поля, возбуждаемого в вакууме сторонним электрическим током с плотностью \mathbf{j}^c .

Предположим, что объем V заполнен линейной средой. Векторы ЭМ поля станут другими. Обозначим их через \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{H} , \mathbf{B} . Материальными уравнениями в соответствии с (1.7), (1.13) и (1.18) являются $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^c$. Подставим эти выражения в (1.31), (1.32). Имеем

$$\text{rot } \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}^c + \mathbf{j}^b + \mathbf{j}^{3,n}; \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mathbf{j}^{m,n};$$

$$\text{div } \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho^c + \rho^b + \rho^{3,n}; \quad \text{div } \mu_0 \mathbf{H} = \rho^{m,n},$$

где $\mathbf{j}^b = \sigma \mathbf{E}$, $\mathbf{j}^{3,n} = \partial \mathbf{P} / \partial t$, $\mathbf{j}^{m,n} = \partial \mathbf{M} / \partial t$, $\rho^{3,n} = -\text{div } \mathbf{P}$, $\rho^{m,n} = -\text{div } \mathbf{M}$ — плотности вторичных (индуцированных по отношению к стороннему току) токов и зарядов; $\mathbf{j}^{3,n}, \rho^{3,n}$ и $\mathbf{j}^{m,n}, \rho^{m,n}$ — соответственно плотности токов и зарядов электрической и магнитной поляризации. Они удовлетворяют уравнениям непрерывности.

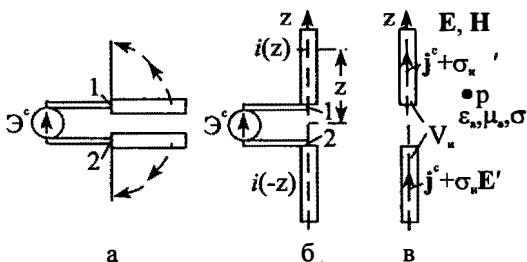


Рис. 1.11. Область источника стороннего тока

Сравнение последних уравнений Максвелла с предыдущими показывает, что наличие вещества в ЭМ поле может быть учтено с помощью плотностей токов проводимости и плотностей токов электрической и магнитной поляризации.

1.6. Уравнение баланса мощностей в электромагнитном поле

1. Пусть объем V_0 ограничен поверхностями S_0 и S_n (рис. 1.9, 1.12). Линейная изотропная, не имеющая гистерезиса среда в нем имеет параметры $\epsilon_a, \mu_a, \sigma$, а векторы поля обозначим через $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{V}$. Сторонние токи или сторонние напряженности электрического поля находятся в области V_n , ограниченной поверхностью S_n и заполненной линейной изотропной средой с параметрами $\epsilon_n, \mu_n, \sigma_n$. Векторы поля в V_n обозначим, как и в § 1.5, через $\mathbf{E}', \mathbf{D}', \mathbf{H}', \mathbf{V}'$. В общем случае $\epsilon_n \neq \epsilon_a, \mu_n \neq \mu_a, \sigma_n \neq \sigma$. Поэтому поверхность S_n разграничивает среды с разными материальными параметрами.

Установим баланс мощностей ЭМ поля в области V_n и в объеме V_0 . ЭМ поля в области V_n и в объеме V_0 связаны, так как V_n и V_0 имеют общую границу раздела сред. Установим характер этой связи.

2. Рассмотрим баланс мощностей ЭМ поля в области V_n . Первые два уравнения Максвелла в V_n

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + \mathbf{j}', \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}.$$

Умножим скалярно первое уравнение на вектор \mathbf{E}' , а второе — на вектор \mathbf{H}' и вычтем первый результат из второго. Имеем

$$\mathbf{H}' \operatorname{rot} \mathbf{E}' - \mathbf{E}' \operatorname{rot} \mathbf{H}' = -\mathbf{H}' \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} - \mathbf{E}' \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} - \mathbf{j}' \mathbf{E}'.$$

Воспользуемся векторным тождеством (П.1.6). Получаем

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}', \mathbf{H}'] = -\left(\mathbf{H}' \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} + \mathbf{E}' \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} \right) - \mathbf{j}' \mathbf{E}'. \quad (1.44)$$

Проинтегрируем (1.44) по области V_n

$$\int_{V_n} \operatorname{div}[\mathbf{E}', \mathbf{H}'] dV = -\int_{V_n} \left(\mathbf{H}' \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} + \mathbf{E}' \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} \right) dV - \int_{V_n} \mathbf{j}' \mathbf{E}' dV.$$

Применим теорему Остроградского–Гаусса (П.1.3) в левой части равенства к интегралу и учтем, что по (1.37) и (1.39) $\mathbf{j}' \mathbf{E}' = p_n^{\text{пр}} + p_n^{\text{с}}$. Имеем

$$\int_{S_n} [\mathbf{E}', \mathbf{H}'] \mathbf{n}' dS = -\int_{V_n} \left(\mathbf{H}' \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} + \mathbf{E}' \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} \right) dV - \int_{V_n} p_n^{\text{пр}} dV - \int_{V_n} p_n^{\text{с}} dV,$$

где \mathbf{n}' — орт внешней по отношению к точке p нормали к S_n (рис. 1.12,а). Это выражение определяет закон сохранения энергии ЭМ поля в области V_n . Поскольку каждое слагаемое в нем имеет размерность мощности, то подынтегральное выражение в поверхностном интеграле определяет мгновенное значение плотности потока мощности в точке p . Его обозначают вектором $\mathbf{\Pi}' = [\mathbf{E}', \mathbf{H}']$, размерность $[\mathbf{\Pi}'] = [E] \cdot [H] = \text{Вт/м}^2$. Нормальная составляющая вектора $\Pi_n' = \mathbf{\Pi}' \mathbf{n}'$ определяется только касательными к поверхности составляющими векторов \mathbf{E}' и \mathbf{H}' на поверхности S_n и равна потоку мощности (т.е. энергии в единицу времени) через единичную площадку поверхности S_n в точке p в момент времени t . Вектор $\mathbf{\Pi}(p, t)$ называют вектором Пойнтинга. Подынтегральное выражение первого интеграла правой

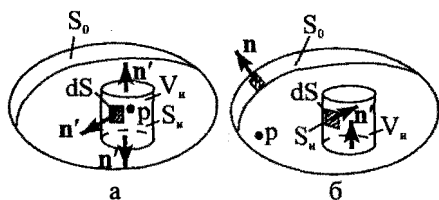


Рис. 1.12. Направления \mathbf{n}'

части для изотропных сред с помощью материальных уравнений (1.19) может быть преобразовано так

$$\begin{aligned} \mathbf{H}' \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} + \mathbf{E}' \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{H}' \mathbf{B}'}{2} + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{E}' \mathbf{D}'}{2} &= \frac{\partial}{\partial t} (w^{\text{м}} + w^{\text{с}}) = \frac{\partial w'}{\partial t}, \end{aligned}$$

где $w^m(p,t) = \mathbf{H}'\mathbf{B}'/2$, $w^3(p,t) = \mathbf{E}'\mathbf{D}'/2$ — мгновенные значения плотностей объемных энергий магнитного и электрического полей в точке p , а сумма $w' = w^m + w^3$ — плотность объемной энергии ЭМ поля. Например, размерность $[w^3] = [E] \cdot [D] = \text{В/м} \cdot \text{Кл/м}^2 = \text{В/м}^3 \cdot \text{А} \cdot \text{с} = \text{Вт} \cdot \text{с/м}^3$. Таким образом, интеграл от w' по области V_n определяет мгновенное значение энергии ЭМ поля в этой области:

$$W'_n(t) = \int_{V_n} w'(p,t) dV = \int_{V_n} w^m dV + \int_{V_n} w^3 dV, \quad (1.45)$$

где интегралы от w^m и w^3 определяют энергии магнитного и электрического полей.

Учитывая изложенное, а также (1.41), получаем математическую запись теоремы о балансе мощностей в ЭМ поле (закон сохранения энергии ЭМ поля) в области V_n

$$-P_n^c = P_n^{\text{пр}} + \frac{\partial W'_n(t)}{\partial t} + \oint_{S_n} \mathbf{\Pi}' \mathbf{n}' dS. \quad (1.46)$$

При $P_n^c < 0$ область V_n является сторонним источником энергии ЭМ поля. Мощность стороннего источника тратится на нагревание среды в области V_n (первое слагаемое в правой части), на изменение запаса энергии ЭМ поля (второе слагаемое имеет размерность $[\partial W'/\partial t] = [w'] \cdot [t]^{-1} \cdot [V] = \text{Вт}$) и на создание потока мощности через поверхность S_n , ограничивающую область V_n . Последний поток может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

При положительном потоке мощность стороннего источника расходуется на возбуждение ЭМ поля за пределами области V_n . При отрицательном потоке источники, расположенные за пределами области V_n , возбуждают ЭМ поле в области V_n . Если поток равен нулю, то сторонний источник не расходует мощности на возбуждение ЭМ поля за пределами области V_n .

Закон сохранения энергии ЭМ поля доказан Дж. Пойнтингом в 1884 г. Ранее, в 1874 г. Н. А. Умовым доказан закон сохранения любого вида энергии, при этом впервые введены понятия плотности энергии в данной точке среды и плотности потока энергии. Поэтому вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$ часто называют вектором Умова–Пойнтинга.

3. Рассмотрим теорему о балансе мощностей в объеме V_0 . В этом объеме сторонних напряженностей поля и тока нет. Поэтому по (1.40), (1.42) $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Основные уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

не содержат источников, поэтому их называют *однородными*.

Умножим скалярно первое уравнение на \mathbf{E} , а второе — на \mathbf{H} и вычтем из второго результата первый. Выполнив те же операции, что и выше, получим уравнение баланса мощностей в объеме V_0 :

$$0 = P_0^{\text{пр}} + \frac{\partial W_0(t)}{\partial t} + \oint_{S_0 + S_n} \mathbf{\Pi} n dS, \quad (1.47)$$

$$P_0^{\text{пр}} = \int_{V_0} \sigma \mathbf{E} \mathbf{E} dV, \quad W_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} (\mathbf{H} \mathbf{B} + \mathbf{E} \mathbf{D}) dV, \quad \mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}],$$

где \mathbf{n}' — орт внешней по отношению к точке p нормали к поверхностям S_0 и S_n (рис. 1.12, б). Интеграл по S_n в (1.47) можно перенести в левую часть равенства:

$$-\oint_{S_n} \mathbf{\Pi} n dS = P_0^{\text{пр}} + \frac{\partial W_0}{\partial t} + \int_{S_0} \mathbf{\Pi} n dS. \quad (1.48)$$

Сравнение этого выражения с (1.46) показывает, что *роль источника энергии для объема V_0 может играть область V_n* . Если поток вектора Пойнтинга в левой части (1.48) отрицателен, то он расходуется на нагревание среды в объеме V_0 , на изменение запаса энергии в V_0 и создание потока мощности через поверхность S_0 .

Нормальная составляющая $\Pi_n = \mathbf{\Pi} \mathbf{n}$ вектора Пойнтинга на S_n определяется только касательными к поверхности S_n составляющими векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . На поверхности раздела реальных сред касательные составляющие векторов напряженностей полей \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{E}' , \mathbf{H}' равны (см. § 1.11). Следовательно, если касательные составляющие векторов \mathbf{E}' , \mathbf{H}' в V_n заданы, то касательные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} оказываются тоже заданными (сторонними функциями). Таким образом, имеем *еще одно определение источника ЭМ энергии*: на поверхности S_n заданы касательные составляющие сторонних векторов напряженностей электрического и магнитного полей, т.е. на S_n задан сторонний вектор Пойнтинга $\mathbf{\Gamma}^c$. При этом мощность источника ЭМ энергии определяется выражением

$$P_n^c = -\oint_{S_n} \mathbf{\Gamma}^c n dS, \quad p \in V_0.$$

1.7. Примеры применения уравнения баланса мощностей

1. Для пояснения энергетических соотношений рассмотрим применение теоремы о балансе мощностей в ЭМ поле (1.42) к участку цилиндрического провода длины l цепи стационарного тока (рис. 1.7), расположенной в непроводящей среде.

Окружим провод поверхностью $S_n = S_6 + S_{11} + S_{12}$, где S_6, S_{11}, S_{12} площади боковой и торцевых поверхностей цилиндра (рис. 1.13). Объем провода $V_n = S_{11}l$. Так как ток в непроводящую окружающую среду не отвлекается, то в каждом поперечном сечении провода с площадью S_{\perp} он одинаков. Значит, плотность тока $\mathbf{j}' = i'/S_{\perp}$ по длине провода одинакова и при вычислениях ее можно выносить из-под знака интеграла. Введем цилиндрическую систему координат (ЦСК) r, φ, z с осями $1_r, 1_{\varphi}, 1_z$. Ось z направим вдоль оси цилиндра. Тогда $\mathbf{j}' = 1_z j' = 1_z \sigma_n E'$, где σ_n — проводимость проводника, $E' = 1_z E'$. Плотность потерь мощности по (1.39) $P_n^{\text{пт}} = \mathbf{j}' E' = j'^2 / \sigma_n$, а потери в проводе по (1.41) $P_n^{\text{пт}} = P_n^{\text{пт}} \cdot V_n = (j'^2 S_{\perp})^2 l / \sigma_n S_{\perp} = i'^2 l / \sigma_n S_{\perp}$.

Для вычисления вектора Пойнтинга в (1.46) необходимо определить значение \mathbf{H}' . С этой целью используем закон полного тока (1.14). Пусть контур L есть окружность на поверхности цилиндра (рис. 1.13). Поскольку в стационарном случае ток смещения $\mathbf{j}_c = 0$, а от угла φ зависимости нет (симметрия по φ), то

$$\oint_L \mathbf{H}' d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{H}' 1_{\varphi} dl = H'_{\varphi} L = i'.$$

Значит, $H'_{\varphi} = i' / L$.

Найдем значение Π' и его поток через поверхность провода. $\Pi' = [\mathbf{E}', \mathbf{H}'] = [1_z, 1_{\varphi}] E' H'_{\varphi} = 1_r \Pi'_r$, где $\Pi'_r = -E' H'_{\varphi}$ — единственная составляющая вектора Пойнтинга;

$$\begin{aligned} \oint_{S_n} \Pi' dS &= \int_{S_6} 1_r \Pi'_r 1_r dS + \int_{S_{11}} 1_r \Pi'_r (-1_z) dS + \\ &+ \int_{S_{12}} 1_r \Pi'_r 1_z dS = \int_{S_6} \Pi'_r dS = \Pi_r L l, \end{aligned}$$

так как потоки вектора Пойнтинга через торцевые поверхности равны нулю ($1_r 1_z = 0$). В провод поступает поток мощности только через боковую поверхность.

Подставим значения слагаемых в уравнение баланса (1.46). Учтем, что сторонние источники энергии в V_n отсутствуют, т.е. $P_n^c = 0$ и $\partial W_n / \partial t = 0$ из-за стационарности. Получаем $0 = P_n^{\text{пт}} + \Pi_r L l$, т.е. $0 = i'^2 R - i'^2 R$, где $R = l / \sigma_n S_{\perp}$ — омическое сопротивление участка проводника. Значит, уравнение баланса мощностей выполняется: мощность, которую ЭМ поле вносит в объем провода через его боковую поверхность, тратится на нагревание провода.

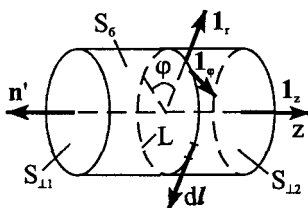


Рис. 1.13. Увеличенный участок проводника

Отметим, что из изложенного следует: энергия по проводу не переносится, та часть энергии, которая вносится полем из окружающего пространства через боковую поверхность провода, теряется на его нагревание. Провод в цепи постоянного тока играет роль направляющей структуры.

2. Получим уравнение цепи переменного тока из уравнения баланса мощности при условии квазистационарности. Для этого цепь окружим поверхностью S_0 , ограничивающей объем V (рис. 1.14,а). Считаем, что цепь расположена в среде с равной нулю проводимостью.

Условиями квазистационарности, т.е. условиями медленного изменения во времени E^c и, значит, э.д.с. $\mathcal{E}^c(t)$ являются: а) потоком вектора Пойтинга через поверхность S_0 можно пренебречь (пренебрежение малой мощностью излучения); б) вся энергия электрического поля сосредоточена внутри емкости (т.е. магнитным полем постоянной емкости можно пренебречь); в) вся энергия магнитного поля сосредоточена внутри индуктивности (т.е. электрическим полем постоянной индуктивности можно пренебречь); г) джоулевы потери в проводах локализованы в омическом сопротивлении R . Если обозначить через ΔV_c , ΔV_L объемы, в которых сосредоточены энергии электрического и магнитного полей соответственно, то математически эти четыре условия записываются так:

$$\oint_{S_0} \text{PdS} = 0, \int_V w^3 dV \approx \int_{\Delta V_c} w^3 dV, \int_V w^m dV = \int_{\Delta V_L} w^m dV, P^{\text{пр}} = i^2(t)R. \quad (1.49)$$

Определим энергию электрического поля. Для объема ΔV_c (в ΔV_c не входит пластина-2, рис. 1.14,б) имеем (см. п.п.1.4.2, 1.5.3)

$$\int_{\Delta V_c} w^3 dV = \frac{1}{2} \int_{\Delta l} E d \int_{S_1} \text{DndS} = \frac{1}{2} u \int_{S_1} \text{DdS}.$$

Последний интеграл может быть дополнен поверхностными интегралами от \mathbf{D} по всем «боковым» граням параллелепипеда ΔV_c , поскольку все эти интегралы равны нулю. При этом получим интеграл от \mathbf{D} по замкнутой поверхности, ограничивающей ΔV_c . По теореме Гаусса такой интеграл равен заряду Q на пластине. С другой стороны, напряжение между пластинами равно интегралу от $E d l$ по Δl , т.е. $u = Q/C$, где C — емкость. Тогда имеем

$$\int_{\Delta V_c} w^3 dV \approx Q^2 / 2C. \quad (1.50)$$

Определим энергию магнитного поля. Для объема соленоида $\Delta V_L = S l_L$, где S и l_L — площадь витка и длина соленоида, имеем, учитывая, что вне соленоида $H \approx 0$ и

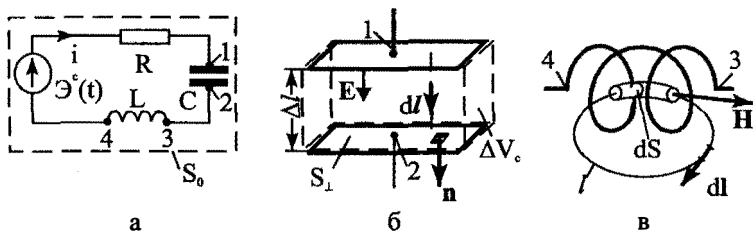


Рис. 1.14. К определению энергий электрического и магнитного полей

добавляя к интегралу по длине l_L равный нулю. интеграл по пути, расположенному вне соленоида, интегрируя по площади S витка катушки индуктивности и по длине контура l (рис. 1.14,б):

$$\int_{\Delta V_L} w^M dV = \iint_{l_L S} \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} dL dS \approx \frac{1}{2} \oint_l \mathbf{H} dL \int_S \mathbf{B} dS.$$

Пусть n — число витков на единицу длины соленоида. Тогда по закону полного тока циркуляция вектора \mathbf{H} по замкнутому контуру равна току $n l_L i(t)$ через поверхность, опирающуюся на этот контур, а $H = ni(t)$. Значит, $B = \mu_a H = \mu_a ni(t)$. Таким образом

$$\int_{\Delta V_L} w^M dV \approx \frac{1}{2} n l_L i(t) \cdot \mu_a n i(t) S \approx \frac{1}{2} i^2(t) L, \quad (1.51)$$

где $L = \mu_a n^2 \Delta V_L$ — индуктивность соленоида.

Мощность стороннего источника в области V_n определена в § 1.5. При тех же предположениях имеем $P^c \approx i(t) \mathcal{E}^c(t) \cos \psi$. Подставляя это выражение, а также (1.49) — (1.51) в (1.46), при $\psi = \pi$ получаем

$$i(t) \mathcal{E}^c \approx i^2(t) R + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(L i^2(t) + \frac{1}{C} Q^2 \right)$$

Выполняя здесь операцию дифференцирования, сокращая затем результат на $i(t)$ и дифференцируя равенство по t , находим уравнение цепи переменного тока

$$\frac{d\mathcal{E}^c}{dt} \approx L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C}.$$

Это уравнение является приближенным. Но в теории цепей с сосредоточенными параметрами считается, что условия квазистационарности выполняются и применяется знак равенства. Выражения (1.50), (1.51) принимают в качестве определенных емкости и индуктивности.

3. Рассмотрим на качественном уровне применение теоремы о балансе мощностей в ЭМ поле к определению энергетических соотношений в длинной двухпроводной линии (см. § 7.1), нагруженной на согласованное сопротивление (рис. 1.15,а).

Пусть провода линии имеют бесконечную проводимость, в начале линии, при $z = 0$, включен генератор высокой частоты с э.д.с. \mathcal{E}^c , сопротивление нагрузки линии при $z = l$ равно волновому сопротивлению линии $R_n = Z_L$. Из курса «Основы теории цепей» известно, что в двухпроводной линии передачи с согласованной нагрузкой устанавливаются бегущие волны тока и напряжения. Картина силовых линий векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в некотором сечении линии S_T , достаточно удаленном от начала и конца линии, в фиксированный момент времени имеет вид, показанный на рис. 1.15,б (см. рис. 7.1,д). Причем напряженности электрического и магнитного полей синфазны. Применим выражение (1.46) к объему V_1 , ограниченному замкнутой поверхностью $S_1 + S_T$. Так как расстояние между проводами Δ мало по сравнению с длиной волны, то интенсивность векторов ЭМ поля на достаточно удаленной части поверхности S_1 будет пренебрежимо малой. Поэтому можно пренебречь поверхностным интегралом в формуле (1.46) на этой части поверхности, т.е. пренебречь мощностью излучения линии по сравнению с мощностью, переносимой через поверхность S_T . Поскольку проводимость проводов бесконечно велика, первое слагаемое в правой части выражения (1.46) равно нулю. Таким образом, для $\mathbf{p} = \mathbf{1}_z$ при $\psi = \pi$

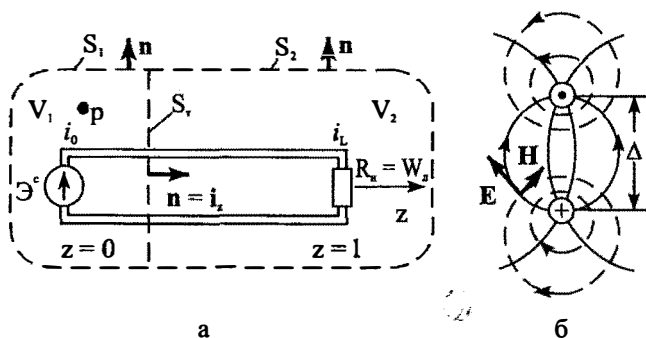


Рис. 1.15. Двухпроводная линия передачи

$$i_0 \mathcal{E}^c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} w(p, t) dV + \int_{S_T} \Pi_1 z dS,$$

где i_0 — ток в линии при $z = 0$.

Если провести аналогичные рассуждения относительно объема V_2 рассматриваемой системы ($\mathbf{n} = -\mathbf{1}_z$), то получим

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_2} w(p, t) dV_2 + i_l^2 R - \int_{S_T} \Pi_1 z dS,$$

где i_l — ток в нагрузке.

Равенство для объема V_1 показывает, что мгновенная мощность, доставляемая источником в линии передачи, равна сумме мгновенной мощности, накапливаемой в объеме V_1 , и мгновенной мощности, переносимой ЭМ полем через поверхность S_T в направлении нагрузки. Равенство для объема V_2 показывает, что мгновенная мощность, переносимая полем через поверхность S_T , равна сумме мгновенных мощностей — накапливаемой в объеме V_2 и теряемой в нагрузке.

Таким образом, мощность источника энергии, расположенного в начале линии, передается в нагрузку в конце линии через пространство, окружающее линию передачи. Следовательно, *провода двухпроводной линии являются только направляющей структурой.*

4. Рассмотрим качественно устройство, часто встречающееся в технике сверхвысоких частот. Возьмем отрезок (1) металлической трубы (рис. 1.16), на одном торце трубы слева поставим металлическую заглушку, а другой торец справа оставим открытым. Через образовавшееся окно S_0 внутренняя область V_n соединяется с внешней областью V_0 . Продолжением внутреннего провода коаксиального кабеля (2) в трубе является вибратор (3). По нему протекает электрический ток, который можно считать сторонним. Сторонний ток плотности \mathbf{j}^c внутри трубы (в объеме V_n) возбуждает ЭМ поле. Через окно S_0 в торцевой стенке трубы ЭМ поле распространяется во внешнее пространство (в область V_0). Будем считать стенки трубы имеющими бесконечную проводимость, а вещество, заполняющее внутреннюю область трубы, не имеющим потерь

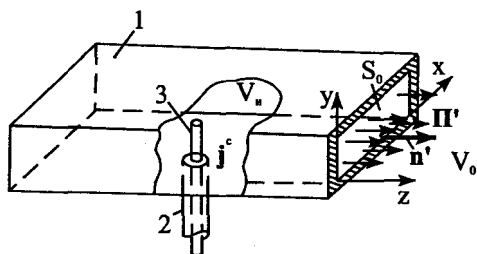


Рис. 1.16. Полость с окном в стенке металлической трубы

(т.е. для математической модели $\sigma_n = 0$). Применим к этому устройству теорему о балансе мощностей в ЭМ поле (1.46). Учтем, что значение $\Pi'_n = \Pi' \mathbf{n}'$ на внутренних стенках трубы определяется касательными к поверхности этих стенок составляющими векторов \mathbf{E}' , \mathbf{H}' . Например, в ДСК на стенке трубы при $y=0$ имеем $\mathbf{n}' = -\mathbf{1}_y$, $\Pi'_n = [\mathbf{E}', \mathbf{H}'](-\mathbf{1}_y) = -E'_z H'_x + E'_x H'_z = 0$, так как

$E'_x = E'_z = 0$ при $y=0$ в соответствии с граничным условием (см. § 1.12). Аналогичным образом находим, что $\Pi'_n = 0$ на всех стенках трубы, кроме окна S_0 . Поэтому поверхностный интеграл по внутренним стенкам трубы равен нулю. Получаем

$$-P_n^c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_n} w' dV + \int_{S_0} \Pi'_n dS_0.$$

Выражение в левой части этого равенства определяет мгновенную мощность, отдаваемую сторонним током. Интеграл по объему V_n определяет мгновенную мощность, накапливаемую внутри трубы, а поверхностный интеграл — мгновенную мощность, переносимую полем через окно во внешнее пространство V_0 . На S_0 $\mathbf{n}' = \mathbf{1}_z$ и $\Pi'_n = E'_x H'_y - E'_y H'_x$. Поскольку при переходе точки наблюдения r из полости во внешнее пространство (и наоборот) через поверхность S_0 касательные составляющие векторов напряженности поля непрерывны, то значение Π'_n на S_0 определяет Π_n на S_0 для поля во внешнем пространстве. По значению Π_n на S_0 в уравнении (1.48) может определяться поток мощности ЭМ поля во внешнее пространство (левая часть равенства).

1.8. Основные уравнения электродинамики в комплексной форме

1. При передаче информации посредством ЭМ поля описывающие его векторы меняются во времени. Мгновенные значения векторов поля $\mathbf{E}(p,t)$, $\mathbf{D}(p,t)$, $\mathbf{H}(p,t)$, $\mathbf{V}(p,t)$, вектора плотности тока $\mathbf{j}(p,t)$ и плотности заряда $\rho(p,t)$ можно представить в виде интегралов Фурье (прямого преобразования Фурье). Обозначим мгновенное значение любого из векторов ЭМ поля через $\mathbf{a}(p,t)$. (Считаем, что функция времени $|\mathbf{a}(t)|$ удовлетворяет условиям Дирихле, а интеграл от нее по t в бесконечных пределах абсолютно сходится). Тогда применяя к нему преобразование Фурье, получаем

$$\mathbf{a}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{a}}(p, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.52)$$

где $\dot{\mathbf{a}}(p, \omega)$ — комплексная амплитуда, или спектральная плотность соответствующего вектора, ω — частота, $[\omega] = [t]^{-1} = 1/c$, i — мнимая единица.

Подставляя значения преобразований Фурье векторов поля в первое уравнение Максвелла (1.31), меняя последовательность выполнения операций ротора и дифференцирования по времени, учитывая, что $\partial[\exp(i\omega t)]/\partial t = i\omega \exp(i\omega t)$, умножим результат на множитель $\exp(-i\omega' t)$, где ω' — фиксированная частота. Этот множитель можно внести под знак интеграла. Выполним интегрирование полученного выражения по переменной t в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Получаем, меняя порядок интегрирования и сокращая множитель $1/\sqrt{2\pi}$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \text{rot} \dot{\mathbf{H}}(p, \omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \dot{\mathbf{D}}(p, \omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{j}}(p, \omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt. \end{aligned}$$

Учитывая здесь, что интеграл по времени есть интеграл Фурье δ -функции (П2.5) и сокращая множитель 2π , имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \text{rot} \dot{\mathbf{H}}(p, \omega) \delta(\omega - \omega') d\omega = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \dot{\mathbf{D}}(p, \omega) \delta(\omega - \omega') d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{j}}(p, \omega) \delta(\omega - \omega') d\omega. \end{aligned}$$

Применяя при интегрировании по ω основное свойство δ -функции, получаем:

$$\text{rot} \dot{\mathbf{H}}(p, \omega') = i\omega' \dot{\mathbf{D}}(p, \omega') + \dot{\mathbf{j}}(p, \omega'),$$

откуда, возвращаясь к частоте ω (выполнив замену $\omega' = \omega$), имеем:

$$\text{rot} \dot{\mathbf{H}}(p, \omega) = i\omega \dot{\mathbf{D}}(p, \omega) + \dot{\mathbf{j}}(p, \omega). \quad (1.53)$$

Применив аналогичные операции к остальным трем уравнениям Максвелла (1.31), (1.32), получаем

$$\begin{aligned} \text{rot} \dot{\mathbf{E}}(p, \omega) &= -i\omega \dot{\mathbf{B}}(p, \omega), \\ \text{div} \dot{\mathbf{D}}(p, \omega) &= \dot{\rho}(p, \omega), \quad \text{div} \dot{\mathbf{B}}(p, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Систему уравнений (1.53), (1.54) называют *системой уравнений Максвелла в комплексной форме (уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд)*.

2. Предположим, что в линейной изотропной среде отсутствуют диэлектрический и магнитный гистерезисы. Используя при этом преобразования Фурье для $\mathbf{D}(p,t)$, $\mathbf{B}(p,t)$, $\mathbf{E}^c(p,t)$, $\mathbf{E}'(p,t)$ и $\mathbf{j}(p,t)$, из (1.19) и (1.18) получаем *материальные уравнения в комплексной форме (для комплексных амплитуд)*:

$$\dot{\mathbf{D}}(p,\omega) = \varepsilon_a(p)\dot{\mathbf{E}}(p,\omega), \quad \dot{\mathbf{B}}(p,\omega) = \mu_a(p)\dot{\mathbf{H}}(p,\omega), \quad (1.55)$$

$$\dot{\mathbf{j}}(p,\omega) = \sigma_n \dot{\mathbf{E}}'(p,\omega) + \dot{\mathbf{j}}^c(p,\omega), \quad p \in V_n; \quad \dot{\mathbf{j}} = \sigma(p)\dot{\mathbf{E}}(p,\omega), \quad p \in V_0, \quad (1.56)$$

где считается, что в случае задания сторонней напряженности поля $\dot{\mathbf{j}}^c = \sigma_n \dot{\mathbf{E}}^c$.

Применимость материальных уравнений в простой форме (1.55), (1.56) ограничена, так как в них не учитывается явление запаздывания во времени электрической поляризации и намагничивания, наблюдаемые в веществах на высоких частотах (частотная дисперсия).

Так как в общем виде $\mathbf{j} = \mathbf{j}^b + \mathbf{j}^c$, $\mathbf{j}^b = \sigma \mathbf{E}$, $\rho = \rho^b + \rho^c$, то из (1.6) находим тем же путем *закон сохранения электрического заряда в комплексной форме (для комплексных амплитуд)*:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}^b(p,\omega) = -i\omega \dot{\rho}^b(p,\omega); \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}^c(p,\omega) = -i\omega \dot{\rho}^c(p,\omega). \quad (1.57)$$

Ниже имеем в виду зависимость комплексных амплитуд от аргумента (p,ω) , для сокращения опуская, где это возможно, запись последнего.

Многие задачи возбуждения ЭМ поля изучаются при одинаковых параметрах сред в области V_n источника и в объеме V_0 . Тогда $\sigma_n = \sigma$, $\varepsilon_n = \varepsilon_a$, $\mu_n = \mu_a$ и $\dot{\mathbf{E}}' = \dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{H}}' = \dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{D}}' = \dot{\mathbf{D}}$, $\dot{\mathbf{B}}' = \dot{\mathbf{B}}$. Сторонние токи $\dot{\mathbf{j}}^c$ заданы при этом в области V_n и закон Ома (1.56) имеет одинаковый вид во всем объеме V

$$\dot{\mathbf{j}} = \sigma \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{j}}^c, \quad p \in V. \quad (1.58)$$

Подставляя материальные уравнения (1.55), (1.58) в (1.53), (1.54), получаем уравнения Максвелла для комплексных амплитуд векторов напряженностей поля

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= i\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \sigma \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{j}}^c = i\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{j}}^c; \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}; \quad \operatorname{div} \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}} = \dot{\rho}^c; \quad \operatorname{div} \mu_a \dot{\mathbf{H}} = 0, \end{aligned} \quad (1.59)$$

где $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a(1 - i\sigma/\omega\epsilon_a)$ — абсолютная комплексная диэлектрическая проницаемость среды (не является комплексной амплитудой), а в третьем уравнении Максвелла учтено, что в соответствии с (1.57) $\dot{\rho}^B = -\operatorname{div} \sigma \dot{\mathbf{E}} / i\omega$.

3. Уравнения (1.53)–(1.59) можно сразу получить из соответствующих уравнений для мгновенных значений векторов поля, если считать, что последние изменяются во времени гармонически (являются монохроматическими). Если заменить каждый из векторов по правилу $\mathbf{a}(p, t) \rightarrow \dot{\mathbf{a}}(p, \omega) \exp(i\omega t)$ и учесть, что $\partial \mathbf{a} / \partial t \rightarrow i\omega \dot{\mathbf{a}} \exp(i\omega t)$, т.е. применить символический метод — метод комплексных амплитуд, то из уравнений (1.31), (1.32), например, сразу получаем (1.53), (1.54). Если решением электродинамической задачи найдены комплексные амплитуды векторов поля, то их мгновенные значения восстанавливаются обычным образом (метод комплексных амплитуд):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(p, t) &= \operatorname{Re} \left[\dot{\mathbf{a}}(p, \omega) e^{i\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[|\dot{\mathbf{a}}(p, \omega)| e^{i\Phi(p, \omega)} e^{i\omega t} \right] = \\ &= |\dot{\mathbf{a}}(p, \omega)| \cos[\omega t + \Phi(p, \omega)] = a_0 \cos(\omega t + \Phi_0), \end{aligned} \quad (1.60)$$

где $|\dot{\mathbf{a}}(p, \omega)| = a_0(p, \omega)$ и $\Phi(p, \omega) = \Phi_0$ — модуль (амплитуда) и фаза комплексной величины $\dot{\mathbf{a}}(p, \omega)$ в точке p на частоте ω . Отметим, что в радиотехнике фазой называют величину $\omega t + \Phi(p, \omega)$.

Ниже изучаются (кроме отмечаемых случаев) гармонические во времени процессы, поэтому применяется метод комплексных амплитуд. Комплексные амплитуды векторов поля для краткости ниже называем векторами ЭМ поля.

4. В первом уравнении Максвелла (1.59) слагаемое $\dot{\mathbf{j}}_c = i\omega\epsilon_a \dot{\mathbf{E}}$ в правой части в соответствии с (1.26) описывает плотность тока смещения $\partial \mathbf{D} / \partial t$. Второе слагаемое $\dot{\mathbf{j}}^B = \sigma \dot{\mathbf{E}}$ — это плотность тока проводимости. Если в веществе плотность тока проводимости намного больше плотности тока смещения, т.е. $|\sigma \dot{\mathbf{E}}| \gg |i\omega\epsilon_a \dot{\mathbf{E}}|$ ($\sigma \gg \omega\epsilon_a$), то вещество называют *проводником*. Если в веществе плотность тока проводимости намного меньше плотности тока смещения, т.е. $\sigma \ll \omega\epsilon_a$, то вещество называют *диэлектриком*. Таким образом, *одно и то же вещество на разных частотах может быть диэлектриком, проводником и полупроводником*.

При математическом моделировании применяются понятия *идеального проводника* и *идеального диэлектрика*. Если $\sigma = 0$, то ток проводимости отсутствует, вещество — *идеальный диэлектрик*. Если $\sigma \rightarrow \infty$, то вещество называют *идеальным проводником*. Для него $|\dot{\mathbf{j}}_c| / |\dot{\mathbf{j}}^B| = \omega\epsilon_a / \sigma \rightarrow 0$, $\tilde{\epsilon}_a \rightarrow -i\sigma / \omega$.

Если тело считается *идеальным диэлектриком*, то джоулевы потери в нем отсутствуют ($p^{\text{мп}} = 0$), поскольку $\sigma = 0$. Если тело считается *идеальным проводником*, то ЭМ поле в него не проникает, т.е. $\dot{\mathbf{E}} = 0$, $\dot{\mathbf{H}} = 0$ в нем.

Предполагая от противного, что $\mathbf{E} \neq 0$ внутри такого тела, получаем, что $|\mathbf{j}| = \sigma|\mathbf{E}| \rightarrow \infty$; но из первого уравнения Максвелла (1.31), из (1.18) и (1.19) следует, что при этом $|\operatorname{rot} \mathbf{H}| \rightarrow \infty$, т.е. $|\mathbf{H}| \rightarrow \infty$. Поэтому $p^{\text{III}} \rightarrow \infty$, $w^{\text{M}} \rightarrow \infty$. Сторонних источников, которые могли бы компенсировать бесконечные потери на нагревание и на создание бесконечного запаса энергии магнитного поля, в природе не существует. Остается предположить, что при $\sigma \rightarrow \infty$ $\mathbf{E} = 0$ в теле. Из второго уравнения Максвелла следует, что при этом $\partial \mathbf{V} / \partial t = 0$, т.е. магнитное поле не изменяется ни при каких физических процессах в теле. Это значит, что внутри идеального проводника переменное во времени магнитное поле существовать не может. Таким образом, в идеальном проводнике $\dot{\mathbf{E}} = 0$, $\dot{\mathbf{H}} = 0$. Поэтому, *тело идеальной проводимости, находящееся в ЭМ поле, джоулевых потерь в поле не вносит.*

5. Учтем явление гистерезиса в линейных изотропных средах. Если в выражениях, приведенных в п 1.2.10 и учитывающих частотную (временную) дисперсию, применить преобразования Фурье для векторов ЭМ поля и для функций $\varepsilon_a(t-t')$, $\mu_a(t-t')$ под знаком интеграла, то умножая результат на $\exp(-i\omega t)$ и интегрируя полученное выражение по t от $-\infty$ до $+\infty$, учитывая значение интеграла Фурье δ -функции (П2.5), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(p, \omega) &= \varepsilon_a(p, \omega) \dot{\mathbf{E}}(p, \omega); \quad \mathbf{B}(p, \omega) = \mu_a(p, \omega) \dot{\mathbf{H}}(p, \omega); \\ \mathbf{j}(p, \omega) &= \sigma(p, \omega) \dot{\mathbf{E}}(p, \omega), \end{aligned} \quad (1.61)$$

где $\varepsilon_a(p, \omega)$ и $\mu_a(p, \omega)$ являются комплексными функциями частоты. Нахождение их представляет в общем случае квантово-механическую задачу. Но в ряде случаев $\varepsilon_a(p, \omega)$, $\mu_a(p, \omega)$ можно найти на основе классической механики (например, для плазмы, феррита).

Представим $\varepsilon_a(p, \omega)$ и $\mu_a(p, \omega)$ в показательной форме: $\varepsilon_a(\omega) = |\varepsilon_a(\omega)| \exp(-i\vartheta)$, $\mu_a(\omega) = |\mu_a(\omega)| \exp(-i\nu)$, где угол ϑ определяет отставание по фазе вектора $\mathbf{D}(p, t)$ от вектора $\mathbf{E}(p, t)$, а угол ν определяет отставание по фазе вектора $\mathbf{B}(p, t)$ от вектора $\mathbf{H}(p, t)$; ϑ и ν — углы линейных электрического и магнитного гистерезисов.

Подставляя (1.61) в (1.53), (1.54) и учитывая, что $\varepsilon_a(\omega) = \varepsilon'_a(\omega) - i\varepsilon''_a$, где $\varepsilon'_a(\omega) = |\varepsilon_a(\omega)| \cos \vartheta$, $\varepsilon''_a(\omega) = |\varepsilon_a(\omega)| \sin \vartheta$, получаем при отсутствии линейного магнитного гистерезиса

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = i\omega[\epsilon'_a - i(\epsilon''_a + \sigma(\omega)/\omega)]\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{j}}^c = i\omega\tilde{\epsilon}_a\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{j}}^c; \quad (1.62)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -i\omega\mu_a(\omega)\dot{\mathbf{H}}; \quad \operatorname{div} \tilde{\epsilon}_a\dot{\mathbf{E}} = \dot{\rho}^c; \quad \operatorname{div} \mu_a(\omega)\dot{\mathbf{H}} = 0,$$

где абсолютная комплексная диэлектрическая проницаемость учитывает линейный электрический гистерезис:

$$\tilde{\epsilon}_a(\omega) = \epsilon'_a - i\left(\epsilon''_a + \frac{\sigma(\omega)}{\omega}\right) = \epsilon'_a \left[1 - i\left(\operatorname{tg} \vartheta + \frac{\sigma(\omega)}{\omega\epsilon'_a}\right) \right]. \quad (1.63)$$

Если ее представить в показательной форме: $\tilde{\epsilon}_a = |\epsilon_a| \exp(-i\Delta)$, то $\operatorname{tg} \Delta = \operatorname{tg} \vartheta + \sigma/\omega\epsilon'_a$ называется тангенсом угла Δ — электрических потерь. Он определяется отношением активной части плотности тока в веществе к его реактивной части.

При отсутствии линейного электрического гистерезиса $\vartheta = 0$ имеем $\operatorname{tg} \Delta = \sigma(\omega)/\omega\epsilon'_a$, т.е. тангенс угла электрических потерь при этом определяется только отношением плотностей токов проводимости и смещения.

Проводимости проводников и диэлектриков могут отличаться на много порядков. Как отмечалось в п.1.2.7, проводимости металлов (серебра, латуни, меди, железа и др.) превосходят проводимости хороших диэлектриков (полистирола, слюды) на 18–22 порядка в широком диапазоне частот. На рис. 1.17 приведены (экспериментальные) графики зависимостей проводимостей и относительных диэлектрических проницаемостей $\epsilon = \epsilon_a/\epsilon_0$ от частоты f для глины (1), песка (2), пресной (3) и морской (4) воды при температуре 20° С (B_1 — влажность 4%, B_2 — влажность 15%). Как видно из графиков, σ и ϵ , кроме частоты, зависят от температуры и влажности вещества.

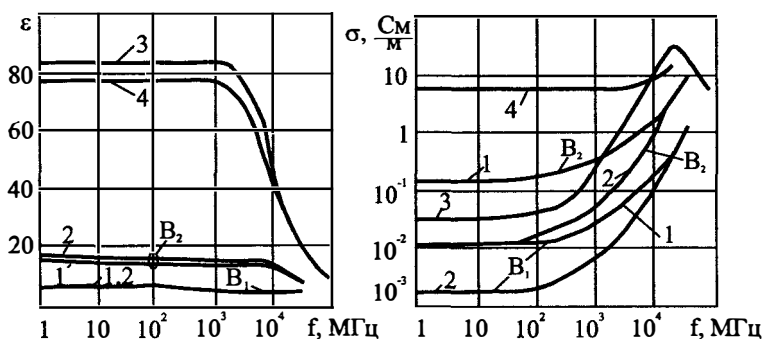


Рис. 1.17. Графики частотной зависимости ϵ и σ

1.9. Уравнение баланса мощностей для комплексных амплитуд векторов поля

1. В теории электрических цепей применяются понятия мгновенной, средней, комплексной, активной и реактивной мощностей цепи. Напомним эти понятия. Пусть имеем цепь, изображенную на рис. 1.14, а. Напряжение на некотором пассивном двухполюснике цепи обозначим через $u(t)$. Мгновенной мощностью линейного двухполюсника называют $P(t) = u(t)i(t)$. Если

$$u(t) = U \cos(\omega t + \psi_u), \quad i(t) = J \cos(\omega t + \psi_i),$$

то раскрывая произведение косинусов, получаем

$$P(t) = \frac{1}{2} UJ \cos(\psi_u - \psi_i) + \frac{1}{2} UJ \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i). \quad (1.64)$$

Постоянная составляющая мощности $P_{\text{ср}} = 0,5 UJ \cos(\psi_u - \psi_i)$ здесь определяется только сдвигом фаз между напряжением и током и равна средней за период измеряемой мощности. Переменная составляющая мгновенной мощности меняется во времени с удвоенной частотой и зависит от суммы фаз напряжения и тока.

Пусть $\dot{U}(\omega), \dot{J}(\omega)$ — комплексные амплитуды напряжения и тока. Тогда

$$\dot{U}(\omega) = |\dot{U}(\omega)| \exp[i \arg \dot{U}(\omega)]; \quad \dot{J}(\omega) = |\dot{J}(\omega)| \exp[i \arg \dot{J}(\omega)],$$

где $|\dot{U}| = U_0, |\dot{J}| = J_0$ — модули напряжения и тока называют амплитудами U_0 и J_0 , а $\arg \dot{U}(\omega) = \psi_u, \arg \dot{J}(\omega) = \psi_i$ — фазами напряжения и тока.

Если $\dot{J}^*(\omega)$ — комплексно-сопряженная амплитуда тока, то комплексной мощностью называют

$$\begin{aligned} \dot{P}(\omega) &= \frac{1}{2} \dot{U}(\omega) \dot{J}^*(\omega) = \frac{1}{2} |\dot{U}(\omega)| \cdot |\dot{J}(\omega)| \exp[i(\psi_u - \psi_i)] = \\ &= \frac{1}{2} U_0 J_0 \cos(\psi_u - \psi_i) + i \frac{1}{2} U_0 J_0 \sin(\psi_u - \psi_i). \end{aligned} \quad (1.65)$$

$P_{\text{ср}}$, называемая активной мощностью цепи, и $P_{\text{р}}$, называемая реактивной мощностью цепи, в соответствии с (1.64) определяются выражениями

$$P_{cp}(\omega) = P_A = \operatorname{Re} \dot{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\psi_u - \psi_i);$$

$$P_p = \operatorname{Im} \dot{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin(\psi_u - \psi_i). \quad (1.66)$$

Реактивная мощность характеризует процесс обмена энергией между источником и цепью. При $P_p > 0$ энергия запасается в магнитном поле, при $P_p < 0$ энергия запасается в электрическом поле. Напомним, что средняя (активная) и мгновенная мощности выражаются в ваттах, комплексная мощность — в вольт-амперах [В·А], реактивная мощность — в вольт-амперах реактивных [вар]. Хотя все мощности имеют размерность [Дж/с], физический смысл этих понятий различен.

Используем определения (1.65), (1.66) для того, чтобы выразить энергетические характеристики ЭМ поля для линейной изотропной среды, не имеющей гистерезиса. Мгновенное значение вектора Пойнтинга $\mathbf{\Pi}(p, t) = [\mathbf{E}(p, t), \mathbf{H}(p, t)]$, поэтому с помощью (1.65), (1.66) получаем комплексное и среднее значения вектора Пойнтинга

$$\dot{\mathbf{\Pi}}(p, \omega) = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}(p, \omega), \dot{\mathbf{H}}^*(p, \omega)], \quad \mathbf{\Pi}_{cp}(p, \omega) = \operatorname{Re} \dot{\mathbf{\Pi}}.$$

Плотности объемной мощности в соответствии (1.65), (1.66) и (1.37)

$$p^{mp}(p, \omega) = \frac{1}{2} \mathbf{j}^{\beta*}(p, \omega) \mathbf{E}(p, \omega) = \frac{1}{2} \sigma \mathbf{E} \mathbf{E}^* = \frac{1}{2} \sigma |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2} |\mathbf{j}^{\beta}| / \sigma,$$

$$p^c(p, \omega) = \frac{1}{2} \mathbf{j}^{c*} \mathbf{E} = \frac{1}{2} \sigma \mathbf{E}^{c*} \mathbf{E}, \quad p_{cp}^c(p, \omega) = p_A^c(p, \omega) = \operatorname{Re} p^c. \quad (1.67)$$

Наконец, мгновенные значения плотностей энергий

$$w^3(p, t) = 0,5 \varepsilon_a \mathbf{E} \mathbf{E}, \quad w^m(p, t) = 0,5 \mu_a \mathbf{H} \mathbf{H}.$$

С помощью (1.65), (1.66) находим методом комплексных амплитуд

$$w^3(p, \omega) = 0,5 \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}^* / 2 = \varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 / 4, \quad w^m(p, \omega) = \mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 / 4 \quad (1.68)$$

— чисто действительные величины.

2. Получим уравнение баланса мощностей для линейной изотропной среды, не имеющей гистерезиса. Считаем, что сторонние источники заданы в области V_n , расположенной в объеме V_0 , ограниченной поверхностью S_0 . ε_a , μ_a , σ — ее параметры (рис. 1.12, а). Используем основные уравнения Максвелла в комплексной форме (1.59).

Уравнение, комплексно сопряженное первому уравнению Максвелла, скалярно умножим на $\dot{\mathbf{E}}$.

$$\dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* = -i \omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}^* + \sigma \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{j}^{c*} \dot{\mathbf{E}}.$$

Умножим скалярно на $\dot{\mathbf{H}}^*$ второе уравнение Максвелла и вычтем из этого результата предыдущий.

$$\dot{\mathbf{H}}^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* = i\omega\epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 - i\omega\mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 - \sigma |\dot{\mathbf{E}}|^2 - \mathbf{j}^{c*} \dot{\mathbf{E}}.$$

К левой части равенства применим формулу (П1.6) и учтем (1.67), (1.68); сокращая результат на 2, получаем уравнение баланса мощностей в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{P}}(p, \omega) = i2\omega[w^3(p, \omega) - w^M(p, \omega)] - P^{\text{ПТ}}(p, \omega) - \dot{p}^c(p, \omega).$$

Проинтегрируем это уравнение по объему V_0 . Применяя теорему Остроградского–Гаусса и перенеся мощность стороннего источника в левую часть равенства, а поток вектора $\dot{\mathbf{P}}$ — в правую, находим

$$-\dot{P}^c(\omega) = i2\omega[W^M - W^3] + P^{\text{ПТ}}(\omega) + \oint_{S_0} \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S}, \quad (1.69)$$

где

$$\dot{P}^c = \int_{V_n} \dot{p}^c dV, \quad W^{M(3)} = \int_{V_0} w^{M(3)} dV, \quad P^{\text{ПТ}} = \int_{V_0} p^{\text{ПТ}} dV \quad (1.70)$$

соответственно комплексная мощность стороннего источника, энергия магнитного (электрического) поля и мощность джоулевых потерь в объеме V_0 .

Выражение (1.69) является уравнением баланса мощностей в объеме V_0 . Выделим в нем действительную и мнимую части. Тогда

$$-\operatorname{Re} \dot{P}^c = -P_{\text{cp}}^c = P^{\text{ПТ}} + \oint_{S_0} \mathbf{P}_{\text{cp}} d\mathbf{S}, \quad (1.71)$$

$$-\operatorname{Im} \dot{P}^c = 2\omega(W^M - W^3) + \oint_{S_0} \operatorname{Im} \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S}. \quad (1.72)$$

Первое из этих уравнений показывает, что средняя мощность источника тратится на джоулевы потери и на создание ЭМ поля за пределами объема V_0 . Второе из уравнений показывает, что сторонний источник реактивную мощность расходует на создание запасов реактивной мощности в объеме V_0 и создание потока реактивной мощности через границу этого объема. Если потока мощности через поверхность S_0 и потерь в V_0 нет, то даже при $\dot{P}^c = 0$ возможны колебания энергии в V_n , так как энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля при $W^3 = W^M$ и наоборот.

1.10. Фиктивные магнитные заряды и токи

1. Магнитные заряды и токи не обнаружены в природе. Но использование понятия сторонних *фиктивных магнитных токов и зарядов* оказывается плодотворным в математических моделях, так как существенно упрощает решение ряда электродинамических задач. Особенно упрощается исследование щелевых и рамочных излучателей, решение задач возбуждения ЭМ поля в волноводах и резонаторах с помощью отверстий в их стенках.

Оригиналы, на основе которых строятся математические модели с использованием плотностей фиктивных сторонних магнитных токов и зарядов, рассматриваются ниже. Основания для применения этих понятий дают сами уравнения Максвелла. Во втором уравнении (1.43), как уже отмечалось, слагаемое $\mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t$ можно рассматривать как плотность магнитного тока смещения в среде, а слагаемое $\mathbf{j}^{M, \Pi}$ там же — это плотность тока магнитной поляризации. В четвертом уравнении (1.43) $\rho^{M, \Pi}$ — плотность заряда магнитной поляризации. Это дает возможность по аналогии с плотностями сторонних электрических токов и зарядов в первом и третьем уравнениях Максвелла ввести во второе и четвертое уравнения плотности *фиктивных сторонних магнитных токов* $\mathbf{j}^{M, C}$ и *зарядов* $\rho^{M, C}$. При этом получаем систему уравнений Максвелла для мгновенных значений векторов поля

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}; & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{j}^{M, C}; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= \rho^{M, C}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= i\omega \dot{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{j}}; & \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -i\omega \dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathbf{j}}^{M, C}; \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} &= \dot{\rho}; & \operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} &= \dot{\rho}^{M, C}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Введенные таким образом плотности фиктивных сторонних токов и зарядов удовлетворяют закону сохранения магнитного заряда. Действительно, выполнив операцию дивергенции во втором уравнении Максвелла и учитывая, что дивергенция ротора вектора равна нулю, с учетом четвертого уравнения Максвелла получаем это уравнение $\operatorname{div} \mathbf{j}^{M, C} = -\partial \rho^{M, C} / \partial t$. Как следует из (1.73), (1.74), единицами измерения $\mathbf{j}^{M, C}$ и $\rho^{M, C}$ являются соответственно $\text{В}/\text{м}^2$ и $\text{В} \cdot \text{с}/\text{м}^3 = \text{Ом} \cdot \text{Кл}/\text{м}^3$.

Уравнения (1.73), (1.74) справедливы для неоднородной, анизотропной и нелинейной среды. Состояние среды учитывается в материальных уравнениях.

Если среда *линейна и изотропна*, то при учете *электрического и магнитного гистерезисов* ($\epsilon_a(\omega)$, $\mu_a(\omega)$ — комплексные), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{j}}^c; & \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -i\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{j}}^{m,c}; \\ \operatorname{div} \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} &= \dot{\rho}^c; & \operatorname{div} \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} &= \dot{\rho}^{m,c}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

2. Первое и второе, третье и четвертое уравнения (1.75) соответственно переходят друг в друга, если применяются перестановки

$$\dot{\mathbf{E}} \leftrightarrow \pm \dot{\mathbf{H}}, \quad \dot{\mathbf{j}}^c \leftrightarrow \pm \dot{\mathbf{j}}^{m,c}, \quad \dot{\rho}^c \leftrightarrow \pm \dot{\rho}^{m,c}, \quad \tilde{\epsilon}_a \leftrightarrow \tilde{\mu}_a. \quad (1.76)$$

Этот прием называют *принципом перестановочной двойственности*. Он позволяет получать решение электродинамической задачи возбуждения ЭМ поля сторонними магнитными токами и зарядами из решения задачи возбуждения поля сторонними электрическими токами и зарядами. Справедлив и обратный переход: если найдено решение задачи возбуждения поля магнитными сторонними токами и зарядами, то перестановкой (1.76) можно сразу получить решение задачи возбуждения поля сторонними электрическими токами и зарядами.

3. Наряду с понятиями плотностей поверхностных и линейных электрических зарядов и токов в математических моделях применяются понятия плотностей поверхностных $\tau^{m,c}(p,t)$, $\mathbf{J}^{m,c}(p,t)$ и линейных $\eta^{m,c}$, $I^{m,c}$ фиктивных сторонних магнитных зарядов и токов; их комплексные амплитуды: $\dot{\tau}^{m,c}$, $\dot{\mathbf{J}}^{m,c}$ и $\dot{\eta}^{m,c}$, $\dot{I}^{m,c}$.

1.11. Граничные условия на поверхностях раздела реальных сред

1. Неоднородная среда в общем случае имеет диэлектрическую и магнитную проницаемости и проводимость, являющиеся функциями координат. Но на поверхности раздела двух разных сред эти функции испытывают разрыв (скачок). Например, на поверхности раздела металл–воздух проводимость и диэлектрическая проницаемость меняются скачком. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме описывают ЭМ поле в обыкновенной точке пространства, поэтому на поверхности раздела сред, где нарушается непрерывность параметров среды, они теряют смысл и должны быть дополнены условиями, определяющими поведение векторов поля в точках скачка параметров сред. Эти условия устанавливаются с помощью уравнений Максвелла в интегральной форме.

Пусть некоторый объем V заполнен веществом с параметрами ϵ_{a1} , μ_{a1} , σ_1 и ограничен поверхностью S (рис. 1.18,а). Векторы

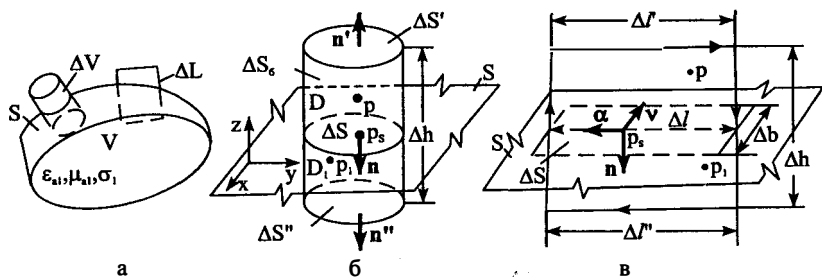


Рис. 1.18. К выводу граничных условий

ЭМ поля внутри тела обозначим через E_1, H_1, D_1, B_1 . Тело находится в среде с параметрами $\epsilon_a, \mu_a, \sigma$. Векторы поля в среде обозначим через E, H, D, B . Поверхность S есть поверхность раздела сред.

Выделим у поверхности S некоторый элементарный объем ΔV цилиндрической формы с длиной образующей Δh и контур ΔL с длиной боковой стороны Δh , такие, что часть ΔV и часть ΔL находятся в среде, а другие их части — в объеме V . Считаем, что p_1 и p — точки наблюдения ЭМ поля расположены соответственно в объеме V и в среде. Тогда с помощью уравнений Максвелла в интегральной форме можно связать векторы поля в точках p_1 и в точках p . Если затем положить $\Delta h \rightarrow 0$, то точки p_1 и p стремятся на поверхность S раздела сред, т.е. $p_1 \rightarrow p_s$ и $p \rightarrow p_s$, где $p_s \in S$.

2. Установим условия, определяющие поведение нормальных к границе раздела сред составляющих векторов поля. Для этого рассмотрим объем ΔV (рис. 1.18, а, б). Обозначим через ΔS поверхность, образованную пересечением ΔV с границей раздела сред, а через n', n'' — орты нормалей к торцам цилиндра. Считаем, что в каждой точке p_s существует орт нормали n .

Применим третье уравнение Максвелла в интегральной форме (1.8) к объему ΔV , ограниченному поверхностями торцов $\Delta S', \Delta S''$ и боковой поверхностью цилиндра ΔS_6 :

$$\int_{\Delta S' + \Delta S'' + \Delta S_6} D dS = \int_{\Delta S'} D(p, t) dS' + \int_{\Delta S''} D(p_1, t) dS'' = \int_{\Delta V} \rho dV,$$

так как при $\Delta h \rightarrow 0$ имеем $\Delta S_6 \rightarrow 0$ и поэтому интеграл по ΔS_6 стремится к нулю. Учтем, что при $\Delta h \rightarrow 0$ $\Delta S' = \Delta S'' = \Delta S$, $n' = -n'' = -n$, $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta h$.

Поскольку ΔS мало, то применяя теорему о среднем, можно вынести \mathbf{D} , \mathbf{D}_1 и ρ из-под знака интеграла. Таким образом, сокращая на ΔS , получаем при $\Delta h \rightarrow 0$

$$-\mathbf{D}(p_s, t)\mathbf{n} + \mathbf{D}_1(p_s, t)\mathbf{n} = \rho\Delta h. \quad (1.77)$$

На границе раздела S реальных сред заряды не скапливаются, поэтому они не имеют особенности, они не являются поверхностными, т.е. $\rho\Delta h \rightarrow 0$ при $\Delta h \rightarrow 0$. Значит,

$$\mathbf{nD}_1(p_s, t) - \mathbf{nD}(p_s, t) = 0. \quad (1.78)$$

Применим к объему ΔV четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_{\Delta S' + \Delta S'' + \Delta S_6} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_{\Delta V} \rho^{M, C} dV.$$

При $\Delta h \rightarrow 0$ имеем

$$\int_{\Delta S' + \Delta S'' + \Delta S_6} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_{\Delta S'} \mathbf{B}(p, t) d\mathbf{S}' + \int_{\Delta S''} \mathbf{B}_1(p_1, t) d\mathbf{S}'' = \int_{\Delta V} \rho^{M, C} dV \approx \rho^{M, C} \Delta S \Delta h. \quad (1.79)$$

Считаем, что на границе раздела реальных сред фиктивный магнитный заряд, как и электрический, не может быть чисто поверхностным, поэтому $\rho^{M, C} \Delta h \rightarrow 0$ при $\Delta h \rightarrow 0$. Значит,

$$\mathbf{nB}_1(p_s, t) - \mathbf{nB}(p_s, t) = 0. \quad (1.80)$$

Если \mathbf{a} — некоторый вектор, то $\mathbf{an} = a_n$ — нормальная к S составляющая вектора. Поэтому из (1.78) и (1.80) имеем

$$D_{n1} = D_n, \quad B_{n1} = B_n, \quad p \in S. \quad (1.81)$$

Это математическая формулировка граничных условий для нормальных составляющих векторов индукций: *нормальные составляющие векторов индукций при переходе через поверхность раздела реальных сред непрерывны.*

Для линейных изотропных сред $D_n = \epsilon_a E_n$, $D_{n1} = \epsilon_{a1} E_{n1}$, $B_n = \mu_a H_n$, $B_{n1} = \mu_{a1} H_{n1}$. Поэтому в соответствии с (1.81) *нормальные составляющие векторов напряженностей поля имеют скачок на S :*

$$\epsilon_{a1} E_{n1} = \epsilon_a E_n, \quad \mu_{a1} H_{n1} = \mu_a H_n. \quad (1.82)$$

3. Найдем граничные условия для касательных составляющих векторов напряженностей поля. Для этого сначала применим интегральную форму первого уравнения Максвелла (1.27) к контуру ΔL (рис. 1.18, а, в). Пусть \mathbf{n} и $\boldsymbol{\alpha}$ — орты нормали и касательной к поверхности S в точке $p_s \in S$ (предполагаем, что нормаль и касательная в каждой точке p_s существуют). Введем в точке p_s орт \mathbf{v} такой, что

$\mathbf{a} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}]$. Считаем, что на контур ΔL натянута поверхность $\Delta S' = \Delta l \cdot \Delta h$ и $\Delta S' = \mathbf{v} \Delta S'$. При $\Delta h \rightarrow 0$ имеем: $\Delta l' = -\mathbf{a} \Delta l'$, $\Delta l'' = \mathbf{a} \Delta l''$, $\Delta l' = \Delta l'' = \Delta l$.

Интеграл по замкнутому контуру ΔL в (1.27) представляется в виде суммы интегралов по частям контура $\Delta l'$, $\Delta l''$ и двух интегралов по боковым сторонам Δh . Но если $\Delta h \rightarrow 0$, то два последних интеграла стремятся к нулю. В интеграле правой части равенства при малом Δl можно воспользоваться теоремой о среднем и вынести плотность полного тока из-под знака интеграла. Таким образом получаем

$$\oint_{\Delta L} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{\Delta l'} \mathbf{H}(p, t) d\mathbf{l}' + \int_{\Delta l''} \mathbf{H}_1(p_1, t) d\mathbf{l}'' \approx (\mathbf{j}_{cp} + \partial \mathbf{D}_{cp} / \partial t) \mathbf{v} \Delta l \cdot \Delta h. \quad (1.83)$$

Применим к контуру ΔL второе уравнение Максвелла в интегральной форме с учетом заданной плотности стороннего магнитного тока

$$\oint_{\Delta L} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_{\Delta S'} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{j}^{m,c} \right) d\mathbf{S}'.$$

При $\Delta h \rightarrow 0$ при тех же условиях, что в (1.83), получаем

$$\oint_{\Delta L} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{\Delta l'} \mathbf{E}(p, t) d\mathbf{l}' + \int_{\Delta l''} \mathbf{E}_1(p_1, t) d\mathbf{l}'' \approx - \left(\mathbf{j}_{cp}^{m,c} + \frac{\partial \mathbf{B}_{cp}}{\partial t} \right) \mathbf{v} \Delta l \cdot \Delta h. \quad (1.84)$$

В реальных средах на поверхности раздела $(\mathbf{j} + \mathbf{j}_c)_{cp}$ и $(\mathbf{j}^{m,c} + \mathbf{j}_c^m)_{cp}$ не обращаются в бесконечность (не имеют особенности), поэтому их произведения на Δh при $\Delta h \rightarrow 0$ стремятся к нулю. Применяя теорему о среднем к левым частям (1.83), (1.84), и сокращая результат на Δl , имеем

$$-\mathbf{a} \mathbf{H}(p, t) + \mathbf{a} \mathbf{H}_1(p_1, t) = 0, \quad -\mathbf{a} \mathbf{E}(p, t) + \mathbf{a} \mathbf{E}_1(p_1, t) = 0.$$

Если \mathbf{a} — некоторый вектор, то $\mathbf{a} \mathbf{a} = a_\alpha$ — определяет касательную к поверхности S составляющую этого вектора. Таким образом, последние равенства дают математическую запись граничных условий на поверхности раздела сред

$$H_{\alpha 1} = H_\alpha, \quad E_{\alpha 1} = E_\alpha, \quad p \in S, \quad (1.85)$$

т.е. касательные составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного полей остаются непрерывными при переходе через поверхность раздела реальных сред. Для комплексных амплитуд из (1.81), (1.85) получаем

$$\dot{D}_{n1} = \dot{D}_n, \quad \dot{B}_{n1} = \dot{B}_n; \quad \dot{H}_{\alpha 1} = \dot{H}_\alpha, \quad \dot{E}_{\alpha 1} = \dot{E}_\alpha, \quad p \in S. \quad (1.86)$$

4. Граничные условия (1.81), (1.85) получены в предположении, что в каждой точке граничной поверхности S можно установить нормаль и касательный вектор. Но на

S могут быть изломы (ребра), на которых нормаль или касательная (или обе они) не существует. Поле в точках наблюдения, лежащих на изломах поверхности, отличается от поля в точках p , лежащих на гладких поверхностях. При построении решений электродинамических задач, кроме граничных условий (1.81), (1.85), необходимо учитывать *условие на ребре*, сводящееся к требованию, чтобы плотность мощности искомого ЭМ поля была пространственно интегрируема в окрестности ребра (условие Мейкснера). Физически это означает, что в конечной области вокруг ребра должна быть сосредоточена конечная мощность ЭМ поля.

1.12. Граничные условия на поверхности идеально проводящего тела

1. Если тело объема V — металл, то его проводимость велика. При построении математической модели предполагают, что $\sigma_1 \rightarrow \infty$, т.е. телу присваивают свойства идеального проводника, в котором ЭМ поле не может существовать — оно вытесняется в бесконечно тонкий слой у поверхности S . Надо установить граничные условия на S . Тело находится в изотропной *непроводящей* среде.

Пусть $\sigma_1 \rightarrow \infty$. Тогда $\mathbf{E}_1 = \mathbf{H}_1 = \mathbf{D}_1 = \mathbf{B}_1 = 0$ при $p \in V$ и $\omega \neq 0$. В (1.77), (1.79) плотности объемных электрического и стороннего магнитного зарядов у поверхности S выражаются произведениями соответствующих плотностей поверхностных зарядов и δ -функции, т.е. ρ и $\rho^{m,c}$ имеют особенности при $\Delta h \rightarrow 0$. Так как по определению $\rho = \Delta Q / \Delta V$ (ΔV — физически бесконечно малый объем), то

$$\rho = \Delta Q / (\Delta S \cdot \Delta h) = \tau / \Delta h,$$

где $\tau = \Delta Q / \Delta S$ — плотность поверхностного электрического заряда. Тогда $\rho \Delta h = \tau$. Аналогично, $\rho^{m,c} \cdot \Delta h = \tau^{m,c}$. Таким образом, из (1.77), (1.79) получаем граничные условия на поверхности идеального проводника

$$D_n = -\tau = -(\tau^b + \tau^c), \quad B_n = -\tau^{m,c}, \quad p \in S. \quad (1.87)$$

Если $\tau^{m,c} = 0$, то $B_n = 0$ и, следовательно,

$$\mu_a H_n = 0, \quad \text{т.е. } H_n = 0, \quad p \in S. \quad (1.88)$$

2. Поведение касательных к поверхности S составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} устанавливаем с помощью (1.83), (1.84). Электрический и магнитный токи смещения через поверхность $\Delta S'$, опирающуюся на контур ΔL , при $\Delta h \rightarrow 0$ стремятся к нулю, так как на S они не имеют особенностей. Но контур ΔL охватывает полный ток проводимости или сторонний магнитный ток. Поэтому правые части в (1.83), (1.84) отли-

чаются от нуля. Итак, при $\sigma_1 \rightarrow \infty$ $(\mathbf{j}_c)_{\text{cp}} \cdot \Delta h \rightarrow 0$, $(\mathbf{j}_c^M)_{\text{cp}} \cdot \Delta h \rightarrow 0$ при $\Delta h \rightarrow 0$, а $\Delta h \cdot \mathbf{j}_{\text{cp}} = \Delta h \cdot \rho_{\text{cp}} \mathbf{v} = \Delta h \cdot \mathbf{v} \cdot \Delta Q / (\Delta S \cdot \Delta h)$, где \mathbf{v} — средняя скорость носителей заряда, $\Delta S = \Delta b \cdot \Delta l$ (рис. 1.18,б). Поскольку заряд сосредоточен на поверхности, то $\Delta Q / \Delta S = \tau$ и $\Delta h \cdot \mathbf{j}_{\text{cp}} = \tau \mathbf{v} = \mathbf{J}$, где \mathbf{J} — плотность поверхностного тока.

Аналогичным образом получаем: $\mathbf{j}^{M,c} \cdot \Delta h = \mathbf{J}^{M,c}$, где $\mathbf{J}^{M,c}$ — плотность поверхностного стороннего магнитного тока.

Таким образом, из (1.83), (1.84), сокращая левую и правую части равенств на Δl , заменяя $\boldsymbol{\alpha} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}]$ и используя свойства смешанного произведения векторов (Пл.9), находим

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{H}[\mathbf{v}, \mathbf{n}] = -[\mathbf{H}, \mathbf{n}]\mathbf{v} = -\mathbf{J}\mathbf{v}; \quad \mathbf{E}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{E}[\mathbf{v}, \mathbf{n}] = [\mathbf{n}, \mathbf{E}]\mathbf{v} = \mathbf{J}^{M,c}\mathbf{v}; \quad p \in S. \quad (1.89)$$

Поскольку эти равенства выполняются при любом направлении орта \mathbf{v} , то из него следует

$$[\mathbf{H}, \mathbf{n}] = \mathbf{J}, \quad [\mathbf{n}, \mathbf{E}] = \mathbf{J}^{M,c}, \quad p \in S. \quad (1.90)$$

Условия (1.89), (1.90) показывают, что на идеально проводящем теле, расположенном в изотропной непроводящей среде, касательная составляющая вектора $\mathbf{H}_\alpha = [\mathbf{H}, \mathbf{n}]$ эквивалентна перпендикулярной ей составляющей плотности поверхностного электрического тока, а касательная составляющая вектора $\mathbf{E}_\alpha = [\mathbf{n}, \mathbf{E}]$ эквивалентна плотности стороннего поверхностного магнитного тока. Из последнего следует вывод: в математической модели оказывается возможным в качестве плотности поверхностного фиктивного стороннего магнитного тока задавать касательную составляющую вектора \mathbf{E} .

Отметим, что \mathbf{E}_α на идеально проводящем теле можно создать с помощью, например, щелей или окон (отверстий) в теле, в которых возбуждается ЭМ поле. Между кромками щелей возникает напряженность электрического поля, которую в соответствии с (1.89), (1.90) можно заменить плотностью поверхностного магнитного тока.

Если сторонние токи на теле отсутствуют, то получаем граничные условия

$$[\mathbf{H}, \mathbf{n}] = \mathbf{H}_\alpha = \mathbf{J}^B; \quad [\mathbf{n}, \mathbf{E}] = \mathbf{E}_\alpha = 0, \quad (1.91)$$

где \mathbf{J}^B — плотность вторичного (индуцированного) поверхностного электрического тока.

3. С помощью (1.91), можно получить для линейных изотропных непроводящих сред важные условия, определяющие поведение векторов \mathbf{H} и \mathbf{E} у поверхности идеально проводящего тела. Расположим начало ДСК в некоторой точке локально у плоской поверхности раздела

сред и направим ось z перпендикулярно этой поверхности (рис. 1.18,б). Тогда $\mathbf{1}_x$ и $\mathbf{1}_y$ касаются поверхности в этой точке. Из (1.75) вне сторонних источников

$$\dot{E}_x = \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} \right); \quad \dot{E}_y = \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right).$$

Но на поверхности, т.е. при $z=0$, касательные к поверхности составляющие \mathbf{E} должны по (1.91) обращаться в нуль, значит, $\dot{E}_x = \dot{E}_y = 0$, а по (1.88) $\dot{H}_z = -\dot{H}_n = 0$. Поскольку производные по x и y — это производные в поперечном относительно нормали направлении, то $\partial \dot{H}_z / \partial y = \partial \dot{H}_z / \partial x = 0$ при $z=0$. Таким образом, учитывая, что $\partial / \partial z$ есть производная по нормали к S , а \dot{H}_x и \dot{H}_y — это касательные к S составляющие вектора, имеем

$$\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial \dot{H}_\alpha}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad z=0. \quad (1.92)$$

Для комплексных амплитуд из (1.87), (1.90) получаем

$$\dot{D}_n = -\tau, \quad \dot{B}_n = -\tau^{m,c}; \quad [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}] = \dot{\mathbf{J}}, \quad [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}] = \dot{\mathbf{J}}^{m,c}, \quad p \in S. \quad (1.93)$$

При отсутствии сторонних токов на S из (1.88), (1.91) и (1.92) имеем

$$\dot{H}_n = 0, \quad \partial \dot{H}_\alpha / \partial n = 0; \quad [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}] = \dot{\mathbf{J}}^b, \quad \dot{E}_\alpha = 0. \quad (1.94)$$

Итак, на поверхности идеального проводника нормальная составляющая вектора $\dot{\mathbf{H}}$ и касательная составляющая вектора $\dot{\mathbf{E}}$ обращаются в нуль, а касательная составляющая вектора $\dot{\mathbf{H}}$ имеет экстремум. Эти граничные условия позволяют утверждать, что силовые линии магнитного поля (замкнутые) подходят к идеальному проводящему телу так, что только касаются его поверхности, сгущаясь у этой поверхности. Силовые линии электрического поля к идеальному проводнику подходят так, что всегда перпендикулярны его поверхности.

4. В линейной изотропной однородной непроводящей ($\sigma=0$) среде при отсутствии сторонних зарядов на S имеем из (1.62): $\text{div} \epsilon_a \dot{\mathbf{E}} = 0$, т.е. $\partial \dot{E}_x / \partial x + \partial \dot{E}_y / \partial y + \partial \dot{E}_z / \partial z = 0$. Если точка p находится на поверхности S (при $z=0$), то поскольку $\dot{E}_x = \dot{E}_y = 0$ при $z=0$, необходимо, чтобы выполнялось граничное условие $\partial \dot{E}_z / \partial z = 0$ при $z=0$. Таким образом, на идеально проводящей поверхности тела $\partial \dot{E}_n / \partial n = 0$. Это позволяет утверждать, что на поверхности идеально проводящего тела нормальная составляющая вектора $\dot{\mathbf{E}}$ имеет экс-

тремум. (Силовые линии электрического поля опираются при этом на индуцируемые (вторичные) заряды с плотностью τ^B). Из (1.87) и закона сохранения электрического заряда имеем: $\dot{E}_n = \tau^B / \epsilon_a = -(\text{div } \mathbf{J}^B) / i\omega\epsilon_a$.

5. При переходе точки наблюдения поля через поверхность идеального проводника касательная составляющая вектора \mathbf{H} и нормальная составляющая вектора \mathbf{E} претерпевают скачкообразное изменение.

6. Рассмотрим на примере возможность задания фиктивного стороннего магнитного тока. Для этого возвратимся к устройству, изображенному на рис. 1.16. Переходя к математической модели, припишем металлу стенок трубы идеальную проводимость ($\sigma_1 \rightarrow \infty$). Граничными условиями являются: $\dot{E}_a = 0$, $\dot{H}_n \neq 0$, $[\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}] = \mathbf{J}^B$ на поверхности S_1 стенок внутри трубы. Если поле внутри трубы известно, то на поверхности окна S_0 напряженности поля $\dot{\mathbf{H}}^c, \dot{\mathbf{E}}^c$ будем (приближенно) считать заданными (сторонними). Тогда на S_0 имеем $[\dot{\mathbf{H}}^c, \mathbf{n}] = \mathbf{J}^c$, $[\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}^c] = \mathbf{j}^{M,c}$. Это означает, что на отверстии сторонняя напряженность магнитного поля эквивалентна стороннему поверхностному электрическому току, а сторонняя напряженность электрического поля эквивалентна стороннему поверхностному фиктивному магнитному току.

Определим по (1.69) мощность, которую тратит источник внутри трубы на возбуждение поля во внешнем пространстве V_0 . Учтем, что $\Pi_{\mathbf{n}} = \dot{\Pi}_n = 0$ на поверхности стенок внутри трубы, поскольку по (1.91) $\dot{E}_a = 0$ на этой поверхности и $\mathbf{n} = -\mathbf{1}_z$, так как $\rho \in V_0$. Считаем, что на S_0 $\dot{\mathbf{E}}^c = \mathbf{1}_y \dot{E}_y^c$, $\dot{\mathbf{H}}^c = -\mathbf{1}_x \dot{H}_x^c$. Тогда $\dot{\Pi}^c = 0, 5[\dot{\mathbf{E}}^c, \dot{\mathbf{H}}^{c*}] = \mathbf{1}_z \dot{\Pi}_z^c$, где $\dot{\Pi}_z^c = 0, 5 \dot{E}_y^c \dot{H}_x^{c*}$. Кроме того, $[\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}^c] = [-\mathbf{1}_z, \mathbf{1}_y] \dot{E}_y^c = \mathbf{1}_x \dot{E}_y^c = \mathbf{j}^{M,c}$, т.е. $j_x^{M,c} = \dot{E}_y^c$, $j_y^{M,c} = 0$. Обозначим через a и b — линейные размеры отверстия S_0 по осям x и y соответственно. Предположим, что \dot{E}_y^c, \dot{H}_x^c независят от y . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \oint_{S_0+S_1} \dot{\Pi}^c dS &= \int_{S_0} \mathbf{1}_z \dot{\Pi}_z^c (-\mathbf{1}_z) dx dy = -\frac{1}{2} \int_0^a dx \int_0^b \dot{E}_y^c \dot{H}_x^{c*} dy = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^a b \dot{E}_y^c(x) \dot{H}_x^{c*}(x) dx = -\frac{1}{2} \int_0^a b j_x^{M,c}(x) \dot{H}_x^{c*}(x) dx. \end{aligned}$$

В данном примере плотность фиктивного стороннего поверхностного тока эквивалентна составляющей \dot{E}_y^c сторонней напряженности поля.

1.13. Векторные и скалярные потенциалы. Волновые уравнения

1. Пусть в области V_n заданы плотности сторонних токов $\mathbf{j}^c, \mathbf{j}^{M,c}$. Распределения плотностей сторонних зарядов $\rho^c(\rho, t), \rho^{M,c}(\rho, t)$ в V_n определяются уравнениями непрерывности. Необходимо найти решение системы уравнений Максвелла и определить векторы ЭМ поля.

Решение системы уравнений (1.73) или (1.74) необходимо искать с учетом конкретных материальных уравнений. Рассмотрим один из методов решения в простом случае однородной линейной изотропной среды, не имеющей гистерезиса. Для проекций векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на координатные оси система основных двух векторных уравнений превращаются в систему шести дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка; решать эту систему непосредственно трудно. Поэтому с помощью вспомогательных функций решение уравнений Максвелла приводят к решению одного векторного и одного скалярного уравнений в частных производных второго порядка. Методы решения последних хорошо разработаны.

2. Пусть имеем сторонний источник тока. Тогда поле возбуждается сторонними электрическими токами и зарядами, а $\mathbf{j}^{m,c} = 0$, $\rho^{m,c} = 0$. Обозначим через \mathbf{E}' , \mathbf{H}' векторы напряженности поля. По (1.73)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' = \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}' + \mathbf{j}^c, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}' = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t}, \quad (1.95)$$

$$\varepsilon_a \operatorname{div} \mathbf{E}' = \rho, \quad \mu_a \operatorname{div} \mathbf{H}' = 0. \quad (1.96)$$

Введем вспомогательную функцию $\mathbf{A}(p,t)$ — мгновенное значение электрического векторного потенциала с помощью выражения

$$\mathbf{H}' = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.97)$$

Подставим это выражение во второе уравнение Максвелла и объединим операции ротора. Имеем

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E}' + \mu_a \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.98)$$

Введем еще одну вспомогательную функцию $\varphi(p,t)$ — мгновенное значение электрического скалярного потенциала таким образом, чтобы выражение в круглых скобках равнялось $-\operatorname{grad} \varphi$. Тогда с учетом (П1.7) (1.98) удовлетворяется. Значит,

$$\mathbf{E}' = -\operatorname{grad} \varphi - \mu_a \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.99)$$

Подставим в первое уравнение Максвелла (1.95) значения \mathbf{H}' и \mathbf{E}' из (1.97) и (1.99). Учтем тождество (П1.6) и объединим после этого выражения под знаком градиента. Имеем

$$\operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma \varphi \right) = \nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \sigma \mu_a \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{j}^c. \quad (1.100)$$

В это выражение входят обе вспомогательные функции. Из векторного анализа известно, что для однозначного определения вектора \mathbf{A} необходимо задать сумму его соленоидальной и потенциальной частей. Выражение (1.97) определяет только соленоидальную часть. Поэтому имеется возможность произвольного выбора потенциальной части, т.е. не противореча уравнениям Максвелла, можно различными способами определять $\operatorname{div} \mathbf{A}$. Выбор $\operatorname{div} \mathbf{A}$ называют *калибровкой потенциала*. Последнюю произведем из соображения математического упрощения уравнения (1.100). С этой целью приравняем нулю выражение в круглых скобках:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma \varphi = 0. \quad (1.101)$$

Это выражение называют *условием Лоренца или калибровкой Лоренца*. При этом из (1.100) имеем уравнение для \mathbf{A} :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \sigma \mu_a \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{j}^c. \quad (1.102)$$

Для получения уравнения, определяющего φ , подставим в третье уравнение Максвелла (1.96) значение \mathbf{E}' из (1.99), используем условие Лоренца (1.101) и учтем (П.7). Имеем

$$\Delta\varphi - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sigma \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho / \epsilon_a = -(\rho^b + \rho^c) / \epsilon_a. \quad (1.103)$$

В правой части этого уравнения кроме заданной функции ρ^c имеется функция вторичных зарядов ρ^b . Последняя определяется заданной функцией ρ^c и уравнениями состояния среды. Действительно, подставляя в уравнение непрерывности вторичного тока значение $\mathbf{j}^b = \sigma \mathbf{E}'$ и заменяя \mathbf{E}' из (1.96), получаем уравнение релаксации вторичного заряда (см. п. 1.5.1) $\partial \rho^b / \partial t + \gamma \rho^b = -\gamma \rho^c$, решением которого является функция

$$\rho^b(p, t) = e^{-\gamma t} [\rho^b(p, 0) - \gamma \int_0^t \rho^c(p, \tau) e^{\gamma \tau} d\tau],$$

где $\rho^b(p, 0)$ — плотность вторичного заряда при $t = 0$, $\gamma = \sigma / \epsilon_a$. Таким образом, правую часть (1.103) можно считать известной функцией.

Если электрические векторный и скалярный потенциалы найдены решением уравнений (1.102) и (1.103), то тогда векторы напряженностей поля вычисляются с помощью (1.97), (1.99).

3. Пусть имеем сторонний источник э.д.с. Тогда поле возбуждается сторонними магнитными токами и зарядами, а $\mathbf{j}^c = 0$, $\rho^c = 0$. Обозначим через \mathbf{E}^* , \mathbf{H}^* векторы напряженности поля. Из (1.73)

$$\text{rot} \mathbf{H}^* = \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}^*, \quad \text{rot} \mathbf{E}^* = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial t} - \mathbf{j}^{m,c}, \quad (1.104)$$

$$\epsilon_a \text{div} \mathbf{E}^* = 0, \quad \mu_a \text{div} \mathbf{H}^* = \rho^{m,c}. \quad (1.105)$$

Введем вспомогательные функции $\mathbf{A}^m(p, t)$, $\varphi^m(p, t)$ — мгновенные значения магнитных векторного и скалярного потенциалов. Определим вектор

$$\mathbf{E}^* = -\text{rot} \mathbf{A}^m \quad (1.106)$$

и подставим это выражение в первое уравнение Максвелла (1.104). Имеем

$$\text{rot}(\mathbf{H}^* + \epsilon_a \partial \mathbf{A}^m / \partial t + \sigma \mathbf{A}^m) = 0.$$

Приравнявая выражение в скобках градиенту потенциальной функции с обратным знаком, получаем

$$\mathbf{H}^* = -\text{grad} \varphi^m - \epsilon_a \partial \mathbf{A}^m / \partial t - \sigma \mathbf{A}^m. \quad (1.107)$$

Выражения (1.106) и (1.107) подставляем во второе уравнение Максвелла (1.104). Используя (П.6) и связывая потенциалы условием Лоренца

$$\text{div} \mathbf{A}^m + \mu_a \partial \varphi^m / \partial t = 0, \quad (1.108)$$

находим уравнение для \mathbf{A}^m

$$\nabla^2 \mathbf{A}^m - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}^m}{\partial t^2} - \sigma \mu_a \frac{\partial \mathbf{A}^m}{\partial t} = -\mathbf{j}^{m,c}. \quad (1.109)$$

Для получения уравнения, определяющего φ^m , подставим в четвертое уравнение Максвелла (1.105) значение \mathbf{H}^* из (1.107) и используем (1.108). Получим

$$\Delta\varphi^M - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi^M}{\partial t^2} - \sigma \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho^{M,c} / \mu_a. \quad (1.110)$$

Если найти решения уравнений (1.109), (1.110), то тогда векторы напряженностей поля определяются по известным функциям A^M , φ^M с помощью (1.106) и (1.107).

4. Пусть ЭМ поле возбуждается сторонними электрическими и магнитными токами и зарядами, т.е. $\mathbf{j}^c \neq 0$, $\mathbf{j}^{M,c} \neq 0$. Обозначим через \mathbf{E} , \mathbf{H} — векторы напряженностей поля. Поскольку среда и, следовательно, уравнения Максвелла для \mathbf{E} , \mathbf{H} линейны, то справедлив принцип наложения (суперпозиции), поэтому $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}''$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}''$. Суммируя (1.99) и (1.106), а затем — (1.97) и (1.107), имеем

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \mu_a \partial \mathbf{A} / \partial t - \text{rot} \mathbf{A}^M, \quad (1.111)$$

$$\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A} - \text{grad}\varphi^M - \varepsilon_a \partial \mathbf{A}^M / \partial t - \sigma \mathbf{A}^M. \quad (1.112)$$

5. Уравнения (1.102), (1.103), (1.109) и (1.110) являются уравнениями одного и того же типа. Если предположить, что среда не имеет джоулевых потерь, т.е. $\sigma = 0$ и обозначить через U функцию φ или φ^M , или любую из декартовых составляющих A , A^M , то для U имеем уравнение

$$\Delta U - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\psi, \quad (1.113)$$

где ψ — декартова составляющая плотности стороннего тока или плотность стороннего заряда.

Уравнение (1.113) называют *уравнением Д'Аламбера*. В точках пространства, где сторонние токи и заряды отсутствуют ($p \notin V_n$), $\psi = 0$ и уравнение (1.113) становится *однородным*. Последнее называют *волновым уравнением*.

1.14. Уравнение Гельмгольца

1. Для решения уравнений Максвелла в комплексной форме (1.75) применяются вспомогательные функции — комплексные амплитуды электрического и магнитного векторных потенциалов $\hat{A}(p, \omega)$, $\hat{A}^M(p, \omega)$. Среда является линейной, однородной, изотропной. Плотности сторонних токов заданы в области V_n .

Для гармонических во времени сторонних источников применяем метод комплексных амплитуд. При этом можно учесть наличие линейных электрического и магнитного гистерезисов, когда $\varepsilon_a(p, \omega)$, $\mu_a(p, \omega)$ — комплексные числа.

2. Пусть ЭМ поле возбуждается только электрическими сторонними токами и зарядами $\hat{\mathbf{j}}^c(p, \omega)$, $\hat{\rho}^c(p, \omega)$. Тогда из (1.75) имеем

$$\text{rot} \hat{\mathbf{H}}' = i\omega \tilde{\varepsilon}_a \hat{\mathbf{E}}' + \hat{\mathbf{j}}^c, \quad \text{rot} \hat{\mathbf{E}}' = -i\omega \mu_a \hat{\mathbf{H}}'. \quad (1.114)$$

Если $\hat{A}(p, \omega)$ — комплексная амплитуда электрического векторного потенциала, то

$$\dot{\mathbf{H}}' = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}. \quad (1.115)$$

Подставляем это выражение во второе уравнение Максвелла (1.114). Вводим вспомогательную функцию $\dot{\phi}(p, \omega)$. Для выполнения тождества необходимо (см. (1.99)), чтобы

$$\dot{\mathbf{E}}' = -\text{grad } \dot{\phi} - i\omega\mu_a\dot{\mathbf{A}}. \quad (1.116)$$

Подставляем (1.115), (1.116) в первое уравнение Максвелла (1.114) и применяем условие Лоренца. Получаем $\dot{\phi} = -\text{div } \dot{\mathbf{A}} / i\omega\tilde{\epsilon}_a$ и

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mathbf{j}^c, \quad (1.117)$$

где обозначено $k^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a$, $k = \beta - i\alpha$ — коэффициент распространения. Из (1.116) при этом получаем

$$\dot{\mathbf{E}}' = \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} \text{grad div } \dot{\mathbf{A}} - i\omega\mu_a\dot{\mathbf{A}}. \quad (1.118)$$

3. Пусть ЭМ поле возбуждается только магнитными сторонними токами и зарядами $\dot{\mathbf{j}}^{m,c}(p, \omega)$, $\dot{\rho}^{m,c}(p, \omega)$. Тогда из (1.75) имеем

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}'' = i\omega\tilde{\epsilon}_a\dot{\mathbf{E}}'', \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}}'' = -i\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}'' - \dot{\mathbf{j}}^{m,c}. \quad (1.119)$$

Если $\dot{\mathbf{A}}^m(p, \omega)$ — комплексная амплитуда магнитного векторного потенциала, то

$$\dot{\mathbf{E}}'' = -\text{rot } \dot{\mathbf{A}}^m. \quad (1.120)$$

Подставим это выражение в первое уравнение Максвелла (1.119). Вводим вспомогательную функцию $\dot{\phi}^m(p, \omega)$. Для выполнения тождества необходимо, чтобы

$$\dot{\mathbf{H}}'' = -\text{grad } \dot{\phi}^m - i\omega\tilde{\epsilon}_a\dot{\mathbf{A}}^m. \quad (1.121)$$

Подставим (1.120) и (1.121) во второе уравнение Максвелла (1.119) и наложим на вспомогательные функции условие Лоренца. Получаем $\dot{\phi}^m = -\text{div } \dot{\mathbf{A}}^m / i\omega\mu_a$,

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}^m + k^2 \dot{\mathbf{A}}^m = -\dot{\mathbf{j}}^{m,c}. \quad (1.122)$$

Из (1.121) при этом имеем

$$\dot{\mathbf{H}}'' = -i\omega\tilde{\epsilon}_a\dot{\mathbf{A}}^m + \frac{1}{i\omega\mu_a} \text{grad div } \dot{\mathbf{A}}^m. \quad (1.123)$$

4. Пусть ЭМ поле возбуждается и электрическими и магнитными сторонними токами и зарядами. Для линейных сред справедлив принцип наложения. Поэтому $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}' + \dot{\mathbf{E}}''$, $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}' + \dot{\mathbf{H}}''$. Выполнив суммирование (1.118), (1.120) и (1.115), (1.123), получим

$$\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\mu_a\dot{\mathbf{A}} + \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} \text{grad div } \dot{\mathbf{A}} - \text{rot } \dot{\mathbf{A}}^M, \quad (1.124)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \text{rot } \dot{\mathbf{A}} - i\omega\tilde{\epsilon}_a\dot{\mathbf{A}}^M + \frac{1}{i\omega\mu_a} \text{grad div } \dot{\mathbf{A}}^M. \quad (1.125)$$

5. Уравнения (1.117) и (1.122) являются *неоднородными векторными уравнениями Гельмгольца*. В точках пространства, где сторонние источники отсутствуют ($p \notin V_n$), их правые части равны нулю. При этом уравнения становятся *однородными*.

Решение однородных уравнений Гельмгольца наиболее просто, если потенциалы зависят лишь от одной координаты. Например, в ДСК для A_x при $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ из (1.117) с учетом (П1.12) получаем $\partial^2 \dot{A}_x / \partial z^2 + k^2 \dot{A}_x = 0$.

Общим решением этого однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка является $A_x(p, \omega) = C_1 \exp(-ikz) + C_2 \exp(ikz)$, где C_1, C_2 — постоянные. Мгновенное значение $A_x(p, t) = \text{Re}\{A_x \exp(i\omega t)\}$. Учитывая, что $k = \beta - i\alpha$, имеем

$$A_x(p, t) = |C_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \psi_1) + |C_2| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \psi_2),$$

где $C_{1,2} = |C_{1,2}| \exp(i\psi_{1,2})$, ψ_1, ψ_2 — постоянные значения фазы. Это решение определяет *сумму двух бегущих волн*. Первое слагаемое — первая волна при $\beta \geq 0$ распространяется (бежит) вдоль возрастающих значений z . Амплитуда ее из-за потерь на нагревание среды при $\alpha \geq 0$ экспоненциально уменьшается (по закону $\exp(-\alpha z)$) с ростом z (затухает), а фаза изменяется по закону $\omega t - \beta z + \psi_1$. Амплитуда второй бегущей волны экспоненциально увеличивается (по закону $\exp(\alpha z)$) с ростом значений z , а фаза изменяется по закону $\omega t + \beta z + \psi_2$.

Второе слагаемое может описывать волну, бегущую в противоположном, по сравнению с первой волной, направлении.

Таким образом, мгновенное значение $A_x(p, t)$ можно рассматривать как сумму двух волн, бегущих в противоположных направлениях.

6. Для определения коэффициентов α и β учтем, что

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 - i2\alpha\beta = \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a = \omega^2 (\xi - i\zeta),$$

где обозначено $\xi = \epsilon'_a \mu'_a - (\epsilon''_a + \sigma/\omega) \mu''_a$, $\zeta = \epsilon'_a \mu'_a + (\epsilon''_a + \sigma/\omega) \mu''_a$. Приравняв действительные и мнимые части в этом выражении, получим биквадратные уравнения для α и β . Из четырех корней каждого из этих уравнений два отличаются только знаком и описывают те же бегущие в противоположных направлениях две волны. Условию экспоненциального затухания амплитуды волны по причине затрат энергии ЭМ поля на нагревание среды удовлетворяют корни

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} = \omega \left[\frac{1}{2} \xi (M \mp 1) \right]^{1/2}, \quad (1.126)$$

где $M = [1 + (\zeta/\xi)^2]^{1/2}$. Коэффициент α называют *коэффициентом затухания*, β — *коэффициентом фазы волны*.

Если в диэлектрике ($\mu_a = \mu_0$, $\mu_a'' = 0$) линейный гистерезис отсутствует ($\epsilon_a'' = 0$), то $\epsilon_a' = \epsilon_a$, и получаем

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} = \omega \left[\frac{1}{2} \epsilon_a \mu_0 (M \mp 1) \right]^{1/2}, \quad (1.127)$$

где $M = [1 + (\sigma / \omega \epsilon_a)^2]^{1/2}$.

Если в диэлектрике велики гистерезисные явления и при этом $\sigma / \omega \ll \epsilon_a''$, то

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} \approx \omega \left[\frac{1}{2} \epsilon_a' \mu_a' (M \mp 1) \right]^{1/2}, \quad (1.128)$$

где $M = [1 + (\epsilon_a'' / \epsilon_a')^2]^{1/2}$; основное влияние на коэффициент затухания оказывает гистерезис.

7. При решении задач электродинамики могут применяться уравнения Гельмгольца для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} вместо уравнений (1.117), (1.122) для векторных потенциалов. Для того, чтобы их получить, выполним операцию ротора над основными уравнениями Максвелла (1.75):

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{H}} = i\omega \tilde{\epsilon}_a \text{ rot } \dot{\mathbf{E}} + \text{rot } \dot{\mathbf{j}}^c; \quad \text{rot rot } \dot{\mathbf{E}} = -i\omega \mu_a \text{ rot } \dot{\mathbf{H}} - \text{rot } \dot{\mathbf{j}}^{m,c}.$$

Подставим в первое уравнение значение $\text{rot } \dot{\mathbf{E}}$ из второго уравнения (1.75), а во второе — значение $\text{rot } \dot{\mathbf{H}}$ — из первого уравнения (1.75), учтем векторное тождество (III.6) и уравнения непрерывности. Получаем уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = -\dot{\mathbf{M}}^m, \quad \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = -\dot{\mathbf{M}}, \quad (1.129)$$

где $\dot{\mathbf{M}}^m = -i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{j}}^{m,c} + \frac{1}{i\omega \mu_a} \text{grad div } \dot{\mathbf{j}}^{m,c} + \text{rot } \dot{\mathbf{j}}^c$, $\dot{\mathbf{M}} = -i\omega \mu_a \dot{\mathbf{j}}^c + \frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_a} \text{grad div } \dot{\mathbf{j}}^c - \text{rot } \dot{\mathbf{j}}^{m,c}$.

Этими уравнениями не всегда удобно пользоваться из-за сложности их правых частей. Однако в области пространства, где сторонних токов и зарядов нет, правые части равны нулю и уравнения становятся однородными.

8. Вместо векторных потенциалов могут использоваться другие вспомогательные функции \mathbf{Z} и \mathbf{Z}^m — комплексные амплитуды векторов Герца для электрических и магнитных токов. Для гармонических во времени полей они связаны с векторными потенциалами постоянными множителями: $\dot{\mathbf{Z}} = \dot{\mathbf{A}} / i\omega \tilde{\epsilon}_a$, $\dot{\mathbf{Z}}^m = \dot{\mathbf{A}}^m / i\omega \mu_a$.

1.15. Уравнения электростатики, магнитостатики, стационарных и квазистационарных токов

1. Выше показано, что из уравнений Максвелла следуют основные законы теории электрических цепей — законы Ома и Джоуля–Ленца, первый и второй законы Кирхгофа. Уравнения Максвелла дают возможность сформулировать условия, при которых эти законы применимы (§ 1.7).

В частных случаях уравнения Максвелла упрощаются, поэтому упрощается исследование электрических и магнитных явлений.

2. В статическом случае изменения во времени отсутствуют ($\partial/\partial t = 0$), электрические и магнитные заряды являются статическими, электрических и магнитных токов нет. Основные уравнения поля при этом получаются из (1.73) и (1.19):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho^c, \quad \mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}; \quad (1.130)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = \rho^{M,c}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}. \quad (1.131)$$

Электрическое поле определяется уравнениями (1.130), а магнитное поле — уравнениями (1.131); поля не связаны и существуют независимо друг от друга. Уравнения (1.130) определяют *электростатическое поле (электростатику)*, а (1.131) — *магнитостатическое поле (магнитостатику)*. Так как $\mathbf{A} = \mathbf{A}^M = 0$, то по (1.111) и (1.112) $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$, $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \phi^M$. Из (1.103), (1.110) получаем уравнения Пуассона

$$\Delta \phi = -\rho^c / \epsilon_a, \quad \Delta \phi^M = -\rho^{M,c} / \mu_a. \quad (1.132)$$

При $\rho^c = \rho^{M,c} = 0$ эти уравнения становятся однородными. В этом случае они называются *уравнениями Лапласа*.

3. При стационарных токах и зарядах $\partial/\partial t = 0$ и из (1.73), (1.19) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = \rho^{M,c}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{j}^{M,c}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

В этом случае электрические и магнитные поля связаны, так как $\mathbf{j} = \mathbf{j}^c + \sigma \mathbf{E}$. Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются через векторные потенциалы: $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\operatorname{rot} \mathbf{A}^M$, которые в соответствии с (1.102) и (1.109) удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{j}^c, \quad \nabla^2 \mathbf{A}^M = -\mathbf{j}^{M,c}. \quad (1.133)$$

4. Уравнения *квазистационарных токов* получаются при условии медленности изменения во времени сторонних зарядов и токов, когда можно пренебречь токами смещения (см. § 1.7). При этом из (1.73) получаем $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$, $\operatorname{div} \mathbf{B} = \rho^{M,c}$; $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{j}^{M,c}$, $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}^c + \sigma \mathbf{E}$. Электрическое и магнитное поля связаны, так как в уравнении $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$ правая часть зависит от \mathbf{E} .

ЗАДАЧИ

1. Выразить плотность объемного стороннего магнитного тока на плоском прямоугольном листе. Лист расположить параллельно плоскости xz в ДСК, а затем — параллельно плоскости yz .
2. Выразить плотность объемного поверхностного электрического тока, заданного на трубке тока некоторой длины, поперечное сечение которой имеет форму кругового цилиндра.
3. Выразить плотность объемного стороннего магнитного тока прямолинейной нити.
4. Выразить плотность объемного электрического тока кругового витка в цилиндрической системе координат.
5. Выразить плотность объемного электрического тока кругового витка в сферической системе координат.
6. Имеется нить прямолинейного электрического тока. Предложите устройство для измерения функции распределения плотности тока по длине нити.

7. Имеется нить прямолинейного электрического тока. Предложите устройство для измерения функции распределения плотности заряда по длине нити.

8. Имеется нить прямолинейного стороннего магнитного тока. Предложите устройство для измерения функции распределения плотности тока по длине нити.

9. Записать связь плотности тока с напряженностью электрического поля при квадратичной вольтамперной характеристике.

10. Вычислить мгновенные значения плотностей вторичного тока и мощности потерь в полистироле, если амплитуда напряженности электрического поля в точке наблюдения на частоте 30 МГц равна 1 В/м.

11. При условиях предыдущей задачи выполнить вычисления для железа.

12. Вычислить мгновенные значения плотностей вторичного тока и мощности потерь в морской воде (при температуре 20° С) на частоте, равной 1 ГГц, если амплитуда напряженности электрического поля в точке наблюдения равна 1 В/м.

13. Источник сторонней э.д.с. имеет форму цилиндра длины, равной 10 см. Вычислить мгновенную мощность источника, если амплитуда тока в сечении цилиндра одинакова и равна 0,1 А, а вектор напряженности стороннего электрического поля, направленный вдоль оси противоположно плотности тока, имеет амплитуду, равную 1 В/м, частоту 1 ГГц.

14. Вычислить мгновенное значение вектора Пойнтинга на поверхности окна устройства, изображенного на рис. 1.16, если на длине волны $\lambda = 10$ см на поверхности окна $\mathbf{E} = 1_y E_y$, $\mathbf{H} = -1_x H_x$, где $H_x = E_y / W_0$, $W_0 = 120\pi$ Ом, $E_y = E_0 \sin(\pi x/a) \cos \omega t$, $E_0 = 1$ В/м, $a = 0,7\lambda$ — размер окна по оси x .

Определить точки наблюдения, в которых значение вектора Пойнтинга максимально. Вычислить максимальное значение вектора Пойнтинга.

15. Вычислить мгновенное значение мощности, переносимой через окно устройства, изображенного на рис. 1.16, при условиях предыдущей задачи. Размер окна по оси y $b = 0,4\lambda$.

16. Вычислить комплексную диэлектрическую проницаемость пресной воды (при температуре 20° С) на частоте 10 ГГц. Найти тангенс угла электрических потерь.

17. Вычислить активную и реактивную мощности стороннего источника тока, имеющего форму цилиндра длиной 10 см, радиуса 1 см, если векторы плотности стороннего тока, являющегося поверхностным, и напряженности электрического поля параллельны оси цилиндра, распределены равномерно по его боковой поверхности, комплексные амплитуды их сдвинуты по фазе на 135° и $|J| = 1$ А/м, $|E| = 1$ В/м.

18. При условиях задачи 13 вычислить среднее значение вектора Пойнтинга.

19. При условиях задачи 14 вычислить активную мощность, переносимую через окно.

20. Направив вдоль нормали \mathbf{n} к поверхности раздела сред ось ξ_1 криволинейной ортогональной системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 , а оси ξ_2, ξ_3 — вдоль касательных к этой поверхности, показать, что на поверхности идеально проводящего тела выполняются граничные условия $\partial(L_{\xi_m} H_{\xi_m}) / \partial n = 0$, где L_{ξ_m} — коэффициент Лямэ, $m = 2$ или 3.

21. Запишите граничные условия на поверхности идеально проводящего цилиндра кругового поперечного сечения. Вдоль образующей цилиндра прорезана узкая щель конечной длины, между кромками которой создана сторонняя напряженность электрического поля.

22. Как должны подходить силовые линии электрического и магнитного полей к поверхности идеально проводящего цилиндра кругового поперечного сечения?

23. Запишите решение однородного уравнения Гельмгольца в виде бегущей (уходящей) вдоль оси x волны.

24. Запишите решение однородного уравнения Гельмгольца в виде бегущей (приходящей) вдоль оси y волны.

25. Показать, используя формулы Приложения 1, что векторное уравнение Гельмгольца (1.117) в ДСК сводится к трем независимым скалярным уравнениям

$$\Delta \dot{A}_m + k^2 \dot{A}_m = -j_m^c,$$

где Δ — оператор Лапласа, $m = x, y$ или z .

26. Показать, используя формулы Приложения 1, что векторное уравнение Гельмгольца (1.117) в цилиндрической системе координат (ЦСК) сводится к следующим трем скалярным уравнениям относительно составляющих A_r , A_φ и A_z :

$$\Delta \dot{A}_r + k^2 \dot{A}_r - \frac{1}{r^2} \dot{A}_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \dot{A}_\varphi}{\partial \varphi} = -j_r^c,$$

$$\Delta \dot{A}_\varphi + k^2 \dot{A}_\varphi - \frac{1}{r^2} \dot{A}_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \dot{A}_r}{\partial \varphi} = -j_\varphi^c,$$

$$\Delta \dot{A}_z + k^2 \dot{A}_z = -j_z^c,$$

где Δ — оператор Лапласа в ЦСК. (Третье уравнение может решаться независимо от двух других, а первые два уравнения связаны друг с другом и поэтому составляют систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка).

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Модель неограниченного однородного пространства. Общая характеристика задач

1. Все сторонние источники в реальных условиях возбуждают ЭМ поле в присутствии границ раздела сред, которыми являются поверхности Земли и стен зданий, металлические поверхности кораблей, самолетов и т.д. Возбуждаемое сторонним источником (первичное, или падающее) ЭМ поле, распространяясь, падает на границу раздела сред и наводит на ней токи. Последние являются вторичными по отношению к падающему полю. Они возбуждают вторичное (рассеянное, или отраженное) поле. Наложение первичного и вторичного полей образует полное поле, или поле дифракции.

Первичным является поле, возбужденное в случае, когда границы раздела сред отсутствуют. Можно считать, что границы раздела сред S отсутствуют, если они находятся на таком большом расстоянии от точки наблюдения, что вторичные токи на S не влияют на поле в точке p (рис. 1.9). Таким образом приходят к математической модели неограниченного пространства.

2. Область V_n , занятую сторонними зарядами и токами, называют сторонним источником, излучателем, или возбудителем ЭМ поля. По заданным распределениям плотностей сторонних токов в области V_n с помощью закона сохранения заряда можно найти, если это необходимо, распределения плотностей зарядов.

3. В настоящем разделе изучаются ЭМ явления в неограниченном однородном пространстве. Параметры линейной изотропной среды, заполняющей пространство, обозначены через ϵ_a , μ_a , σ . Плотности сторонних токов, т.е. функции $\mathbf{j}^c(p,t)$, $\mathbf{j}^{m,c}(p,t)$ заданы в области V_n и равны нулю вне этой области. Геометрические размеры области V_n тоже заданы. Надо найти векторы ЭМ поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} .

Естественно предположить, что ЭМ явления в пространстве определяются функциями распределения плотностей сторонних токов \mathbf{j}^c , $\mathbf{j}^{m,c}$ в области V_n , законами изменения последних во времени и свойствами пространства.

Важнейшая в радиотехнике зависимость векторов поля от угловых координат определяется не только относительными к длине волны линейными размерами и геометрической формой области V_n , но и законами распределения плотностей тока в этой области.

Положение вектора E в пространстве (поляризацию поля) можно менять, меняя законы распределения сторонних токов в V_n . Важнейшее значение имеет знание особенностей поведения векторов поля и вектора Пойнтинга на разных расстояниях от области V_n .

В среде с тепловыми потерями векторы поля затухают по экспоненциальному закону по мере увеличения расстояния от области V_n . Сигнал, переносимый распространяющимся полем, в такой среде искажается. Искажения сигнала могут быть оценены с помощью понятий фазовой и групповой скоростей распространения волн.

В радионавигации особое значение имеет знание фаз векторов возбуждаемого ЭМ поля. Фазы также определяются законами распределения сторонних токов и относительными к длине волны геометрическими размерами области V_n .

В случае области V_n конечных размеров в неограниченном однородном пространстве на большом удалении от источника возбуждается уходящая от источника (расходящаяся) сферическая волна, у которой поверхности равных фаз являются сферами. Если же область V_n имеет вид, например, бесконечного прямолинейного провода, то в пространстве может возбуждаться цилиндрическая волна, у которой поверхности равных фаз являются цилиндрами. В случае вырождения области V_n в плоскость в пространстве может возбуждаться плоская волна, у которой поверхности равных фаз являются плоскостями.

Вышеприведенное краткое перечисление только некоторых задач анализа ЭМ поля показывает, что математическая модель неограниченного однородного пространства позволяет изучить основные явления электромагнетизма, обязанные излучению сторонних источников.

4. Ниже изучаются ЭМ явления при гармонически изменяющихся во времени сторонних токах. Применяется метод комплексных амплитуд. Если сторонние токи являются негармоническими функциями времени, то с помощью преобразования Фурье по известным комплексным амплитудам можно восстановить мгновенные значения векторов поля.

2.2. Математические модели излучателей

1. Линейные излучатели применяются в качестве основных возбудителей ЭМ поля. Линейный электрический излучатель обычно выполняется из провода. С помощью линии питания (фидерного устройства) в разрезе провода возбуждается сторонняя напряженность электрического поля (рис. 1.10). Если последняя известна, то в этом случае задан источник сторонней э.д.с. Если же в каждом сечении излучателя известен (измерен или рассчитан) ток, то в проводе известно распределение плотности объемного стороннего тока (рис. 1.11), что соответствует заданию источника стороннего тока.

Прямолинейный излучатель называют и прямолинейным вибратором. Если распределение тока по длине вибратора симметрично относительно его середины, то последний называют симметричным вибратором.

Провод, изогнутый в кольцо, называют рамкой или петлей (витком) тока.

2. Сторонний ток в проводе или сторонняя напряженность поля в разрезе вибратора возбуждают в окружающем пространстве ЭМ поле такое, что его векторы удовлетворяют уравнениям Максвелла, граничным условиям и представляют ЭМ волну, уходящую от излучателя. Если сторонние ток или э.д.с. меняются во времени с большой частотой ω , то ЭМ поля, как отмечалось выше, почти не проникают в провод, значит, токи при идеальной проводимости провода становятся поверхностными. Тогда плотность объемного стороннего тока \mathbf{j}^c выражается через плотность поверхностного тока \mathbf{J}^c с помощью δ -функции. Вектор \mathbf{J}^c имеет, например, в ДСК составляющие J_x^c, J_y^c, J_z^c , но ток через поперечное сечение вибратора $S_{\perp}(z)$ определяется только перпендикулярной к $S_{\perp}(z)$ составляющей плотности тока.

Форма поперечного сечения линейного излучателя в частном случае может быть круговой (рис. 1.10), а в общем случае — сложной (рис. 2.1,а). Плотность стороннего тока на проводе (или сторонняя на-

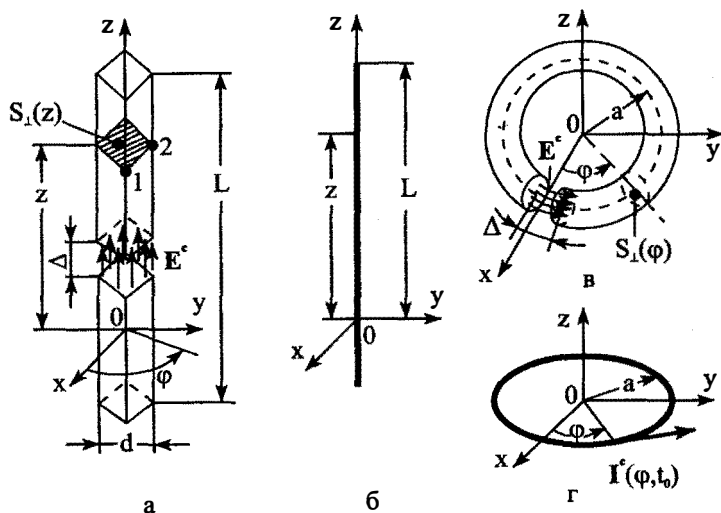


Рис. 2.1. Оригиналы и математические модели излучателей

пряженности поля) может являться функцией азимутальной координаты φ . Например, плотности поверхностного тока в точках 1 и 2 вибратора (рис. 2.1,а) разные, если $\dot{\mathbf{E}}^c$ зависит от φ . Поэтому возбуждаемое поле должно зависеть от угла φ .

Однако, на практике чаще всего применяются тонкие вибраторы, у которых \mathbf{j} максимальный линейный размер поперечного сечения d намного меньше длины вибратора и длины волны ($d \ll L$, $d \ll \lambda$). В этих случаях можно считать, что $d/\lambda \rightarrow 0$ и тогда в качестве математической модели можно применить нить тока длины L (рис. 2.1,б). На нити плотность линейного тока на некотором расстоянии от начала координат должна быть равна току в соответствующем сечении (на том же расстоянии от начала координат) вибратора.

Количественно переход от оригинала к математической модели наиболее просто описывается для прямолинейного вибратора с круговым поперечным сечением. В соответствии с изложенным сторонний ток на вибраторе считаем поверхностным. Тогда в ЦСК

$$\mathbf{j}^c = [\mathbf{1}_\varphi \mathbf{j}_\varphi^c(z, \varphi) + \mathbf{1}_z \mathbf{j}_z^c(z, \varphi)] \delta(r-a)$$

и ток в поперечном сечении S_\perp вибратора

$$i^c(z) = \int_{S_\perp} \mathbf{j}^c d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^a [\mathbf{1}_\varphi \mathbf{j}_\varphi^c + \mathbf{1}_z \mathbf{j}_z^c] \delta(r-a) \mathbf{1}_z a d\varphi dr = \int_0^{2\pi} \mathbf{j}_z^c(z, \varphi) a d\varphi.$$

Если сторонний ток (сторонняя э.д.с.) не зависит от φ , то учитывая, что интеграл по φ равен 2π , имеем $i^c(z) = \mathbf{j}_z^c(z) 2\pi a$.

Пусть $\dot{\mathbf{I}}^c = \mathbf{1}_z \dot{i}^c(z)$ — плотность линейного тока нити. Тогда для нити $\dot{\mathbf{j}} = \dot{\mathbf{I}}^c(z) \delta(x-0) \delta(y-0)$, а ток в «поперечном сечении» $S'_\perp(z)$ нити

$$\int_{S'_\perp} \dot{\mathbf{j}} d\mathbf{S} = \int_{S'_\perp} \mathbf{1}_z \dot{i}^c(z) \delta(x-0) \delta(y-0) \mathbf{1}_z dx dy = \dot{i}^c(z).$$

Приравнявая токи в сечениях $S_\perp(z)$ и $S'_\perp(z)$ оригинала и математической модели, получаем $i^c(z) = \mathbf{j}_z^c(z) \cdot 2\pi a = \dot{i}^c(z)$.

Таким образом тонкий вибратор длины L с током $i^c(z)$ заменяется математической моделью — нитью длины L с плотностью линейного тока $\dot{i}^c(z) = i^c(z)$. Это математическая модель первого приближения, она не учитывает влияния толщины вибратора на характеристики возбуждаемого ЭМ поля и возможной зависимости плотности стороннего тока от азимутальной координаты, наличие неоднородностей на поверхности вибратора, например, токов на его торцах.

В оригинале длина разреза $\Delta \ll L$, $\Delta \ll \lambda$. В математической модели источника стороннего тока считается, что разрез заполнен сторонним током.

В ряде применений относительная длина прямолинейного вибратора может быть велика ($L/\lambda \gg 1$). В этом случае математической моделью прямолинейного вибратора может быть бесконечная прямолинейная нить тока, т.е. считается, что $L/\lambda \rightarrow \infty$.

В диапазонах, где длина волны λ велика, излучатели длины, сравнимой с λ , не могут быть созданы по конструктивным и экономическим соображениям, поэтому применяются короткие по сравнению с λ излучатели ($L/\lambda \ll 1$).

3. Выполняя аналогичные рассуждения, при тех же допущениях можно заменить рамку электрического тока радиуса a (рис. 2.1,б) математической моделью — витком нити электрического тока того же радиуса a (рис. 2.1,з). При этом ток в поперечном сечении $S_{\perp}(\varphi)$ рамки $i^c(\varphi) = j^c(\varphi)$, где j^c — плотность линейного тока нити, φ — азимутальная координата.

Если длина витка очень мала по сравнению с длиной волны ($2\pi a \ll \lambda$), то модель называют элементарной рамкой электрического тока (элементарной электрической рамкой).

4. Прямолинейный вибратор называют магнитным, если по нему «протекает» магнитный ток. Рассмотрим понятие плотности линейного магнитного тока. Пусть щель прямоугольной формы длины L и ширины b прорезана в теле идеальной проводимости и заполнена диэлектриком (рис. 2.2,а). Между точками 1 и 2, расположенными на краях щели, действует сторонняя э.д.с. \mathcal{E}^c , подведенная, например, с помощью двухпровод-

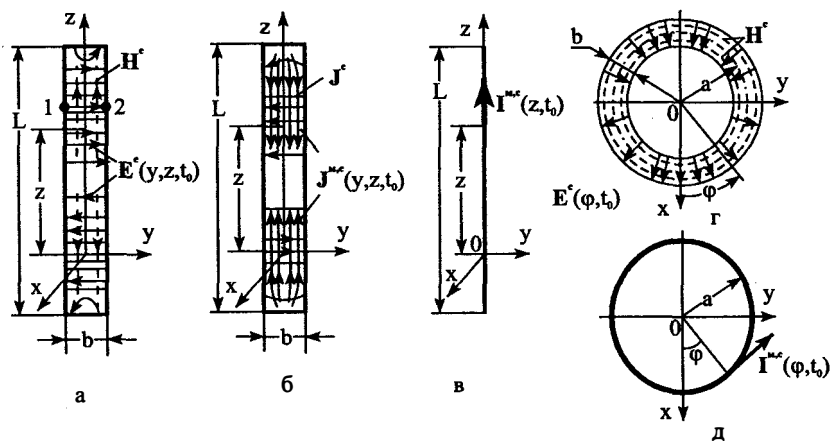


Рис. 2.2. Щелевые излучатели и нити магнитного тока

ной линии. Тогда между кромками щели образуется стороннее ЭМ поле с напряженностями $\dot{\mathbf{E}}^c$, $\dot{\mathbf{H}}^c$. Ось z ДСК направим вдоль оси щели, поверхность щели лежит на плоскости yz . Заменяем $\dot{\mathbf{E}}^c$, $\dot{\mathbf{H}}^c$ значениями $\dot{\mathbf{J}}^{m,c}$, $\dot{\mathbf{J}}^c$ в соответствии с (1.93):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{J}}^{m,c} &= [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}^c] = [-1_x \dot{E}_x^c + 1_y \dot{E}_y^c + 1_z \dot{E}_z^c] = -1_z \dot{E}_y^c + 1_y \dot{E}_z^c, \\ \dot{\mathbf{J}}^c &= [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}] = 1_z \dot{H}_y^c - 1_y \dot{H}_z^c,\end{aligned}$$

т.е. $\dot{J}_y^{m,c} = \dot{E}_z^c$, $\dot{J}_z^{m,c} = -\dot{E}_y^c$; $\dot{J}_y^c = -\dot{H}_z^c$, $\dot{J}_z^c = \dot{H}_y^c$, $\dot{J}_x^{m,c} = \dot{J}_x^c = 0$.

Сторонние поверхностные токи протекают только по щели. Вторичный поверхностный электрический ток в соответствии с (1.93) протекает по поверхности S тела, в котором прорезана щель. Вторичный поверхностный магнитный ток равен нулю на S .

Так как среда линейна, то справедлив принцип наложения: можно отдельно вычислять ЭМ поле, возбуждаемое магнитными токами и отдельно — электрическими токами.

Рассмотрим только магнитный ток. Учтем, что $\dot{\mathbf{j}}^{m,c} = \dot{\mathbf{J}}^{m,c} \delta(x-0)$. Тогда в поперечном сечении $S_{\perp}(z)$ щели «протекает» магнитный ток

$$i^{m,c}(z) = \int_{S_{\perp}} \dot{\mathbf{j}}^{m,c} d\mathbf{S} = \int_{S_{\perp}} \dot{\mathbf{J}}^{m,c}(y,z) \delta(x-0) 1_z dx dy = \int_b \dot{J}_z^{m,c}(y,z) dy = - \int_b \dot{E}_y^c(y,z) dy = \dot{\mathcal{I}}^c(z).$$

Приравняем плотность линейного магнитного стороннего тока $\dot{J}^{m,c}$ прямолинейной нити магнитному току щели (рис. 2.2,в). Получаем $\dot{i}^{m,c} = i^{m,c}(z) = \dot{\mathcal{I}}^c(z)$. Этот путь привел к замене щели с заданным значением $\dot{\mathbf{E}}^c$ нитью *стороннего фиктивного магнитного тока*.

Если щель узкая ($b \ll \lambda$, $b \ll L$), то пренебрегая изменением $\dot{\mathbf{E}}^c$ вдоль y , а значит, считая распределение $\dot{J}_z^{m,c}$ по y постоянным (по ширине щели), получаем, вынося $\dot{J}_z^{m,c}$ из-под знака интеграла, $\dot{i}^{m,c} = -\dot{E}_y^c(z)b = \dot{\mathcal{I}}^c(z)$.

Чтобы получить понятие *рамки (петли, витка) линейного магнитного тока*, надо в узкой ($b \ll \lambda$, $b \ll 2\pi a$) круговой щели заменить стороннюю напряженность электрического поля сторонним поверхностным магнитным током (рис. 2.2,з). После этого вычисляется магнитный ток, «протекающий» через поперечное сечение щели. Последний отождествляется с плотностью линейного стороннего магнитного тока $\dot{\mathbf{i}}^{m,c} = 1_{\varphi} \dot{i}^{m,c}$ рамки (рис. 2.2,д).

Если длина витка мала ($2\pi a \ll \lambda$), то модель называют *элементарной магнитной рамкой*.

Нити магнитного тока в неограниченном однородном пространстве используются как математические модели магнитных излучателей. Пример щелевого излучателя помогает пояснить понятия плотностей линейного и поверхностного магнитных токов.

5. Рассмотрим частные случаи распределений плотностей линейных токов в области V_n . В отличие от стационарного случая (§ 1.4), когда токи одинаковы в каждом сечении провода, ток в каждом поперечном сечении вибратора в общем случае разный. Например, для прямолинейного вибратора $i^c = i^c(z)$. Следовательно, в математической модели плотность тока меняется по длине нити:

$i^c = i^c(p) = |i^c| \exp(i\psi)$. Это значит, что и амплитуда $|i^c|$ и фаза ψ тока могут быть сложными функциями положения точки на нити. Чаще всего применяются следующие законы распределения тока по вибратору: 1) закон бегущей волны (для прямолинейного вибратора)

$$i^c = i^c(z) = i_0 \exp(-ik_0z), \quad i_0 = |i_0| \exp(i\psi_0),$$

где $|i_0|$, ψ_0 — плотность и фаза тока при $z = 0$, $k_0 = \beta_0 - i\alpha_0$; 2) равномерное (однородное) распределение амплитуды и фазы тока вдоль вибратора (при $k_0 = 0$); 3) закон стоячей волны. Если разрез с \dot{E}^c сделан в середине прямолинейного вибратора, то расположив начало отсчета координаты z в середине вибратора (рис. 2.3), при законе стоячей волны имеем: $i^c = i^c(z) = i_0 \sin \beta_0(L/2 \mp z)$, где верхний знак берется при $z \in [0, L/2]$, а нижний — при $z \in [-L/2, 0]$.

Мгновенное значение тока в вибраторе (или плотности линейного тока) определяется по правилу (1.60). Например, в случае закона бегущей волны

$$I^c(z, t) = \text{Re}[i^c(z) \exp(i\omega t)] = |i_0| \exp(-\alpha_0 z) \cos(\omega t - \beta_0 z + \psi_0).$$

При этом в каждом сечении $z = z_1 = \text{const}$ вибратора ток меняется во времени по гармоническому закону. В фиксированный момент времени $t = t_0 = \text{const}$ фаза тока $\psi(z, t_0) = -\beta_0 z + \Phi_0$, где $\Phi_0 = \omega t_0 + \psi_0$, меняется по z линейно (рис. 2.3, б, график 1), амплитуда тока $|i_0| \exp(-\alpha_0 z)$ с ростом z убывает (затухает) по экспоненциальному закону и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания. На графике 1 (рис. 2.3) изображено распределение тока при $t = t_0$ для нити дли-

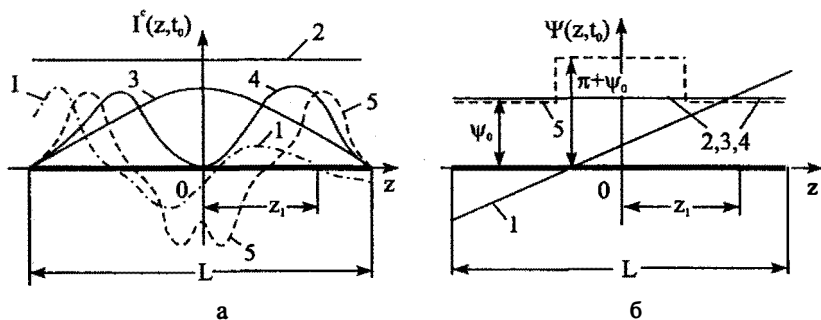


Рис. 2.3. Графики распределения тока по нити

ной $L = 13\lambda_0/8$. На нити имеются участки с противофазными токами (ток на этих участках течет в противоположных направлениях, т.е. сдвинут по фазе на 180°). При $t = \text{var}$ картина тока смещается (бежит) вдоль нити со скоростью $v_{zo} = \omega/\beta_0$, а амплитуда тока при этом затухает как $\exp(-\alpha_0 z)$. При $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ имеем равномерное (однородное) распределение тока (рис. 2.3, графики 2).

В случае закона стоячей волны

$$I^c(z, t) = |I_0| \sin \beta_0 (L/2 \mp z) \cos(\omega t + \psi_0),$$

где $|I_0|$, ψ_0 — амплитуда и начальная фаза тока нити. В каждом сечении $z = z_1$ ток во времени меняется по гармоническому закону с частотой ω . В фиксированный момент времени $t = t_0$ ток в симметричных относительно середины вибратора точках одинаков по амплитуде и фазе; амплитуда тока распределена по длине вибратора по закону стоячей волны (как в разомкнутой длинной линии): на конце вибратора ток (в любое время) равен нулю (узел тока), а затем нарастает и на расстоянии $\lambda_0/4$ от конца вибратора достигает пучности, после чего убывает до нуля; узел тока появляется на расстоянии $\lambda_0/2$ от конца вибратора. Если $L = 0,5\lambda_0$, то вдоль вибратора укладывается одна полуволна тока (график 3 на рис. 2.3, а), при $L = \lambda_0$ — две полуволны (график 4). При $L \leq \lambda_0$ ток на нити синфазен (рис. 2.3, графики 3, 4). В случае $L > \lambda_0$ появляются участки с противофазным током (рис. 2.3, графики 5).

Распределение плотности линейного заряда в каждом конкретном случае может быть определено из закона сохранения заряда.

6. Область V_n источника сторонней э.д.с., как отмечалось в § 1.5, может быть расположена в разрезе вибратора (рис. 1.10 и рис. 2.1, а). Сторонний источник возбуждает в пространстве первичное ЭМ поле, которое наводит вторичный ток в вибраторе. В свою очередь, этот ток порождает вторичное ЭМ поле. Полное ЭМ поле должно удовлетворять граничным условиям на поверхности вибратора. Если выразить касательную к поверхности составляющую вектора E полного поля и считать, что вибратор изготовлен из идеального проводника, то из граничного условия можно получить для определения распределения поверхностного тока интегральное уравнение. Приближенное решение последнего при $d, \Delta \ll L, \lambda_0$ и при разрезе, расположенном симметрично относительно середины вибратора, дает распределение плотности линейного тока, близкое к закону стоячей волны.

7. В диапазонах УВЧ, СВЧ, КВЧ обычно применяются поверхностные излучатели. Если в устройстве, изображенном на рис. 1.16, предположить, что металл стенок трубы имеет бесконечную проводимость, то, как уже отмечалось в § 1.12, на внешней поверхности трубы магнитный поверхностный ток отсутствует, а электрический поверхностный ток не равен нулю. Пренебрегая излучением последнего, приходим к тому, что поле во внешнем пространстве возбуждается только плотностями сторонних электрического и магнитного токов на поверх-

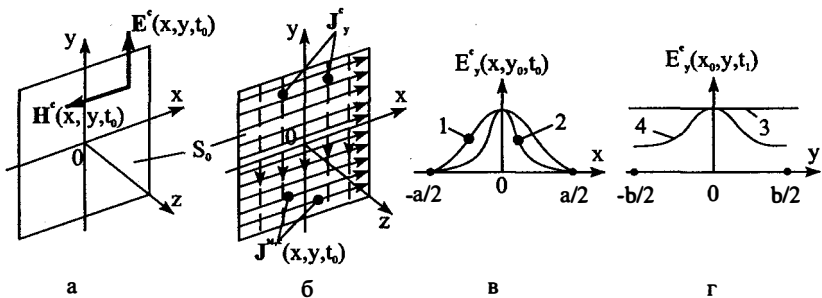


Рис. 2.4. Математическая модель поверхностного излучателя и графики распределения амплитуды поля

ности S_0 . Таким образом с помощью допущений приходим от сложного оригинала (рис. 1.16) к математической модели: имеется поверхность S_0 , на которой заданы значения сторонних напряженностей электрического \dot{E}^c и магнитного \dot{H}^c полей (рис. 2.4,а). Последние могут быть заменены плотностями поверхностных магнитного $\dot{J}^{m,c}$ и электрического \dot{J}^c сторонних токов (рис. 2.4,б). Необходимо найти значения \dot{E} , \dot{H} в точке p при $z > 0$.

В рассматриваемом случае поверхность S_n , ограничивающая область V_n , вырождается в поверхность окна S_0 . В общем случае поверхность S_0 может иметь любую форму. В случае плоской поверхности прямоугольной формы площадь $S_0 = a \times b$, где a, b — размеры вдоль осей x и y . При $a/\lambda \rightarrow \infty$ она становится бесконечной лентой, которая при малом значении b/λ превращается в бесконечную щель. Один из поверхностных токов на S_0 может отсутствовать; например, если металлическое тело находится в ЭМ поле, то на его поверхности текут электрические токи (магнитные токи при идеальной проводимости отсутствуют); при этом S_0 является излучателем, на котором задан \dot{J}^c .

Если $a/\lambda \rightarrow \infty$, $b/\lambda \rightarrow \infty$, то S_0 можно считать плоскостью. Таким образом, получим математическую модель излучающей плоскости с заданными на ней плотностями поверхностных сторонних токов.

Законы распределения вдоль осей x и y на S_0 составляющих векторов \dot{E}^c , \dot{H}^c определяются так же, как в случае прямолинейных излучателей. На рис. 2.4,в для примера изображены возможные графики зависимости амплитуды \dot{E}_y^c от x при некотором значении $y = y_0 = \text{const}$ в фиксированный момент времени $t = t_0$: поле, распреде-

ленное по закону $\cos \pi x/a$ (график 1), меняется медленнее по x , чем поле, распределенное по закону $\cos^2 \pi x/a$ (график 2).

На рис. 2.4,*з* изображены графики равномерного (график 3) и неравномерного (график 4) распределений амплитуды поля вдоль оси u при фиксированных значениях $x = x_0$, $t = t_1$.

Зависимость фаз составляющих векторов $\dot{\mathbf{E}}^c$ или $\dot{\mathbf{H}}^c$ от x или u может быть изображена так же, как в случае прямолинейных излучателей (рис. 2.3,*б*).

2.3. Прямолинейные излучатели. Общие выражения составляющих векторов поля

1. Прямолинейный электрический вибратор является основным излучателем, применяемым в радиотехнике (рис. 1.10, 1.11, 2.1,*а*). Считаем, что условия применения *математической модели* — прямолинейной нити электрического тока — удовлетворяются. Задана длина L нити и функция распределения электрического тока $\dot{i}^c = |\dot{i}^c| \exp(i\psi^c)$ по длине нити. Необходимо найти значения $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{H}}$ в любой точке p неограниченного пространства, заполненного однородной изотропной линейной средой.

Ось z ДСК направим вдоль нити, начало координат расположим на нити (рис. 2.5,*а*). Тогда $\dot{\mathbf{I}}^c = \mathbf{1}_z \dot{i}^c(z)$, а плотность объемного тока

$$\dot{\mathbf{j}}^c(p) = \begin{cases} \dot{\mathbf{I}}^c(z)\delta(x-0)\delta(y-0), & z \in L \\ 0, & z \notin L \end{cases} \quad (2.1)$$

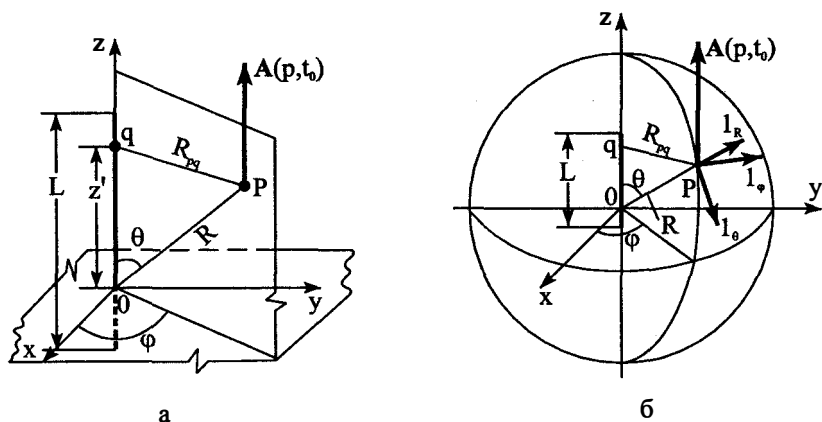


Рис. 2.5. Прямолинейная нить тока и сферическая система координат

Можно предположить, что в плоскости, перпендикулярной нити тока, векторы ЭМ поля не должны зависеть от угла φ на точку наблюдения p , так как все направления по φ равноправны (рис. 2.5,а). В полуплоскости, проходящей через нить тока и точку p , поле должно зависеть от угла θ , поскольку направления по углу θ неравноправны.

Надо установить зависимость векторов поля от угловой координаты θ и расстояния R , взаимную ориентацию векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в пространстве, направление силовых линий векторов поля, фронт распространяющейся волны, скорость распространения фронта волны, скорость переноса полей энергии, зависимость скоростей от частоты и параметров пространства, излучаемую мощность и другие характеристики ЭМ поля.

2. Для решения задачи надо вычислить векторные потенциалы, а затем с помощью выражений (1.124), (1.125) определить векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$.

Вычислим векторные потенциалы. Так как $\dot{\mathbf{j}}^{m,c} = 0$, то в соответствии с (П 4.4) $\dot{\mathbf{A}}^m = 0$. Значение $\dot{\mathbf{A}}$ находим из (П 4.4), где $\dot{\mathbf{j}}^c(q)$ задано выражением (2.1), а функция Грина $G(p,q)$ неограниченного трехмерного пространства определена выражением (П 4.8):

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_n} \dot{\mathbf{j}}^c(z') \delta(x'-0) \delta(y'-0) \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'.$$

Интегрируя по x' и y' и используя при этом основное свойство (П 2.1) δ -функции, имеем

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{4\pi} \int_L \dot{\mathbf{j}}^c(z') \frac{e^{-ik\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}} dz' = \frac{1}{4\pi} \int_L \dot{\mathbf{j}}^c(z') \frac{e^{-ikR_{pq}}}{R_{pq}} dz'. \quad (2.2)$$

Координата z' точки интегрирования $q(0,0,z')$ (рис. 2.5,а) принимает все значения, принадлежащие длине вибратора ($z' \in L$), поэтому здесь обозначено

$$R_{pq} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2} = \sqrt{R^2 - 2zz' + z'^2}, \quad (2.3)$$

где $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ — расстояние от начала координат до точки наблюдения p .

Векторный потенциал в точке p имеет только одну составляющую $\dot{\mathbf{A}} = 1_z \dot{A}_z$ ($\dot{A}_x = \dot{A}_y = 0$).

Теперь можно найти вектор $\dot{\mathbf{H}}(p)$ из (1.125). Вычисления выполним в сферической системе координат (ССК) R, θ, φ (рис. 2.5,б). Эту систему обычно применяют при анализе поля излучателей конеч-

ных размеров. Плоскость при $\theta = \pi/2$, проходящую через экватор, называют *экваториальной*. Полу плоскость, проходящую через меридиан и ось z , называют *меридиональной*. Координату R называют *радиальной*, θ — *угломестной*, φ — *азимутальной*.

Поскольку $\dot{H}_R = \text{rot}_R \dot{A}$, $\dot{H}_\theta = \text{rot}_\theta \dot{A}$, $\dot{H}_\varphi = \text{rot}_\varphi \dot{A}$, то по (П 1.19)

$$\dot{H}_R = \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{A}_\varphi) - \frac{\partial \dot{A}_\theta}{\partial \varphi} \right] \quad (2.4)$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \dot{A}_R}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{A}_\varphi) \right], \quad \dot{H}_\varphi = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R \dot{A}_\theta) - \frac{\partial \dot{A}_R}{\partial \theta} \right]. \quad (2.5)$$

Но по (П 1.1) $\dot{A}_R = (\dot{A} \mathbf{1}_R) = \dot{A}_z (\mathbf{1}_z \mathbf{1}_R) = \dot{A}_z \cos \theta$; $\dot{A}_\theta = (\dot{A} \mathbf{1}_\theta) = \dot{A}_z (\mathbf{1}_z \mathbf{1}_\theta) = \dot{A}_z (-\sin \theta)$; $\dot{A}_\varphi = (\dot{A} \mathbf{1}_\varphi) = \dot{A}_z (\mathbf{1}_z \mathbf{1}_\varphi) = 0$.

Величина \dot{A}_z не зависит от угла φ , поэтому $\partial / \partial \varphi = 0$. Учитывая это, из (2.4), (2.5) находим:

$$\dot{H}_R = 0, \quad \dot{H}_\theta = 0, \quad \dot{H}_\varphi = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \sin \theta) \dot{A}_z - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \dot{A}_z). \quad (2.6)$$

Следовательно, вектор напряженности магнитного поля имеет только одну — *азимутальную* — составляющую \dot{H}_φ ($\dot{H} = \mathbf{1}_\varphi \dot{H}_\varphi$) и, значит, *силовые линии магнитного поля лежат в плоскостях, перпендикулярных нити*, т.е. в плоскостях, параллельных экваториальной плоскости.

Подставим значение \dot{A}_z из (2.2) в выражение (2.6):

$$\dot{H}_\varphi = -\frac{1}{4\pi R_L} \int i^c(z') \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{e^{-ikR_{pq}}}{R_{pq}} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{e^{-ikR_{pq}}}{R_{pq}} \right) \right] dz'.$$

Дифференцируя под знаком интеграла, учитывая, что

$$\frac{\partial R_{pq}}{\partial R} = \frac{R - z' \cos \theta}{R_{pq}}, \quad \frac{\partial R_{pq}}{\partial \theta} = \frac{R z' \sin \theta}{R_{pq}},$$

и приводя подобные члены, получим

$$\dot{H}_\varphi = \frac{ikR}{4\pi} \sin \theta \int \frac{i^c(z')}{L} \frac{e^{-ikR_{pq}}}{R_{pq}^2} \left(1 + \frac{1}{ikR_{pq}} \right) dz'. \quad (2.7)$$

Вектор \dot{E} можно найти из (1.124), где надо выполнить дифференциальные операции второго порядка. Но проще определить \dot{E} из первого уравнения Максвелла, где выполняются дифференциальные операции первого порядка. Если точка наблюдения p находится вне источников ($p \notin V_n$), то уравнения Максвелла являются однородными:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (2.8)$$

Из первого уравнения получаем $\dot{\mathbf{E}} = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} / i\omega \tilde{\epsilon}_a$, $p \notin V_n$, и в соответствии с (П 1.19) составляющими вектора $\dot{\mathbf{E}}$ являются:

$$\begin{aligned} \dot{E}_R &= \frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_a} \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{H}_\varphi) - \frac{\partial \dot{H}_\theta}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_a} \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{H}_\varphi); \\ \dot{E}_\theta &= \frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_a} \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \dot{H}_R}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{H}_\varphi) \right] = -\frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_a} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{H}_\varphi); \\ \dot{E}_\varphi &= \frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_a} \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R \dot{H}_\theta) - \frac{\partial \dot{H}_R}{\partial \theta} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

так как $\dot{H}_R = \dot{H}_\theta = 0$ по (2.6). Таким образом с помощью соотношений (2.9) могут быть вычислены все составляющие вектора $\dot{\mathbf{E}}$ по найденной в (2.7) составляющей \dot{H}_φ . Из (2.9) следует, что в общем случае $\dot{\mathbf{E}}$ имеет только радиальную \dot{E}_R и угломестную \dot{E}_θ составляющие. Поэтому силовые линии электрического поля лежат в меридиональных плоскостях. Из изложенного следует, что $\dot{\mathbf{E}} \perp \dot{\mathbf{H}}$.

3. Рассмотрим математическую модель прямолинейного магнитного вибратора — прямолинейную нить стороннего фиктивного магнитного тока. Длина нити задана и равна L . Считаем, что по нити тока (рис. 2.5.a) протекет сторонний магнитный ток

$$\mathbf{j}^{m,c}(p) = 1_z j^{m,c}(z) \delta(x-0) \delta(y-0). \quad (2.10)$$

Магнитный линейный ток отличен от нуля только в пределах нити:

$$j^{m,c} = \begin{cases} j^{m,c} & | \exp(i\Phi(z)), \quad z \in L; \\ 0 & j^{m,c} = 0, \quad z \notin L. \end{cases}$$

В соответствии с (П 4.4) $\dot{\mathbf{A}} = 0$, так как $\mathbf{j}^c = 0$. Вектор $\dot{\mathbf{A}}^m$ определяется по (П 4.4), (2.10) с учетом (П 4.8)

$$\dot{A}_z^m = \frac{1}{4\pi} \int_L j^c(z') \frac{e^{-ikR_{pq}}}{R_{pq}} dz', \quad \dot{A}_x = \dot{A}_y = 0. \quad (2.11)$$

Из (1.124) следует, что $\dot{\mathbf{E}} = -\operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}^m$. В ССК, вычисляя так же, как в случае нити электрического тока, находим

$$\dot{E}_R = 0, \quad \dot{E}_\theta = 0, \quad \dot{E}_\varphi = -\frac{ikR}{4\pi} \sin \theta \int_L j^{m,c}(z') \frac{e^{-ikR_{pq}}}{R^2_{pq}} \left(1 + \frac{1}{ikR_{pq}} \right) dz'. \quad (2.12)$$

Из второго уравнения Максвелла (2.8) получаем

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{i\omega \mu_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}, \quad p \notin V_n,$$

и составляющими вектора являются:

$$\dot{H}_R = -\frac{1}{i\omega \mu_a} \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{E}_\varphi), \quad \dot{H}_\theta = \frac{1}{i\omega \mu_a} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{E}_\varphi), \quad \dot{H}_\varphi = 0. \quad (2.13)$$

Эти же результаты легко получить из (2.7)–(2.9) путем применения принципа перестановочной двойственности (§ 1.10).

Из выражений (2.12) и (2.13) следует, что $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_\varphi \dot{E}_\varphi$ лежит в плоскостях, перпендикулярных оси излучателя (в плоскостях, параллельных экваториальной плоскости). Вектор $\dot{\mathbf{H}}$ имеет только радиальную и угломерную составляющие \dot{H}_R и \dot{H}_θ и, следовательно, силовые линии магнитного поля лежат в меридиональных плоскостях; $\dot{\mathbf{E}} \perp \dot{\mathbf{H}}$.

2.4. Поле прямолинейных излучателей в зоне излучения

1. Основной интерес представляет поле на очень больших расстояниях от излучателя, таких, что $R \gg L$. Эту область пространства называют *дальней зоной или зоной излучения*. Рассмотрим в этой зоне значения составляющих \dot{H}_φ и $\dot{E}_R, \dot{E}_\theta$ поля нити электрического тока. Выражение для расстояния R_{pq} между точкой интегрирования q и точкой наблюдения поля p можно в этом случае упростить (рис. 2.5,а). Так как $z = R \cos \theta$, то из (2.3) имеем

$$R_{pq} = \left(R^2 - 2Rz' \cos \theta + (z')^2 \right)^{1/2} = R \left(1 - 2z' \cos \theta / R + (z')^2 / R^2 \right)^{1/2}.$$

Но $|z'| \leq L$ и при $R \gg L$ получаем, что $|z'|/R \ll 1$. Поэтому под корнем второе и третье слагаемые значительно меньше единицы. Учитывая, что при $\Delta \ll 1$ $(1 \pm \Delta)^{1/2} \approx 1 \pm \Delta/2$, находим

$$R_{pq} \approx R \left(1 - \frac{z'}{R} \cos \theta + \frac{z'^2}{2R^2} \right) \approx R - z' \cos \theta. \quad (2.14)$$

Если считать, что прямые qp и Op на рис. 2.6,а параллельны, то $R_{pq} = R - z' \cos \theta$; при этом расстояния от точечных источников, расположенных в начале координат и в точке q , до точки наблюдения отличаются на величину $z' \cos \theta$. Эту величину в оптике называют *разностью хода лучей*.

С учетом (2.14), поскольку $R \gg |z' \cos \theta|$,

$$1/R_{pq} \approx 1/(R - z' \cos \theta) \approx 1/R. \quad (2.15)$$

Однако, при $R \gg L$

$$e^{-ikR_{pq}} \approx e^{-ik(R - z' \cos \theta)} = e^{-ikR} \cdot e^{ikz' \cos \theta}, \quad (2.16)$$

т.е. разностью хода $z' \cos \theta$ в показателе экспоненты пренебрегать нельзя, так как в общем случае величина $|kz' \cos \theta|$ не является малой (роль отброшенного слагаемого $(z')^2/2R$ уточнена в § 2.10).

С учетом (2.15), (2.16) при $R \gg L$

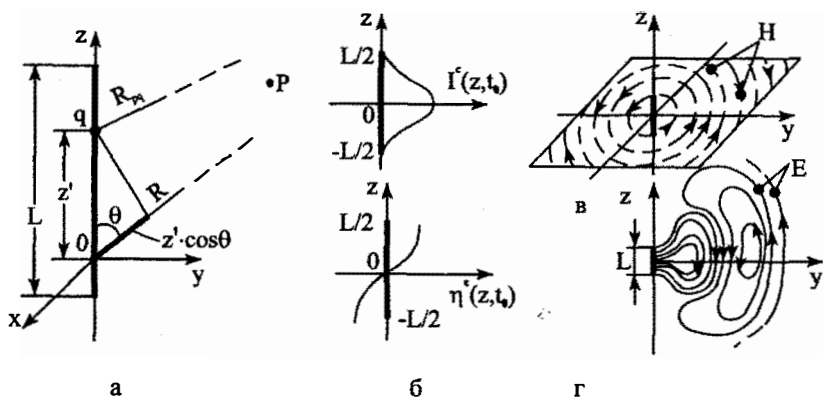


Рис. 2.6. Разность хода лучей, графики распределения плотности тока и заряда и силовые линии магнитного и электрического полей

$$R \frac{e^{-ikR_{pq}}}{R_{pq}^2} \left(1 + \frac{1}{ikR_{pq}} \right) \approx \frac{e^{-ikR} \cdot e^{ikz' \cos \theta}}{R} \left(1 + \frac{1}{ikR} \right) \approx \frac{e^{-ikR} \cdot e^{ikz' \cos \theta}}{R},$$

где, для того, чтобы можно было пренебречь вторым слагаемым в круглых скобках, считается, что $|k|R \gg 1$.

Таким образом, в дальней зоне из выражения (2.7) получаем при $|k|R \gg 1$

$$\dot{H}_\varphi \approx \frac{ik}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikR}}{R} \int_L j^c(z') e^{ikz' \cos \theta} dz'. \quad (2.17)$$

Знак приближенного равенства в дальней зоне обычно заменяют знаком равенства. Значение интеграла в (2.17) зависит от функции распределения тока $j^c(z)$ по нити, относительной длины излучателя L/λ , коэффициента распространения k и направления на точку наблюдения поля. Введем обозначение

$$a^3 F(\theta) = \sin \theta \int_L j^c(z') e^{ikz' \cos \theta} dz', \quad (2.18)$$

где a^3 — множитель, независящий от θ , $F(\theta)$ — функция, характеризующая зависимость поля от угла θ . Тогда

$$\dot{H}_\varphi = \frac{ika^3 e^{-ikR}}{4\pi R} F(\theta). \quad (2.19)$$

Найдем выражения составляющих вектора $\dot{\mathbf{E}}$ в дальней зоне. Подставляя \dot{H}_φ из (2.19) в (2.9), получаем при $|k|R \gg 1$

$$\dot{E}_R = \frac{ka^3}{\omega\tilde{\epsilon}_a 4\pi R^2} \frac{e^{-ikR}}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} [\sin\theta F(\theta)]; \quad \dot{E}_\theta = \frac{k}{\omega\tilde{\epsilon}_a} \dot{H}_\varphi; \quad \dot{E}_\varphi = 0. \quad (2.20)$$

Из этих выражений видно, что отношение амплитуд

$$|\dot{E}_R|/|\dot{E}_\theta| = 1/|k|R \cdot \left| \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) \right| / |f(\theta)|$$

(где $f(\theta) = \sin\theta F(\theta)$) убывает с ростом расстояния R как $1/|k|R$. Поэтому в дальней зоне $|\dot{E}_R|$ по сравнению с $|\dot{E}_\theta|$ является очень малой величиной. Обычно значением $|\dot{E}_R|$ в дальней зоне пренебрегают. Однако, как видно из последнего соотношения, при некоторых значениях θ , хотя $|\dot{E}_R|$ мало, $|\dot{E}_R|/|\dot{E}_\theta|$ может иметь большую величину (где $|\dot{E}_\theta|$ мало) и при исследовании структуры силовых линий электрического поля это надо учитывать.

Из выражений (2.20) следует, что в зоне излучения

$$\dot{E}_\theta / \dot{H}_\varphi = W = k / \omega\tilde{\epsilon}_a = \omega\sqrt{\tilde{\epsilon}_a\mu_a} / \omega\tilde{\epsilon}_a = \sqrt{\mu_a / \tilde{\epsilon}_a} \quad (2.21)$$

— комплексная величина ($W = |W| \exp(i \arg W)$), имеющая размерность сопротивления, называется *характеристическим сопротивлением* неограниченного пространства. Таким образом, в зоне излучения

$$\dot{E}_\theta = W\dot{H}_\varphi, \quad \dot{E}_R = 0, \dot{E}_\varphi = 0 \quad (2.22)$$

и, значит, вектор $\dot{\mathbf{E}}$ содержит единственную составляющую \dot{E}_θ , связанную с единственной составляющей \dot{H}_φ вектора $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_\varphi \dot{H}_\varphi$ характеристическим сопротивлением пространства, $\dot{\mathbf{E}} \perp \dot{\mathbf{H}} \perp \mathbf{1}_R$ ($\dot{\mathbf{E}} = W[\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{1}_R]$).

2. Силовые линии магнитного и электрического полей определяются дифференциальным уравнением (1.22), в которое входят составляющие векторов $\dot{\mathbf{H}}$ или $\dot{\mathbf{E}}$. Последние могут быть вычислены при конкретном заданном распределении $\dot{I}^c(z)$. Например, при законе стоячей волны $\dot{I}^c(z) = \dot{I}_0 \sin \beta_0(L/2 \mp z)$ (§ 2.2) для фиксированного момента времени $t = t_0$ распределение $\dot{I}^c(z, t_0)$ в случае нити полуволновой длины при $\psi_0 = 0$ приведено на рис. 2.6,б, а силовые линии маг-

нитного поля в части плоскости xu ($\theta = \pi/2$) при $t = t_0$ имеют вид, изображенный на рис. 2.6,в. Силовые линии электрического поля при $t = t_0$ в меридиональной плоскости ($\varphi = \varphi_1$) изображены на рис. 2.6,з.

Функция распределения плотности линейного заряда определяется законом сохранения заряда (1.57). Подставляя в последнее для прямолинейной нити тока $\dot{\rho}^c = \dot{\eta}^c(z)\delta(x-0)\delta(y-0)$ и \dot{j}^c из (2.1), получаем

$$\dot{\eta}^c(z) = -(1/i\omega) \cdot d\dot{j}^c(z)/dz. \quad (2.23)$$

Для нити со стоячей волной заряда находим

$$\dot{\eta}^c = \pm(\dot{I}_0\beta_0/i\omega) \cdot \cos[\beta_0(L/2 \mp z)]. \quad (2.24)$$

Мгновенное значение плотности заряда определяем по (1.60) и (2.24):

$$\eta^c(z,t) = \pm(\dot{I}_0\beta_0/i\omega)\cos[\beta_0(L/2 \mp z)]\cos(\omega t - \pi/2 + \psi_0). \quad (2.25)$$

В случае стоячей волны плотность заряда в точке $z = z_1$ на нити сдвинута по фазе относительно плотности тока на $\pi/2$. График распределения η^c при $t = t_0$ на нити полуволновой длины приведен на рис. 2.6,б ($\psi_0 = 0$).

Силовые линии E начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. В момент времени, когда плотность заряда становится равной нулю, силовые линии у нити замыкаются. В следующий момент времени заряды имеют уже другой знак и порождают новое семейство силовых линий, «прогаливающие» уже существующие семейства в пространство.

3. Для прямолинейной нити фиктивного магнитного тока поле в дальней зоне получаем из (2.12) и (2.13) таким же путем, как и для нити электрического тока или с помощью принципа перестановочной двойственности. Если обозначить

$$a^M F(\theta) = \sin\theta \int_L \dot{j}^{M,c}(z') e^{ikz' \cos\theta} dz', \quad (2.26)$$

где a^M — множитель, независимый от θ , то найдем:

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{ika^M}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} F(\theta); \quad \dot{H}_\theta / \dot{E}_\varphi = -W^{-1}, \quad \dot{H}_R = \dot{H}_\varphi = 0. \quad (2.27)$$

Значит, в дальней зоне \dot{E} имеет единственную составляющую, \dot{H} тоже имеет только одну составляющую; $\dot{E} \perp \dot{H} \perp \mathbf{1}_R$ ($\dot{E} = W[\dot{H}, \mathbf{1}_R]$).

Силовые линии электрического и магнитного полей можно получить, если заменить по принципу перестановочной двойственности (§ 1.10) силовые линии H на рис. 2.5,в на силовые линии E , а силовые линии E — на силовые линии H .

4. Составляющие векторов ЭМ поля в дальней зоне зависят от угловой координаты θ . Азимутальные и угломестные составляющие векторов поля от θ зависят по закону $F(\theta)$, который, как видно из (2.18) и (2.26), определяется функцией распределения тока по нити, от-

носительной длиной нити (излучателя) и коэффициентом распространения. Функцию $F(\theta)$ называют *характеристикой направленности излучателя*.

В общем случае $F(\theta)$ — комплексная величина $F(\theta) = |F(\theta)| \exp[i \arg F(\theta)]$. Функции $F(\theta)$ и $\arg F(\theta)$ называют *амплитудной и фазовой характеристиками направленности*, а их графические изображения — *амплитудной и фазовой диаграммами направленности*. Изучают обычно характеристики направленности для конкретных излучателей (при заданных функции распределения тока, длинах L и λ).

Составляющие векторов поля в дальней зоне от азимутального угла не зависят. Это, как уже отмечалось, объясняется тем, что для прямолинейных излучателей в неограниченном пространстве все направления по φ равноправны. Поэтому и характеристика направленности не зависит от угла φ . В случае более сложных излучателей *характеристика направленности есть функция углов θ и φ : $F = F(\theta, \varphi)$.*

5. Пример. Найти векторы напряженности поля, возбуждаемого в зоне излучения прямолинейной нитью с бегущей волной электрического тока ($k_0 = \beta_0$) в среде без потерь ($k = \beta$). Определить характеристику направленности.

Для решения задачи начало ДСК расположим в середине нити. Ось z направим вдоль нити (рис. 2.3). Тогда плотность линейного тока нити $\dot{I}^c(z) = \dot{I}_0 \exp(-i\beta_0 z)$ (§ 2.2).

По (2.6), (2.18), (2.19) $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_\varphi \dot{H}_\varphi$,

$$\dot{H}_\varphi = \frac{ika^3}{4\pi R} e^{-ikR} F(\theta), \quad a^3 F(\theta) = \sin\theta \int_{-L/2}^{L/2} \dot{I}_0 e^{-i\beta_0 z' + i\beta z' \cos\theta} dz' = \dot{I}_0 L \sin\theta (\sin\xi) / \xi,$$

$$\xi = (\beta_0 - \beta \cos\theta) L / 2.$$

Из (2.22) $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_\theta \dot{E}_\theta$, $\dot{E}_\theta = W \dot{H}_\varphi$. Характеристика направленности определяется функцией $F(\theta) = \sin\theta (\sin\xi) / \xi$.

2.5. Сферическая волна

Выполним анализ ЭМ поля прямолинейной нити электрического тока.

1. Определим вектор Пойнтинга $\dot{\mathbf{\Pi}} = 0,5[\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*]$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{\Pi}} &= \frac{1}{2} [\mathbf{1}_R \dot{E}_R + \mathbf{1}_\theta \dot{E}_\theta, \mathbf{1}_\varphi \dot{H}_\varphi^*] = \frac{1}{2} (\mathbf{1}_R \dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^* - \mathbf{1}_\theta \dot{E}_R \dot{H}_\varphi^*) = \\ &= \mathbf{1}_R \dot{\Pi}_R + \mathbf{1}_\theta \dot{\Pi}_\theta, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $\dot{\Pi}_R = \dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^* / 2$, $\dot{\Pi}_\theta = -\dot{E}_R \dot{H}_\varphi^* / 2$. Вектор Пойнтинга имеет две составляющие — радиальную $\dot{\Pi}_R$ и угломестную $\dot{\Pi}_\theta$. В дальней зоне $\dot{E}_R = 0$ и поэтому $\dot{\Pi}_\theta = 0$, $\dot{\Pi} = \mathbf{1}_R \dot{\Pi}_R$, т.е. $\dot{\Pi}$ имеет только радиальную составляющую. Это показывает, что в дальней зоне поле переносит ЭМ энергию только вдоль возрастающих значений расстояния (в направлении орта $\mathbf{1}_R$), т.е. — от излучателя на бесконечность. Это направление называют *продольным*. Составляющую $\dot{\Pi}_R$ называют *продольной*. Так как в дальней зоне $\dot{E}_\theta = W \dot{H}_\varphi$, то

$$\dot{\Pi}_R = W |H_\varphi|^2 / 2 = |\dot{E}_\theta|^2 / 2W^*. \quad (2.29)$$

Мгновенные значения E_θ и H_φ в дальней зоне определяем по (1.60), (2.19), (2.22):

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \text{Re}[\dot{H}_\varphi e^{i\omega t}] = \text{Re}\left[\frac{ika^3}{4\pi R} e^{-i(\beta-i\alpha)R} \cdot F(\theta) e^{i\omega t}\right] = \\ &= (he^{-\alpha R} / R) \cdot \cos(\omega t - \beta R + \psi^3), \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$E_\theta = \text{Re}[W \dot{H}_\varphi e^{i\omega t}] = (|W| h e^{-\alpha R} / R) \cdot \cos(\omega t - \beta R + \psi^3 + \arg W),$$

где $h = |k| \cdot |a^3| \cdot |F(\theta)| / 4\pi$, $\psi^3 = \pi / 2 + \arg F(\theta) + \arg a^3 + \arg k$.

2. Сначала предположим, что среда не имеет тепловых потерь, т.е. $\sigma = 0$ и линейные гистерезисы отсутствуют. Тогда k и W являются чисто действительными величинами: $k = \beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$, $W = |W|$, $\arg W = 0$, так как по (1.126) и (1.63) $\alpha = 0$ при $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$.

По (2.29) $\dot{\Pi}_R$ — чисто действительная величина. Поэтому среднее за период значение вектора Пойнтинга $\Pi_{cp} = \text{Re} \dot{\Pi} = \mathbf{1}_R \dot{\Pi}_R$ определяет плотность поверхностной активной мощности, переносимой полем от излучателя.

Составляющие векторов поля меняются во времени по тому же гармоническому закону, что и ток I^c , возбуждающий это поле. Но фазы H_φ и E_θ зависят еще и от расстояния R и угла θ . В один и тот же фиксированный момент времени $t = t_1$ при $\theta = \theta_1 = \text{const}$ значения фазы $\omega t_1 - \beta R + \psi^3(\theta_1)$ в точках пространства, расположенных на разных расстояниях R_1 и R_2 от излучателя, различны. Однако, можно выбрать такое время t_1 для точки с расстоянием R_1 и время t_2 — для точки

с расстоянием R_2 , что фазы будут одинаковыми, т.е. $\omega t_1 - \beta R_1 + \psi^3(\theta_1) = \omega t_2 - \beta R_2 + \psi^3(\theta_1)$. Значит,

$$\omega(t_2 - t_1)/\beta = R_2 - R_1. \quad (2.31)$$

Последнее выражение показывает, что для момента времени $t_2 > t_1$ должно быть и $R_2 > R_1$. Значит, фаза, которую H_ϕ и E_θ имеют в фиксированной точке с расстоянием R_1 в произвольный момент времени t_1 , повторяется в более удаленной точке через промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, пропорциональный расстоянию между точками $\Delta R = R_2 - R_1$. Следовательно, в пространстве имеется *волновое движение*, функция $\cos[\omega t - \beta R + \psi^3(\theta)]$ описывает *волну, распространяющуюся в радиальном направлении* (в направлении от излучателя). Эту функцию называют *волновой функцией (множителем)*. Волновыми называют и функции $\exp[i(\omega t - \beta R + \psi^3)]$, $\exp(-i\beta R)$. Поверхность, на которой волновая функция принимает фиксированное значение, называется *поверхностью равных фаз или фронтом волны*. Фронт волны определяется выражением $\omega t - \beta R + \psi^3 = \text{const}$. Из (2.31) следует, что если за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ фронт волны перемещается на расстояние $\Delta R = R_2 - R_1$, то скорость перемещения фазы H_ϕ определится как $v_\phi = \Delta R / \Delta t$. Переходя к бесконечно малым приращениям и взяв полный дифференциал от выражения $\omega t - \beta R + \psi^3 = \text{const}$, получим общую формулу для определения этой скорости

$$v_\phi = dR / dt = \omega / \beta. \quad (2.32)$$

Скорость перемещения фазы составляющих векторов поля называется *фазовой скоростью*.

В неограниченном пространстве без потерь фазовая скорость не зависит от частоты. Неограниченное пространство с параметрами вакуума ($\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$) называют *свободным пространством*, при этом $v_\phi = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 2,998 \cdot 10^8$ м/с, т.е. скорости света в вакууме.

Коэффициент β описывает фазу поля и называется *коэффициентом фазы*. Представить его можно следующими выражениями: $\beta = \omega(\epsilon_a \mu_a)^{1/2} = \omega / v_\phi = 2\pi / (Tv_\phi) = 2\pi / \lambda$, где T — период колебаний, λ — длина волны ЭМ поля в среде с параметрами ϵ_a и μ_a , $\lambda = Tv_\phi$ —

расстояние между двумя точками наблюдения, фаза H_φ или E_θ в которых сдвинута на 2π .

Если ψ^3 не зависит от θ , то E_θ и H_φ имеют в момент времени t одинаковую фазу на сфере радиуса $R = \text{const}$ и, значит, фронтом волны является сфера радиуса R . Волновые множители $\cos(\omega t - \beta R + \psi^3)/R$, $\exp[i(\omega t - \beta R + \psi^3)/R]$, $\exp(-i\beta R)/R$, описывают расходящуюся (бежущую) от излучателя сферическую волну. Поверхность равных фаз такой волны движется со скоростью v_ϕ в радиальном направлении, при этом амплитуды E_θ , H_φ убывают как $1/R$.

В дальней зоне продольные составляющие $E_R = 0$, $H_R = 0$. Такая ЭМ волна, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} , которой лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, называется поперечной волной и кратко обозначается как Т-волна.

Рассмотрим как изменяется поле во времени в некоторой фиксированной точке наблюдения $p = p_1$. Так как в (2.30) $\arg W = 0$, то E_θ и H_φ имеют одинаковую фазу $\omega t - \beta R + \psi^3$ (синфазны во времени). Графики их зависимости от времени в точке $p_1(R_1, \theta_1, \varphi_1)$ изображены на рис. 2.7,а.

Для фиксированного момента времени t_1 графики зависимости E_θ , H_φ от расстояния R изображены на рис. 2.7,б.

3. Теперь изучим ЭМ поле в среде с тепловыми потерями, где $k = \beta - i\alpha$ и W являются комплексными величинами ($\alpha \neq 0$, $\arg W \neq 0$).

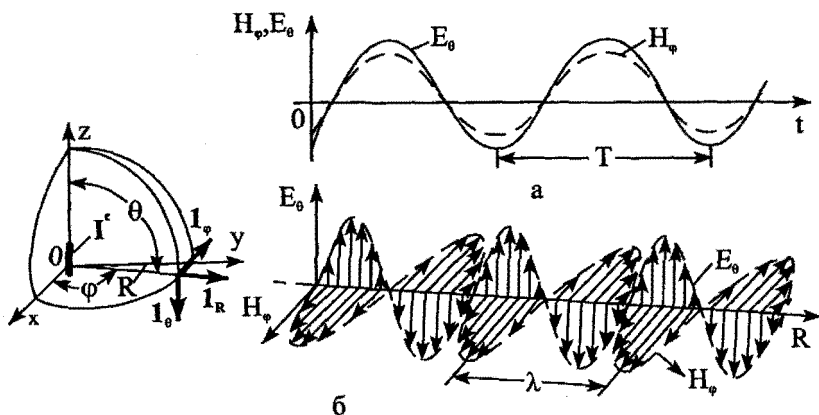


Рис. 2.7. Графики зависимости E_θ и H_φ от t и R

Поперечные составляющие E_θ и H_ϕ , как видно из (2.30), не синфазны: разность фаз между ними равна $\arg W$. Поэтому \dot{I}_R в (2.28) имеет действительную и мнимую части: $\dot{I}_R = 0,5 \left| \dot{H}_\phi \right|^2 |W| \exp(i \arg W)$. Среднее значение вектора Пойнтинга $\Pi_{cp} = \text{Re } \dot{\Pi} = \mathbf{1}_R 0,5 \left| \dot{H}_\phi \right|^2 |W| \times \cos(\arg W)$ зависит от разности фаз E_θ и H_ϕ и убывает с расстоянием как $\exp(-2\alpha R)/R^2$. Волна является поперечной.

При распространении волны амплитуды E_θ и H_ϕ убывают по закону $\exp(-\alpha R)/R$. Экспоненциальный закон $\exp(-\alpha R)$ объясняется тепловыми потерями в среде. Коэффициент α определяет скорость убывания амплитуд E_θ и H_ϕ с увеличением расстояния и называется коэффициентом затухания.

Расстояние δ , на котором амплитуды составляющих векторов поля уменьшаются в $e = 2,718$ раз за счет джоулевых потерь, называют глубиной проникновения поля в среду. Она определяется из условия $\exp(-\alpha \delta) = 1/e$, т.е. $\delta = 1/\alpha$.

Фазовую скорость волны можно определить так же, как в случае среды без потерь: приравнявая фазу поля постоянной и беря полный дифференциал этого выражения, найдем v_ϕ . Физический смысл параметра β тот же: это коэффициент фазы. Но в среде с потерями β зависит от частоты, поэтому и фазовая скорость зависит от частоты, т.е. среда с потерями обладает дисперсионными свойствами.

Если сторонний ток излучателя модулирован во времени (по закону сигнала), то возбуждаемое ЭМ поле тоже модулировано во времени и представляется совокупностью спектральных составляющих. Каждая спектральная составляющая имеет свою, отличную от других, фазовую скорость. Сигнал искажается. Для характеристики скорости распространения сигнала в диспергирующей среде вводят понятие групповой скорости $v_{гр}$. Чтобы пояснить физический смысл понятия групповой скорости и выразить $v_{гр}$ через параметры среды, можно рассмотреть распространение простейшего сигнала, являющегося наложением только двух спектральных составляющих H_ϕ , E_θ частот ω_1 и ω_2 . Из (2.30) для спектральных составляющих H_ϕ имеем:

$$H_{1\phi} = (h_1 e^{-\alpha_1 R}/R) \cos(\omega_1 t - \beta_1 R + \psi_1^3); \quad H_{2\phi} = (h_2 e^{-\alpha_2 R}/R) \cos(\omega_2 t - \beta_2 R + \psi_2^3).$$

Мгновенное значение H_Φ полного поля получается суммированием этих выражений. Если считать, что ω_1 и ω_2 близки ($\omega_1 \rightarrow \omega_2$), то значения $h_1 \exp(-\alpha_1 R)$ и $h_2 \exp(-\alpha_2 R)$ мало отличаются. Обозначая их через $h_0 \exp(-\alpha_0 R)$ и заменяя сумму косинусов произведением косинусов, получаем

$$H_\Phi \approx 2h_0 e^{-\alpha_0 R} \frac{1}{R} \cos \left\{ \frac{1}{2} [(\omega_1 - \omega_2)t - (\beta_1 - \beta_2)R + (\psi_1^3 - \psi_2^3)] \right\} \times \quad (2.33)$$

$$\times \cos \left\{ \frac{1}{2} [(\omega_1 + \omega_2)t - (\beta_1 + \beta_2)R + (\psi_1^3 + \psi_2^3)] \right\}.$$

Первый косинус характеризует огибающую биений, а второй — высокочастотное колебание с частотой $(\omega_1 + \omega_2)/2$. Амплитуда результирующей волны имеет максимум в максимуме огибающей. Групповую скорость определяют как скорость перемещения максимума огибающей, соответствующего максимуму плотности энергии ЭМ поля.

Первый косинус в выражении (2.33) равен единице (достигает максимума), когда аргумент косинуса равен нулю (или целому числу 2π). Обозначая через $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$, $\Delta\psi = \psi_1^3 - \psi_2^3$, имеем $\Delta\omega t - \Delta\beta R + \Delta\psi = 0$. Взяв полный дифференциал и считая, что $\omega_1 \rightarrow \omega_2$, находим

$$v_{гр} = \frac{dR}{dt} = 1/(d\beta/d\omega). \quad (2.34)$$

Групповая скорость при наличии тепловых потерь в среде зависит от частоты. В среде без потерь $\beta = \omega(\epsilon_a \mu_a)^{1/2}$ и поэтому

$$v_{гр} = v_\phi = (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}.$$

4. В случае сред, наиболее часто встречающихся на практике, формулы, характеризующие параметры распространяющегося ЭМ поля, можно упростить. Считаем, что линейные гистерезисы в среде отсутствуют.

Пусть излучатель расположен в диэлектрике с малыми потерями. Тогда $\omega\epsilon_a \gg \sigma$, и выражения (1.127) приближенно запишем в виде:

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad \alpha = (\sigma/2) \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}.$$

Коэффициент затухания не зависит от частоты и пропорционален проводимости среды. Фазовая и групповая скорости в первом приближении равны друг другу и остаются такими же, как в среде без потерь:

$$v_\phi = \omega/\sigma \approx (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}, \quad v_{гр} = (d\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} / d\omega)^{-1} \approx v_\phi.$$

Глубина проникновения поля в среду оказывается обратно пропорциональной проводимости среды и не зависит от частоты: $\delta \approx (2/\sigma) \cdot (\epsilon_a \mu_a)^{1/2}$. Характеристическое сопротивление среды, определяемое выражением $W \approx (\mu_a / \epsilon_a)^{1/2} = |W|$, не зависит от

частоты и совпадает с соответствующим выражением для среды без потерь. Величина $\arg W \approx 0$, поэтому H_φ и E_θ в этом приближении можно считать синфазными.

Пусть излучатель расположен в среде, являющейся *проводником*. При этом $\sigma \gg \omega \epsilon_a$ и выражения (1.127) приближенно запишем в виде: $\alpha \approx \beta \approx (\omega \mu_a \sigma / 2)^{1/2}$. Для фазовой и групповой скоростей и характеристического сопротивления получаем: $v_\varphi = (2\omega / \mu_a \sigma)^{1/2}$, $v_{гр} \approx 2v_\varphi$, $W \approx (\omega \mu_a / \sigma)^{1/2} \cdot \exp(i\pi/4)$. Глубина проникновения поля в среду $\delta \approx (2 / \omega \mu_a \sigma)^{1/2}$.

Итак, в среде, являющейся проводником, коэффициенты фазы и затухания приближенно одинаковы и растут с увеличением частоты, проводимости и магнитной проницаемости; в диапазоне радиочастот они могут иметь большое значение, поскольку величина проводимости среды по условию является значительной. Длина волны λ в среде мала ($\lambda = 2\pi / \beta$), поскольку β велико. Затухание амплитуд H_φ и E_θ получается значительным.

Глубина проникновения поля в среду мала. Модуль $|W| = (\omega \mu_a / \sigma)^{1/2}$ характеристического сопротивления среды, являющейся проводником, имеет малую величину, так как σ велико. Поэтому амплитуда напряженности электрического поля в (2.30) очень мала. Это означает, что среднее значение плотности объемной энергии магнитного поля намного больше соответствующей плотности энергии электрического поля. Составляющие векторов магнитного и электрического полей сдвинуты по фазе на 45° , поскольку $\arg W = \pi/4$.

Как следует из приближенных формул, коэффициенты затухания, глубины проникновения поля в среду и другие параметры существенно отличаются для диэлектрика и проводника. Так, например, в диапазоне частот от ОНЧ до ОВЧ для полистирола (§ 1.3, § 1.5) $\alpha \approx 1,2 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-1}$, $\delta \approx 0,85 \cdot 10^{17} \text{ м}$; для латуни на частоте $f = 3 \text{ ГГц}$ $\alpha \approx 4,2 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$, $\delta \approx 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$.

5. Отметим, что для расположенного в неограниченном пространстве прямолинейного магнитного излучателя с помощью (2.27) можно получить мгновенные значения H_θ и E_φ в дальней зоне и, так же, как выше, вычислить все параметры, характеризующие распространяющуюся от излучателя волну. По существу все параметры не будут отличаться от изученных в настоящем параграфе.

2.6. Элементарный электрический вибратор

1. Элементарным электрическим вибратором называют прямолинейную нить тока, длина которой намного меньше длины волны возбуждаемого поля, а модуль и фаза плотности линейного электрического тока $I^c(z) = I_0 = |I_0| \exp(i\psi_0)$ распределены по длине вибратора равномерно (рис. 2.8,а). Элементарный электрический вибратор является математической моделью диполя Герца, представляющего собою два металлических шара (диаметра d), соединенных тонким проводом, к разрезу провода подсоединен, например, с помощью двухпроводной линии источник э.д.с. (рис. 2.8,б). Если напряжение в разрезе, создаваемое с помощью источника э.д.с., менять во времени по гармоническому зако-

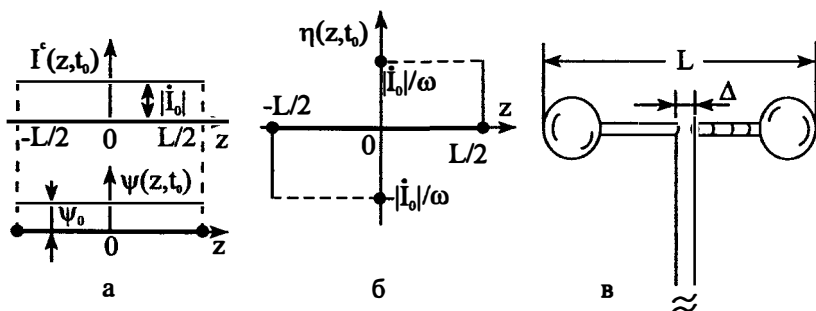


Рис. 2.8. Графики распределения тока и заряда и диполь Герца

ну, то заряды на шарах тоже меняются во времени по гармоническому закону. Под воздействием стороннего источника заряженные частицы колеблются — двигаются между концами вибратора с переменной скоростью. Распределение модуля и фазы электрического тока по длине диполя из-за малой его длины является близким к равномерному. Длина разреза $\Delta \ll L$.

Выразим распределение плотности заряда в математической модели диполя Герца. Из (2.23), учитывая правило дифференцирования ступенчатой функции, изображенной на рис. 2.8, а, имеем

$$\dot{\eta}^c(z) = (iI_0/\omega)[\delta(z + L/2) - \delta(z - L/2)].$$

У конца нити (при $z = L/2$) имеется заряд

$$\dot{Q}^c = \int_0^{L/2} \dot{\eta}^c(z) dz = (-iI_0/\omega) \int_0^{L/2} \delta(z - L/2) dz = -iI_0/\omega. \quad (2.35)$$

На другом конце нити (при $z = -L/2$) имеется заряд противоположного знака

$$\dot{Q}^c = \int_{-L/2}^0 \dot{\eta}^c(z) dz = iI_0/\omega.$$

Мгновенное значение плотности тока $I^c(z, t) = |I_0| \cos(\omega t + \psi_0)$.

Мгновенные значения зарядов: $Q^c(t) = -(|I_0|/\omega) \sin(\omega t + \psi_0)$ — при $z = L/2$ и $Q^c(t) = (|I_0|/\omega) \sin(\omega t + \psi_0)$ — при $z = -L/2$ (рис. 2.8, б). Математическая модель при этом соответствует двум металлическим дискам, соединенным тонким проводом.

Моментом электрического вибратора называют величину $\dot{\mathbf{m}}^3 = \dot{Q}^c \mathbf{L} = -iI_0 \mathbf{L}/\omega$, где \mathbf{L} направлено от отрицательного заряда к

положительному. В случае элементарного вибратора $L \rightarrow 0$ и $\dot{Q}^c \rightarrow \infty$ так, что $\dot{I}_0^c L$ остается постоянным. Тогда плотность объемного тока в любой точке p равна нулю, за исключением точки q , в которой расположен вибратор. При этом в математической модели ее можно выразить через трехмерную δ -функцию: $\dot{\mathbf{j}}^c = \dot{I}_0^c L \delta(p - q) = i\omega \dot{\mathbf{m}}^3 \delta(p - q)$. Линейный излучатель превращается в «точечный» излучатель.

Надо найти и проанализировать возбуждаемое элементарным электрическим вибратором поле. При этом на расстояние до точки наблюдения не будем налагать существенных ограничений, т.е. поле будем искать не только в дальней зоне, но и вблизи вибратора. Это частный случай прямолинейной нити электрического тока.

2. Расположим начало ССК в середине вибратора и направим ось z вдоль его оси (рис. 2.5,б). Тогда из (2.7), учитывая, что $\dot{I}^c(z) = \dot{I}_0$, получаем

$$\dot{H}_\varphi = \frac{ik\dot{I}_0}{4\pi} R \sin \theta \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{-ikR_{pq}}}{R_{pq}^2} \left(1 + \frac{1}{ikR_{pq}} \right) dz'. \quad (2.36)$$

Чем меньше $|k|L$, тем меньше меняется в фиксированной точке наблюдения величина $kR_{pq} = \left[(kR)^2 - 2kz(kz') + (kz')^2 \right]^{1/2}$ при изменении z' , а значит, — подынтегральная функция. Применяя при $|k|L \ll 1$ теорему о среднем, получаем

$$\dot{H}_\varphi \approx \frac{ik\dot{I}_0 L}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikR}}{R} \left(1 + \frac{1}{ikR} \right). \quad (2.37)$$

Это выражение является точным в пределе для «точечного» излучателя. Ниже будем использовать в нем и в выражениях поля, полученных на его основе, знак равенства при $|k|L \ll 1$.

Из (2.9), выполняя операции дифференцирования, находим:

$$\begin{aligned} \dot{E}_R &= \frac{\dot{I}_0 L W}{2\pi} \cos \theta \frac{e^{-ikR}}{R^2} \left(1 + \frac{1}{ikR} \right), \\ \dot{E}_\theta &= \frac{ik\dot{I}_0 L W}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikR}}{R} \left(1 + \frac{1}{ikR} - \frac{1}{(kR)^2} \right), \quad \dot{E}_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Характерным в (2.37), (2.38) является сложная зависимость поля от расстояния R : на малых расстояниях от излучателя в выражении для \dot{H}_φ преобладает слагаемое, меняющееся как $1/R^2$, а в выражениях для \dot{E}_R и \dot{E}_θ — слагаемые, меняющиеся как $1/R^3$. Для того, чтобы

можно было пренебречь другими слагаемыми, кроме указанных, надо, чтобы $|k|R \ll 1$. При этом условии $\exp(-ikR) \approx 1$ и получаем

$$\dot{H}_\varphi \approx \frac{\dot{I}_0 L}{4\pi R^2} \sin \theta, \quad \dot{E}_R \approx \frac{\dot{I}_0 L W}{i 2\pi k R^3} \cos \theta, \quad \dot{E}_\theta \approx \frac{\dot{I}_0 L W}{i 4\pi k R^3} \sin \theta. \quad (2.39)$$

Область пространства вблизи вибратора, радиус которой определяется выражением $|k|R \ll 1$, называется *ближней зоной*. В ближней зоне $\dot{E}_R, \dot{E}_\theta$ в указанном приближении отстают по фазе почти на 90° от \dot{H}_φ . Поэтому обе составляющие \dot{P}_R и \dot{P}_θ вектора Пойнтинга в том же приближении носят почти чисто *реактивный характер*. *Волнового движения поля в этой зоне почти нет*.

При анализе (2.37), (2.38) выделяют зону, в которой модули всех слагаемых имеют примерно одинаковую величину. Эту зону называют *промежуточной зоной*.

В дальней зоне ($|k|R \gg 1$), в (2.37), (2.38) всеми слагаемыми, кроме первых, можно пренебречь. Для нее получаем:

$$\dot{H}_\varphi = \frac{ik\dot{I}_0 L}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad \dot{E}_\theta = W\dot{H}_\varphi, \quad \dot{E}_R = \frac{\dot{I}_0 L W}{2\pi} \cos \theta \frac{e^{-ikR}}{R^2}. \quad (2.40)$$

Эти составляющие векторов могут быть получены и из общих формул (2.18)–(2.20).

Подставляя в (2.18) ток \dot{I}_0 , вынося его из-под знака интеграла, выполняя интегрирование, находим при $|k|L \ll 1$:

$$a^3 F(\theta) = \dot{I}_0 L \sin \theta \frac{\sin[(kL/2)\cos \theta]}{(kL/2)\cos \theta} \approx \dot{I}_0 L \sin \theta,$$

так как функция $\sin \xi / \xi \approx 1$ при $\xi \ll 1$. Поэтому $a^3 \approx \dot{I}_0 L$, $F(\theta) \approx \sin \theta$.

В дальней зоне значением \dot{E}_R можно пренебречь, поскольку $|\dot{E}_R| \ll |\dot{E}_\theta|$. Мгновенные значения H_φ, E_θ не отличаются от соответствующих значений, определяемых в (2.30), если учесть, что $a^3 = \dot{I}_0 L$, $F(\theta) = \sin \theta$. Отметим, что поле в дальней зоне является поперечным (Т-волной) и представляет собой сферическую волну, бегущую от излучателя. В среде без потерь H_φ и E_θ синфазны, характеристическое сопротивление среды является чисто действительным.

3. *Характеристикой направленности элементарного электрического вибратора является выражение*

$$F(\theta) = \sin \theta. \quad (2.41)$$

Она показывает, что вибратор вдоль своей оси (при $\theta = 0^\circ, 180^\circ$) не излучает, при этом $\dot{H}_\varphi = 0$ и $\dot{E}_\theta = 0$. В направлении нормали к оси вибратора (при $\theta = 90^\circ$) $|\dot{H}_\varphi|$, $|\dot{E}_\theta|$ являются максимальными. Амплитудная и фазовая характеристики направленностей имеют вид: $|F(\theta)| = |\sin \theta|$, $\arg F(\theta) = 0$, при $0 \leq \theta \leq \pi$. $F(\theta)$ в (2.41) определяет зависимость \dot{H}_φ , \dot{E}_θ от угла θ , изменяющегося в меридиональной плоскости. Поэтому ее называют *характеристикой направленности в меридиональной плоскости*. Поле от угла φ не зависит — вибратор излучает одинаковое поле во всех направлениях по φ (при $\theta = \text{const}$) — поэтому в экваториальной плоскости ($\theta = 90^\circ$) характеристика направленности может быть записана в виде $F(\varphi) = 1$.

Амплитудные диаграммы направленности в меридиональной (а) и экваториальной (б) плоскостях в полярной системе координат изображены на рис. 2.9. В пространстве амплитудная диаграмма направленности представляет собой тор с нулевым внутренним радиусом.

4. Силовые линии электрического поля по определению касательны вектору поля $\mathbf{E} = \mathbf{1}_R E_R + \mathbf{1}_\theta E_\theta$. Силовые линии магнитного поля касательны вектору $\mathbf{H} = \mathbf{1}_\varphi H_\varphi$. С помощью (2.37), (2.38) можно найти мгновенные значения векторов поля и построить по (1.22) силовые ли-

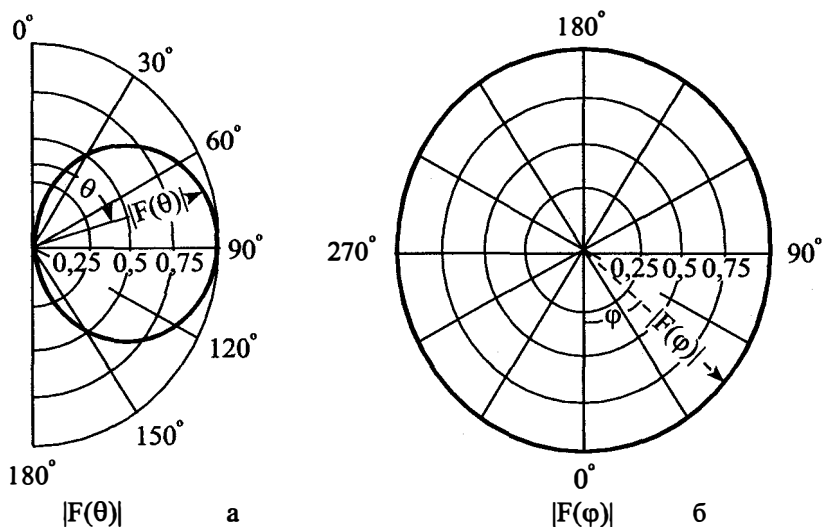


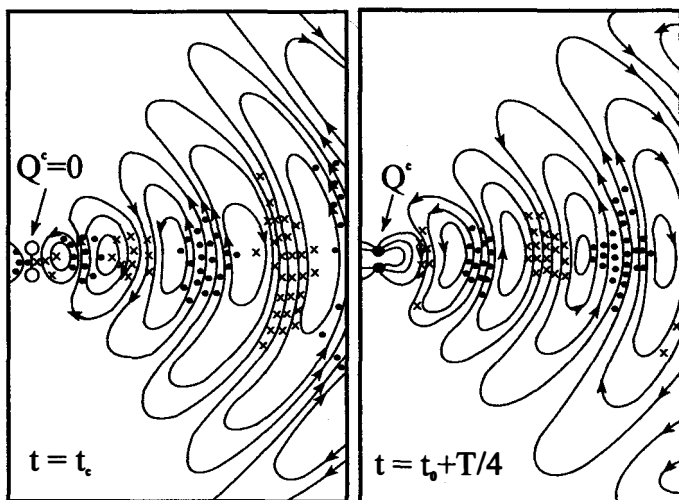
Рис. 2.9. Амплитудные диаграммы направленности

нии для фиксированных моментов времени. Силовые линии E электрического поля «опираются» на электрические заряды. Если выбрать такой момент времени $t = t_0$, что электрические заряды $Q^c(t_0)$ излучателя равны нулю, то силовые линии не «опираются» на заряды и структура силовых линий в некоторой меридиональной плоскости будет качественно выглядеть такой, какая изображена на рис. 2.10,а (структура силовых линий поля на этом рисунке изображена только в части пространства; надо помнить, что поле существует во всем неограниченном пространстве). Через четверть периода при $t = t_0 + T/4$ электрические заряды на концах нити становятся максимальными по абсолютному значению и новое семейство силовых линий «выходит из положительного заряда и входит в отрицательный заряд», при этом «выталкивает» во внешнюю область пространства существующие там семейства линий (рис. 2.10,б). Далее процесс повторяется. Сгущения силовых линий на рис. 2.10 соответствуют максимальным абсолютным значениям E , стрелками показано направление E . Расстояния между соседними максимумами абсолютных значений поля равно половине длины волны $(0,5\lambda)$. Силовые линии электрического поля уже на некотором расстоянии от излучателя замкнуты сами на себя.

Если построить и проанализировать структуру силовых линий для ряда моментов времени, например, между $t = t_0 + 3T/8$ и $t = t_0 + T/2$, то окажется, что постепенно увеличивается число замкнутых силовых линий E , замкнувшись, последние удаляются от нити. Но с другой стороны, «обрывки» этих линий, смыкаются концами с вибратором и «втягиваются» в него по мере того, как заряд вибратора уменьшается. Часть «отшнуровавшихся» от вибратора силовых линий удаляется от него, эти силовые линии, не связанные с вибратором, образуют поле излучения («свободное поле»).

Силовые линии H , изображенные на рис. 2.10 пунктирными линиями, представляют собою окружности с центром на оси излучателя. Сечения таких окружностей в меридиональной плоскости представлены точками и крестиками (точка означает, что H направлен «к нам», крестик — «от нас», т.е. за плоскость рисунка). Сгущения точек и крестиков соответствуют максимальным абсолютным значениям H_ϕ . На больших расстояниях от вибратора там, где H_ϕ имеет максимальное абсолютное значение, имеет максимальное абсолютное значение и E_θ . В экваториальной плоскости на рис. 2.10 сечения силовых линий представлены точками и крестиками. E_R увеличивается при $\theta \rightarrow 0; \pi$, но с

меридиональная плоскость



экваториальная плоскость

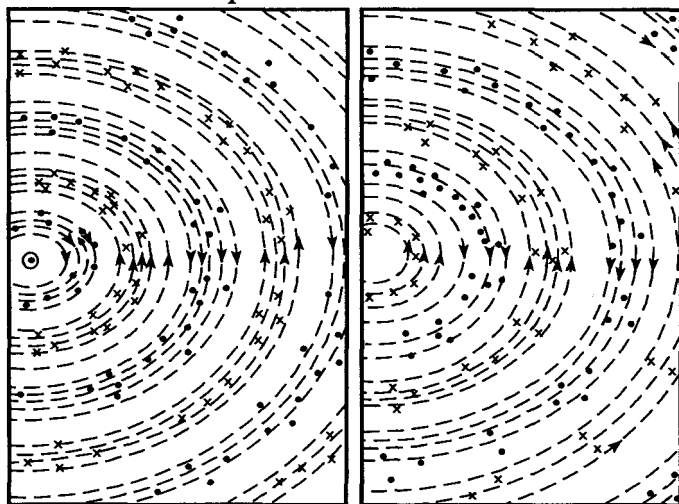


Рис. 2.10. Силовые линии электрического и магнитного полей элементарного электрического вибратора

увеличением расстояния ее значение уменьшается; при больших R она сдвинута по фазе на $\pi/2$ относительно E_θ и H_ϕ .

Силловые линии полей E и H полуволновой нити (рис. 2.6,б,в) мало отличаются от соответствующих линий рис. 2.10,а,б.

5. Сторонний источник в соответствии с уравнением баланса ЭМ энергии (1.69) расходует мощность на создание поля во всем пространстве. Активную и реактивную составляющие этой мощности можно найти по известному потоку вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность S , ограничивающую объем, в котором расположен источник, джоулевым потерям в объеме и запасам энергий электрического и магнитного полей. По известному полю (2.37), (2.38) вибратора все эти слагаемые могут быть вычислены. Здесь с помощью уравнения (1.71) найдем *только мощность, которую расходует источник, подсоединенный к вибратору, на создание поля излучения*. Для этого надо выбрать поверхность S так, чтобы она проходила в дальней зоне.

Рассмотрим наиболее важный для практики случай, когда вибратор расположен в свободном пространстве ($\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$). При этом $\sigma = 0$, $W = W_0 = (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2} = 377,1 \text{ Ом}$, $k = \beta = 2\pi / \lambda$. В дальней зоне $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{1}_R \dot{P}_R$, где $\dot{P}_R = P_R$ — чисто действительная величина определяется по (2.29).

Найдем по (1.71) среднюю мощность, отдаваемую источником в пространство. Эта мощность при отсутствии потерь ($P^{\text{пт}} = 0$) расходуется на создание поля излучения и называется *мощностью излучения* P_Σ :

$$-\text{Re } \dot{P}^c = P_\Sigma = \oint_S \mathbf{n} dS.$$

В качестве поверхности S выбираем поверхность любой сферы с таким радиусом ρ , чтобы S проходила в зоне излучения. Тогда $\mathbf{n} dS = \mathbf{1}_R \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ и

$$P_\Sigma = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} P_R \mathbf{1}_R \mathbf{1}_R \rho^2 \sin \theta d\varphi.$$

Подставляя сюда значение P_R при $R = \rho$, используя выражение (2.40) для \dot{H}_φ и интегрируя по φ , находим

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} W_0 \frac{|i_0|^2 L^2 \pi}{2\lambda^2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\pi}{3} |i_0|^2 W_0 \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2, \quad (2.42)$$

где учтено, что определенный интеграл равен $4/3$.

Вибратор для источника тока представляет нагрузку, в которой расходуется мощность P_Σ . Ток i_0 в нагрузке известен. Приравнявая

мощность, отдаваемую в нагрузку, и мощность излучения, можно рассчитать сопротивление нагрузки R_{Σ} , называемое *сопротивлением излучения* элементарного электрического вибратора:

$$|\dot{i}_0|^2 R_{\Sigma} / 2 = \pi |\dot{i}_0|^2 W_0 (L/\lambda)^2 / 3,$$

откуда имеем

$$R_{\Sigma} = 2\pi W_0 (L/\lambda)^2 / 3 = 80\pi^2 (L/\lambda)^2, \text{ Ом.} \quad (2.43)$$

Так как $L/\lambda \ll 1$, то сопротивление излучения является малой величиной, например, при $L/\lambda = 0,1$, $R_{\Sigma} \approx 8 \text{ Ом}$.

2.7. Рамка электрического тока

1. Рамки применяются или как самостоятельные излучатели или для построения сложных систем излучателей. Рассмотрим математическую модель. Пусть виток нити электрического тока расположен в неограниченном пространстве с параметрами $\tilde{\epsilon}_a$, μ_a (рис. 2.1.з). Введем ССК (рис. 2.11.а). Плотность линейного тока $\dot{I}^c = \mathbf{1}_{\varphi} \dot{i}^c(\varphi)$. Считаем, что длина разреза, к которому подключается источник стороннего тока, так мала, что $\Delta \ll 2\pi a$. Тогда плотность объемного тока с учетом (П2.4) $\dot{\mathbf{j}}^c = \mathbf{1}_{\varphi} \dot{j}_{\varphi}^c$, где $\dot{j}_{\varphi}^c = \dot{i}^c(\varphi) \delta(R-a) \delta(\theta - \pi/2) / R$, а $\varphi \in [0, 2\pi]$. Необходимо найти векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ ЭМ поля рамки.

2. Вычислим векторные потенциалы. Так как $\dot{\mathbf{j}}^{m,c} = 0$, то по

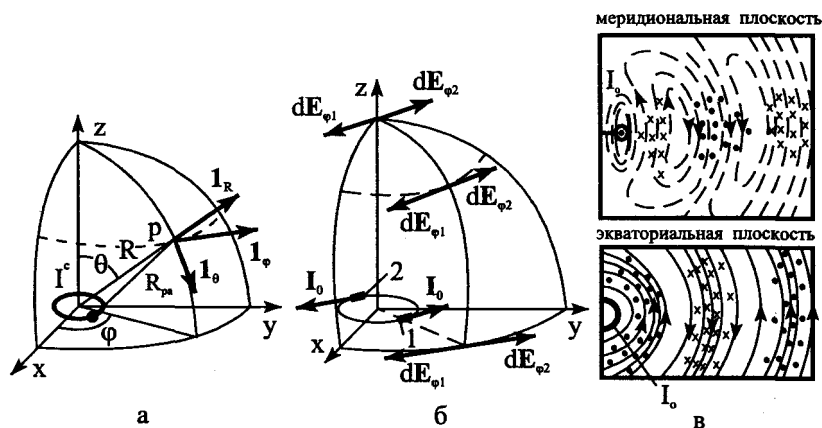


Рис. 2.11. Рамка, силовые линии поля; к пояснению интерференционных явлений

(П4.4) $\dot{\mathbf{A}}^m = 0$. Непосредственно по (П4.4) можно найти только декартовы составляющие вектора $\dot{\mathbf{A}}$ по декартовым составляющим вектора $\dot{\mathbf{j}}^c$. Определим последние: $\dot{j}_x^c = \mathbf{1}_x \dot{\mathbf{j}}^c = -\dot{j}_\varphi^c \sin \varphi$, $\dot{j}_y^c = \mathbf{1}_y \dot{\mathbf{j}}^c = \dot{j}_\varphi^c \cos \varphi$, $\dot{j}_z^c = \mathbf{1}_z \dot{\mathbf{j}}^c = 0$. Заменяя декартовы координаты точек наблюдения $p(x, y, z)$ и интегрирования $q(x', y', z')$ сферическими координатами по (П1.2), имеем $R_{pq} = (R^2 - 2RR' \cos \gamma + R'^2)^{1/2}$, где $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$. При этом по (П4.4)

$$\dot{\mathbf{A}}_m(p) = \int_{V_n} \dot{j}_m^c(q) \frac{e^{-ikR_{pq}}}{R_{pq}} R'^2 \sin \theta' dR' d\theta' d\varphi'$$

где $m = x, y$ или z . Подставляя в это выражение последовательно \dot{j}_x^c , \dot{j}_y^c , \dot{j}_z^c и используя основное свойство δ -функции при интегрировании, находим

$$\dot{A}_x = -\frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \dot{j}^c(\varphi') \sin \varphi' \frac{e^{-ikR_{pa}}}{R_{pa}} d\varphi', \quad R_{pa} = \sqrt{R^2 - 2R a \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') + a^2},$$

$$\dot{A}_y = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \dot{j}^c(\varphi') \cos \varphi' \frac{e^{-ikR_{pa}}}{R_{pa}} d\varphi', \quad \dot{A}_z = 0,$$

В ССК $\dot{A}_R = \mathbf{1}_R \dot{\mathbf{A}}$, $\dot{A}_\theta = \mathbf{1}_\theta \dot{\mathbf{A}}$, $\dot{A}_\varphi = \mathbf{1}_\varphi \dot{\mathbf{A}}$. Подставляя сюда $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_x \dot{A}_x + \mathbf{1}_y \dot{A}_y + \mathbf{1}_z \dot{A}_z$, раскрывая скалярные произведения по (П1.2), используя функции разности углов синуса и косинуса, получаем

$$\begin{aligned} \dot{A}_R &= \frac{a \sin \theta}{4\pi} \int_0^{2\pi} \dot{j}^c(\varphi') \sin(\varphi - \varphi') \frac{e^{-ikR_{pa}}}{R_{pa}} d\varphi', \\ \dot{A}_\theta &= \frac{a \cos \theta}{4\pi} \int_0^{2\pi} \dot{j}^c(\varphi') \sin(\varphi - \varphi') \frac{e^{-ikR_{pa}}}{R_{pa}} d\varphi', \\ \dot{A}_\varphi &= \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \dot{j}^c(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') \frac{e^{-ikR_{pa}}}{R_{pa}} d\varphi'. \end{aligned} \quad (2.44)$$

По (2.44) с помощью (1.124), (1.125) можно определить все составляющие векторов $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$.

3. Рассмотрим случай, когда точка наблюдения поля p находится в окрестности центра рамки, т.е. при $R \ll a$. Тогда расстояние между точкой $q(a, \varphi', \pi/2)$ на рамке (точкой источника) и точкой p мож-

но представить в виде $R_{pa} = a \left[1 - 2(R/a) \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') + (R/a)^2 \right]^{1/2}$.

Так как $R/a \ll 1$, то это выражение можно разложить в биномиальный ряд с положительным показателем и удержать только два члена ряда. Получаем: $R_{pa} \approx a - R \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')$. Выражение $1/R_{pa}$ в (2.44) тоже разлагаем в биномиальный ряд, но с отрицательным показателем, и с учетом малости значения R/a удерживаем только первые два члена ряда. Имеем: $1/R_{pa} \approx (1/a)[1 + (R/a) \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')]$.

Подставим эти выражения в (2.44). При интегрировании заменим $\sin(\varphi - \varphi')$ и $\cos(\varphi - \varphi')$ разностью и суммой показательных функций по формулам Эйлера для комплексных чисел и используем представление экспоненты рядом Фурье по (ПЗ.9):

$$e^{i\xi \cos(\varphi - \varphi')} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in(\varphi - \varphi')} J_n(\xi), \quad (2.45)$$

где $J_n(\xi)$ — функция Бесселя n -го порядка, аргумента ξ .

Особое значение имеет случай *однородного* распределения тока по φ , т.е. $\dot{I}^c(\varphi) = \dot{I}_0$. Приближенно однородного распределения тока можно добиться в оригинале при очень малой длине витка, т.е. для *элементарной рамки* ($2\pi a \ll \lambda$). *Магнитным моментом элементарной электрической рамки называют величину* $\dot{\mathbf{m}}_p^M = \mu_a \dot{I}_0^c \mathbf{S}$, где $\mathbf{S} = \mathbf{nS}$, \mathbf{n} — орт нормали к плоскости витка, образующий с \mathbf{I}_0^c правовинтовую систему, $S = \pi a^2$ — площадь витка.

Обозначив через $\xi = kR \sin \theta$ и выполнив интегрирование, находим для элементарной рамки

$$\begin{aligned} \dot{A}_R &= \dot{A}_\theta = 0, \\ \dot{A}_\varphi(p) &\approx \frac{\dot{I}_0}{2} e^{-ika} \left\{ iJ_1(\xi) + \frac{\xi}{2ka} [J_0(\xi) - J_2(\xi)] \right\}. \end{aligned}$$

Так как $|k|R \ll 1$, то $\xi \ll 1$ и можно воспользоваться асимптотическим представлением (ПЗ.5) функций Бесселя: $J_0(\xi) \approx 1 - \xi^2/4$, $J_n(\xi) \approx \xi^n/n!2^n$. Пренебрегая при этом слагаемыми второго порядка малости, получаем

$$\dot{A}_\varphi(p) \approx \frac{\dot{I}_0 R}{4a} e^{-ika} \cdot \sin \theta. \quad (2.46)$$

Составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ определяем для элементарной рамки по (1.124), (1.125) с учетом того, что $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_\varphi \dot{A}_\varphi$ и \dot{A}_φ не зависит от φ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= -i\omega\mu_a \dot{\mathbf{A}}; \quad \dot{E}_R = \dot{E}_\theta = 0; \quad \dot{E}_\varphi = -i\omega\mu_a \dot{A}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{H}} &= \text{rot} \dot{\mathbf{A}}; \quad \dot{H}_R = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{A}_\varphi), \quad \dot{H}_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{A}_\varphi), \quad \dot{H}_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Подставляя в (2.47) значение \dot{A}_φ из (2.46), находим

$$\dot{E}_\varphi \approx -\frac{ik\dot{I}_0 W R}{4} \frac{R}{a} e^{-ika} \sin \theta; \quad \dot{H}_R \approx \frac{\dot{I}_0}{2a} e^{-ika} \cos \theta; \quad \dot{H}_\theta \approx -\frac{\dot{I}_0}{2a} e^{-ika} \sin \theta. \quad (2.48)$$

Эти выражения показывают, что в области пространства, близкой к центру рамки, напряженность электрического поля отсутствует (при $R/a \rightarrow 0$), а напряженность магнитного поля не зависит от расстояния. В этой области составляющая E_φ сдвинута по фазе относительно составляющих H_R , H_θ почти на $(\mp\pi/2)$. Поэтому вектор Пойнтинга, имеющий составляющие \dot{P}_R и \dot{P}_θ , является почти чисто реактивным.

4. Рассмотрим случай, когда точка наблюдения поля p находится в области, где $R \gg a$. При этом $R_{pa} = R[1 - 2(a/R)\sin\theta \times \cos(\varphi - \varphi') + (a/R)^2]^{1/2}$. Разлагая это выражение в биномиальный ряд с положительным показателем и удерживая только два члена ряда, получаем $R_{pa} \approx R - a \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')$. Функцию $1/R_{pa}$ в (2.44) тоже разлагаем в биномиальный ряд с отрицательным показателем и с учетом малости a/R удерживаем только первые два члена ряда. Имеем

$$1/R_{pa} \approx (1/R)[1 + (a/R)\sin\theta \cos(\varphi - \varphi')].$$

Обозначим $\xi = ka \sin \theta$. Подставим значения R_{pa} и $1/R_{pa}$ в (2.44). Для элементарной рамки, выполняя при интегрировании с помощью (2.45) те же операции, что в предыдущем случае, получаем

$$\dot{A}_R = \dot{A}_\theta = 0, \quad \dot{A}_\varphi(p) \approx \frac{i\dot{I}_0 k a^2}{4} \frac{e^{-ikR}}{R} \sin \theta \left(1 + \frac{1}{ikR} \right). \quad (2.49)$$

Составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ определяем по (2.49):

$$\begin{aligned}
\dot{E}_R = \dot{E}_\theta = 0, \quad \dot{E}_\varphi &\approx \frac{I_0 W S k^2}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikR}}{R} \left(1 + \frac{1}{ikR} \right); \\
\dot{H}_\varphi = 0, \quad \dot{H}_R &\approx \frac{i I_0 S k}{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R^2} \left(1 + \frac{1}{ikR} \right) \cos \theta, \\
\dot{H}_\theta &\approx -\frac{i I_0 S k^2}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \left(1 + \frac{1}{ikR} - \frac{1}{(kR)^2} \right) \sin \theta.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

В ближней зоне, т.е. при $|k|R \ll 1$ (но $R \gg a$), из (2.50), учитывая, что $1 \ll 1/|k|R$, $\exp(-ikR) \approx 1$, имеем

$$\dot{E}_\varphi \approx -i \frac{I_0 W S k}{4\pi R^2} \sin \theta, \quad \dot{H}_R \approx \frac{I_0 S}{2\pi R^3} \cos \theta, \quad \dot{H}_\theta \approx \frac{I_0 S}{4\pi R^3} \sin \theta.$$

Вектор Пойнтинга в этой зоне имеет (приближенно) чисто реактивный характер, так как составляющая E_φ сдвинута по фазе (почти) на $(-\pi/2)$ относительно составляющих H_R и H_θ . Но $|\dot{\Pi}|$ при приближении к рамке очень быстро возрастает (как $1/R^5$).

В зоне излучения, т.е. при $|k|R \gg 1$, из (2.50) получаем

$$\begin{aligned}
\dot{E}_\varphi &\approx \frac{I_0 W S k^2}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikR}}{R}; \\
\dot{H}_\theta = -\dot{E}_\varphi / W; \quad \dot{H}_R &\approx \frac{i I_0 S k}{2\pi} \cos \theta \frac{e^{-ikR}}{R^2}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Здесь $|\dot{H}_R| \ll |\dot{H}_\theta|$ и значением $|\dot{H}_R|$ можно пренебречь. В этой зоне поле имеет характер сферической Т-волны, бегущей от излучателя на бесконечность. Вектор Пойнтинга в среде без потерь является действительной величиной и направлен вдоль радиального направления. Характеристикой направленности в меридиональной плоскости является $F(\theta) = \sin \theta$, в экваториальной $F(\varphi) = 1$. Амплитудные диаграммы направленности изображены на рис. 2.9. В направлениях $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$ (в направлении своей оси) элементарная рамка не создает поля излучения. Чтобы объяснить это явление, надо учесть, что в точке p при $t = t_0$ элементарное поле dE_φ есть сумма полей dE_{φ_1} и dE_{φ_2} элементарных вибраторов, расположенных в диаметрально противоположных точках 1 и 2 рамки (рис. 2.11,б). Полное поле E_φ есть интеграл от dE_φ по φ (от 0 до π). В диаметрально противоположных точках токи рамки

направлены в противоположные стороны. За счет этого $dE_{\varphi 1}$ и $dE_{\varphi 2}$ имеют противоположные направления. Разность фаз за счет разности хода лучей на оси рамки равна нулю, поэтому $dE_{\varphi 1}$ и $dE_{\varphi 2}$ взаимно гасят друг друга (за счет *интерференции*), общее поле по этой причине равно нулю. В точках p , где имеется разность хода лучей от элементарных вибраторов 1 и 2, появляется разность фаз полей $dE_{\varphi 1}$ и $dE_{\varphi 2}$ и сумма этих полей отлична от нуля. В плоскости рамки разность фаз за счет разности хода лучей, равной диаметру рамки, максимальна. Поэтому максимальное значение поля $|\dot{E}_{\varphi}|$ в (2.51) достигается в плоскости рамки (при $\theta = \pi/2$).

Так как диаметр элементарной рамки мал ($2a \ll \lambda/\pi$), то разность фаз полей $dE_{\varphi 1}$ и $dE_{\varphi 2}$ за счет разности хода лучей даже в плоскости рамки мала, поэтому поля $dE_{\varphi 1}$ и $dE_{\varphi 2}$ в значительной мере гасят друг друга. Этим объясняется *малая эффективность элементарной рамки как излучателя ЭМ поля*.

Сопротивление излучения элементарной рамки определяется так же, как и в случае элементарного электрического вибратора. Для этого рассчитывается мощность излучения P_{Σ} как поток вектора Пойнтинга через расположенную в зоне излучения поверхность сферы. Поскольку $P_{\Sigma} = |j_0|^2 R_{\Sigma}/2$, то для свободного пространства $R_{\Sigma} = 320\pi^4 \times (S/\lambda^2)^2$. Так как (S/λ^2) — малая величина, то R_{Σ} очень мало, что указывает на малую эффективность рамки как излучателя ЭМ поля.

Силовые линии полей E и H (для $t = t_0$) изображены на рис. 2.11,в.

2.8. Элементарный магнитный вибратор. Элементарная магнитная рамка

1. Сравнение силовых линий полей E и H элементарной электрической рамки (рис. 2.11,а) с силовыми линиями полей H и E элементарного электрического вибратора (рис. 2.10) показывает, что отличие полей в пространстве, где $R \gg a$, состоит в том, что векторы E и H поменялись местами. Поэтому элементарную электрическую рамку можно рассматривать как фиктивный элементарный магнитный вибратор, ориентированный перпендикулярно плоскости рамки, если середина вибратора совпадает с центром рамки. Обозначая через i_0^M плотность линейного фиктивного магнитного тока вибратора длины L и воспользовавшись принципом перестановочной двойственности ($\dot{E}_{\Sigma} \pm \dot{H}$,

$\dot{I}_0 \rightleftharpoons \pm j_0^M$, $\tilde{E}_a \rightleftharpoons \mu_a$), из (2.37), (2.38) получаем для поля элементарного магнитного вибратора

$$\begin{aligned} \dot{E}_R = \dot{E}_\theta = 0, \quad \dot{E}_\varphi = -\frac{ikj_0^M L}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-ikR}}{R} \left(1 + \frac{1}{ikR}\right), \quad \dot{H}_\varphi = 0, \\ \dot{H}_\theta = \frac{ikj_0^M L}{4\pi W} \sin\theta \frac{e^{-ikR}}{R} \left(1 + \frac{1}{ikR} - \frac{1}{(kR)^2}\right), \quad \dot{H}_R = \frac{j_0^M L}{2\pi W} \cos\theta \frac{e^{-ikR}}{R^2} \left(1 + \frac{1}{ikR}\right) \end{aligned}$$

Это поле тождественно полю (2.50) элементарной электрической рамки (при $R \gg a$), если $\dot{I}_0^M L = i\dot{I}_0^E S W k$. Если $\dot{m}^M = \dot{I}_0^M L / i\omega$ — магнитный момент элементарного магнитного вибратора, то, следовательно, необходимо выполнение условия: $\dot{m}^M = \dot{m}_p^M$.

2. Тождественность полей элементарных электрической рамки и фиктивного магнитного вибратора позволяет ввести в рассмотрение рамку фиктивного магнитного тока радиуса a , поле которой (при $R \gg a$) тождественно полю элементарного электрического вибратора. Пусть \dot{I}_0^M — плотность линейного фиктивного магнитного тока рамки. Плоскость xu совместим с плоскостью рамки, а ось z направим вдоль оси рамки (рис. 2.11,а). Применяя принцип перестановочной двойственности к (2.50), получаем составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} поля элементарной магнитной рамки при $R \gg a$:

$$\begin{aligned} \dot{H}_R = \dot{H}_\theta = 0, \quad \dot{H}_\varphi = \frac{j_0^M S k^2}{4\pi W} \sin\theta \frac{e^{-ikR}}{R} \left(1 + \frac{1}{ikR}\right), \quad \dot{E}_\varphi = 0, \\ \dot{E}_\theta = \frac{j_0^M S k^2}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-ikR}}{R} \left(1 + \frac{1}{ikR} - \frac{1}{(kR)^2}\right), \quad \dot{E}_R = -\frac{i\dot{I}_0^M S k}{2\pi} \cos\theta \frac{e^{-ikR}}{R^2} \left(1 + \frac{1}{ikR}\right) \end{aligned}$$

Сравнивая эти выражения с (2.37), (2.38), находим, что при $\dot{I}_0^M L = -i\dot{I}_0^E S k / W$ поля элементарных электрического вибратора и магнитной рамки тождественны. Если обозначить через $\dot{m}_p^E = -\tilde{E}_a \dot{I}_0^E S$ — электрический момент элементарной магнитной рамки, то необходимо выполнение условия $\dot{m}^E = \dot{m}_p^E$.

3. ЭМ явления в сложных системах часто объясняют с помощью расчленения последних на элементарные излучатели. Например, даже в простом случае анализа поля элементарной рамки ЭМ явления легко объясняются с помощью деления ее на прямолинейные элементарные вибраторы (п. 2.7.4). Поэтому отметим следующие соотношения между полями элементарных излучателей: от поля элементарного электрического вибратора с помощью принципа перестановочной двойственности осуществляется переход к полю элементарного магнитного вибратора; от поля последнего при замене $\dot{m}^M = \dot{m}_p^M$ осуществляется переход к полю элементарной электрической рамки, от поля которой с помощью принципа перестановочной двойственности происходит переход к полю элементарной магнитной рамки; от поля последней при замене $\dot{m}^E = \dot{m}_p^E$ возвращаемся к полю элементарного электрического вибратора.

2.9. Бесконечная прямолинейная нить тока. Поверхностная волна, цилиндрическая волна

1. Рассмотрим прямолинейную нить электрического тока в предельном случае при $L/\lambda \rightarrow \infty$. Эта математическая модель учитывает свойства однопроводной линии передачи ЭМ энергии. Если на тонком, длинном ($L \gg \lambda$) проводе, расположенном в свободном пространстве, имеется диэлектрическая оболочка (ϵ_{a1} — диэлектрическая проницаемость оболочки), то в проводе можно возбудить бегущую волну тока (§ 2.2, рис. 2.3). Если ось z ДСК параллельна проводу, то $\dot{I}^c(z) = \dot{I}_0 \exp(-ik_0 z)$, $k_0 = \beta_0 - i\alpha_0$. Фазовая скорость волны в диэлектрике, заполняющем все пространство, равна $v_1 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$; в свободном пространстве — равна c ; в пространстве, частично заполненном диэлектриком, можно предположить, что $v_1 < v_\phi < c$. Коэффициент фазы тока β_0 будет различным при разных ϵ_{a1} и разных толщинах оболочки. Возбуждаемое при этом поле «прижимается» к проводу, часть энергии поле переносит в диэлектрической оболочке, а часть — в окружающем пространстве. Провод с оболочкой играет роль направляющей структуры, он направляет волну вдоль своей оси.

Пренебрегая толщиной провода с оболочкой и считая длину провода бесконечной, приходим к приближенной математической мо-

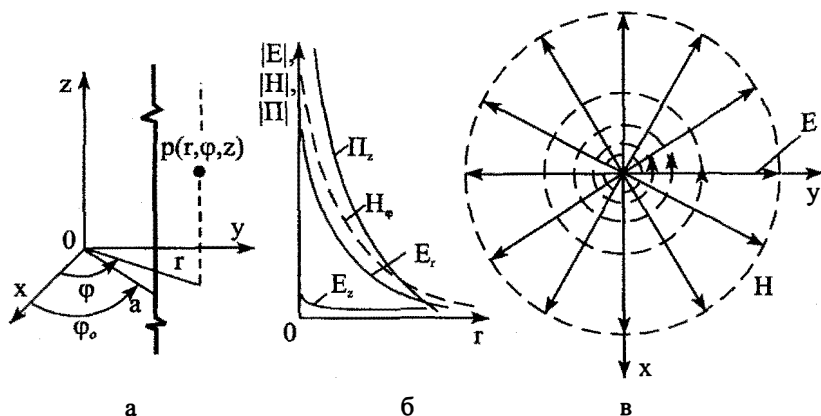


Рис. 2.12. Нить тока, графики зависимости H_ϕ , E_r , E_z , Π_z от r и силовые линии поля в поперечной плоскости

дели: имеется прямолинейная бесконечная нить с бегущей волной тока. Надо найти векторы напряженности ЭМ поля.

Расположим ДСК так, чтобы ось z была параллельна нити (рис. 2.12). Рассмотрим бегущую волну тока. Тогда в цилиндрической системе координат (ЦСК) $\dot{\mathbf{I}}^c = \mathbf{1}_z \dot{I}_0 \exp(-ik_0 z) = \mathbf{1}_z \dot{I}_0 \exp(-\alpha_0 z) \times \exp(-i\beta_0 z)$ при $-\infty < z < \infty$.

Плотность линейного заряда находим по (2.23): $\dot{\eta}^c = (\dot{I}_0 k_0 / \omega) \cdot \exp(-ik_0 z)$. Мгновенные значения плотностей тока и заряда определяем по (1.60):

$$\begin{aligned} \dot{I}^c(z, t) &= |\dot{I}_0| \exp(-\alpha_0 z) \cos(\omega t - \beta_0 z + \psi_0), \\ \dot{\eta}^c(z, t) &= (|\dot{I}_0| \cdot |k_0| / \omega) \cdot \exp(-\alpha_0 z) \cos(\omega t - \beta_0 z + \psi_0 + \arg k_0). \end{aligned} \quad (2.52)$$

2. Рассмотрим решение задачи. Вычислим векторные потенциалы. Так как $\dot{\mathbf{j}}^{m,c} = 0$, то $\dot{\mathbf{A}}^m = 0$. Для вычисления $\dot{\mathbf{A}}$ подставим в (П 4.4) значение $\dot{\mathbf{j}}^c$ и функцию G из (П 4.6). Меняя при этом порядок интегрирования по коэффициентам распространения и пространственным координатам, учитывая интеграл Фурье δ -функции (П 2.5), используя основное свойство δ -функции при интегрировании по пространственным координатам, находим

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_z \frac{\dot{I}_0}{4i} e^{-ik_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\Phi - \Phi_0)} \begin{cases} J_n(\nu_0 a) H_n^{(2)}(\nu_0 r), & r \geq a \\ J_n(\nu_0 r) H_n^{(2)}(\nu_0 a), & r \leq a \end{cases}, \quad (2.53)$$

где $H_n^{(2)}(\nu_0 r)$ — функция Ганкеля второго рода (§ П.3), $\nu_0 = -i(k_0^2 - k^2)^{1/2}$. Считаем, что нить расположена в начале координат, т.е. $a = 0$. В последнем выражении надо брать верхнюю строку ($r > 0$). Кроме того, по (П 3.5) $J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0$ при $n > 0$. Поэтому все члены ряда равны нулю, за исключением члена при $n = 0$. С учетом этого при $a = 0$

$$\dot{A}_z = \frac{\dot{I}_0}{4i} e^{-ik_0 z} H_0^{(2)}(\nu_0 r), \quad \dot{A}_x = \dot{A}_y = 0. \quad (2.54)$$

В ЦСК по (П 1.2) $\dot{A}_r = \mathbf{1}_r \dot{A} = 0$, $\dot{A}_\Phi = \mathbf{1}_\Phi \dot{A} = 0$.

По (1.125) $\dot{\mathbf{H}} = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}$. По (П 1.16), учитывая (2.54) и $\partial \dot{A}_z / \partial \varphi = 0$, имеем

$$\dot{H}_r = 0, \quad \dot{H}_z = 0, \quad \dot{H}_\Phi = -\frac{\dot{I}_0}{4i} e^{-ik_0 z} \frac{\partial H_0^{(2)}(\nu_0 r)}{\partial r}.$$

Применяя правило (П 3.6) дифференцирования цилиндрических функций, получаем

$$\dot{H}_\varphi = \frac{i_0 v_0}{4i} e^{-ik_0 z} H_1^{(2)}(v_0 r). \quad (2.55)$$

Из первого уравнения Максвелла с учетом (П 1.16), (П 3.6)

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= -\frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} \frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial z} = \frac{k_0 W}{k} \dot{H}_\varphi, \quad \dot{E}_\varphi = 0, \\ \dot{E}_z &= \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{H}_\varphi) = -\frac{i_0 v_0^2}{4\omega\tilde{\epsilon}_a} e^{-ik_0 z} H_0^{(2)}(v_0 r). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Проанализируем поле (2.55), (2.56). Считаем, что потери на нагревание среды отсутствуют ($k = \beta$).

3. Рассмотрим случай бегущей волны тока без затухания ($\alpha_0 = 0$, $k_0 = \beta_0$). Тогда амплитуда тока не меняется по z . Предположим, что $\beta_0 > \beta$, т.е. фазовая скорость бегущей волны тока меньше скорости света в окружающем пространстве. При этом $v_0 = -ih_0$, где $h_0 = (\beta_0^2 - \beta^2)^{1/2}$. Подставляем в (2.55), (2.56) значение v_0 . На больших расстояниях от нити, когда $h_0 r \gg 1$, используем асимптотическое поведение функции Ганкеля (П 3.4). Находим

$$\dot{H}_\varphi \approx \frac{i_0 h_0}{4} e^{-i\beta_0 z} \sqrt{\frac{2}{\pi h_0 r}} e^{-h_0 r}, \quad \dot{E}_r \approx \frac{\beta_0 W}{\beta} \dot{H}_\varphi, \quad \dot{E}_z \approx \frac{ih_0 W}{\beta} \dot{H}_\varphi. \quad (2.57)$$

откуда следует, что поле имеет характер бегущей вдоль оси z волны (множитель $\exp(-i\beta_0 z)$ — является волновым). Волнового движения вдоль радиального направления нет (множитель $\exp(-h_0 r)$ не является волновым). Составляющие векторов поля убывают с ростом r по закону $\exp(-h_0 r)/\sqrt{r}$ (рис. 2.12,б). Поперечные составляющие векторов поля \dot{H}_φ и \dot{E}_r синфазны. Вектор Пойнтинга распространяющейся волны $\dot{\mathbf{P}} = 0,5[\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] = 0,5(-1_r \dot{E}_z \dot{H}_\varphi^* + 1_z \dot{E}_r \dot{H}_\varphi^*)$ имеет радиальную $\dot{P}_r = -0,5 \dot{E}_z \dot{H}_\varphi^*$ и продольную $\dot{P}_z = 0,5 \dot{E}_r \dot{H}_\varphi^*$ составляющие

$$\dot{P}_r = -i \frac{|i_0|^2 h_0^2 W}{16\pi\beta r} e^{-2h_0 r}, \quad \dot{P}_z = \frac{|i_0|^2 h_0 \beta_0 W}{16\pi\beta r} e^{-2h_0 r}.$$

Радиальная составляющая \dot{P}_r — чисто мнимая величина, что указывает на то, что вдоль радиального направления поле ЭМ энергию не переносит.

сит. Продольная составляющая \dot{P}_z — действительная величина. С ростом r составляющие \dot{P}_r и \dot{P}_z убывают по закону, определяемому функцией $\exp(-2h_0 r)/r$ (рис. 2.12,б).

Таким образом, ЭМ поле распространяющееся вдоль нити, и энергия этого поля локализованы (сосредоточены) у нити тока. Эту волну называют *поверхностной волной*. При этом поле излучения не создается.

Фазовая скорость волны определяется по (2.32): $v_\phi = \omega/\beta_0$, т.е. она меньше скорости света в данной среде. Такую волну называют еще и *медленной волной*. Фронтом этой волны является плоскость $z = \text{const}$, перпендикулярная нити.

Для малых расстояний от нити (при $|v_0|r \ll 1$), используя асимптотику функций Ганкеля (П 3.5), находим

$$\dot{H}_\phi \approx \frac{\dot{I}_0}{2\pi r} e^{-i\beta_0 z} = \frac{\dot{I}^c(z)}{2\pi r}, \quad \dot{E}_r \approx \frac{\beta_0 W}{\beta} \dot{H}_\phi, \quad \dot{E}_z \approx i \frac{I_0 h_0^2 W}{2\pi\beta} e^{-i\beta_0 z} \ln\left(\frac{2}{1,78 h_0 r}\right)$$

С приближением к нити ($r \rightarrow 0$) амплитуды $|\dot{H}_\phi|$, $|\dot{E}_r|$ увеличиваются как $1/r$, а $|\dot{E}_z|$ растет очень медленно и отношение $|\dot{E}_z|/|\dot{E}_r| \rightarrow 0$ при $h_0 r \rightarrow 0$.

Циркуляция вектора \dot{H} по окружности малого радиуса r равна плотности тока: $\dot{H}_\phi 2\pi r \approx \dot{I}^c$, т.е. закон полного тока (1.27) приближенно выполняется без учета тока смещения $i\omega\epsilon_a \dot{E}_z$. Связано это с тем, что поток последнего через малую площадку πr^2 очень мал по сравнению с током проводимости.

На малом расстоянии от нити имеется волновое движение, \dot{H}_ϕ и \dot{E}_r синфазны, \dot{E}_z сдвинута по фазе на $\pi/2$ относительно \dot{H}_ϕ и \dot{E}_r . Значит, поле переносит ЭМ энергию в направлении распространения волны, а в радиальном направлении не переносит.

4. Чтобы построить силовые линии полей E и H , определим мгновенные значения \dot{H}_ϕ , \dot{E}_r , \dot{E}_z . Положим начальную фазу тока $\psi_0 = 0$. При $h_0 r \gg 1$ по (2.57), (1.60) имеем

$$H_{\varphi} \approx \frac{|i_0| h_0}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi h_0 r}} e^{-h_0 r} \cdot \cos(\omega t - \beta_0 z);$$

$$E_r \approx \frac{\beta_0 W}{\beta} H_{\varphi}, \quad E_z \approx \frac{|i_0| h_0^2 W}{4\beta} \sqrt{\frac{2}{\pi h_0 r}} e^{-h_0 r} \cdot \cos(\omega t - \beta_0 z + \pi/2).$$

При $h_0 r \ll 1$

$$H_{\varphi} \approx \frac{|i_0|}{2\pi r} \cdot \cos(\omega t - \beta_0 z); E_r \approx \frac{\beta_0 W}{\beta} H_{\varphi},$$

$$E_z \approx \frac{|i_0| h_0^2 W}{2\pi\beta} \ln \frac{2}{1,78 h_0 r} \cdot \cos(\omega t - \beta_0 z + \pi/2).$$

Силовые линии полей рассматриваем при $t = t_0 = NT$, где N — целое число. В поперечной плоскости при $z = z_1$ силовые линии H являются концентрическими окружностями, силовые линии E направлены по радиусам, густота линий H и E уменьшается с увеличением r (рис. 2.12, в).

На рис. 2.13, а изображены рассчитанные по (2.52) графики распределения по нити плотностей тока и заряда ($\alpha_0 = 0$). Плотности токов на участках 1, 3, 5, длиной $\lambda_0/2$ каждый, ориентированы вдоль I_z , а на участках 2, 4 той же длины — в противоположном направлении, т.е. они находятся в противофазе токам на участках 1, 3, 5. Плотности зарядов на участках 1, 3, 5 положительны, а на участках 2, 4 — отрицательны (противофазны). Положительные заряды отмечены крестиками, отрицательные — черточками.

На рис. 2.13, б изображены графики $H_{\varphi}(z)$, $E_z(z)$, $E_r(z)$ при $r = r_1 = \text{const}$. Продольная составляющая E_z отстает по фазе от H_{φ} и E_r на $\pi/2$, H_{φ} и ток I^c , E_r и плотность заряда η^c синфазны.

Изображенные на рис. 2.13, а, б графики позволяют построить силовые линии E и H . Силовые линии E начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Максимальному значению плотности заряда при $z = m\lambda_0$ (m — целое число) соответствует максимальное значение E_r , при этом $E_z = 0$. Но при $z = (m+1/4)\lambda_0$ $E_r = 0$, а E_z максимально. Направления тока I^c и направление H связаны правилом правого винта и при максимальном токе (при $z = m\lambda_0$) H_{φ} максимально и имеет положительное направление (обозначено крестиками при $\varphi = \pi/2$ и точками — при $\varphi = 3\pi/2$).

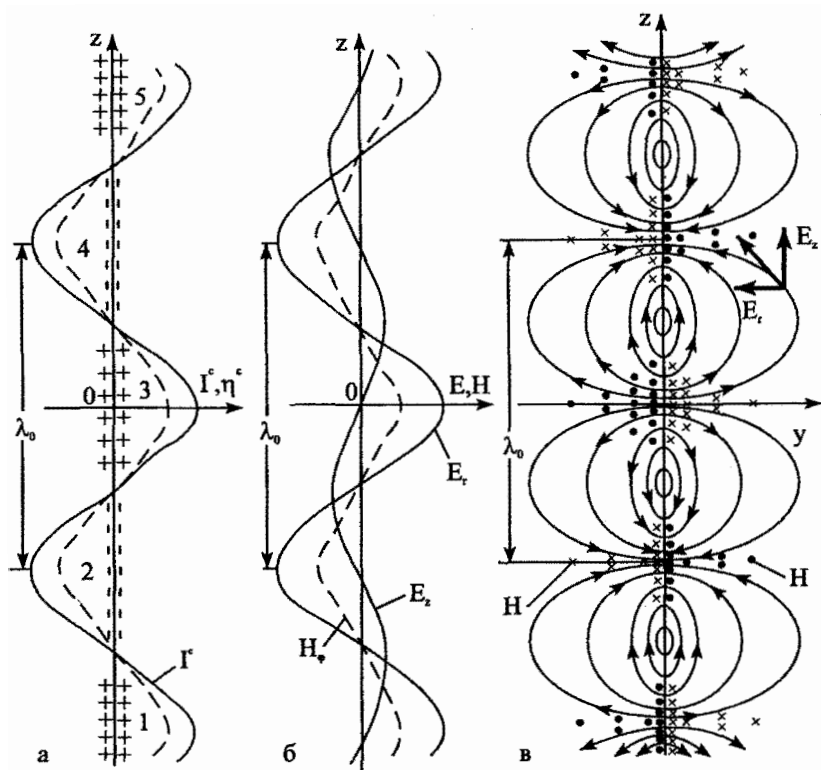


Рис. 2.13. Графики распределения тока и заряда по нити и силовые линии поля

Густота силовых линий E и H убывает в соответствии с графиками, данными на рис. 2.13,б.

5. Рассмотрим нить синфазного тока. При этом $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$, $k = \beta$ и $\nu_0 = \beta$. Ток в каждой точке нити меняется по закону $\cos(\omega t + \psi^z)$. Из (2.55), (2.56) находим

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= 0, & \dot{E}_\varphi &= 0, \\ \dot{H}_\varphi &= \frac{i_0 \beta}{4j} H_1^{(2)}(\beta r), & \dot{E}_z &= \frac{-i_0 \beta W}{4} H_0^{(2)}(\beta r). \end{aligned}$$

Если $\beta r \gg 1$ или $\beta r \ll 1$, то используя здесь асимптотику функций Ганкеля (П 3.4) или (П 3.5), имеем

$$\dot{H}_\varphi \approx \frac{i_0 \beta}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \beta r}} e^{-i\beta r + i\pi/4}, \quad \dot{E}_z \approx -\dot{H}_\varphi W, \quad \beta r \gg 1; \quad (2.58)$$

$$\dot{H}_\varphi \approx i_0 / 2\pi r, \quad \dot{E}_z \approx -i\dot{H}_\varphi W \beta r \ln(2/1,78\beta r), \quad \beta r \ll 1.$$

Вектор Пойнтинга имеет только радиальную составляющую. Таким образом, в области $\beta r \gg 1$ имеется волновое движение в радиальном направлении (за счет волнового множителя $\exp(-i\beta r)$). Поэтому *направление r является продольным*. Поле имеет две поперечных синфазных составляющих векторов \dot{E} и \dot{H} : \dot{E}_z и \dot{H}_φ , т.е. нить синфазного тока возбуждает Т-волну. Фронт волны (поверхность равных фаз) определяется выражением $\beta r = \text{const}$ и, значит, представляет собой цилиндр с осью, совпадающей с нитью тока (рис. 2.14,а). Амплитуды H_φ и E_z убывают с ростом r как $r^{-1/2}$. Вектор Пойнтинга — есть действительная величина, убывающая с ростом r как r^{-1} , \dot{E}_z и \dot{H}_φ однородны по φ и z (не меняются на фронте волны). Волну этого типа называют *однородной цилиндрической волной*.

На малых расстояниях от нити ($\beta r \ll 1$, т.е. $r < \lambda/2\pi$) в ука-

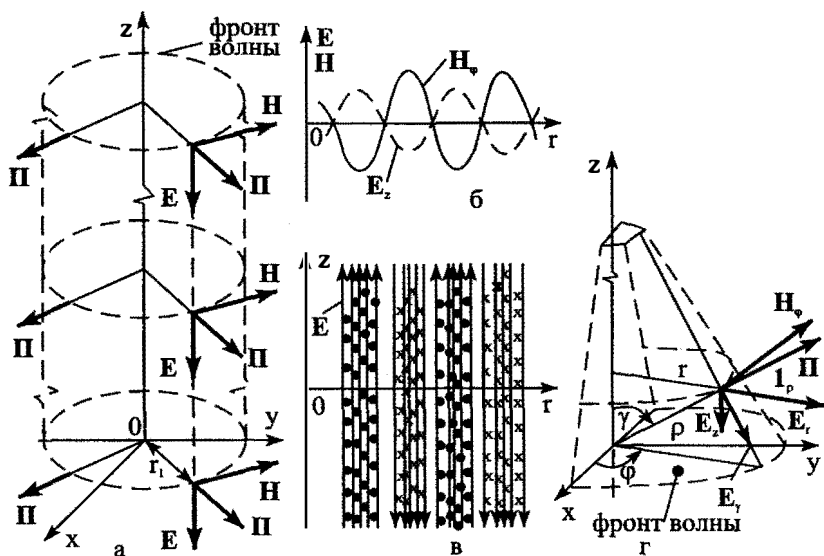


Рис. 2.14. Цилиндрический фронт волны, силовые линии поля, фронт быстрой волны

занном приближении волнового движения нет и так же, как в случае излучателей конечной длины (см., например, (2.39)), поле носит почти реактивный характер, вектор Пойнтинга (приближенно) есть чисто мнимая величина (действительная часть вектора Пойнтинга намного меньше мнимой, поэтому первой пренебрегли).

Мгновенные значения H_φ и E_z при $\beta r \gg 1$, $\psi_0 = 0$ получаем из (2.58), (1.60):

$$H_\varphi \approx \frac{|i_0| \beta}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \beta r}} \cos(\omega t - \beta r + \pi/4); \quad E_z \approx -H_\varphi W.$$

Графики $E_z(r)$ и $H_\varphi(r)$ (при $\beta r \gg 1$) представлены на рис. 2.14, б. С их помощью легко построить силовые линии E и H полей в полуплоскости $\varphi = \varphi_1 = \text{const}$ (рис. 2.14, в).

Понятие однородной цилиндрической волны в неограниченном пространстве относится к математической модели. Для ее возбуждения источник должен затрачивать бесконечную мощность. Действительно, интегрируя плотность мощности $\dot{\Pi}$ по цилиндрической поверхности, расположенной в зоне излучения, получаем $P_\Sigma = |i_0|^2 W \beta l / 8$, где l — длина образующей цилиндра. При $l/\lambda \rightarrow \infty$ имеем: $P_\Sigma \rightarrow \infty$.

Понятие однородной цилиндрической волны используется при вычислениях для аппроксимации сложного волнового фронта в локальных участках пространства.

6. Рассмотрим случай затухающей бегущей медленной волны тока, когда $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 > \beta$. Затухание амплитуды тока может происходить по причине нагревания провода. При этом $v_0 = v' - iv''$ — комплексная величина: $v_0^2 = -k_0^2 + \beta^2 = \beta^2 - \beta_0^2 + \alpha_0^2 + i2\alpha_0\beta_0$. Но $v_0^2 = v'^2 - v''^2 - i2v'v''$. Приравняв действительные и мнимые части двух последних выражений, имеем, $v'^2 - v''^2 = \beta^2 - \beta_0^2 + \alpha_0^2$, $v'v'' = -\alpha_0\beta_0$. Эти два уравнения позволяют определять v' и v'' по α_0 , β_0 и β . Поскольку рассматриваем поверхностную волну, то $v'' > 0$. Из последнего равенства следует, что $v' < 0$. Если в показательной форме $v_0 = |v_0| \exp(i\psi)$, то применяя асимптотику (П 3.4) при $|v_0|r \gg 1$, получаем из (2.55), (2.56)

$$\begin{aligned} \dot{H}_\varphi &= \frac{i_0 v_0}{4i} \left(\frac{2}{\pi |v_0| r} \right)^{1/2} i e^{-\alpha_0 z} e^{-v'' r} e^{-i\Phi}, \\ \dot{E}_r &= \frac{k_0 W}{\beta} \dot{H}_\varphi, \quad \dot{E}_z = -\frac{i_0 v_0^2 W}{4\beta} \left(\frac{2}{\pi |v_0| r} \right)^{1/2} e^{-\alpha_0 z - v'' r - i\Phi}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

где $\Phi = \beta_0 z + v' r - \pi/4 + \psi/2$.

Таким образом, из (2.59) видно, что *затуханию амплитуд составляющих векторов поля в продольном направлении (по z) сопутствует появление волнового движения в радиальном направлении в поле поверхностной волны.* Так как $v' < 0$, то волновое движение направлено к нити тока, где имеется поглощение ЭМ энергии. Действительно,

$$\dot{P}_r = -0,5 \dot{E}_z \dot{H}_\phi^* \text{ и с учетом (2.58) при } |v_0| r \gg 1$$

$$\dot{P}_r \approx \frac{|i_0|^2 |v_0| W}{16\pi\beta r} (v' - iv^*) e^{-2\alpha_0 z} e^{-2v^* r}, \quad (2.60)$$

поэтому $\text{Re} \dot{P}_r$ направлено к нити тока (так как $v' < 0$). Это подтверждает вывод, сделанный в § 1.7 о направлении вектора Пойнтинга у поверхности провода.

При малом значении α_0 $\text{Im} \dot{P}_r$ мало отличается от соответствующего значения при $\alpha_0 = 0$, полученного выше.

7. Рассмотрим *случай быстрой волны тока.* При этом фазовая скорость тока $v_{\Phi 0} = \omega/\beta_0$ больше скорости света $v = (\omega/\beta) = (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}$ в данной среде. Значит, $\beta_0 < \beta$, поэтому $v = -i(\beta_0^2 - \beta^2)^{1/2} = (\beta^2 - \beta_0^2)^{1/2}$ — действительная положительная величина.

При $vr \gg 1$ из (2.55), (2.56) с помощью асимптотики (П 3.4) получаем

$$\begin{aligned} \dot{H}_\phi &\approx \frac{i_0 v}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi v r}} e^{-i(\beta_0 z + vr)} e^{i\pi/4}, \\ \dot{E}_r &\approx \dot{H}_\phi \frac{W\beta_0}{\beta}, \dot{E}_z \approx -\dot{H}_\phi \frac{Wv}{\beta}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Из этих выражений видно, что за счет волновых множителей $\exp(-i\beta_0 z)$ и $\exp(-ivr)$ *имеется волновое движение поля и вдоль оси z и вдоль радиального направления.* При этом $\dot{\Pi} = \dot{P}_r + \dot{P}_z$, $\dot{P}_r \approx Wv |\dot{H}_\phi|^2 / 2\beta$, $\dot{P}_z \approx W\beta_0 |\dot{H}_\phi|^2 / 2\beta$ — действительные величины. Длина вектора Пойнтинга $\Pi = (\Pi_r^2 + \Pi_z^2)^{1/2} = W(v^2 + \beta_0^2)^{1/2} |\dot{H}_\phi|^2 / 2\beta$. Если представить $\beta_0 = \beta \cos \gamma$, то $v = (\beta^2 - \beta^2 \cos^2 \gamma)^{1/2} = \beta \sin \gamma$ и $P_r = P_z \tan \gamma$. Таким образом, Π направлен под углом γ к оси z. Фронт распространяющейся волны перпендикулярен Π (рис. 2.14,з) и орту $\mathbf{1}_\rho$. Но так как $r = \rho \sin \gamma$, $z = \rho \cos \gamma$ (рис. 2.14,з), то волновой множитель в (2.61) $\exp[-i(\beta_0 z + vr)] = \exp(-i\beta \rho)$. Это показывает, что волна распространяется вдоль направления, определяемого ортом $\mathbf{1}_\rho$. Вектор $\dot{\mathbf{H}} = \dot{H}_\phi \dot{\mathbf{H}}_\phi$ лежит на фронте волны, а $E_r \cos \gamma$, $-E_z \sin \gamma$ определяют проекции вектора \mathbf{E}_γ , лежащего на фронте волны.

Таким образом, (2.61) описывают поле Т-волны, фронт которой наклонен под углом $\pi/2 - \gamma$ к нити тока. На фронте волны $E_\gamma = W\dot{H}_\phi$. Фронт волны движется с фазовой скоростью $v_\phi = \omega/\beta = (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}$ в направлении, определяемом ортом $\mathbf{1}_\rho$, и представляет собой коническую поверхность при $\beta r \gg 1$.

Из (2.61) следует, что *фазовые скорости волны вдоль оси z и вдоль радиального направления* ($v_{\phi z} = \omega/\beta_0 = \omega/\beta \cos \gamma = v_\phi / \cos \gamma$, $v_{\phi r} = \omega/v = v_\phi / \sin \gamma$) *больше скоро-*

сти света $(\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}$. Объясняется это тем, что фронт волны за время Δt проходит в продольном направлении путь $\Delta \rho$, а в направлениях, определяемых ортами $\mathbf{1}_r$ и $\mathbf{1}_z$, пути $\Delta r > \Delta \rho$ и $\Delta z > \Delta \rho$, так как $\Delta r = \Delta \rho / \sin \gamma$, $\Delta z = \Delta \rho / \cos \gamma$ (рис. 2.14, z). Скорости прохождения фронтом волны путей $\Delta \rho$, Δr и Δz : $v_\phi = \Delta \rho / \Delta t$, $v_{\phi z} = \Delta z / \Delta t = \Delta \rho / (\Delta t \cos \gamma) = v_\phi / \cos \gamma$. Если $v_\phi = c$, то $v_{\phi r}$ и $v_{\phi z} > c$ ($\gamma \neq 0, \pi/2$).

8. Рассмотрим случай, когда коэффициент распространения тока $k_0 = \beta_0 - i\alpha_0$ равен k , т.е. $k_0 = k = \omega(\tilde{\epsilon}_a \mu_a)^{1/2}$. Тогда $v = -i(k_0^2 - k^2)^{1/2} = 0$. Из (2.55), (2.56) с помощью асимптотик (П 3.5) получаем

$$\begin{aligned} \dot{H}_\phi &= \frac{i_0}{4i} e^{-ik_0 z} \lim_{v \rightarrow 0} v \frac{2i}{\pi v r} = \frac{i_0}{2\pi r} e^{-\alpha_0 z} e^{-i\beta_0 z}, \\ \dot{E}_r &= \frac{k_0 W}{k} \dot{H}_\phi, \quad \dot{E}_\phi = 0, \quad \dot{E}_z = -\frac{i_0}{4\omega \tilde{\epsilon}_a} e^{-ik_0 z} \lim_{v \rightarrow 0} v^2 \frac{2i}{\pi} \ln \left(\frac{2}{1,78 v r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Таким образом, над нитью тока распространяется Т-волна. Амплитуды \dot{E}_r и \dot{H}_ϕ затухают экспоненциально (при $\alpha_0 \neq 0$) и изменяются как $1/r$. Фазовая скорость $v_{\phi 0}$ волны равна скорости света в данной среде: $v_{\phi 0} = \omega / \beta_0 = \omega / \beta$. Силовые линии полей E и H изображены на рис. 2.12, в.

Если коаксиально нити расположить идеально проводящую трубку произвольного радиуса, то граничное условие $\dot{E}_r = 0$ на поверхности трубки удовлетворяется ($\dot{E}_\phi = \dot{E}_z = 0$), так как силовые линии электрического поля перпендикулярны коаксиальной поверхности (рис. 2.12, в). Тогда в образующей коаксиальной линии распространяется Т-волна (2.62). Образуется *канализирующая ЭМ энергия система*.

9. Пусть *прямолинейная нить стороннего магнитного тока возбуждает ЭМ поле*. Векторы поля удовлетворяют уравнениям Максвелла. Надо найти векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. Для этого расположим ЦСК так, чтобы ось z была параллельна нити (рис. 2.12, в). Тогда $\dot{\mathbf{j}}^{m,c} = \dot{\mathbf{i}}^{m,c}(z)\delta(r-a)\delta(\phi-\phi_0)/r$, $-\infty < z < \infty$, где плотность тока $\dot{\mathbf{i}}^{m,c} = \mathbf{1}_z \dot{i}^{m,c}(z)$. Будем считать, что последняя изменяется по закону бегущей волны, $\dot{i}^{m,c}(z) = \dot{i}_0^m \exp(-ik_0 z) = |\dot{i}_0^m| \exp(-ik_0 z + \Psi_0^m)$, где $|\dot{i}_0^m|$, Ψ_0^m — амплитуда и начальная фаза тока.

Найдем векторные потенциалы. Так как $\dot{\mathbf{j}}^c = 0$, то $\dot{\mathbf{A}} = 0$. Значение $\dot{\mathbf{A}}^m$ найдем так же, как $\dot{\mathbf{A}}$ в (2.53). Заменяя $\dot{\mathbf{i}}^c$ значением \dot{i}_0^m в (2.54) для нити, расположенной в начале координат, получаем: $\dot{\mathbf{A}}^m = \mathbf{1}_z \dot{A}_z^m$, $\dot{A}_z^m = (\dot{i}_0^m / 4i) \cdot \exp(-ik_0 z) H_0^{(2)}(v_0 r)$. Значения $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ определяются по (1.124), (1.125). Но можно применить принцип перестановочной двойственности (1.73). Воспользовавшись последним, получаем из (2.55), (2.56)

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= \dot{E}_z = 0, \quad \dot{E}_\phi = -\frac{\dot{i}_0^m v_0}{4i} e^{-ik_0 z} H_1^{(2)}(v_0 r), \\ \dot{H}_r &= -\frac{k_0}{k} W^{-1} \dot{E}_\phi, \quad \dot{H}_\phi = 0, \quad \dot{H}_z = -\frac{\dot{i}_0^m v_0^2}{4\omega \mu_a} e^{-ik_0 z} \cdot H_0^{(2)}(v_0 r). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Считая, что среда не имеет потерь и $\alpha_0 = 0$, при $\beta_0 > \beta$ из (2.63) получаем поверхностную волну, распространяющуюся вдоль нити. Картина силовых линий полей E и H такой волны при $t = NT$, $\psi^m = 0$ получается из картины рис. 2.13,в заменой силовых линий E на силовые линии H и линий H — на линии E . Существенное отличие полученной таким образом картины силовых линий от изображенной на рис. 2.13,в состоит в том, что *имеется продольная составляющая напряженности магнитного поля H_z* .

В случае нити синфазного тока в пространстве возбуждается цилиндрическая волна.

Быстрые волны тока возбуждают в области $|v|r \gg 1$ поле, представляемое бегущими вдоль оси z и вдоль радиального направления волнами, фазовые скорости которых больше скорости света в данной среде. Если выбрать за продольное направление направление вектора Пойнтинга, то следует считать, что в пространстве возбуждается Т-волна.

10. Введем определения. Если вектор напряженности электрического поля волны имеет продольную составляющую, а вектор напряженности магнитного поля лежит в поперечной плоскости, то волну называют *электрической волной* и обозначают как «Е-волна». Примером Е-волны является поверхностная волна над нитью электрического тока (рис. 2.13). Элементарный электрический вибратор возбуждает Е-волну, вырождающуюся в зоне излучения в Т-волну.

Если вектор напряженности магнитного поля волны имеет продольную составляющую, а вектор напряженности электрического поля лежит в поперечной плоскости, то волну называют *магнитной волной* и обозначают как «Н-волна». Примером Н – Е-волны является поверхностная волна над нитью магнитного тока (в (2.63) $\dot{H}_z \neq 0$, $\dot{E}_z = 0$). Элементарная рамка электрического тока возбуждает Н-волну, вырождающуюся в зоне излучения в Т-волну.

2.10. Поверхностный излучатель

1. Рассмотрим математическую модель поверхностного излучателя (§ 2.2, рис. 2.4). Пусть на поверхности S_0 заданы сторонние значения $\dot{E}^c = \mathbf{1}_y \dot{E}_y^c$ и $\dot{H}^c = \mathbf{1}_x \dot{H}_x^c$, причем $\dot{E}_y^c = -W_1 \dot{H}_x^c$, где W_1 — характеристическое сопротивление при $z = 0$. Задание \dot{E}^c , \dot{H}^c на S_0 эквивалентно заданию поверхностных токов $\dot{J}^c = [\dot{H}^c, \mathbf{n}] = \mathbf{1}_y \dot{H}_x^c$, т.е. $\dot{J}^c = \mathbf{1}_y j_y^c$, $j_y^c = \dot{H}_x^c$ ($\mathbf{n} = -\mathbf{1}_z$), $\dot{J}^{m,c} = [\mathbf{n}, \dot{E}^c] = \mathbf{1}_x \dot{E}_y^c$, т.е. $\dot{J}^{m,c} = \mathbf{1}_x j_x^{m,c}$, $j_x^{m,c} = \dot{E}_y^c$. При этом $j_y^c = -j_x^{m,c}/W_1$. Задача определения $\dot{E}(p)$, $\dot{H}(p)$ сводится таким образом к вычислению \dot{A} , \dot{A}^m по сторонним поверхностным электрическим и магнитным токам.

2. Плотности объемных токов на S_0 : $\mathbf{j}^c = \mathbf{1}_y j_y^c(x, y) \delta(z-0)$
 $\mathbf{j}^{m,c} = \mathbf{1}_x j_x^{m,c}(x, y) \delta(z-0)$. Векторные потенциалы вычисляем, подставляя в (П 4.4) значения \mathbf{j}^c и $\mathbf{j}^{m,c}$. Используя основное свойство δ -функции, имеем

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_y \dot{A}_y, \quad \dot{A}_y = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} j_y^c(x', y') \frac{e^{-ikR_{pq}}}{R_{pq}} dS',$$

$$\dot{\mathbf{A}}^M = \mathbf{1}_x \dot{A}_x^M, \quad \dot{A}_x^M = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} j_x^{m,c}(x', y') \frac{e^{-ikR_{pq}}}{R_{pq}} dS',$$

где
 $R_{pq} = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{1/2} = (x^2 + y^2 + z^2 - 2xx' - 2yy' + x'^2 + y'^2)^{1/2}$,
 q — точка интегрирования, расположенная на S_0 : $q = q(x', y', 0)$.

Введем ССК (рис. 2.15,а). Тогда учитывая (П 1.2), имеем

$$R_{pq} = R[1 - (2x'/R) \cdot \sin\theta \cos\varphi - (2y'/R) \cdot \sin\theta \sin\varphi + (\rho'/R)^2]^{1/2},$$

где $\rho' = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$.

Векторы напряженностей поля определяем в зоне излучения, где $R \gg |x|, |y|$. При этом $R_{pq} \approx R - \eta(x', y')$, где обозначено

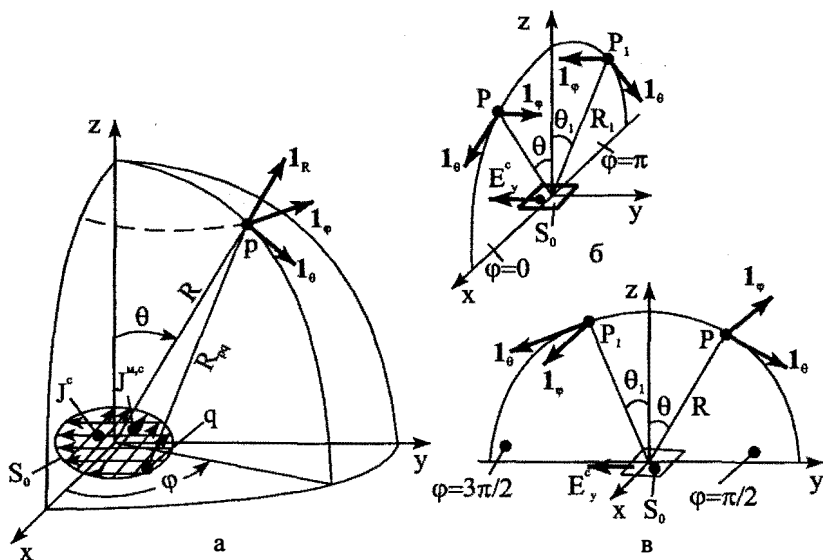


Рис. 2.15. Излучающая поверхность и главные плоскости

$\eta = x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi - \rho'^2 / 2R$. В фазовом множителе $\exp(i\beta\eta)$ значением фазы $\beta\rho'^2 / 2R$ можно пренебречь, если она составляет незначительную по сравнению с 2π величину $\Delta\Phi$. Тогда $\beta\rho'^2 / 2R \leq \Delta\Phi$, откуда $R \geq \beta\rho'^2 / 2\Delta\Phi = \pi\rho'^2 / \lambda\Delta\Phi$. Это условие является еще одним критерием, определяющим расстояние до дальней зоны. Учтем, что $1/R_{pq} \approx 1/R$.

Таким образом, в дальней зоне

$$\dot{A}_y \approx \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \int_{S_0} j_y^c(x', y') e^{i\beta\eta} dS', \quad \dot{A}_x^M \approx \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \int_{S_0} j_x^{M,c}(x', y') e^{i\beta\eta} dS'. \quad (2.64)$$

В ССК по (П 1.2) $\dot{A}_R = \dot{A}_y \sin \theta \sin \varphi$, $\dot{A}_\theta = \dot{A}_y \cos \theta \sin \varphi$, $\dot{A}_\varphi = \dot{A}_y \cos \varphi$; $\dot{A}_R^M = \dot{A}_x^M \sin \theta \cos \varphi$, $\dot{A}_\theta^M = \dot{A}_x^M \cos \theta \cos \varphi$, $\dot{A}_\varphi^M = -\dot{A}_x^M \sin \varphi$. Как и в § 1.13, обозначим через $\dot{\mathbf{E}}'$, $\dot{\mathbf{H}}'$ векторы поля, возбуждаемого электрическим током, а через $\dot{\mathbf{E}}''$, $\dot{\mathbf{H}}''$ — векторы поля, возбуждаемого магнитным током.

Определяем $\dot{\mathbf{H}}' = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}$ по (1.125), (П 1.19), а $\dot{\mathbf{E}}'$ — по (1.124), (П 1.17) и (П 1.18). Пренебрегая слагаемыми, пропорциональными $(\beta R)^{-1}$ по сравнению с единицей, получаем

$$\begin{aligned} \dot{H}'_R &\approx 0, & \dot{H}'_\theta &\approx ik\dot{A}_y \cos \varphi, & \dot{H}'_\varphi &\approx -ik\dot{A}_y \cos \theta \sin \varphi; \\ \dot{E}'_R &\approx 0, & \dot{E}'_\theta &\approx -i\omega\mu_a \dot{A}_y \cos \theta \sin \varphi, & \dot{E}'_\varphi &\approx -i\omega\mu_a \dot{A}_y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Аналогичным образом находим $\dot{\mathbf{E}}'' = -\text{rot } \dot{\mathbf{A}}^M$ и $\dot{\mathbf{H}}''$:

$$\begin{aligned} \dot{E}''_R &\approx 0, & \dot{E}''_\theta &\approx ik\dot{A}_x^M \sin \varphi, & \dot{E}''_\varphi &\approx ik\dot{A}_x^M \cos \theta \cos \varphi; \\ \dot{H}''_R &\approx 0, & \dot{H}''_\theta &\approx -i\omega\tilde{\epsilon}_a \dot{A}_x^M \cos \theta \cos \varphi, & \dot{H}''_\varphi &\approx i\omega\tilde{\epsilon}_a \dot{A}_x^M \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Определим полное поле, возбуждаемое электрическими и магнитными токами. По принципу наложения $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}' + \dot{\mathbf{E}}''$, $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}' + \dot{\mathbf{H}}''$. Используя (2.64) и заменяя $j_y^c = -j_x^{M,c} / W_1$, по (2.65), (2.66) находим

$$\begin{aligned} \dot{H}_R &\approx 0, & \dot{E}_R &\approx 0, & \dot{H}_\theta &\approx -\dot{E}_\varphi / W, & \dot{H}_\varphi &\approx \dot{E}_\theta / W, \\ \dot{E}_\theta &\approx \frac{ik \sin \varphi}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \left(\frac{W}{W_1} \cos \theta + 1 \right) \int_{S_0} j_x^{M,c}(x', y') e^{ik\eta} dS', & & & & & (2.67) \\ \dot{E}_\varphi &\approx \frac{ik \cos \varphi}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \left(\frac{W}{W_1} + \cos \theta \right) \int_{S_0} j_x^{M,c}(x', y') e^{ik\eta} dS'. \end{aligned}$$

Если учесть, что $j_x^{m,c} = \dot{E}_y^c$, то получаем для зоны излучения

$$\begin{aligned} \dot{E} = \mathbf{1}_\theta \dot{E}_\theta + \mathbf{1}_\varphi \dot{E}_\varphi \approx & \left[\mathbf{1}_\theta \left(\frac{W}{W_1} \cos \theta + 1 \right) \sin \varphi + \mathbf{1}_\varphi \left(\frac{W}{W_1} + \cos \theta \right) \cos \varphi \right] \times \\ & \times \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \int_{S_0} \dot{E}_y^c(x', y') e^{ik\eta} dS'. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Таким образом, ЭМ поле в зоне излучения имеет характер сферической Т-волны. Амплитуды векторов поля с ростом R убывают как $\exp(-\alpha R)/R$.

Поле часто изучают в двух плоскостях: при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ (плоскость xz) и при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$ (плоскость yz) (рис. 2.15, б, в). Эти плоскости называют *главными*. В плоскости xz $\dot{E}_\theta = 0$, $\dot{H}_\varphi = 0$, а в плоскости yz $\dot{E}_\varphi = 0$, $\dot{H}_\theta = 0$.

Из выражения (2.68) следует, что зависимость вектора \dot{E} от угловых координат может быть изучена, если задана функция распределения поля \dot{E}_y^c по поверхности S_0 (см. пример на рис. 2.4, в, г), форма и размеры поверхности S_0 .

3. В случае задания на излучающей поверхности S_0 сторонних значений $\dot{E}^c = \mathbf{1}_x \dot{E}_x^c$, $\dot{H}^c = \mathbf{1}_y \dot{H}_y^c$ поле в зоне излучения определяется аналогичным образом.

В общем случае каждый из векторов \dot{E}^c и \dot{H}^c разлагается на две составляющие и вычисляется ЭМ поле этих составляющих. Полное поле по принципу наложения есть сумма полей, возбуждаемых заданными на S_0 значениями \dot{E}_y^c и \dot{E}_x^c .

2.11. Излучение поверхности прямоугольной формы с равномерным распределением стороннего поля. Элементарный поверхностный излучатель

1. В качестве примера рассмотрим поле, возбуждаемое в зоне излучения поверхностью $S_0 = a \times b$ прямоугольной формы с равномерным распределением стороннего поля по S_0 (рис. 2.15). Среда не имеет потерь на нагревание ($k = \beta$). Начало системы координат совместим с серединой поверхности. Величина ρ' имеет максимальное значение ρ'_m на краю поверхности S_0 : $\rho'_m = [(a/2)^2 + (b/2)^2]^{1/2}$. Считаем, что в дальней зоне

$\Delta\Phi \leq \pi/2$. При этом дальняя зона находится на расстоянии $R \geq (a^2 + b^2)/2\lambda$, т.е. это расстояние определяется относительными (к длине волны) размерами поверхности S_0 .

Пренебрегаем значением $\Delta\Phi$ в фазовом множителе. Тогда в зоне излучения из (2.68) получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}(p) \approx & \left[\mathbf{1}_\theta \left(\frac{W}{W_1} \cos\theta + 1 \right) \sin\varphi + \mathbf{1}_\varphi \left(\frac{W}{W_1} + \cos\theta \right) \cos\varphi \right] \times \\ & \times \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \int_{-a/2}^{a/2} e^{ikx' \sin\theta \cos\varphi} dx' \int_{-b/2}^{b/2} \dot{E}_y^c(x', y') e^{iky' \sin\theta \sin\varphi} dy'. \end{aligned}$$

Учитываем, что при равномерном распределении поля по S_0 $\dot{E}_y^c = \dot{E}_0 = \text{const}$. Выполняя интегрирование, находим

$$\dot{E}(p) = \frac{ik\dot{E}_0 ab \exp(-ikR)}{4\pi R} \mathbf{F}(\theta, \varphi),$$

где характеристика направленности излучающей поверхности

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\theta, \varphi) = & \left[\mathbf{1}_\theta \left(\frac{W}{W_1} \cos\theta + 1 \right) \sin\varphi + \mathbf{1}_\varphi \left(\frac{W}{W_1} + \cos\theta \right) \cos\varphi \right] \frac{\sin\xi_a}{\xi_a} \cdot \frac{\sin\xi_b}{\xi_b}, \\ & \xi_a = \frac{ka}{2} \sin\theta \cos\varphi, \quad \xi_b = \frac{kb}{2} \sin\theta \sin\varphi. \end{aligned} \quad (2.69)$$

В главной плоскости xz ($\varphi = 0$ соответствует верхний знак, $\varphi = \pi$ — нижний):

$$\mathbf{F}(\theta, \varphi) = \mathbf{1}_\varphi F_{xz}, \quad F_{xz} = \pm \left(\frac{W}{W_1} + \cos\theta \right) \frac{\sin(0,5ka \sin\theta)}{0,5ka \sin\theta}.$$

В главной плоскости yz ($\varphi = \pi/2$ соответствует верхний знак, $\varphi = 3\pi/2$ — нижний):

$$\mathbf{F}(\theta, \varphi) = \mathbf{1}_\theta F_{yz}, \quad F_{yz} = \pm \left(\frac{W}{W_1} \cos\theta + 1 \right) \frac{\sin(0,5kb \sin\theta)}{0,5kb \sin\theta}.$$

Если не учитывать, что $\mathbf{1}_\varphi$, например, имеет противоположные направления при $\varphi = 0$ и π , а направления орта $\mathbf{1}_\theta$ при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$ тоже противоположны при $\theta = 0$ (рис. 2.15, б, в), то знаки перед правыми частями здесь можно не учитывать и допустить, что $-\pi \leq \theta \leq \pi$ или $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (что в общем случае в ССК недопустимо).

Из этих выражений следует, что характеристика направленности излучающей поверхности прямоугольной формы в главной плоскости определяется линейным электрическим размером поверхности в этой плоскости и не зависит от линейного размера поверхности в другой главной плоскости. На рис. 2.16, а приведена зависимость множителя $\sin\xi/\xi$ в интервале $0 \leq \xi \leq 4\pi$ (где $\xi = 0,5kd \sin\theta$, d равно a или b), которая при больших электрических размерах kd определяет в основном характеристики направленности при малых значениях угла θ . Из графика следует, что имеются направления θ_n (при $\xi_n = 0,5kd \sin\theta_n = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), в которых поле не излучается. Первые направления нулевых излучений появляются при $\xi_1 = \pi = 0,5kd \sin\theta_1$ и $\xi_{-1} = -\pi = 0,5kd \sin\theta_{-1}$, т.е. $\sin\theta_1 = \lambda/d$ и $\sin\theta_{-1} = -\lambda/d$. При $d/\lambda \gg 1$ имеем $\theta_1 = \lambda/d$, $\theta_{-1} = -\lambda/d$. Угол $2\theta_1 = 2\lambda/d$ между первыми нулями излучения в диаграмме

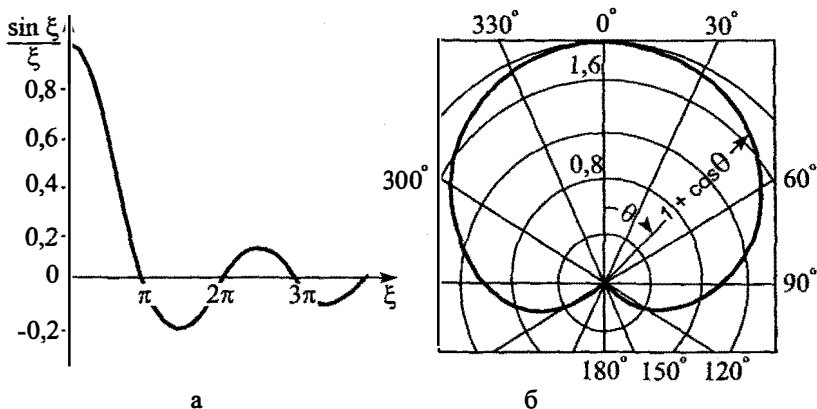


Рис. 2.16. Диаграммы направленности

направленности определяется величиной d/λ . Для уменьшения $2\theta_1$ надо увеличивать значения d/λ .

2. Пример. Если задать в плоскости xz $2\theta_1 = 10^\circ$, то необходимый размер $a/\lambda = 1/\theta_1 = 11,5$. Таким образом, $a = 11,5\lambda$. Если в плоскости yz $2\theta_1 = 5^\circ$, то необходимый линейный размер в этой плоскости $b = 23\lambda$. Дальняя зона (при $\Delta\Phi = \pi/2$) находится на расстоянии $R \geq (11,5^2 + 23^2)\lambda/2 = 660\lambda$. При $\lambda = 3$ см, $a = 34,5$ см, $b = 69$ см, $R \geq 19,8$ м. В дальней зоне удовлетворяется условие $R \gg a, b$.

3. При анализе сложных излучающих устройств используется понятие *элементарного поверхностного излучателя*. Если относительные к длине волны линейные размеры излучающей поверхности малы (точнее, $\beta a \ll 1$, $\beta b \ll 1$), а *распределение поля по поверхности равномерно*, то такой излучатель называют *элементарным поверхностным излучателем*.

При $\beta d \sin \theta \ll 1$ имеем $\sin \xi / \xi \approx 1$. Таким образом, из (2.69) получаем характеристику направленности элементарной излучающей площадки

$$F(\theta, \varphi) = I_\theta \left(\frac{W}{W_1} \cos \theta + 1 \right) \sin \varphi + I_\varphi \left(\frac{W}{W_1} + \cos \theta \right) \cos \varphi,$$

$$F_{xz} = \pm \left(\frac{W}{W_1} + \cos \theta \right), \quad F_{yz} = \pm \left(\frac{W}{W_1} \cos \theta + 1 \right).$$

Если ввести условие, что $0 \leq \theta \leq 2\pi$, то

$$F_{xz} = W/W_1 + \cos \theta, \quad F_{yz} = (W/W_1) \cos \theta + 1.$$

При $W = W_1$ получаем $F_{xz} = F_{yz} = 1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$. График функции $1 + \cos \theta$ изображен на рис. 2.16, б. Его называют *кардиоидой*. Из графика видно, что максимум диаграммы направленности достигается при $\theta = 0^\circ$, а нулевое значение — при $\theta = 180^\circ$, т.е. *элементарная площадка обладает направленностью излучения в обеих главных плоскостях*.

Элементарную излучающую поверхность в оптике называют *элементом Гюйгенса*. Это элемент поверхности фронта распространяющейся волны.

2.12. Плоский лист тока. Плоская волна

1. Рассмотрим математическую модель плоского поверхностного излучателя. Пусть линейные размеры поверхности S_0 становятся такими, что $a/\lambda \rightarrow \infty$, $b/\lambda \rightarrow \infty$. Тогда S_0 вырождается в плоскость.

Существуют устройства, которые приводятся к рассматриваемой математической модели. Например, в качестве линий передачи ЭМ энергии применяются металлические плоские листы, покрытые слоем диэлектрика. Фазовая скорость поверхностного тока на металле замедляется с помощью слоя диэлектрика или ребристой структуры. Над таким листом возможно распространение поверхностных волн. На основе этого типа устройств создаются невыступающие за поверхность металла излучатели (применяемые на летательных аппаратах). В определенных условиях с помощью плоского поверхностного излучателя конечных размеров можно возбудить ЭМ волну, близкую по свойствам к плоской волне, изучаемой в математической модели.

Пусть сторонний поверхностный электрический ток на плоскости (лист тока) задан в виде тока бегущей волны. Надо найти векторы возбуждаемого ЭМ поля.

2. ДСК расположим так, чтобы лист тока совпал с плоскостью xz (рис. 2.17,а). Направим ось x вдоль вектора \mathbf{j}^c . Считаем, что волна тока с фазовой скоростью $v_{\text{ф0}} = \omega/\beta_0$ распространяется вдоль оси x . Тогда $\mathbf{j}^c = \mathbf{1}_x j_0 \exp(-i\beta_0 x)$, $\mathbf{j}^c = \mathbf{j}^c(x, z) \times \delta(y-0)$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < z < \infty$.

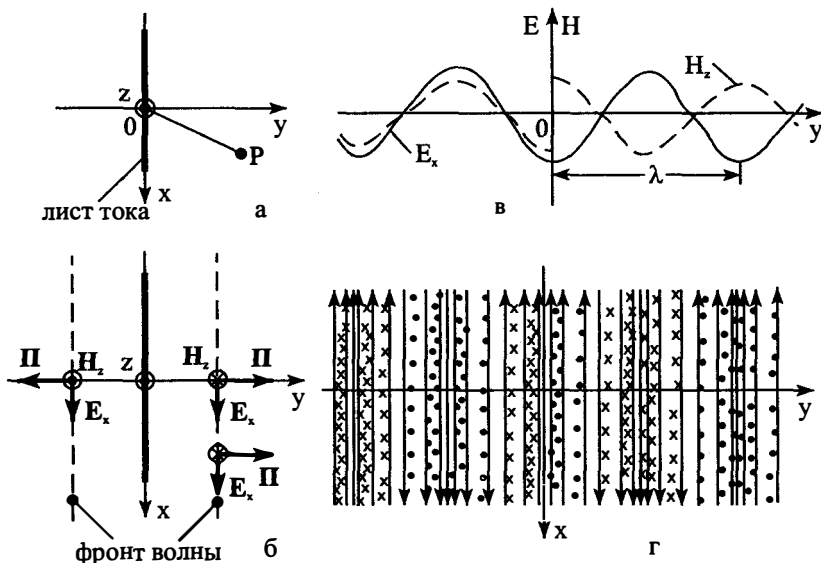


Рис. 2.17. Лист тока, фронт плоской волны; силовые линии поля

Найдем векторные потенциалы. Так как $\mathbf{j}^{m,c} = 0$, то по (П 4.4) $\dot{\mathbf{A}}^m = 0$. Для вычисления $\dot{\mathbf{A}}$ подставим в (П 4.4) значение \mathbf{j}^c и функцию Грина (П 4.5) и поменяем порядок интегрирования по коэффициентам распространения и пространственным координатам, после чего, используя основное свойство δ -функции, выполним интегрирование по y' . Учтем, что размеры плоскости бесконечны по x' и z' , это позволяет выделить интегралы Фурье (П 2.5) дельта-функций $\delta(x_1 - \beta_0)$ и $\delta(x_3 - 0)$. Применение далее основного свойства δ -функции при интегрировании по y_1 и x_3 дает

$$\dot{A}_x = \frac{j_0}{2h} e^{-i\beta_0 x} e^{\pm hy}, \quad \dot{A}_y = \dot{A}_z = 0. \quad (2.70)$$

где верхний знак соответствует $y \leq 0$, а нижний — $y \geq 0$ и обозначено $h = (\beta_0^2 - k^2)^{1/2}$.

Составляющие $\dot{\mathbf{H}} = \text{rot} \dot{\mathbf{A}}$ в ДСК определяем по (П 1.11):

$$\dot{H}_x = \text{rot}_x \dot{\mathbf{A}} = 0, \quad \dot{H}_y = \text{rot}_y \dot{\mathbf{A}} = 0, \quad \dot{H}_z = \text{rot}_z \dot{\mathbf{A}} = \mp \frac{j_0}{2} e^{-i\beta_0 x \pm hy}. \quad (2.71)$$

Составляющие $\dot{\mathbf{E}}$ в ДСК определяем из первого уравнения Максвелла с помощью (П 1.11) и (2.70): $\dot{E}_z = 0$,

$$\dot{E}_x = \frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_a} \text{rot}_x \dot{\mathbf{H}} = \frac{i j_0 h}{2\omega \tilde{\epsilon}_a} e^{-i\beta_0 x \pm hy}, \quad \dot{E}_y = \mp \frac{j_0 \beta_0}{2\omega \tilde{\epsilon}_a} e^{-i\beta_0 x \pm hy}. \quad (2.72)$$

Отношение касательной составляющей вектора $\dot{\mathbf{E}}$ к касательной составляющей вектора $\dot{\mathbf{H}}$ на листе называют *поверхностным сопротивлением (импедансом)*,

$$Z_S = \pm \dot{E}_x / \dot{H}_z \Big|_{y=\pm 0} = ih / \omega \tilde{\epsilon}_a = ihW / k. \quad (2.73)$$

Рассмотрим ЭМ поле в среде без потерь, где $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$ ($k = \beta$).

3. В случае замедленной волны тока ($v_{\phi 0} < v_{\phi}$) имеем $\beta_0 > \beta$. Величина $h = (\beta_0^2 - \beta^2)^{1/2}$ действительна и положительна. Волновой множитель $\exp(-i\beta_0 x)$ и экспоненциальный множитель $\exp(\pm hy)$ указывают на то, что (2.71), (2.72) описывают поле, имеющее характер бегущих вдоль оси x волн, экспоненциально затухающих вдоль оси y . Фазовая скорость волны $v_{\phi x} = v_{\phi 0} < v_{\phi} = (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}$. *Продольное направление определяется осью x . Имеется продольная составляющая \dot{E}_x . Таким образом, над листом электрического тока распространяется поверхностная (медленная) E -волна. Вдоль оси y нет волнового движения поля. Поэтому ЭМ энергия вдоль нормали к листу тока не переносится. Плотность ЭМ энергии уменьшается с ростом $|y|$ по закону $\exp(-2h|y|)$. Поверхностное сопротивление (2.73) медленной волны чисто реактивно и носит индуктивный характер.*

Картина силовых линий электрического и магнитного полей не отличается от изображенной на рис. 2.13,б (если заменить ось z осью x).

4. Предположим, что $\beta_0 = 0$. При этом поле возбуждается синфазным листом однородного поверхностного тока. Из (2.71), (2.72) имеем:

$$\dot{E}_x = -0.5 j_0 W e^{\pm \beta y}, \quad \dot{H}_z = \pm \dot{E}_x W^{-1}, \quad \dot{E}_y = \dot{E}_z = \dot{H}_x = \dot{H}_y = 0. \quad (2.74)$$

Волновой множитель $\exp(\pm i\beta y)$ показывает, что поле (2.74) распространяется в виде бегущих, уходящих от листа в направлении нормали к листу, волн. Фронт волны (волновая поверхность) является плоскостью $y = y_1 = \text{const}$, параллельной листу тока. Волна имеет только синфазные между собой поперечные составляющие векторов поля, связанные характеристическим сопротивлением пространства W . Фазовая скорость волны $v_\phi = \omega/\beta = (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}$. Амплитуды $|\dot{E}_x|$ и $|\dot{H}_z|$ не зависят от продольного расстояния y и однородны на фронте. Такая волна называется *однородной плоской ЭМ волной*.

На поверхности листа (при $y=0$) \dot{E}_x противофазна току J^c . Поверхностное сопротивление — действительная отрицательная величина.

Вектор Пойнтинга плоской волны $\dot{\Pi} = \pm 1_y |J_0|^2 W/8$ при $y > 0$ направлен в сторону увеличения y , а при $y < 0$ — в сторону уменьшения y . Это подтверждает, что *возбуждаемые листом плоские волны поля уходят от излучателя на бесконечность* ($y \rightarrow \pm\infty$).

Картину силовых линий плоской волны можно построить по (1.22), определив по (2.74) E_x , H_z при $t = t_0$:

$$E_x(y, t_0) = -0,5 |J_0| \cos(\omega t_0 \pm \beta y), \quad H_z(y, t_0) = \pm E_x(y, t_0) W^{-1},$$

где $\psi_0 = 0$. Зависимости $E_x(y, t_0)$, $H_z(y, t_0)$ при $t_0 = NT$ изображены на рис. 2.17,а. По ним построены силовые линии E и H полей (рис. 2.17,б). Картина силовых линий полей на рис. 2.17,б изображена в части пространства, ограниченного по координатам x и y . Вообще же силовые линии E_x и H_z продолжаются во все неограниченное пространство. С течением времени картина силовых линий «бежит» в направлениях $y \rightarrow \pm\infty$, при этом ток J^c порождает новые семейства силовых линий, которые «продвигают» от листа уже существующие там семейства.

Возбудить в неограниченном пространстве *однородную плоскую волну* с помощью реального устройства *невозможно*, так как при этом источник должен затрачивать бесконечную мощность. Действительно, так как через единичную площадь фронта поле уносит от излучателя мощность $\Pi = |J_0|^2 W/8$, то через площадь $l_x l_z$ фронта — мощность $\Pi l_x l_z$. При $l_x l_z \rightarrow \infty$ мощность источника должна быть бесконечной. Понятие однородной плоской волны применяется в математических моделях, при вычислениях для аппроксимации сложного волнового фронта в локальных участках пространства. Например, сферическую волну в ограниченных участках пространства можно аппроксимировать *локально плоской волной*.

2.13. Вращающаяся поляризация поля

1. ЭМ поле, у которого в точке p в любой момент времени можно установить направление вектора E , называется *поляризованным*. ЭМ поле, у которого направление вектора E в точке p меняется случайным образом, называется *неполяризованным*. Плоскость, проходящую через направление распространения поля и вектор E , называют *плоскостью поляризации*. Если положение плоскости поляризации

в точке p не меняется во времени, то поле имеет *линейную поляризацию*. Если же плоскость поляризации в точке p во времени вращается, то поляризацию поля называют *вращающейся*.

2. Прямолинейный электрический вибратор возбуждает в зоне излучения ЭМ поле, у которого $\mathbf{E} = \mathbf{1}_\theta E_\theta(p, t)$ (рис. 2.7). Направление распространения поля определяется ортом $\mathbf{1}_R$. Плоскость, проходящая через $\mathbf{1}_R$ и \mathbf{E} , есть плоскость поляризации. В данном случае — это меридиональная плоскость. Направление \mathbf{E} не меняется во времени, поэтому плоскость поляризации не вращается. Таким образом, поляризация линейна.

3. Рассмотрим пример *вращающейся поляризации*. Пусть имеем два перпендикулярных в пространстве, где нет тепловых потерь, элементарных электрических вибратора, середины их совпадают. Поместим начало ДСК в середины вибраторов, ось z направим вдоль оси вибратора-1, ось y — вдоль оси вибратора-2 (рис. 2.18,а). Электрические моменты вибраторов $\dot{I}_z L_1 / i\omega$, $\dot{I}_y L_2 / i\omega$.

Для упрощения рассмотрим сначала поле на оси x , т.е. при $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$. В точке $p_1(R_1, \pi/2, 0)$ в зоне излучения вибратор-1 возбуждает поле (2.40), у которого

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{1}_\theta \dot{E}_{\theta 1}(p_1), \quad \dot{E}_{\theta 1} = \frac{ik \dot{I}_z L_1 W e^{-ikR_1}}{4\pi R_1}.$$

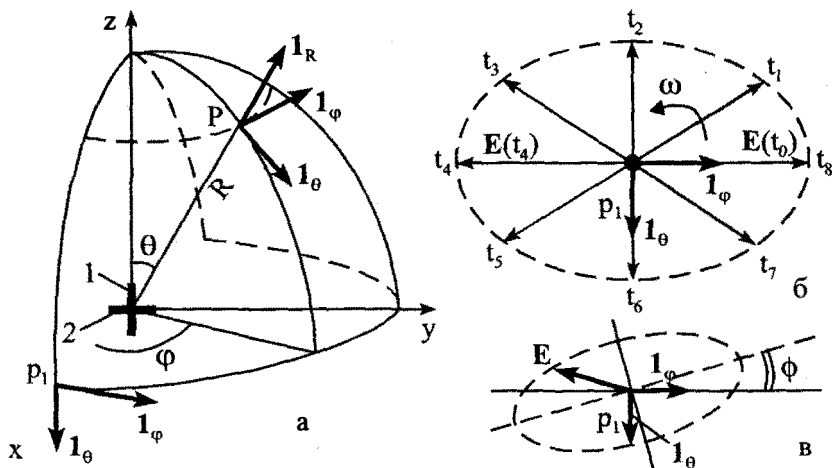


Рис. 2.18. Перпендикулярные вибраторы; вращающаяся поляризация поля

Вибратор-2 в этой же точке p_1 возбуждает поле, у которого

$$\dot{E}_2 = \mathbf{1}_\Phi \dot{E}_{\Phi 2}(p_1), \quad \dot{E}_{\Phi 2} = \frac{-ik\dot{I}_y L_2 W e^{-ikR_1}}{4\pi R_1}.$$

Общее поле в точке p_1 по принципу наложения $\dot{E}(p_1) = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = \mathbf{1}_\Theta \dot{E}_{\Theta 1}(p_1) + \mathbf{1}_\Phi \dot{E}_{\Phi 2}(p_1)$.

Мгновенное значение $E(p_1, t)$ (при $k = \beta$) определяем по (1.60):

$$E(p_1, t) = \mathbf{1}_\Theta |\dot{E}_{\Theta 1}| \cos(\omega t - \beta R_1 + \psi_1 + \pi/2) + \mathbf{1}_\Phi |\dot{E}_{\Phi 2}| \cos(\omega t - \beta R_1 + \psi_2 - \pi/2).$$

Обозначим через $\psi_2 - \psi_1 = \Delta\psi$ разность фаз токов вибраторов.

Тогда

$$E(p_1, t) = -\mathbf{1}_\Theta |\dot{E}_{\Theta 1}| \sin(\omega t - \beta R_1 + \psi_1) + \mathbf{1}_\Phi |\dot{E}_{\Phi 2}| \sin(\omega t - \beta R_1 + \psi_1 + \Delta\psi). \quad (2.75)$$

Зададим разность фаз токов $\Delta\psi = \pi/2$. Выберем момент времени t_0 такой, что $\omega t_0 - \beta R_1 + \psi_1 = 2\pi N$, где N — целое число. Тогда

$E(p_1, t_0) = \mathbf{1}_\Phi |\dot{E}_{\Phi 2}|$ (рис. 2.18,б). В момент $t_1 = t_0 + T/8$ имеем: $\omega t_1 - \beta R_1 + \psi_1 = 2\pi N + \pi/4$. Поэтому

$$E(p_1, t_1) = -\mathbf{1}_\Theta \cdot 0,707 |\dot{E}_{\Theta 1}| + \mathbf{1}_\Phi \cdot 0,707 |\dot{E}_{\Phi 2}|.$$

При $t_n = t_0 + nT/8$, где n — целое число,

$$E(p_1, t_n) = -\mathbf{1}_\Theta |\dot{E}_{\Theta 1}| \sin(n\pi/4) + \mathbf{1}_\Phi |\dot{E}_{\Phi 2}| \sin(n+2)\pi/4$$

и $E(p_1, t_n)$ последовательно занимает положения, изображенные на рис. 2.18,б, т.е. равномерно вращается. Период вращения равен T . *Плоскость поляризации вращается. При разности фаз токов $\Delta\psi = \pi/2$ вращение происходит в направлении вращения часовой стрелки, если смотреть в направлении распространения волны (вдоль орта $\mathbf{1}_R$). Конец вектора $E(p_1, t)$ в точке p_1 при $|\dot{E}_{\Theta 1}| \neq |\dot{E}_{\Phi 2}|$, равномерно вращаясь, описывает эллипс. Угол наклона Φ большой оси эллипса зависит от разности фаз токов $\Delta\psi$ (рис. 2.18,в). Вращающуюся поляризацию при этом называют эллиптической. В частном случае $|\dot{E}_{\Theta 1}| = |\dot{E}_{\Phi 2}|$ и конец вектора E описывает окружность, поляризацию при этом называют круговой (волна поляризована по кругу).*

4. Из (2.75) видно, что фаза $\omega t_0 - \beta R_1 + \psi_1$ с увеличением R_1 уменьшается. Поэтому вектор $E(p_1, t_0)$ при увеличении R_1 поворачивается на один оборот на расстоянии, равном λ , описывая правовинтовую

спираль. Поляризацию при этом называют *правой*. Если задать $\Delta\psi = -\pi/2$, то получим *левую поляризацию*, когда в точке p_1 направление вращения вектора \mathbf{E} образует с направлением распространения волны левинтовую систему.

В случае, когда $\Delta\psi = 0$ или $\Delta\psi = m\pi$, где m — целое число, то при этом, как видно из (2.75), всегда поляризация поля линейная, но вектор $\dot{\mathbf{E}}(p_1)$ наклонен к орту $\mathbf{1}_\theta$.

Пусть поле (2.75) при $\Delta\psi = \pi/2$ описывает поле правой поляризации и пусть при $\Delta\psi = -\pi/2$ выражение

$$\mathbf{E}^-(p_1, t) = -\mathbf{1}_\theta |\dot{E}_{\theta 1}| \sin(\omega t - \beta R_1 + \psi_1) + \mathbf{1}_\varphi |\dot{E}_{\varphi 2}| \sin(\omega t - \beta R_1 + \psi_1 - \frac{\pi}{2})$$

описывает поле левой поляризации. Складывая последнее выражение с (2.75), получаем линейно поляризованное поле:

$$\frac{1}{2}[\mathbf{E}(p_1, t) + \mathbf{E}^-(p_1, t)] = -\mathbf{1}_\theta |\dot{E}_{\theta 1}| \sin(\omega t - \beta R_1 + \psi_1).$$

Таким образом, *линейно поляризованное поле можно разложить на сумму поля правой и поля левой поляризации*.

Рассмотрим поле линейной поляризации $\dot{\mathbf{E}}(p) = \mathbf{1}_\theta \dot{E}_\theta$. Добавим и вычтем из этого выражения значение $\mathbf{1}_\varphi i\dot{E}_\theta$. Получаем:

$$\dot{\mathbf{E}}(p) = \frac{1}{2}[\mathbf{1}_\theta \dot{E}_\theta + \mathbf{1}_\varphi (i\dot{E}_\theta)] + \frac{1}{2}[\mathbf{1}_\theta \dot{E}_\theta + \mathbf{1}_\varphi (-i\dot{E}_\theta)]. \quad (2.76)$$

Здесь первая сумма в квадратных скобках определяет волну левой круговой поляризации, а вторая — волну правой круговой поляризации.

Аналогичные выражения справедливы и для составляющих вектора $\dot{\mathbf{H}}$.

5. В произвольной точке p зоны излучения вибратор-1 возбуждает поле

$$\dot{\mathbf{E}}_1(p) = \mathbf{1}_\theta \dot{E}_{\theta 1} \cdot \sin \theta, \quad \dot{E}_{\theta 1} = \frac{ikI_z L_1 W}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R}.$$

Вектор $\dot{\mathbf{E}}_2$ поля вибратора-2 проще всего определить по значению $\dot{A}_y = (\dot{I}_y L_2 / 4\pi) \exp(-ikR) / R$. Определяя по (III.2) значения \dot{A}_R , \dot{A}_θ , \dot{A}_φ , из (1.124) имеем

$$\mathbf{E}_2(p) = \dot{E}_2 \cdot (\mathbf{1}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{1}_\varphi \cos \varphi), \quad \dot{E}_2 = -\frac{ikI_y L_2 W}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R}.$$

Общее поле в точке p

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{1}_\theta (\dot{E}_{\theta 1} \sin \theta + \dot{E}_2 \cos \theta \sin \varphi) + \mathbf{1}_\varphi \dot{E}_2 \cos \varphi.$$

Мгновенное значение $\mathbf{E}(p, t)$ зависит не только от разности фаз токов $\Delta\psi$ и электрических моментов вибраторов, но и от угловых координат точки p . Поэтому параметры эллипса поляризации зависят и от угловых координат.

2.14. Электростатические поля. Поле стационарного тока

1. Для вычисления электростатического поля и поля стационарных токов в неограниченном пространстве ($\omega=0$, $k=0$) необходимо решить уравнения Пуассона (1.132), (1.133) для скалярных и векторных потенциалов. Решения последних получаются из решений уравнения Гельмгольца (П 2.4) и (П 4.4), в которых необходимо положить $k=0$.

В качестве примеров рассмотрим математические модели, содержащие плоские листы заряда и прямолинейные нити стационарных токов.

2. Пусть имеем плоский лист с плотностью поверхностного стороннего заряда τ^c . Расположим ДСК так, чтобы плоскость xz совпала с листом заряда (рис. 2.19,а). Тогда $\rho^c = \tau^c(x, y)\delta(y-0)$. Для упрощения считаем, что τ^c однородно.

Подставим в (П 4.2) правую часть ρ^c/ϵ_a уравнения Пуассона (1.132) и значение функции Грина (П 4.5) при $k=0$. Используем основное свойство δ -функции при интегрировании по y' . Поменяем порядок интегрирования по коэффициентам распространения и пространственным координатам, после чего учтем (П 2.5). Поскольку скалярный потенциал ϕ зависит только от y , то дифференцируя под знаком интеграла, находим $E = -\text{grad}\phi = 1_y E_y$, $E_y = \mp \tau^c / 2\epsilon_a$, где верхний знак берется при $y < 0$, а нижний — при $y \geq 0$. Силовые линии поля E при $\tau^c > 0$ изображены на рис. 2.19,а.

3. Пусть имеем два параллельных плоских листа, заряженных с однородной плотностью τ^c (рис. 2.19,б). Тогда $\rho^c = \tau^c\delta(y-0) + \tau^c\delta(y-d)$. Для точки наблюдения, расположенной между листами, тем же путем, что использован выше, получим $E = 1_y E_y$, $E_y = 0$ при $0 \leq y \leq d$ и $E_y = \mp \tau^c / \epsilon_a$ при $y \leq 0$ (верхний знак) и при $y \geq d$ (нижний знак). Таким образом, между листами отсутствует электрическое поле, т.е. происходит электростатическое экранирование. Силовые линии поля E при $\tau^c > 0$ изображены на рис. 2.19,б. Этот результат объясняется так: если в поле заряженного плоского листа с

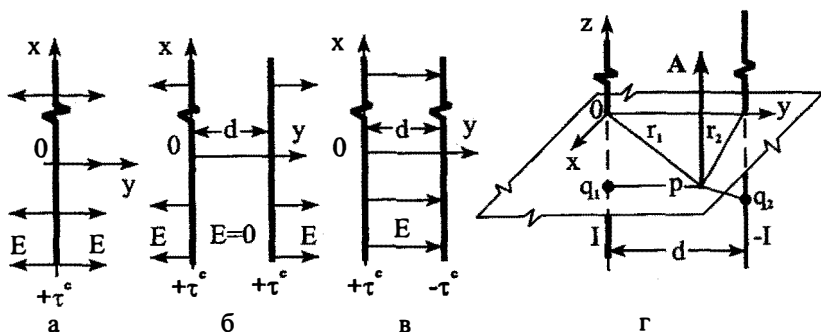


Рис. 2.19. Плоские листы статического заряда (а, б, в) и двухпроводная линия (г)

плотностью стороннего заряда τ^c (рис. 2.19,а) внести плоский лист с такой же сторонней плотностью τ^c и расположить его параллельно первому листу, то между листами (во внутреннем пространстве) поля обоих листов компенсируют друг друга, так как векторы \mathbf{E} листов направлены в противоположные стороны и равны по величине. За пределами внутреннего пространства поле удваивается, так как векторы \mathbf{E} направлены в одну сторону и равны по величине.

4. Рассмотрим модель, соответствующую случаю плоского конденсатора. Если в поле листа, заряженного положительно (τ^c) внести заряженный отрицательно лист ($-\tau^c$) и расположить его на расстоянии d от первого (рис. 2.19,б), то во внутреннем пространстве общее поле удваивается по сравнению с полем одного листа, так как векторы \mathbf{E} поля листов одинаковы по величине и направлению. За пределами внутреннего пространства общее (суммарное) поле станет равным нулю, так как поля листов компенсируют друг друга.

Покажем это количественно. Имеем $\rho^c = \tau^c \delta(y-0) - \tau^c \delta(y-d)$. Подставим правую часть уравнения Пуассона ρ^c / ϵ_a и значение функции Грина (П 4.5) при $k=0$ в (П 4.2). Используем основное свойство δ -функции при интегрировании по y' и разложение δ -функции (П 2.5). Выполняя интегрирование по x_3 и преобразуя подынтегральное выражение, получаем

$$\varphi(p) = \frac{\tau^c}{\epsilon_a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa_1 x - \kappa_1 d/2} \cdot \frac{\text{sh}[\kappa_1(d/2 - y)]}{\kappa_1} \delta(\kappa_1 - 0) d\kappa_1.$$

Учтем, что $\lim_{\kappa_1 \rightarrow 0} \kappa_1^{-1} \text{sh}[\kappa_1(d/2 - y)] = d/2 - y$ при $\kappa_1 \rightarrow 0$. Находим

$$\varphi(p) = \frac{\tau^c}{\epsilon_a} \left(\frac{d}{2} - y \right), \quad 0 \leq y \leq d.$$

Аналогичным образом для $y \leq 0$ и $y \geq d$ получаем $\varphi(p) = \pm \tau^c d / 2 \epsilon_a$, где верхний знак берется при $y \leq 0$, а нижний — при $y \geq d$. При этом $\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi = -\mathbf{1}_y \partial \varphi / \partial y = \mathbf{1}_y E_y$, $E_y = \tau^c / \epsilon_a$ при $0 \leq y \leq d$ и $E_y = 0$ при $y \leq 0$ и $y \geq d$. Это соответствует изложенным выше физическим соображениям. Силовые линии поля изображены на рис. 2.19,в.

5. Пусть имеем математическую модель конденсатора, образованного расположенными на расстоянии d друг от друга плоскими пластинами, заряженными зарядами противоположных знаков.

Можно считать, что пластины конденсатора площади S каждая — части заряженных листов. Поле между ними однородно по y и существует только между пластинами. Но это приближенное представление, так как пластины конденсатора имеют конечные размеры и поле на их краях искажается: оно становится неоднородным у краев и отличается от нуля за пределами внутреннего пространства (*краевой эффект*).

Разность потенциалов пластин (напряжение) $u = \varphi(0) - \varphi(d) = \tau^c d / \epsilon_a = E_y d$.

Емкостью конденсатора C называют (§ 1.7) отношение величины заряда $Q = S \tau^c$ пластины к напряжению u : $C = Q/u = S \epsilon_a / d$. Энергия (1.50) электрического поля в объеме

$$\Delta V_c = Sd \text{ конденсатора } W^3 = \epsilon_a E_y^2 Sd / 2 = C u^2 / 2.$$

6. От двухпроводной длинной линии, если пренебречь толщиной проводов и последним приписать свойства идеального проводника, можно придти к приближенной математической модели: имеются две параллельные прямолинейные нити противоположно направленных токов. Необходимо найти напряженность магнитного поля.

Направим ось z ДСК вдоль одной из нитей (рис. 2.19,з). Пусть I и $-I$ — плотности постоянных линейных токов нитей. Тогда в соответствии с (2.1) $\mathbf{j} = \mathbf{1}_z [\delta(x-0)[\delta(y-0) - \delta(y-d)]$. Так как система по z однородна, то вычисления можно выполнить в плоскости $z=0$. Если L — длины проводов, то из (2.2) при $k=0$ получаем

$$\mathbf{A} = \mathbf{1}_z \frac{I}{4\pi} \left(\int_L \frac{dz'}{r_{pq1}} - \int_L \frac{dz'}{r_{pq2}} \right)$$

где $r_{pq1,2} = (r_{1,2}^2 + z'^2)^{1/2}$ — расстояния между точкой наблюдения p и точками q_1 и q_2 интегрирования на нитях, $r_1 = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $r_2 = [x^2 + (y-d)^2]^{1/2}$. Чтобы выполнить интегрирование, введем новые переменные $\xi = r_{pq1} - z'$ в первом интеграле и $\theta = r_{pq2} - z'$ — во втором. Положим, что $L = 2l$, а начало координат расположено в середине каждой нити. Тогда, выполнив интегрирование в пределах от $-l$ до l , получаем

$$\mathbf{A} = \mathbf{1}_z A_z, \quad A_z = \frac{I}{4\pi} \left(\ln \frac{\sqrt{r_2^2 + l^2} - l}{\sqrt{r_2^2 + l^2} + l} - \ln \frac{\sqrt{r_1^2 + l^2} - l}{\sqrt{r_1^2 + l^2} + l} \right)$$

Так как $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$, то $H_x = \partial A_z / \partial y$, $H_y = \partial A_z / \partial x$, $H_z = 0$. Таким образом, можно считать, что \mathbf{H} определен.

Если двухпроводная линия является бесконечной, то $l \rightarrow \infty$. Учитывая при этом, что $(r_{1,2}^2 + l^2)^{1/2} - l = r_{1,2}^2 / 2l$, $(r_{1,2}^2 + l^2)^{1/2} + l = 2l$, получаем $A_z = (I/2\pi) \cdot \ln(r_2/r_1)$.

ЗАДАЧИ

1. Построить для различных моментов времени t_n графики распределения ($t_n = NT + nT/8$, где N — целое число, $n = 1, 2, \dots, 8$, $T = 2\pi/\omega$) мгновенных значений плотностей тока и заряда прямолинейной нити с бегущей без затухания волной тока, если длина нити $L = 1,3\lambda$.

2. Построить для различных моментов времени графики распределения в различные моменты времени мгновенных значений плотностей тока и заряда прямолинейной нити со стоячей волной тока, если $L = 1,3\lambda$, источник включен в середине нити (нить — симметричный излучатель).

3. Показать, что прямолинейная нить с бегущей волной магнитного тока в неограниченном однородном пространстве без тепловых потерь имеет характеристику направленности $F(\theta) = \sin\theta \sin\xi/\xi$, где $\xi = (\beta_0 - \beta \cos\theta)L/2$, β_0 — коэффициент фазы тока, θ — отсчитывается от «оси» нити, L — длина нити.

4. Показать, что прямолинейная нить электрического равномерно распределенного по длине тока в неограниченном однородном пространстве без тепловых потерь имеет характеристику направленности $F(\theta) = \sin\theta \sin\xi/\xi$, где $\xi = \beta L(\cos\theta)/2$, θ отсчитывается от «оси» нити.

5. Вычислить комплексный вектор Пойнтинга в ближней зоне и мгновенное значение вектора Пойнтинга в дальней зоне элементарного электрического вибратора.

6. Вычислить напряженности магнитного и электрического полей в свободном пространстве, возбуждаемых вибратором Герца на расстоянии 10 м от вибратора при угле места 60° , если длина вибратора равна $L = 0,05\lambda$, ток $\dot{I}_0 = 1 \text{ А}$, $\lambda = 0,4 \text{ м}$.

7. Вычислить векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ поля, возбуждаемого в свободном пространстве магнитным вибратором на расстоянии 10 м от вибратора при угле места 60° , если $L = 0,05\lambda$, магнитный ток $\dot{I}_0^M = 377 \text{ В}$, $\lambda = 0,4 \text{ м}$.

8. Найти комплексный вектор Пойнтинга в ближней зоне элементарного магнитного вибратора.

9. Вычислить векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ поля, возбуждаемого в свободном пространстве рамкой с однородным электрическим током на расстоянии 10 м от рамки при угле места 45° , если радиус рамки равен $0,02\lambda$, $\dot{I}_0 = 1 \text{ А}$.

10. Вычислить векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ поля, возбуждаемого рамкой магнитного тока в свободном пространстве на расстоянии 10 м от рамки при угле места 45° , если радиус рамки равен $0,02\lambda$, $\dot{I}_0^M = 377 \text{ В}$, $\lambda = 0,4 \text{ м}$.

11. Получите выражения (2.63) без применения принципа перестановочной двойственности.

12. Показать, что в поле бесконечной нити магнитного тока выполняется закон полного (магнитного) тока: циркуляция вектора $\dot{\mathbf{H}}$ по замкнутому, охватывающему ток контуру, равна магнитному стороннему току (с обратным знаком).

13. На плоской прямоугольной поверхности (рис. 2.4) заданы сторонние значения $\dot{\mathbf{E}}^c = \mathbf{1}_x \dot{E}_x^c$, $\dot{\mathbf{H}}^c = \mathbf{1}_y \dot{H}_y^c$, $\dot{H}_y^c = \dot{E}_x^c W^{-1}$. Найти векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в главных плоскостях дальней зоны.

14. Показать, что при переходе точки наблюдения через лист электрического тока касательная к листу составляющая вектора $\dot{\mathbf{H}}$ терпит скачок, равный плотности поверхностного электрического тока.

15. Показать, что при переходе точки наблюдения через лист поверхностного электрического тока касательная к листу составляющая вектора $\dot{\mathbf{E}}$ непрерывна.

16. Показать, используя уравнение непрерывности, что нормальная к листу электрического тока составляющая вектора $\dot{\mathbf{D}}$ на листе терпит скачок, равный плотности поверхностного заряда.

17. Над плоскостью в пространстве без потерь распространяется поверхностная E -волна. Найти мощность P , переносимую поверхностной волной через окно, перпендикулярное направлению распространения волны и стоящее на плоскости. Вычислить переносимую через окно всю мощность P_0 , когда размер окна вдоль нормали к плоскости стремится к бесконечности. Найти зависимость P/P_0 от электрического расстояния вдоль нормали (от βy). Сравнить зависимости при $v_{\phi 0} = 0,5c$ и $v_{\phi 0} = 0,9c$ ($c = (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}$). Сделать выводы.

18. Точка p находится в экваториальной плоскости в поле элементарного электрического вибратора — на прямолинейном отрезке длины l . Середина отрезка находится на расстоянии $R = 100\lambda$ от вибратора. Отрезок в середине перпендикулярен направлению на вибратор. Показать, что разность фаз полей в середине отрезка и в точке p меня-

ется по квадратичному закону и равна приближенно $\beta \rho^2 / 2R$, где ρ — расстояние от середины отрезка до точки p . Вычислить максимальную разность фаз, если $l = 2\lambda$. Показать, что сферическую волну в пределах отрезка (локально) приближенно можно заменить плоской волной.

19. Решить задачу 18, но отрезок расположить в меридиональной плоскости так, что его середине соответствует угол места $\pi/2$.

20. Получить вращающуюся поляризацию поля с помощью вибратора Герца и витка однородного электрического тока.

21. Получить вращающуюся поляризацию поля с помощью двух витков однородных электрических токов.

22. Указать условия, при которых можно получить вращающуюся поляризацию поля поверхностного излучателя.

23. Указать условия, при которых можно получить вращающуюся поляризацию поля элементарного поверхностного излучателя.

24. Показать, что наложение полей листов бегущих волн электрического и магнитного токов, векторы которых ортогональны в пространстве, приводит при определенном условии к одностороннему излучению поля. Например, если на плоскости xz (рис. 2.17,а) $\mathbf{j}^c = \mathbf{1}_x j_0^c \exp(-i\beta_0 x)$, $\mathbf{j}^{m,c} = \mathbf{1}_z j_0^{m,c} \exp(-i\beta_0 x)$, $j_0^{m,c} = iWj_0^c [(\beta_0/\beta)^2 - 1]^{1/2}$, то суммарное поле при $y < 0$ равно нулю, а при $y \geq 0$ оно удваивается по сравнению с полем одного листа тока.

Показать, что касательные к листам составляющие $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ при переходе через лист терпят скачок, равный соответственно плотностям магнитного и электрического токов. Сравнить результат с граничным условием на теле идеальной проводимости (§ 1.12).

25. Показать, что векторный потенциал двухпроводной бесконечно длинной линии с бегущими противофазными незатухающими волнами токов в проводах определяется в среде без потерь выражением $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_z \dot{A}_z$, $\dot{A}_z = (\dot{I}_0 / 4i) \cdot \exp(-i\beta_0 z) \times \times [H_0^{(2)}(vr) - H_0^{(2)}(vr_{pq2})]$, где β_0 — коэффициент фазы токов, $v = -ih$, $h > 0$, r_{pq2} — расстояние от оси второго провода до точки p , ось z — направлена вдоль оси первого провода (рис. 2.12,а).

Показать, что в отличие от картины силовых линий однопроводной линии (рис. 2.12,б), картина силовых линий полей \mathbf{E} и \mathbf{H} двухпроводной линии соответствует рис. 1.15,б.

Указание: использовать математическую модель однородной длинной линии и разложение (П 3.8).

ГЛАВА 3. ТЕОРЕМЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

3.1. Лемма Лоренца

При доказательстве важных положений электродинамики используют математическое соотношение, называемое леммой Лоренца.

1. Рассмотрим дифференциальную форму леммы Лоренца. Пусть имеем следующую математическую модель. В линейной изотропной неоднородной среде с непрерывно изменяющимися параметрами $\tilde{\epsilon}_a$, μ_a заданы плотности сторонних электрических и магнитных токов \mathbf{j}_1^c , $\mathbf{j}_1^{m,c}$ частоты ω . Они возбуждают ЭМ поле, векторы напряженности которого $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ определяются уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_1 = i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{j}_1^c; \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_1 = -i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{j}_1^{m,c}. \quad (3.2)$$

В той же среде заданы и плотности сторонних электрических и магнитных токов \mathbf{j}_2^c , $\mathbf{j}_2^{m,c}$ частоты ω . Они возбуждают ЭМ поле, векторы напряженности которого определяются уравнениями

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_2 = i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_2 + \mathbf{j}_2^c; \quad (3.3)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_2 = -i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{j}_2^{m,c}. \quad (3.4)$$

Установим с помощью четырех последних уравнений связь между полями и плотностями сторонних токов. Для этого умножим скалярно (3.1) на $\dot{\mathbf{E}}_2$, а (3.4) — на $\dot{\mathbf{H}}_1$ и вычтем из первого результата второй. Учитывая тождество (П 1.6), получаем

$$-\operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_1] = i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{E}}_2 + \mathbf{j}_1^c \dot{\mathbf{E}}_2 + i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2 + \mathbf{j}_2^{m,c} \dot{\mathbf{H}}_1.$$

Умножим скалярно (3.2) на $\dot{\mathbf{H}}_2$, а (3.3) — на $\dot{\mathbf{E}}_1$ и вычтем второй результат из первого. Имеем

$$\operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2] = -i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{j}_1^{m,c} \dot{\mathbf{H}}_2 - i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{j}_2^c \dot{\mathbf{E}}_1.$$

Складывая последние два равенства, получаем

$$\operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2] - \operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_1] = \mathbf{j}_1^c \dot{\mathbf{E}}_2 - \mathbf{j}_1^{m,c} \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{j}_2^c \dot{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{j}_2^{m,c} \dot{\mathbf{H}}_1. \quad (3.5)$$

Это равенство называют *леммой Лоренца в дифференциальной форме*.

2. Чтобы получить лемму Лоренца в интегральной форме, рассмотрим объем V_0 , ограниченный поверхностью S , состоящей из по-

верхностей S_0, S_1, S_2 . Поверхность S может быть поверхностью раздела сред или некоторой вспомогательной поверхностью. Плотности сторонних токов $\mathbf{j}_1^c, \mathbf{j}_1^{m,c}$ распределены в области V_{n1} , а плотности сторонних токов $\mathbf{j}_2^c, \mathbf{j}_2^{m,c}$ — в области V_{n2} ; V_{n1}, V_{n2} находятся в объеме V_0 (рис. 3.1,а). Проинтегрируем выражение (3.5) по объему V_0 . Применим к левой части результата теорему Остроградского–Гаусса (П 1.3). Учтем, что плотности сторонних токов отличны от нуля только в V_{n1} и V_{n2} . При этом получим лемму Лоренца в интегральной форме:

$$\int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2] - [\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_1]\}_{q \in S} dS_q = \int_{V_{n1}} [\mathbf{j}_1^c(q)\dot{\mathbf{E}}_2 - \mathbf{j}_1^{m,c}(q)\dot{\mathbf{H}}_2] dV_q - \int_{V_{n2}} [\mathbf{j}_2^c(q)\dot{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{j}_2^{m,c}(q)\dot{\mathbf{H}}_1] dV_q, \quad (3.6)$$

где q — точка интегрирования.

Это равенство устанавливает соотношение между напряженностями полей и возбуждающими их токами, учитывает влияние на ЭМ поле формы и пространственного расположения поверхности S . Во многих электродинамических задачах (3.6) используется при составлении интегральных уравнений.

Равенство (3.6) справедливо и в том случае, когда параметры $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$ имеют разрывы непрерывности на поверхностях раздела сред. При этом выражения $[\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}] \mathbf{n} = [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}] \dot{\mathbf{E}} = [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}] \dot{\mathbf{H}}$, определяемые касательными составляющими и входящие в поверхностные интегралы, с учетом граничных условий непрерывны. Значит, указанные поверхности разрывов не приходится выделять при применении теоремы Остроградского–Гаусса.

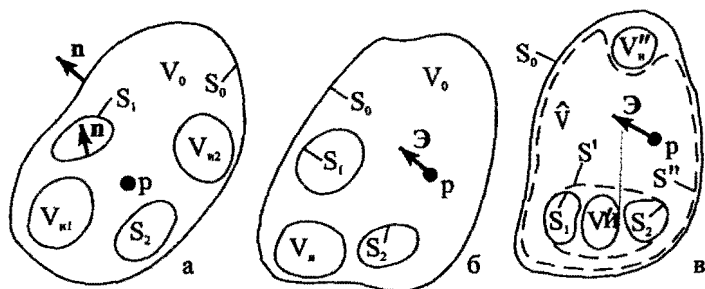


Рис. 3.1. Объем V_0 и области источников

3.2. Теоремы единственности решений уравнений Максвелла. Условия излучения

1. Теоремы единственности указывают как правильно формулировать граничную задачу электродинамики. Для внутренней и внешней граничных задач можно показать для монохроматического поля, что двух (или большего количества) различных решений, каждое из которых удовлетворяет уравнениям Максвелла и граничным условиям, быть не может — существует только единственное решение. Но теорему единственности для этих задач удастся доказать только в предположении, что в каждой точке пространства, где определено ЭМ поле, существуют джоулевы потери, т.е. $\alpha \neq 0$.

2. Пусть имеем объем V_0 , ограниченный поверхностью S , состоящей из поверхностей S_0, S_1, S_2 (рис. 3.1,б). Среда в объеме линейна, неоднородна и изотропна. В области V_n , находящейся в объеме V_0 , заданы сторонние токи частоты ω , возбуждающие ЭМ поле. На поверхности S заданы граничные условия, причем на части поверхности S_s (например, на S_0) заданы граничные условия для касательной составляющей вектора $\dot{\mathbf{E}}$, а на оставшейся части S_m (например, на S_1 и S_2) — только для касательной составляющей вектора $\dot{\mathbf{H}}$; $p \in V_0$.

Доказательство теорем проведем от противного. Предположим, что существуют два решения поставленной задачи: $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_2$. Они удовлетворяют уравнениям Максвелла при одинаковых сторонних токах и одним и тем же граничным условиям. Тогда разность этих решений $\dot{\mathbf{E}}' = \dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}' = \dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{H}}_2$ удовлетворяет *однородным уравнениям Максвелла*

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}' = i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}'; \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}' = -i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}' \quad (3.7)$$

и *однородным граничным условиями на поверхности S* :

$$\dot{\mathbf{E}}'_\tau = 0, \text{ на } S_s, \quad \dot{\mathbf{H}}'_\tau = 0, \text{ на } S_m. \quad (3.8)$$

3. Для *внутренней граничной задачи* объем V_0 конечен, все части поверхности S находятся на конечных расстояниях от источников поля и начала координат. Применим к разностному решению уравнение баланса энергии (1.69). Учитывая, что (3.7) однородны, получаем

$$0 = i2\omega(W^m - W^e) + P^m + \int_S \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}', \dot{\mathbf{H}}'^*]_n dS. \quad (3.9)$$

Из граничных условий (3.8) находим, что поток вектора Пойнтинга разностного поля через поверхность S отсутствует, так как

$$\begin{cases} [\dot{\mathbf{E}}', \dot{\mathbf{H}}'^*] \mathbf{n} = [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}'] \dot{\mathbf{H}}'^* = \dot{\mathbf{E}}'_\tau \dot{\mathbf{H}}'^* = 0 & \text{на } S_3, \\ [\dot{\mathbf{E}}', \dot{\mathbf{H}}'^*] \mathbf{n} = -[\mathbf{n}, \dot{\mathbf{H}}'^*] \dot{\mathbf{E}}' = -\dot{\mathbf{H}}'^*_\tau \dot{\mathbf{E}}' = 0 & \text{на } S_M. \end{cases} \quad (3.10)$$

В объем V_0 ЭМ энергия разностного поля через поверхность S не поступает, но в объеме V_0 нет и сторонних источников. Следовательно, мощность джоулевых потерь энергии в области V_0 должна быть равна нулю. Поэтому

$$P^{\text{п}} = \frac{1}{2} \int_{V_0} \sigma \dot{\mathbf{E}}' \dot{\mathbf{E}}'^* dV = 0. \quad (3.11)$$

Но тогда из равенства (3.9) вытекает, что

$$W^{\text{м}}(\omega) = \frac{1}{4} \int_{V_0} \mu_a \dot{\mathbf{H}}' \dot{\mathbf{H}}'^* dV = W^3(\omega) = \frac{1}{4} \int_{V_0} \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}' \dot{\mathbf{E}}'^* dV. \quad (3.12)$$

При анализе двух последних выражений необходимо различать два случая. Пусть в первом случае *проводимость среды σ отлична от нуля*. Тогда из (3.11) следует, что $\dot{\mathbf{E}}' = 0$ при $r \in V_0$. При этом из (3.12) тоже следует, что $\dot{\mathbf{H}}' = 0$ при $r \in V_0$. Поэтому $\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{\mathbf{H}}_2$. Следовательно, при наличии джоулевых потерь в объеме *единственность решения внутренней граничной задачи электродинамики доказана*.

Пусть во втором случае математическая модель такова, что *проводимость среды равна нулю*, т.е. $\sigma = 0$. Тогда (3.11) удовлетворяется тождественно при разностном поле, отличающемся от нуля. Необходимо только в соответствии с (3.12), чтобы в объеме V_0 средняя энергия электрического поля была равна средней энергии магнитного поля. Это значит, что при этом энергия разностного поля в ограниченном объеме находится в колебательном состоянии. Этот случай соответствует незатухающим колебаниям внутри замкнутых объемов (объемных резонаторов) без потерь. Следовательно, *в ограниченном объеме при отсутствии джоулевых потерь единственность решения граничной задачи нарушается*.

4. При доказательстве теоремы единственности решения внешней задачи учтем, что поверхность S_0 находится на *бесконечно большом расстоянии R* от начала координат, а на S_1 и S_2 , как и выше, касательные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$ удовлетворяют заданным граничным условиям. Область V_n *конечна* и находится на конечном расстоянии от начала координат. При этом векторы $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$

и $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$ в среде с джоулевыми потерями описывают сферические волны, бегущие от излучателя (в области V_{ii}) на бесконечность и затухающие с увеличением расстояния R по закону $\exp(-\alpha R)/R$. Значит, для этих векторов справедливы оценки $|\dot{\mathbf{E}}_{1,2}| < M_{1,2}/R^{1+a}$, $|\dot{\mathbf{H}}_{1,2}| < N_{1,2}/R^{1+a}$, а для векторов разностного поля:

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{E}}'| &\leq |\dot{\mathbf{E}}_1| + |\dot{\mathbf{E}}_2| < (M_1 + M_2)/R^{1+a}; \\ |\dot{\mathbf{H}}'| &\leq |\dot{\mathbf{H}}_1| + |\dot{\mathbf{H}}_2| < (N_1 + N_2)/R^{1+a}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где M_1 , M_2 , N_1 , N_2 , a — конечные положительные величины.

Рассмотрим *первый случай*, когда $\sigma \neq 0$. Применим к разностному полю уравнение баланса энергии (1.69). В результате получим (3.9), где поверхностный интеграл по S является суммой интегралов по S_1 , S_2 и S_0 . Поток вектора Пойнтинга разностного поля через поверхности S_1 и S_2 вследствие граничных условий (3.10) равен нулю, а через поверхность S_0 — тоже равен нулю, так как при $R \rightarrow \infty$ с помощью (3.13) имеем:

$$\frac{1}{2} \int_{S_0} [\dot{\mathbf{E}}', \dot{\mathbf{H}}'] n dS < \frac{1}{2} (M_1 + M_2)(N_1 + N_2) \cdot R^{-2(1+a)} \cdot 4\pi^2 R^2 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, разностное поле удовлетворяет соотношениям (3.11) и (3.12). Если $\sigma \neq 0$, то из (3.11) имеем $\dot{\mathbf{E}}' = 0$, а из (3.12) получаем при этом $\dot{\mathbf{H}}' = 0$, т.е. $\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{\mathbf{H}}_2$. *Двух различных решений одной и той же внешней задачи при $\sigma \neq 0$ быть не может.*

5. Физический смысл доказательства теорем единственности состоит в том, что в объеме V_0 не может существовать разностное ЭМ поле, так как поступлений мощности от стороннего источника и через границы объема для него нет. А поскольку такое поле должно затухать во времени в каждой точке p , то *монохроматическим оно быть не может.*

6. Во втором случае *при отсутствии джоулевых потерь в объеме V_0 ($\sigma = 0$) решение внешней задачи теряет единственность.* Так, например, в неограниченном однородном изотропном пространстве без джоулевых потерь источники конечных размеров возбуждают сферические волны, бегущие (расходящиеся) от источника на бесконечность и зависящие от расстояния R при $R \rightarrow \infty$ как $\exp(-i\beta R)/R$. Но бегущие (сходящиеся) к началу координат сферические волны, описываемые

зависимостью $\exp(i\beta R)/R$, тоже являются решениями задачи. (Их источники расположены на бесконечно большом расстоянии от начала координат). Помимо этого решения однородных дифференциальных уравнений тоже удовлетворяют условиям задачи.

Если среда не имеет джоулевых потерь, то вводя их, можно найти единственное решение задачи, а затем в последнем положить, что $\alpha \rightarrow 0$ (*принцип предельного поглощения*). Так можно исключить сферические волны, сходящиеся к началу координат из «бесконечности», поскольку они зависят от R как

$$\exp(ikR)/R = \exp(\alpha R) \cdot \exp(i\beta R)/R,$$

т.е. амплитуды векторов поля экспоненциально нарастают с увеличением расстояния, что не соответствует физическим представлениям об ЭМ поле.

Если нет джоулевых потерь в среде, то расходящиеся и сходящиеся волны неотличимы по поведению амплитуд векторов поля при $R \rightarrow \infty$. Выделить поле, возбуждаемое данными источниками, невозможно. Для обеспечения единственности решения задачи, надо потребовать, чтобы ЭМ поле на бесконечности являлось сферической волной, уходящей от излучателя, т.е. в изотропной, однородной, линейной среде зависело от расстояния R по закону $\exp(-i\beta R)/R$. Математически это сводится к требованию, чтобы

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial R} + ik\dot{\mathbf{u}} \right) = 0, \quad (3.14)$$

где $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}}$ или $\dot{\mathbf{H}}$. Эти выражения (для $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$) называют условиями излучения (А. Зоммерфельда). Им удовлетворяют только расходящиеся сферические волны.

7. Условия излучения, выделяющие цилиндрические и плоские расходящиеся вдоль r или ρ волны, соответственно имеют вид

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r} + ik\dot{\mathbf{u}} \right) = 0; \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \rho} + ik\dot{\mathbf{u}} \right) = 0.$$

8. В ряде работ по электродинамике мгновенные значения векторов монохроматического поля представляются не в виде (1.60), когда векторы поля зависят от времени по закону $\exp(i\omega t)$, а в следующем виде: $\dot{\mathbf{a}}(p, t) = \text{Re}[\dot{\mathbf{a}}(p) \exp(-i\omega t)]$. Условия излучения при этом отличаются тем, что в (3.14) i заменяется на $(-i)$. (При этом и уравнения Максвелла и их решения отличаются тем, что мнимая единица заменяется на комплексно сопряженную величину, т.е. на $(-i)$).

3.3. Принцип эквивалентности

1. Лемма Лоренца в интегральной форме позволяет выразить искомые напряженности электрического и магнитного полей, возбуждаемых сторонними токами, и при этом учесть влияние поверхностей

раздела сред. При наличии последних возникают следующие процессы: сторонний источник возбуждает в пространстве ЭМ поле, которое, распространяясь от него в виде бегущих волн, достигает поверхности раздела сред и частично отражается (рассеивается) телом, ограниченным поверхностью раздела сред. При этом возникают бегущие волны отраженного (рассеянного) поля, распространяющиеся во всех направлениях, в том числе обратных направлениям волн, бегущих от источников. В результате переотражений от поверхностей раздела сред в объеме устанавливается некоторое результирующее поле. Процесс установления результирующего поля можно трактовать так: на поверхностях раздела сред под воздействием первичного поля источников протекают вторичные поверхностные токи, которые, в свою очередь, возбуждают вторичное ЭМ поле. Величины вторичных поверхностных токов должны зависеть от сторонних токов, от параметров сред, формы поверхностей раздела сред и заданных граничных условий на этих поверхностях.

2. Пусть имеем следующую математическую модель. Объем V_0 ограничен поверхностью S , состоящей из S_0, S_1, S_2 (рис. 3.1,б). Среда в объеме V_0 линейна, неоднородна и изотропна. В области V_n заданы плотности сторонних токов $\mathbf{j}^c, \mathbf{j}^{m,c}$ (частоты ω), возбуждающие ЭМ поле, напряженности которого $\dot{\mathbf{E}}(p, \omega), \dot{\mathbf{H}}(p, \omega)$ надо определить. Область V_n находится в объеме $V_0, p \in V_0$. На поверхности S удовлетворяются заданные граничные условия.

Для решения задачи отождествим токи с индексом «один» в лемме Лоренца (3.6) с заданными токами, т.е. положим, что $\mathbf{j}_1^c = \mathbf{j}^c, \mathbf{j}_1^{m,c} = \mathbf{j}^{m,c}$. Тогда и $\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{\mathbf{H}}$. Расположим в точке p вспомогательный электрический диполь, у которого $I_0 L = 1$ (А·м), ориентированный вдоль орта \mathbf{e} , плотность его тока $\mathbf{j}_b = \mathbf{e} \delta(q-p)$. Плотность вспомогательного магнитного тока считаем равной нулю: $\mathbf{j}_b^{m,c} = 0$. Отождествим \mathbf{j}_b^c и $\mathbf{j}_b^{m,c}$ с $\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_2^{m,c}$ в (3.6), т.е. $\mathbf{j}_2^c = \mathbf{j}_b^c = \mathbf{e} \delta(q-p), \mathbf{j}_2^{m,c} = \mathbf{j}_b^{m,c} = 0$. Тогда $\dot{\mathbf{E}}_2 = \dot{\mathbf{E}}_3(q, p), \dot{\mathbf{H}}_2 = \dot{\mathbf{H}}_3(q, p)$, где q — произвольная точка, $q \in V_0$; $\dot{\mathbf{E}}_3(q, p), \dot{\mathbf{H}}_3(q, p)$ — возбуждаемые в точке q напряженности электрического и магнитного полей вспомогательного электрического диполя, расположенного в точке p .

Подставим значения токов и напряженностей полей в (3.6). Используя основное свойство (П 2.1) δ -функции во втором интеграле

правой части, перенося скалярное произведение $\mathcal{E}\dot{\mathbf{E}}$ в левую часть равенства, а поверхностный интеграл — в правую, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\dot{\mathbf{E}}(p) = & \int_{V_n} [\dot{\mathbf{j}}^c(q)\dot{\mathbf{E}}_3(q, p) - \dot{\mathbf{j}}^{m,c}(q)\dot{\mathbf{H}}_3(q, p)]dV_q + \\ & + \int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_3(q, p), \dot{\mathbf{H}}(q)] - [\dot{\mathbf{E}}(q), \dot{\mathbf{H}}_3(q, p)]\}_{q \in S} d\mathbf{S}_q. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Чтобы определить $\dot{\mathbf{H}}(p)$, расположим в точке p вспомогательный магнитный диполь, у которого $\dot{I}_0^M L = 1$ (В·м), ориентированный вдоль орта \mathbf{M} , плотность вспомогательного электрического тока равна нулю. Тогда в (3.6) $\dot{\mathbf{j}}_2^c = \dot{\mathbf{j}}_b^c = 0$, $\dot{\mathbf{j}}_2^{m,c} = \dot{\mathbf{j}}_b^{m,c} = \mathbf{M}\delta(q-p)$; $\dot{\mathbf{E}}_2 = \dot{\mathbf{E}}_m(q, p)$, $\dot{\mathbf{H}}_2 = \dot{\mathbf{H}}_m(q, p)$ — напряженности ЭМ поля, возбуждаемого вспомогательным магнитным диполем. При этом из леммы (3.6) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{H}}(p) = & - \int_{V_n} [\dot{\mathbf{j}}^c(q)\dot{\mathbf{E}}_m(q, p) - \dot{\mathbf{j}}^{m,c}(q)\dot{\mathbf{H}}_m(q, p)]dV_q - \\ & - \int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_m(q, p), \dot{\mathbf{H}}(q)] - [\dot{\mathbf{E}}(q), \dot{\mathbf{H}}_m(q, p)]\}_{q \in S} d\mathbf{S}_q. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В (3.15) и (3.16) скалярные произведения $\mathcal{E}\dot{\mathbf{E}}$, $\mathbf{M}\dot{\mathbf{H}}$ позволяют определить любую составляющую $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. Действительно, полагая, например, в ССК \mathcal{E} равным одному из ортов $\mathbf{1}_R$, $\mathbf{1}_\theta$ или $\mathbf{1}_\varphi$, найдем составляющие \dot{E}_R , \dot{E}_θ или \dot{E}_φ . При этом электрические диполи в каждом случае ориентированы вдоль орта: или $\mathbf{1}_R = \mathcal{E}$, или $\mathbf{1}_\theta = \mathcal{E}$, или $\mathbf{1}_\varphi = \mathcal{E}$. Поэтому трем значениям \mathcal{E} соответствуют три значения вспомогательных ЭМ полей $\dot{\mathbf{E}}_3$, $\dot{\mathbf{H}}_3$. Аналогично, трем значениям орта \mathbf{M} соответствуют три значения вспомогательных полей $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$. В частности, $\dot{\mathbf{E}}_3$, $\dot{\mathbf{H}}_3$ — поле (2.37), (2.38) вспомогательного диполя в неограниченном однородном изотропном пространстве при $\mathcal{E} = \mathbf{1}_z$. Задача определения вспомогательных полей может быть сложной.

В выражениях (3.15) и (3.16) интегрирование по объему при известных $\dot{\mathbf{E}}_3$, $\dot{\mathbf{H}}_3$ или $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$ может быть выполнено, так как плотности сторонних токов являются заданными функциями координат. При этом в результате интегрирования получим некоторую функцию от p . Поверхностные интегралы в (3.15) и (3.16) с помощью (П 1.9) представим в следующем виде

$$\int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_m^z, \dot{\mathbf{H}}] - [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}_m^z]\} n dS_q = \int_S \{[\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}] \dot{\mathbf{E}}_m^z - [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}] \dot{\mathbf{H}}_m^z\} dS_q, \quad (3.17)$$

где верхний индекс (э) берется при вычислении $\dot{\mathbf{E}}$, а нижний (м) — при вычислении $\dot{\mathbf{H}}$.

Поскольку $[\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}]$ и $[\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}]$ определяют касательные составляющие векторов искоемых полей на поверхности S , то из (3.15) и (3.16) следует, что касательные составляющие векторов искомого поля входят под знаки поверхностных интегралов и для того, чтобы найти искомое поле в произвольной точке, надо знать касательные составляющие векторов того же искомого поля на поверхности S . В некоторых задачах касательные составляющие векторов искоемых полей на поверхностях S могут быть заданы как сторонние на основе приближенных представлений, или из опытных данных, или вычислены путем приближенного решения задачи. Тогда в результате интегрирования по поверхности S получим некоторую функцию от p . При этом векторы $\dot{\mathbf{E}}(p)$ и $\dot{\mathbf{H}}(p)$ становятся известными (приближенно) функциями. При решении задачи обычно необходимо найти или только $\dot{\mathbf{E}}$ или только $\dot{\mathbf{H}}$. Другой вектор определяется из уравнения Максвелла.

Если точку наблюдения в (3.15) или (3.16) расположить на поверхности S ($p \in S$) и определить составляющую $\dot{\mathbf{E}}$ или $\dot{\mathbf{H}}$, касательную к поверхности, то найдем, что искомая касательная составляющая вектора на S входит и под интеграл в правой части равенства. Этим путем можно получить интегральное уравнение относительно неизвестной касательной составляющей вектора поля.

С целью упрощения решения задачи определения векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ на поля вспомогательных диполей в (3.15), (3.16) могут быть наложены граничные условия на поверхности S . Например:

$$[\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}_m^z] = 0 \quad \text{или} \quad [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{H}}_m^z] = 0 \quad \text{на } S.$$

3. Если поверхность S является границей раздела среды объема V_0 и идеального проводника, то в соответствии с граничными условиями (1.93), касательные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ на поверхности S в (3.17) можно заменить электрическим $\dot{\mathbf{J}} = [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}]$ и магнитным $\dot{\mathbf{J}}^m = [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}]$ поверхностными токами. При этом из (3.15) и (3.16) получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(p) \\ \dot{\mathbf{H}}(p) \end{aligned} = \pm \int_{V_n} (\dot{\mathbf{j}}^c \dot{\mathbf{E}}_m^z - \dot{\mathbf{j}}^{m,c} \dot{\mathbf{H}}_m^z) dV_q \pm \int_S (\dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{E}}_m^z - \dot{\mathbf{J}}^m \dot{\mathbf{H}}_m^z)_{q \in S} dS_q, \quad p \in V_0, \quad (3.18)$$

где для сокращения записи объединены две формулы, верхний знак соответствует полю $\dot{\mathbf{E}}$, нижний — полю $\dot{\mathbf{H}}$.

Из этих выражений видно, что плотности поверхностных токов формально в возбуждении поля играют ту же роль, что и плотности сторонних объемных токов. Но существенное отличие наблюдается в физической трактовке сторонних токов и вторичных поверхностных токов — первые являются заданными функциями, а вторые появляются под воздействием поля, возбуждаемого сторонними токами. Поэтому их называют вторичными.

4. При решении задач электродинамики применяют принцип эквивалентных поверхностных токов. Чтобы получить исходные выражения, предположим, что необходимо решить задачу определения $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$, у которой поверхность S представляет собой изолированные замкнутые поверхности S_0, S_1, S_2 (рис. 3.1,б). Источники поля заданы в областях V'_n и V''_n .

В (3.18) входят интегралы по поверхностям S_0, S_1, S_2 . Чем сложнее поверхности, тем сложнее процедура вычисления поля. Поэтому с целью упрощения вычислений используем следующий метод. Введем некоторые фиктивные поверхности S' и S'' так, чтобы в объеме \hat{V} , ограниченном поверхностями S' и S'' , не оказалось сторонних источников поля (рис. 3.1,б). Поверхности S' и S'' могут частично совпадать с S_0, S_1, S_2 , выбор их формы определяется стремлением возможно больше упростить решение поставленной задачи. Считаем, что точка наблюдения находится в объеме \hat{V} ($p \in \hat{V}$), в котором сторонних токов нет. Значит, уравнения Максвелла в области \hat{V} являются однородными, поэтому в исходных выражениях (3.15), (3.16) интегралы по области V_n отсутствуют, а в поверхностном интеграле (3.17) интегрирование выполняется по S' и S'' :

$$\frac{\dot{\mathbf{E}}(p)}{\mathbf{M}\dot{\mathbf{H}}(p)} = \pm \int_{S'+S''} \{ [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}] \dot{\mathbf{E}}_3 - [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}] \dot{\mathbf{H}}_3 \} dS_q, \quad p \in \hat{V}. \quad (3.19)$$

Здесь векторы $[\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}] = \dot{\mathbf{J}}$ и $[\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}] = \dot{\mathbf{J}}^M$ на фиктивных поверхностях S' и S'' по аналогии с соответствующими выражениями в (3.18) называют эквивалентными поверхностными токами. Термин «эквивалентные» указывает на то, что поверхностные токи на поверхностях, на которых нет разрыва непрерывности касательных составляющих векторов напряженностей поля, не могут существовать. Эквивалентные поверхностные токи рассматриваются как касательные составляющие векторов $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ на фиктивных поверхностях. Таким образом получим:

$$\frac{\text{Э}\dot{\mathbf{E}}(p)}{\text{М}\dot{\mathbf{H}}(p)} = \pm \int_{S'+S''} (\mathbf{J}\dot{\mathbf{E}}_3 - \mathbf{J}^M\dot{\mathbf{H}}_3)_{q \in S'+S''} dS_q, \quad p \in \hat{V}. \quad (3.20)$$

Если применить к объему \hat{V} уравнение баланса мощностей ЭМ поля (1.69) или (1.71), то оказывается, что поле, возбуждаемое сторонними источниками в областях V'_n, V''_n , заданных вне объема \hat{V} , переносит через поверхности S' и S'' мощность, расходуемую на возбуждение поля в объеме \hat{V} . Поток мощности определяется нормальной к поверхностям S' и S'' составляющей вектора Пойнтинга. Последняя, в свою очередь, определяется касательными к этим поверхностям составляющими векторов напряженностей поля, которые и называют эквивалентными поверхностными токами.

Изложенный метод называют *принципом эквивалентных поверхностных токов*.

Касательные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ (или \mathbf{J}^M, \mathbf{J}) на S' и S'' не могут задаваться независимо друг от друга, так как векторы напряженностей ЭМ полей, возбуждаемых сторонними источниками вне и внутри объема \hat{V} , должны удовлетворять уравнениям Максвелла, граничным условиям и условиям теорем единственности решений. Например, в частном случае на фронте распространяющейся Т-волны касательные к фронту составляющие векторов напряженностей полей связаны характеристическим сопротивлением пространства, расположенного вне \hat{V} . При вычислении в объеме \hat{V} векторов $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ поля, возбуждаемого отверстием, поверхность которого составляет часть поверхности S' , можно использовать приближенные представления: считать, что касательные составляющие $[\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}]$ и $[\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}]$ распределены по поверхности отверстия так же, как по поверхности фронта распространяющейся волны, а на остальной части поверхности S' считать $[\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}] = 0, [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}] = 0$ (см. § 2.10).

Точность определения поля в объеме \hat{V} зависит от точности задания $[\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}], [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}]$ на замкнутых поверхностях.

Во внешней задаче электродинамики поверхность S'' расположена на бесконечно большом расстоянии от начала координат, а поверхность S' — на конечном (рис. 3.1, в). Область V''_n находится «на бесконечности»; если отсутствуют сторонние источники в этой области, то волн, приходящих от источника в V''_n (из «бесконечности») нет. Для уходящих волн, возбуждаемых эквивалентными поверхностными тока-

ми на S' , выполняются условия излучения (3.14). При этом интеграл по S' в (3.20) равен нулю. Тогда

$$\frac{\mathcal{E}\mathbf{E}(p)}{\mathcal{M}\mathbf{H}(p)} = \pm \int_{S'} (\mathbf{J}\mathbf{E}_{\mathbf{a}} - \mathbf{J}^{\mathbf{M}}\mathbf{H}_{\mathbf{a}})_{q \in S'} dS_q, \quad p \in \mathcal{V}. \quad (3.21)$$

5. Если в области V_n , находящейся в объеме V_0 , ограниченном поверхностью S , заданы сторонние токи, то на поверхности S имеются эквивалентные поверхностные токи \mathbf{J} , $\mathbf{J}^{\mathbf{M}}$. При вычислении векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в V_0 могут оказаться полезными преобразованные выражения (3.15), (3.16). При преобразовании учтем, что векторные потенциалы $\dot{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{A}}^{\mathbf{M},\mathbf{B}}$ полей вспомогательных электрического и магнитного диполей, рассмотренных в п. 2, определяются в ДСК как $\dot{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} = \mathcal{E}G$, $\dot{\mathbf{A}}^{\mathbf{M},\mathbf{B}} = \mathcal{M}G$, где G — функция Грина. При этом из (1.124), (1.125) получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_3 &= \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} (k^2\mathcal{E}G + \text{grad div}\mathcal{E}G) & \dot{\mathbf{H}}_3 &= \text{rot}\mathcal{E}G; \\ \dot{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}} &= \frac{1}{i\omega\mu_a} (k^2\mathcal{M}G + \text{grad div}\mathcal{M}G) & \dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{M}} &= -\text{rot}\mathcal{M}G. \end{aligned}$$

Здесь $G(p, q)$ является функцией точек q и p , а плотности токов в (3.15), (3.16) — функции только точек интегрирования q . Для обозначения дифференциальных операций по точкам p используем индекс p , а по точкам q — индекс q . Подставляя последние выражения в (3.15), (3.16), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\mathbf{E}(p) &= \int_{V_n} \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} (k^2\mathbf{j}^c\mathcal{E}G + \mathbf{j}^c \text{grad}_q \text{div}_q \mathcal{E}G - i\omega\tilde{\epsilon}_a \mathbf{j}^{\mathbf{M},c} \text{rot}_q \mathcal{E}G) dV_q + \\ &+ \int_S \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} (k^2\mathbf{J}\mathcal{E}G + \mathbf{J} \text{grad}_q \text{div}_q \mathcal{E}G - i\omega\tilde{\epsilon}_a \mathbf{J}^{\mathbf{M}} \text{rot}_q \mathcal{E}G) dS_q; \\ \mathcal{M}\mathbf{H}(p) &= \int_{V_n} \frac{1}{i\omega\mu_a} (k^2\mathbf{j}^{\mathbf{M},c}\mathcal{M}G + \mathbf{j}^{\mathbf{M},c} \text{grad}_q \text{div}_q \mathcal{M}G + i\omega\mu_a \mathbf{j}^c \text{rot}_q \mathcal{M}G) dV_q + \\ &+ \int_S \frac{1}{i\omega\mu_a} (k^2\mathbf{J}\mathcal{M}G + \mathbf{J} \text{grad}_q \text{div}_q \mathcal{M}G + i\omega\mu_a \mathbf{J} \text{rot}_q \mathcal{M}G) dS_q. \end{aligned}$$

Используя здесь формулы векторного анализа

$$\mathbf{j} \text{rot}_q \mathcal{E}G = \mathcal{E} \text{rot}_p \mathbf{j}G, \quad \mathbf{j} \text{grad}_q \text{div}_q \mathcal{E}G = \mathcal{E} \text{grad}_p \text{div}_p \mathbf{j}G,$$

и учитывая, что орты \mathcal{E} , \mathcal{M} ориентированы произвольно, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(p) &= \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} (k^2\dot{\mathbf{A}} + \text{grad div}\dot{\mathbf{A}}) - \text{rot}\dot{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}}, \\ \dot{\mathbf{H}}(p) &= \frac{1}{i\omega\mu_a} (k^2\dot{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} + \text{grad div}\dot{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}}) + \text{rot}\dot{\mathbf{A}}, \end{aligned}$$

где в ДСК

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}(p) &= \int_{V_n} \mathbf{j}^c(q)G(p, q)dV_q + \int_S \mathbf{J}(q)G(p, q)dS_q, \\ \dot{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}}(p) &= \int_{V_n} \mathbf{j}^{\mathbf{M},c}(q)G(p, q)dV_q + \int_S \mathbf{J}^{\mathbf{M}}(q)G(p, q)dS_q. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Если в объеме \hat{V} сторонних токов \hat{j}^c , $\hat{j}^{m,c}$ нет, то интегралы по V_n равны нулю и \hat{A} , \hat{A}^m в (3.24) определяются только поверхностными токами или эквивалентными поверхностными токами. Этот путь вычисления векторов \hat{E} и \hat{H} использован в § 2.10.

3.4. Принцип Гюйгенса и интеграл Кирхгофа

1. Согласно принципу Гюйгенса, каждый элемент сферической поверхности фронта, который имеет в данный момент волна, является вторичным источником элементарных сферических волн, а огибающая этих волн будет сферическим фронтом волны в более поздний момент. Обратные элементарные волны, излучаемые в направлении на истинный (первичный) источник поля, по Х. Гюйгенсу не должны приниматься во внимание. *Этот принцип выражает концепцию близкодействия для волновых явлений*: положение фронта волны в данный момент полностью определяется ее состоянием в предшествующий момент и не зависит от предыстории волнового процесса, от волновых процессов в других областях пространства. Принцип Гюйгенса помогает пониманию волновых процессов, недостатком является его по преимуществу качественный (описательный) характер, он не объясняет факта отсутствия в однородной среде обратных волн.

О. Френель уточнил принцип Гюйгенса с помощью представления об *интерференции* элементарных сферических волн, излученных вторичными источниками. Если ограничиться монохроматическими колебаниями, то по принципу Гюйгенса–Френеля волновое возмущение в точке p можно рассматривать как результат интерференции элементарных волн, излучаемых каждым элементом фронта волны. Амплитуда каждой вторичной волны пропорциональна площади элемента фронта и зависит от угла ν между нормалью к площади и направлением на точку p (от функции $\Phi(\nu)$). Убедительного объяснения факту отсутствия в однородной среде волн, распространяющихся в направлении на первичный источник, и обоснованию выбора функции $\Phi(\nu)$ не дано. (В настоящее время для объяснения волновых явлений используется понятие зон Френеля).

2. Строгое математическое обоснование принципа Гюйгенса–Френеля было дано Г. Кирхгофом, который показал, что значение функции, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца в точке p , может быть найдено, если заданы значения этой функции и ее производной по нормали на некоторой замкнутой поверхности.

Чтобы получить принцип Гюйгенса в формулировке Кирхгофа, рассмотрим объем \hat{V} , ограниченный поверхностями S' и S''

(рис. 3.1, в). Среда в объеме \hat{V} линейна, однородна и изотропна. Сторонние источники в \hat{V} отсутствуют. На поверхностях S' и S'' задано значение самой искомой функции и ее нормальной производной.

В объеме \hat{V} уравнения Максвелла однородны, следовательно, уравнения Гельмгольца (1.129) тоже однородны. Если через $\psi(p)$ обозначить любую проекцию векторов \dot{E} и \dot{H} в ДСК, то из (1.129) имеем:

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad p \in \hat{V}.$$

Пусть в точке $q \in \hat{V}$ расположен вспомогательный *точечный источник единичной интенсивности*. Тогда функция Грина $G(p, q)$ удовлетворяет уравнению (П 4.9). Умножим последнее на ψ , а предыдущее уравнение — на G и вычтем первый результат из второго. Интегрируя полученное равенство по области \hat{V} и применяя основное свойство δ -функции, получаем

$$\int_{\hat{V}} (G\nabla^2\psi - \psi\nabla^2G) dV = \begin{cases} \psi(q), & q \in \hat{V}; \\ 0, & q \notin \hat{V}. \end{cases}$$

Используем теорему Грина (П 1.5) и поменяем местами координаты точек p и q . Имеем для $p \in \hat{V}$

$$\psi(p) = \int_{S'+S''} \left(\frac{\partial\psi(q)}{\partial n} G(p, q) - \psi(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n} \right) dS_q.$$

Если поверхность S'' находится «на бесконечности», то применяя условие излучения (3.14), имеем для $p \in \hat{V}$

$$\psi(p) = \oint_{S'} \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} G - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS_q. \quad (3.23)$$

Это выражение позволяет по известному значению $G = e^{-ikR} / 4\pi R$, и заданным значениям ψ и $\partial\psi/\partial n$ на поверхности S' определить функцию ψ во всех точках объема. Но задавать произвольные, не связанные друг с другом функции ψ и $\partial\psi/\partial n$ на S' , нельзя, так как они строго связаны интегральным равенством, получающимся из (3.23), если точку p расположить на поверхности S' . Приближенный характер получаемых по (3.23) результатов обусловлен только тем, что задаются приближенные значения ψ и $\partial\psi/\partial n$ на S' .

Выражение (3.23) называют *интегралом Кирхгофа*. Он дает количественную формулировку принципа Гюйгенса–Френеля: функция

ψ , характеризующая интенсивность волнового процесса, в любой точке наблюдения является суперпозицией сферических волн, возбуждаемых элементарными вторичными поверхностными излучателями, распределенными на поверхности S' (в частном случае являющейся поверхностью волнового фронта). Направленные свойства элементарного вторичного поверхностного излучателя (элемента Гюйгенса) определены в § 2.11. Элемент Гюйгенса не создает поля в направлении, обратном направлению распространения волны. Это объясняет факт отсутствия в однородной среде волн, распространяющихся от фронта в направлении первичного источника. В настоящее время в теоретической оптике решение задач дифракции ЭМ поля производится в основном с помощью принципа Гюйгенса–Кирхгофа, поскольку векторный характер оптических дифракционных задач не проявляется и скалярная теория задач оказывается достаточной.

Принцип Гюйгенса в формулировке Кирхгофа не учитывает векторного характера ЭМ поля. Он рассматривается как частный случай более общего принципа эквивалентных поверхностных токов, учитывающего векторный характер ЭМ поля и являющегося электродинамической формулировкой принципа Гюйгенса. Поляризацию радиоволн необходимо всегда учитывать, поэтому *принцип эквивалентных поверхностных токов является основным в электродинамике*.

3.5. Теорема взаимности

1. Рассмотрим математическую модель, примененную при выводе выражений леммы Лоренца (рис. 3.1,а). Изотропная среда имеет непрерывно изменяющиеся в объеме V_0 параметры $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$. В области V_{n1} заданы плотности токов $\dot{\mathbf{j}}_1^c, \dot{\mathbf{j}}_1^{m,c}$, возбуждающие ЭМ поле с векторами $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$. В области V_{n2} заданы плотности токов $\dot{\mathbf{j}}_2^c, \dot{\mathbf{j}}_2^{m,c}$ возбуждающие ЭМ поле с векторами $\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_2$. Сторонние токи и поля связаны леммой Лоренца (3.6).

В частном случае области V_{n1}, V_{n2} находятся в неограниченном пространстве V_0 . Тогда поверхность S_0 расположена на бесконечности, с учетом условий излучения (3.14) поверхностный интеграл по S_0 в выражении (3.6) равен нулю, а поверхности S_1 и S_2 отсутствуют. При этом получаем математическую формулировку теоремы взаимности для неограниченного пространства

$$\int_{V_{\text{нл}}} [\dot{\mathbf{j}}_1^{\text{с}}(q)\dot{\mathbf{E}}_2(q) - \dot{\mathbf{j}}_1^{\text{м,с}}(q)\dot{\mathbf{H}}_2(q)]dV_q = \int_{V_{\text{н2}}} [\dot{\mathbf{j}}_2^{\text{с}}(q)\dot{\mathbf{E}}_1(q) - \dot{\mathbf{j}}_2^{\text{м,с}}(q)\dot{\mathbf{H}}_1(q)]dV_q. \quad (3.24)$$

Это равенство используется в теории излучения и приема ЭМ волн.

Смысл теоремы взаимности рассмотрим на ряде частных моделей.

2. Пусть плотности сторонних магнитных токов отсутствуют ($\dot{\mathbf{j}}_1^{\text{м,с}} = \dot{\mathbf{j}}_2^{\text{м,с}} = 0$), а плотности сторонних электрических токов заданы на двух элементарных электрических вибраторах: в точке q_1 расположен элементарный электрический вибратор-1, $\dot{\mathbf{j}}_1^{\text{с}} = \dot{I}_1 L_1 \delta(p - q_1)$, возбуждающий поле с напряженностями $\dot{\mathbf{E}}_1(p, q_1)$, $\dot{\mathbf{H}}_1(p, q_1)$; в точке q_2 — элементарный электрический вибратор-2, $\dot{\mathbf{j}}_2^{\text{с}}(p, q_2) = \dot{I}_2 L_2 \delta(p - q_2)$, возбуждающий поле с напряженностями $\dot{\mathbf{E}}_2(p, q_2)$, $\dot{\mathbf{H}}_2(p, q_2)$ (рис. 3.2,а). При этом из (3.24) получаем

$$\dot{I}_1 L_1 \dot{\mathbf{E}}_2(q_1, q_2) = \dot{I}_2 L_2 \dot{\mathbf{E}}_1(q_2, q_1), \quad (3.25)$$

где $\dot{\mathbf{E}}_2(q_1, q_2)$ — напряженность электрического поля, возбуждаемого вибратором-2 в месте расположения вибратора-1, а $\dot{\mathbf{E}}_1(q_2, q_1)$ — напряженность электрического поля, возбуждаемого вибратором-1 в месте расположения вибратора-2. Величины $L_1 \dot{\mathbf{E}}_2 = \dot{\mathcal{A}}_{12}$ и $L_2 \dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathcal{A}}_{21}$ имеют размерность вольт, их можно рассматривать как э.д.с., наводимые вибратором-2 в вибраторе-1 и вибратором-1 в вибраторе-2. При этом из (3.25) имеем $\dot{I}_1 \dot{\mathcal{A}}_{12} = \dot{I}_2 \dot{\mathcal{A}}_{21}$, или $\dot{\mathcal{A}}_{12} / \dot{I}_2 = \dot{\mathcal{A}}_{21} / \dot{I}_1$. Величины $\dot{\mathcal{A}}_{12} / \dot{I}_2 = Z_{12}$ и $\dot{\mathcal{A}}_{21} / \dot{I}_1 = Z_{21}$ имеют размерность [Ом] и характеризуют ЭМ связь (взаимодействие) излучателей. Называют их взаимными сопротивлениями (или сопротивлениями связи) излучателей. Взаимные сопротивления вибраторов равны: $Z_{12} = Z_{21}$.

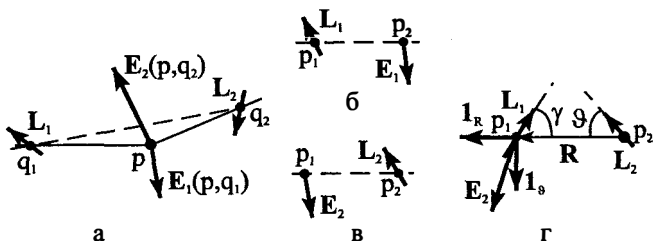


Рис. 3.2. Элементарные излучатели

Если $i_1 \mathbf{L}_1 = i_2 \mathbf{L}_2$, то из равенства (3.25) с учетом произвольности ориентации \mathbf{L}_1 получаем $\dot{\mathbf{E}}_2(q_1, q_2) = \dot{\mathbf{E}}_1(q_2, q_1)$, т.е. *перемена местами точки наблюдения поля и точки расположения элементарного электрического вибратора не меняет вектора напряженности электрического поля*. Например, элементарный вибратор находится в точке p_1 , а $\dot{\mathbf{E}}_1(p_2, p_1)$ вычисляем в точке p_2 (рис. 3.2,б). Затем этот же вибратор перенесем параллельно самому себе в точку p_2 (рис. 3.2,в). Найдем, что $\dot{\mathbf{E}}_2(p_1, p_2)$ в точке p_1 равно $\dot{\mathbf{E}}_1(p_2, p_1)$.

3. Для расположенных в точках q_1 и q_2 двух элементарных магнитных вибраторов с векторными магнитными моментами $i_1^m \mathbf{L}_1 / i\omega$ и $i_2^m \mathbf{L}_2 / i\omega$ из (3.24) получаем $i_1^m \mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{H}}_2(q_1, q_2) = i_2^m \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{H}}_1(q_2, q_1)$. При $i_1^m \mathbf{L}_1 = i_2^m \mathbf{L}_2$ имеем: $\dot{\mathbf{H}}_2(q_1, q_2) = \dot{\mathbf{H}}_1(q_2, q_1)$. Последнее равенство показывает, что *перемена местами точки наблюдения поля и точки расположения магнитного вибратора не меняет вектора напряженности магнитного поля*.

4. Пусть в точке q_1 расположен электрический диполь ($\mathbf{j}_1^c = i_1 \mathbf{L}_1 \delta(p - q_1)$, $\mathbf{j}_1^{m,c} = 0$), а в точке q_2 — магнитный диполь ($\mathbf{j}_2^c = 0$, $\mathbf{j}_2^{m,c} = i_2 \mathbf{L}_2 \delta(p - q_2)$). Тогда из (3.24) получаем

$$i_1 \mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{E}}_2(q_1, q_2) = -i_2^m \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{H}}_1(q_2, q_1).$$

Величина $\mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{\mathcal{A}}_{21}^m$ имеет размерность ампер, ее можно рассматривать как *магнитодвижущую силу*, наводимую электрическим диполем в магнитном диполе. Последнее выражение можно записать в форме $i_1 \dot{\mathcal{A}}_{12} = -i_2^m \dot{\mathcal{A}}_{21}^m$, которая позволяет проанализировать ЭМ связь электрического и магнитного вибраторов.

5. Задача. Два элементарных электрических вибратора расположены в точках p_1 и p_2 свободного пространства. Найти взаимное сопротивление Z_{12} вибраторов, если векторы электрических моментов их находятся в одной плоскости, углы γ и θ заданы (рис. 3.2,з).

Для решения задачи обозначим через \mathbf{R} радиус-вектор, проведенный из точки p_2 в точку p_1 ($\mathbf{R} = \mathbf{1}_R R$), и пусть $\mathbf{1}_\theta$ — орт, ортогональный $\mathbf{1}_R$ (рис. 3.2,з). Тогда $\dot{\mathbf{E}}_2(p_1, p_2) = \mathbf{1}_R \dot{E}_{2R} + \mathbf{1}_\theta \dot{E}_{2\theta}$, где \dot{E}_{2R} , $\dot{E}_{2\theta}$ — радиальная и угловая составляющие $\dot{\mathbf{E}}_2$. Получаем

$$\dot{\mathcal{A}}_{12} = \mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{E}}_2 = (\mathbf{L}_1 \mathbf{1}_R) \dot{E}_{2R} + (\mathbf{L}_1 \mathbf{1}_\theta) \dot{E}_{2\theta} = -L_1 \dot{E}_{2R} \cos \gamma - L_1 \dot{E}_{2\theta} \sin \gamma.$$

Если вибратор-1 находится в дальней зоне вибратора-2, то $\dot{E}_{2R} \approx 0$ и $\dot{\mathcal{A}}_{12} \approx -L_1 \dot{E}_{2\theta} \sin \gamma$. Используя (2.38), находим

$$Z_{12} = \dot{\mathcal{A}}_{12} / I_2 = (-iW_0 \beta L_1 L_2 / 4\pi R) \cdot \sin \gamma \sin \theta \exp(-i\beta R).$$

Взаимное сопротивление является комплексной величиной, активная и реактивная составляющие его уменьшаются с ростом расстояния, т.е. уменьшается ЭМ связь излучателей. При $R = 2\lambda$ и $L_1 = 0,05\lambda$, $\gamma = \theta = 45^\circ$ получаем

$$Z_{12} \approx -i \cdot 0,31 \cdot 10^{-3} W_0 \approx -i \cdot 0,12 \text{ Ом.}$$

При увеличении расстояния на $\lambda/4$ (т.е. $R = 2\lambda + \lambda/4$) получаем $Z_{12} \approx -0,1$ Ом. Взаимные сопротивления по модулю малы (по сравнению с $R_{\Sigma} = 2$ Ом).

Если вибратор-1 находится в ближней зоне вибратора-2, то используя (2.39), получаем

$$Z_{12} = \mathcal{E}_{12} / I_2 = iW_0 \frac{L_1 L_2}{4\pi\beta R^3} (2\cos\gamma\cos\vartheta + \sin\gamma\sin\vartheta).$$

При $R = 0,05\lambda$ и значениях параметров, использованных выше, имеем $Z_{12} \approx i0,38W_0 = i143$ Ом. В ближней зоне взаимные сопротивления являются (почти) чисто реактивными и имеют большую величину. В этой зоне имеется большая ЭМ связь излучателей.

ЗАДАЧИ

1. Найти эквивалентные поверхностные токи на элементарном поверхностном излучателе, являющемся элементом фронта волны, возбужденной в дальней зоне элементарным электрическим вибратором.

2. Используя теорему эквивалентных поверхностных токов, вычислить в главных плоскостях значение $\dot{\mathbf{E}}$, возбуждаемое элементарным (вторичным) поверхностным излучателем, расположенным на фронте волны, возбуждаемой в дальней зоне элементарным электрическим вибратором.

3. Найти эквивалентные поверхностные токи на элементарном поверхностном излучателе, являющемся элементом фронта волны, возбуждаемой в дальней зоне элементарным магнитным вибратором.

4. Используя теорему эквивалентных поверхностных токов, вычислить в главных плоскостях значение $\dot{\mathbf{H}}$, возбуждаемое элементарным поверхностным излучателем, расположенным на фронте волны, возбуждаемой в дальней зоне элементарным магнитным вибратором.

5. Показать, что функция Грина неограниченного однородного пространства удовлетворяет условию излучения.

6. Показать, что поле элементарного электрического вибратора удовлетворяет условию излучения.

7. Показать, что поле элементарного магнитного вибратора удовлетворяет условию излучения.

8. Показать, что поле (2.67), (2.68) поверхностного излучателя удовлетворяет условию излучения.

9. Показать, что плоская волна удовлетворяет условию излучения.

10. Показать, что поверхностная волна удовлетворяет условию излучения.

11. Задать в качестве функций $\dot{\psi}$ и $\partial\dot{\psi}/\partial n$ компоненты эквивалентных поверхностных токов на элементарной излучающей поверхности, являющейся элементом фронта волны, возбужденной в дальней зоне элементарным электрическим вибратором. Вычислить с помощью интеграла Кирхгофа $\dot{\mathbf{E}}_0$ в главных плоскостях дальней зоны.

12. Два элементарных электрических вибратора расположены в точках p_1 и p_2 свободного пространства. Найти взаимное сопротивление Z_{12} вибраторов, если векторы электрических моментов их находятся в одной плоскости, углы γ и ϑ заданы (рис. 3.2.2).

13. Найти сопротивление связи двух элементарных магнитных вибраторов, расположенных в свободном пространстве в точках p_1 и p_2 , если векторы магнитных моментов их находятся в одной плоскости, углы γ и ϑ заданы (рис. 3.2,з).

14. Вычислить э.д.с., наводимую элементарным электрическим вибратором-1 в элементарном электрическом вибраторе-2, если вибраторы расположены в свободном пространстве, $\gamma = \vartheta = 90^\circ$, $R = 3\lambda$, $L_1 = L_2 = 0,06\lambda$, $i_2 = 0,1 \exp(i\pi/2)$ А (рис. 3.2,з).

15. Вычислить м.д.с., наводимую в свободном пространстве элементарным магнитным вибратором-2 в элементарном магнитном вибраторе-1, если $\gamma = \vartheta = 30^\circ$, $R = 0,1\lambda$, $L_1 = L_2 = 0,04\lambda$, $i_2^M = 0,1 \exp(i\pi/4)$ В (рис. 3.2,з).

4. ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

4.1. Падение плоской волны на плоскую границу раздела двух сред

1. При расчете векторов ЭМ поля излучателя, расположенного над телом, поверхность которого мало отличается от локально плоской поверхности, часто используют упрощенные математические модели. Поверхность раздела сред, если ее линейные размеры значительно больше длины волны, аппроксимируют плоскостью. Если излучатель расположен на большом, по сравнению с длиной волны, расстоянии от начала координат, помещенном на плоскость, то считают, что он отодвинут «на бесконечность». Тогда на плоскость набегают (падают) однородная плоская ЭМ волна.

Например, если антенна расположена над Землей на высоте, значительно большей длины волны, то при расчете поля на сравнительно небольших расстояниях от антенны ЭМ поле, падающее на Землю, можно считать локально плоской однородной волной, а сферическую поверхность Земли в районе расположения антенны можно аппроксимировать плоскостью.

2. Рассмотрим постановку задачи. Имеем следующую математическую модель. На плоскую поверхность S раздела однородных изотропных сред падает под углом ϑ_0 к нормали к поверхности раздела однородная плоская ЭМ волна (рис. 4.1,а). Введем ДСК так, чтобы плоскость xz совпала с поверхностью раздела сред. Параметры полупространства (условно «верхнего») при $y > 0$ обозначим через $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$, параметры полупространства («нижнего») при $y < 0$ обозначим через $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$. Фронт-1 набегающей волны является плоскостью. Он может

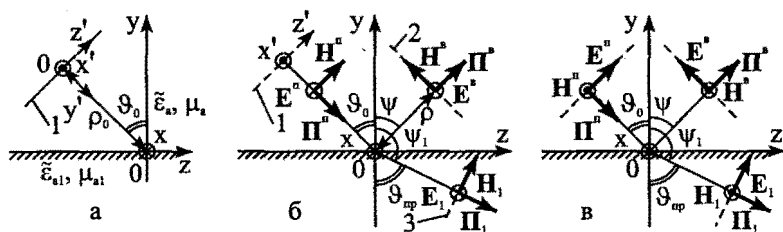


Рис. 4.1. Падение плоской волны на поверхность раздела двух сред

быть создан листом тока, расположенным в верхнем полупространстве. ЭМ поле частично отражается от нижнего полупространства, а частично проникает в него (рис. 4.1,б). Векторы напряженностей падающего $\dot{\mathbf{E}}^n, \dot{\mathbf{H}}^n$, отраженного $\dot{\mathbf{E}}^b, \dot{\mathbf{H}}^b$ и прошедшего (преломленного или проникнувшего) $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ ЭМ полей должны удовлетворять граничным условиям на поверхности S (при $y=0$). Необходимо найти векторы $\dot{\mathbf{E}}^b, \dot{\mathbf{H}}^b$ и $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$, удовлетворяющие уравнениям Максвелла и условиям излучения.

Промежуточную ДСК (x', y', z') расположим так, чтобы фронт-1 набегающей волны совпал с плоскостью x', z' , и направим ось x' вдоль вектора $\dot{\mathbf{E}}^n$. Расстояние от начала координат до фронта-1 обозначим через ρ_0 . Тогда падающая однородная плоская волна поля в ДСК (x', y', z') имеет $\dot{\mathbf{E}}^n = \mathbf{1}_{x'} \dot{E}_x^n$, $\dot{\mathbf{H}}^n = \mathbf{1}_{z'} \dot{H}_z^n$, где $\dot{E}_x^n = \dot{E}_0 \exp(-iky')$, $\dot{H}_z^n = -\dot{E}_x^n / W$. Вектор Пойнтинга этой волны направлен под углом ϑ_0 к нормали к поверхности раздела сред. Угол ϑ_0 называют *углом падения волны*.

Так как $y' = \rho_0 - (y \cos \vartheta_0 - z \sin \vartheta_0)$, $\mathbf{1}_{x'} = -\mathbf{1}_x$, то в ДСК (x, y, z)

$$\dot{\mathbf{E}}^n = \mathbf{1}_x \dot{E}_x^n, \quad \dot{E}_x^n = \dot{E}_0^n \exp(iky \cos \vartheta_0 - ikz \sin \vartheta_0), \quad (4.1)$$

где $\dot{E}_0^n = -\dot{E}_0 \exp(-ik\rho_0)$. Из второго уравнения Максвелла имеем

$$\dot{H}_z^n = \dot{E}_x^n W^{-1} \cos \vartheta_0. \quad (4.2)$$

Плоскость, проходящую через нормаль к поверхности раздела сред параллельно направлению распространения падающей волны, называют *плоскостью падения*. Вектор $\dot{\mathbf{E}}^n$, определяемый выражением (4.1), перпендикулярен плоскости падения, поэтому эту волну называют *нормально поляризованной однородной плоской волной*. Поскольку вектор $\dot{\mathbf{E}}^n$ параллелен поверхности раздела сред, эту волну называют (в условиях Земли) и *горизонтально поляризованной волной*.

Векторы $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ полного поля в верхнем полупространстве $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^n + \dot{\mathbf{E}}^b$, $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}^n + \dot{\mathbf{H}}^b$. Векторы полного поля $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ в нижнем полупространстве равны векторам только вторичного (прошедшего или преломленного) поля.

На поверхности раздела сред в соответствии с граничными условиями касательные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ должны быть равны, т.е. $\dot{E}_x = \dot{E}_{1x}$, $\dot{H}_z = \dot{H}_{1z}$, или

$$\dot{E}_x^n + \dot{E}_x^B = \dot{E}_{1x}, \quad \dot{H}_z^n + \dot{H}_z^B = \dot{H}_{1z} \text{ при } y=0. \quad (4.3)$$

Поставленная задача относится к узкому кругу задач электродинамики, решение которой с помощью граничных условий непосредственно сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений для амплитуд векторов напряженностей вторичных полей. Причиной этого является простейшая, плоская, форма граничной поверхности раздела, однородность параметров полупространств и плоская форма фронта падающего поля.

3. Рассмотрим решение задачи. Вторичные поля (отраженное и прошедшее) ищем, как и (4.1), (4.2), в виде нормально поляризованных однородных плоских волн, удовлетворяющих условиям излучения,

$$\begin{aligned} \dot{E}_x^B &= \dot{E}_0 e^{-ik(y \cos \psi + z \sin \psi)}, & y \geq 0; \\ \dot{E}_{1x} &= \dot{E}_1 e^{-ik_1(y \cos \psi_1 + z \sin \psi_1)}, & y \leq 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где \dot{E}_0, \dot{E}_1 — амплитуды; ψ и ψ_1 — углы, характеризующие направления распространения отраженного и преломленного полей (рис. 4.1.б). Точка наблюдения отраженного поля находится в верхнем полупространстве, поэтому $0 \leq \psi \leq \pi/2$ и $3\pi/2 \leq \psi \leq 2\pi$. Точка наблюдения преломленного поля находится в нижнем полупространстве, поэтому $\pi/2 \leq \psi_1 \leq 3\pi/2$.

Чтобы найти значения ψ , ψ_1 и \dot{E}_0, \dot{E}_1 , используем граничные условия (4.3). Подставляя (4.1), (4.4) в первое условие (4.3), получаем

$$\dot{E}_0^n e^{-ikz \sin \theta_0} + \dot{E}_0 e^{-ikz \sin \psi} = \dot{E}_1 e^{-ik_1 z \sin \psi_1}. \quad (4.5)$$

Поскольку от значений z зависят лишь экспоненты, то это равенство может удовлетворяться только при условии, если $k \sin \theta_0 = k \sin \psi = k_1 \sin \psi_1$. Значит,

$$\psi = \theta_0, \quad k \sin \theta_0 = k_1 \sin \psi_1. \quad (4.6)$$

Угол ψ называется *углом отражения*. Равенство $\psi = \theta_0$ является формулировкой *первого закона Снеллиуса* (угол падения равен углу отражения). Введем угол $\theta_{np} = \pi - \psi_1$ (рис. 4.1.б). Тогда

$\sin \psi_1 = \sin \theta_{np}$, $\cos \psi_1 = -\cos \theta_{np}$. Из (4.6) имеем

$$\sin \theta_{np} = (k \cdot \sin \theta_0) / k_1. \quad (4.7)$$

Угол θ_{np} называется *углом преломления*. Последнее равенство выражает *второй закон Снеллиуса (Снелля)*.

Найдем из второго уравнения Максвелла и (4.4) значения $\dot{H}_z^B, \dot{H}_{1z}$, необходимые для подстановки в граничное условие (4.3), и \dot{H}_{1y} :

$$\dot{H}_z^B = -\dot{E}_x^B W^{-1} \cos \vartheta_0, \quad \dot{H}_{1z} = \dot{E}_{1x} W_1^{-1} \cos \vartheta_{\text{пр}}, \quad \dot{H}_{1y} = W_1^{-1} \frac{k}{k_1} \sin \vartheta_0 \dot{E}_{1x}. \quad (4.8)$$

Используем в (4.5) равенства (4.6) и подставим (4.2), (4.8) во второе уравнение из равенств (4.3). Имеем

$$\dot{E}_0^n + \dot{E}_0 = \dot{E}_1, \quad W^{-1} \cos \vartheta_0 \dot{E}_0^n - W^{-1} \cos \vartheta_0 \dot{E}_0 = W_1^{-1} \cos \vartheta_{\text{пр}} \dot{E}_1.$$

Решая эту систему двух линейных алгебраических уравнений относительно \dot{E}_0, \dot{E}_1 , получаем $\dot{E}_0 = R_{\perp} \dot{E}_0^n$, $\dot{E}_1 = \kappa_{\perp} \dot{E}_0^n$, где $R_{\perp}, \kappa_{\perp}$ — коэффициенты отражения и прохождения (коэффициенты Френеля) нормально поляризованной волны:

$$R_{\perp} = \frac{W_1 \cos \vartheta_0 - W \cos \vartheta_{\text{пр}}}{W_1 \cos \vartheta_0 + W \cos \vartheta_{\text{пр}}}, \quad \kappa_{\perp} = 1 + R_{\perp} = \frac{2W_1 \cos \vartheta_0}{W_1 \cos \vartheta_0 + W \cos \vartheta_{\text{пр}}}. \quad (4.9)$$

Из второго уравнения Максвелла $\dot{E}_y^B = \dot{E}_z^B = \dot{H}_x^B = \dot{E}_{1y} = \dot{H}_{1x} = 0$.

Углы отражения и преломления определяют направления распространения отраженного и преломленного полей (рис. 4.1, б). Векторы Пойнтинга

$$\dot{\Pi}^B = (\mathbf{1}_z \sin \vartheta_0 + \mathbf{1}_y \cos \vartheta_0) \left| \dot{E}_x^B \right|^2 / 2W^*;$$

$$\dot{\Pi}_1 = (\mathbf{1}_z \sin \vartheta_{\text{пр}} - \mathbf{1}_y \cos \vartheta_{\text{пр}}) \left| \dot{E}_{1x} \right|^2 / 2W_1^*.$$

Векторы \dot{E}^B, \dot{H}^B перпендикулярны друг другу и направлению распространения отраженного поля; они связаны характеристическим сопротивлением W . Векторы \dot{E}_1, \dot{H}_1 тоже перпендикулярны друг другу и направлению распространения преломленного поля; связаны они характеристическим сопротивлением нижнего полупространства W_1 (рис. 4.1). Поверхности равных фаз представляют собой плоскости (2) и (3), перпендикулярные направлениям распространения волн. Амплитуды векторов полей при отсутствии джоулевых потерь не зависят от расстояния. Волны являются однородными плоскими. В случае, когда $\sigma_1 \rightarrow \infty$, нижнее полупространство — идеальный проводник. При этом $\tilde{\epsilon}_{a1} \rightarrow -i\infty$ и $R_{\perp} \rightarrow -1$, $\kappa_{\perp} \rightarrow 0$. Значит, падающее ЭМ поле полностью отражается, оно не проникает в нижнее полупространство. На поверхности раздела $\dot{E}_x = \dot{E}_x^n + \dot{E}_x^B = 0$, т.е. \dot{E}_0 сдвинуто по фазе на $-\pi$ отно-

сительно \dot{E}_0^n . Если $R_{\perp} = |R_{\perp}| \exp(-i\Phi_{\perp})$, то фаза коэффициента отражения при этом $\Phi_{\perp} = \pi$.

4. Рассмотрим *параллельную поляризацию*. При этом вектор \dot{H}^n параллелен плоскости раздела сред. Ось x' направим вдоль вектора \dot{H}^n . Тогда $\dot{H}^n = 1_{x'} \dot{H}_{x'}^n$, где $\dot{H}_{x'}^n = \dot{H}_0^n \exp(-iky')$. В ДСК (x, y, z) получаем

$$\dot{H}^n = 1_x \dot{H}_x^n, \quad \dot{H}_x^n = \dot{H}_0^n e^{iky \cos \vartheta_0 - ikz \sin \vartheta_0}, \quad \dot{H}_0^n = -\dot{H}'_0 e^{-ikp_0}. \quad (4.10)$$

Из первого уравнения Максвелла и (4.10) получаем

$$\dot{E}_x^n = 0, \quad \dot{E}_y^n = -WH_x^n \sin \vartheta_0, \quad \dot{E}_z^n = -WH_x^n \cos \vartheta_0. \quad (4.11)$$

На поверхность раздела сред под углом ϑ_0 к нормали падает однородная плоская ЭМ волна (рис. 4.1, в). Вектор $\dot{E}^n = 1_y \dot{E}_y^n + 1_z \dot{E}_z^n$, параллелен плоскости падения. Поэтому падающую волну называют *параллельно поляризованной*. (Поскольку вектор \dot{E}^n лежит в вертикальной плоскости, эту волну (в условиях Земли) также называют *вертикально поляризованной волной*.)

Вторичные поля, как и (4.10), (4.11), ищем в виде параллельно поляризованных однородных плоских волн, удовлетворяющих условиям излучения. При этом $\dot{H}^B = 1_x \dot{H}_x^B$, $\dot{H}_1 = 1_x \dot{H}_{1x}$, где

$$\dot{H}_x^B = \dot{H}_0^B e^{-ik(y \cos \psi + z \sin \psi)}, \quad \dot{H}_{1x} = \dot{H}_1 e^{-ik_1(y \cos \psi_1 + z \sin \psi_1)} \quad (4.12)$$

Из первого уравнения Максвелла и (4.12) получаем $\dot{E}_x^B = \dot{E}_{1x} = 0$,

$$\begin{aligned} \dot{E}_y^B &= -WH_x^B \sin \psi, & \dot{E}_z^B &= WH_x^B \cos \psi; \\ \dot{E}_{1y} &= -W_1 \dot{H}_{1x} \sin \psi_1, & \dot{E}_{1z} &= W_1 \dot{H}_{1x} \cos \psi_1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

На поверхности раздела сред должны удовлетворяться граничные условия:

$$\dot{E}_z^n + \dot{E}_z^B = \dot{E}_{1z}, \quad \dot{H}_x^n + \dot{H}_x^B = \dot{H}_{1x} \quad \text{при } y=0. \quad (4.14)$$

Чтобы найти значения ψ , ψ_1 и \dot{H}_0 , \dot{H}_1 , используем (4.14). Подставляя (4.10) и (4.13) в (4.14), получаем законы Снеллиуса (4.6), (4.7). Учитывая их, имеем систему двух линейных алгебраических уравнений относительно \dot{H}_0 и \dot{H}_1 :

$$\begin{aligned} -W \cos \vartheta_0 \dot{H}_0^n + W \cos \vartheta_0 \dot{H}_0 &= -W_1 \cos \vartheta_{\text{пр}} \dot{H}_1; \\ \dot{H}_0^n + \dot{H}_0 &= \dot{H}_1, \end{aligned}$$

решая которую получаем $\dot{H}_0 = R_{\parallel} \dot{H}_0^n$, $\dot{H}_1 = \kappa_{\parallel} \dot{H}_0^n$, где $R_{\parallel}, \kappa_{\parallel}$ — коэффициенты отражения и прохождения параллельно поляризованного поля:

$$R_{\parallel} = \frac{W \cos \vartheta_0 - W_1 \cos \vartheta_{\text{пр}}}{W \cos \vartheta_0 + W_1 \cos \vartheta_{\text{пр}}}, \quad \kappa_{\parallel} = 1 + R_{\parallel} = \frac{2W \cos \vartheta_0}{W \cos \vartheta_0 + W_1 \cos \vartheta_{\text{пр}}}. \quad (4.15)$$

Отметим, что $R_{\parallel} = \dot{H}_0 / \dot{H}_0^n$ определен как коэффициент отражения по магнитному полю. По электрическому полю коэффициент отражения $R_{\parallel E_z} = \dot{E}_z^b / \dot{E}_z^n \Big|_{y=0} = -R_{\parallel}$, $R_{\parallel E_y} = \dot{E}_y^b / \dot{E}_y^n \Big|_{y=0} = R_{\parallel}$.

В случае, когда $\sigma_1 \rightarrow \infty$, $R_{\parallel} \rightarrow 1$, $\kappa_{\parallel} \rightarrow 2$, $\dot{H}_0 = \dot{H}_0^n$, фаза Φ_{\parallel} коэффициента отражения $R_{\parallel} = |R_{\parallel}| \exp(-i\Phi_{\parallel})$ равна нулю.

4.2. Полное преломление, полное отражение

1. Рассмотрим явление полного преломления. Энергия падающего поля может переходить полностью в энергию преломленного поля. Отраженное поле при этом отсутствует. Для этого необходимо, чтобы коэффициенты отражения были равны нулю.

Пусть тепловые потери в средах отсутствуют, т.е. $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$, $\tilde{\epsilon}_{a1} = \epsilon_{a1}$. При $R_{\parallel} = 0$ надо, чтобы числитель (4.15) был равен нулю, т.е. $W \cos \vartheta_{0,\parallel} = W_1 \cos \vartheta_{\text{пр}}$. Так как из (4.7) следует, что $\cos^2 \vartheta_{\text{пр}} = 1 - (k \sin \vartheta_{0,\parallel})^2 / k_1^2$, то получаем

$$\sin \vartheta_{0,\parallel} = \left(\epsilon_{a1} \frac{\epsilon_a \mu_{a1} / \mu_a - \epsilon_{a1}}{\epsilon_a^2 - \epsilon_{a1}^2} \right)^{1/2}. \quad (4.16)$$

При $R_{\perp} = 0$, приравняв числитель (4.9) к нулю, имеем $W_1 \cos \vartheta_{0,\perp} = W \cos \vartheta_{\text{пр}}$. Подставляя сюда значение $\cos \vartheta_{\text{пр}}$, находим

$$\sin \vartheta_{0,\perp} = \left(\mu_{a1} \frac{\epsilon_{a1} \mu_a / \epsilon_a - \mu_{a1}}{\mu_a^2 - \mu_{a1}^2} \right)^{1/2}. \quad (4.17)$$

Таким образом, параллельно или нормально поляризованное поле, падающее на поверхность раздела под углом $\vartheta_{0,\parallel}$ или $\vartheta_{0,\perp}$, проходит из верхнего полупространства в нижнее, не отражаясь. Угол $\vartheta_{0,\parallel}$ или $\vartheta_{0,\perp}$ называется углом полного преломления (углом Брюстера).

Для немагнитных сред $\mu_a = \mu_{a1} = \mu_0$. Поэтому при параллельной поляризации

$$\sin \vartheta_{0,\parallel} = \left(\frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_a + \epsilon_{a1}} \right)^{1/2}. \quad (4.18)$$

При нормальной поляризации, для немагнитных сред, как следует из (4.17), явления полного преломления не существует. Для существования угла Брюстера при нормальной поляризации необходимо, чтобы $\mu_a \neq \mu_{a1}$.

Коэффициенты прохождения (4.9), (4.15) при обеих поляризациях в случае падения поля под углом Брюстера равны единице. Значения $\sin \vartheta_{\text{пр}}$ и $\cos \vartheta_{\text{пр}}$ в соответствии со вторым законом Снелля являются действительными и положительными. Преломленное поле является полем плоской волны, распространяющейся под углом $\vartheta_{\text{пр}}$ к нормали к плоскости раздела сред.

2. Рассмотрим явление полного отражения. При этом преломленное поле при $y \rightarrow -\infty$ отсутствует. Из второго закона Снелля следует, что при увеличении угла падения ϑ_0 , угол преломления увеличивается и при некотором значении $\vartheta_{0,\text{кр}}$ угол преломления становится равным $\vartheta_{\text{пр}} = \pi/2$. Это значение является предельным. Поэтому из закона (4.7) получаем $\sin \vartheta_{0,\text{кр}} = k_1/k$. В случае немагнитных сред $\sin \vartheta_{0,\text{кр}} = (\epsilon_{a1}/\epsilon_a)^{1/2}$. Для среды без джоулевых потерь величину $\sqrt{\epsilon} = n$ называют показателем преломления. С учетом этого $\sin \vartheta_{0,\text{кр}} = n_1/n$.

Величина $\sin \vartheta_{0,\text{кр}} \leq 1$, поэтому необходимо, чтобы $n_1 < n$, т.е. среда нижнего полупространства должна быть менее оптически плотной.

Если $\vartheta_0 > \vartheta_{0,\text{кр}}$, то из выражения $\sin \vartheta_{\text{пр}} = (k \sin \vartheta_0)/k_1$ следует, что $\sin \vartheta_{\text{пр}} > 1$, т.е. $\vartheta_{\text{пр}}$ является комплексной величиной. Считаем, что $\vartheta_{\text{пр}} = \xi + i\eta$, тогда $\sin \vartheta_{\text{пр}} = \sin \xi \operatorname{ch} \eta + i \cos \xi \operatorname{sh} \eta$. Действительные величины ξ и η выбираем так, чтобы $\sin \vartheta_{\text{пр}}$ был действительной величиной. Если $\xi = (4m+1)\pi/2$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то значение η определяется выражениями

$$\sin \vartheta_{\text{пр}} = \operatorname{ch} \eta = k/k_1 \cdot \sin \vartheta_0 > 1, \quad \cos \vartheta_{\text{пр}} = -i \operatorname{sh} \eta. \quad (4.19)$$

Для преломленного поля при нормальной поляризации при $\vartheta_0 > \vartheta_{0,кр}$ получаем по (4.4), (4.19)

$$\begin{aligned} \dot{E}_{1x} &= \kappa_{\perp} \dot{E}_0^n e^{k_1 y \operatorname{sh} \eta - i k_1 z \operatorname{ch} \eta}, \quad \dot{E}_{1y} = \dot{E}_{1z} = 0, \\ \dot{H}_{1x} &= 0, \quad \dot{H}_{1y} = -W_1^{-1} \operatorname{ch} \eta \dot{E}_{1x}, \quad \dot{H}_{1z} = -i W_1^{-1} \operatorname{sh} \eta \dot{E}_{1x}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Вектор Пойнтинга поля (4.20) имеет действительную составляющую $\dot{\Pi}_{1z}$ и мнимую составляющую $\dot{\Pi}_{1y}$. Значит, преломленное поле энергии вдоль нормали к границе раздела не переносит. Амплитуды поля при $y \rightarrow -\infty$ убывают по экспоненциальному закону. Поле имеет характер волны, бегущей вдоль возрастающих значений z , фазовая скорость волны $v_{1\phi} = (\varepsilon_{al} \mu_{al})^{-1/2} / \sin \vartheta_0$. Поверхность раздела сред является *направляющей поверхностью*. Вдоль ее в нижнем полупространстве распространяется *поверхностная H-волна*.

Аналогичным образом поверхностная E-волна получается из выражений (4.12) для параллельной поляризации поля. При $\vartheta_0 > \vartheta_{0,кр}$ имеем $|R_{\perp}| = |R_{\parallel}| = 1$.

В верхнем полупространстве полное поле получается наложением падающего и отраженного полей. При нормальной поляризации, используя (4.1), (4.4), находим $\dot{E}_y = \dot{E}_z = 0$,

$$\dot{E}_x = \dot{E}_0^n e^{i\Phi_{\perp}/2} \cdot 2 \cos(ky \cos \vartheta_0 - \frac{1}{2} \Phi_{\perp}) e^{-ikz \sin \vartheta_0}. \quad (4.21)$$

Из второго уравнения Максвелла получаем $\dot{H}_x = 0$,

$$\dot{H}_y = W^{-1} \dot{E}_x \sin \vartheta_0, \quad \dot{H}_z = i W^{-1} \dot{E}_x \cos \vartheta_0 \operatorname{tg}(ky \cos \vartheta_0 - \frac{1}{2} \Phi_{\perp}). \quad (4.22)$$

Вектор Пойнтинга этого поля имеет действительную составляющую $\dot{\Pi}_z$ и мнимую составляющую $\dot{\Pi}_y$. Волна распространяется вдоль поверхности раздела сред (вдоль возрастающих значений z) как вдоль направляющей поверхности. Фазовая скорость волны равна фазовой скорости поверхностной волны в нижнем полупространстве. Поверхностями равных фаз являются плоскости $z = \operatorname{const}$, перпендикулярные оси z . Поверхностями равных амплитуд являются плоскости, параллельные поверхности раздела. Поэтому волна является неоднородной плоской волной. Распределение \dot{E}_x вдоль координаты y имеет характер стоячей волны. При значениях y , определяемых из условия $\cos(ky \cos \vartheta_0 - \Phi_{\perp}/2) = 0$, имеем $\dot{E}_x = 0$. Если при этих значениях y

расположить идеально проводящую плоскость, параллельную границе раздела, то граничные условия на такой плоскости удовлетворяются. При этом как бы образуется слой диэлектрика между двумя металлическими плоскостями. Распространяющуюся в слое волну (4.21), (4.22), используя форму Эйлера для $\cos(ky \cos \theta_0 - \Phi_{\perp} / 2)$, можно представить в виде суммы *парциальных плоских волн*, переотражающихся между границами раздела. Эта концепция парциальных волн может быть использована при физическом анализе условий распространения волн в слое диэлектрика на металле, в диэлектрическом волноводе и в прямоугольном металлическом волноводе.

Аналогичные результаты могут быть получены из выражений (4.10), (4.12) в случае параллельной поляризации.

3. Графики модулей и фаз коэффициентов отражения при нормальной и параллельной поляризациях, рассчитанные по (4.9), (4.15)

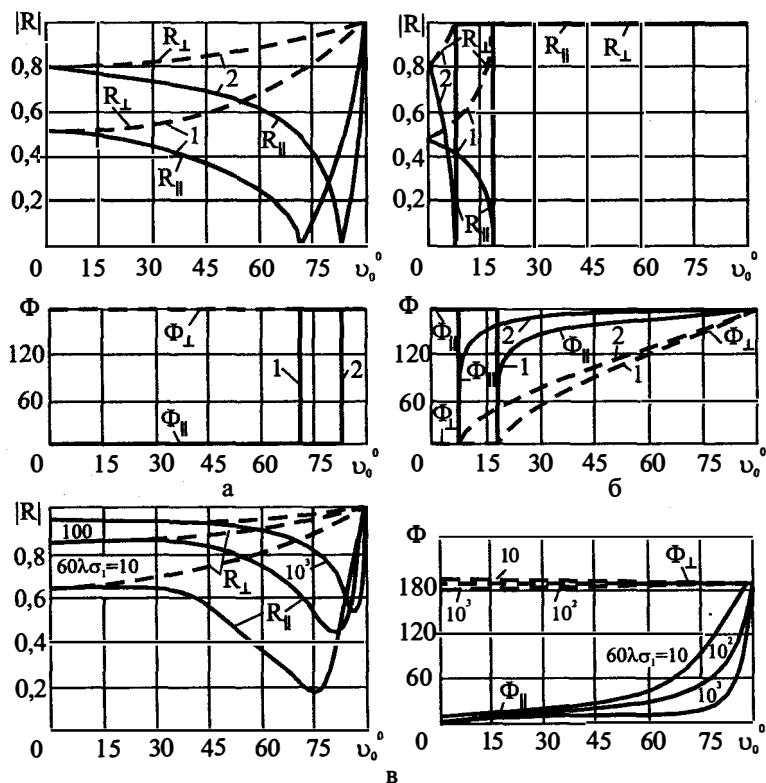


Рис. 4.2 Графики коэффициентов отражения

для немагнитных сред без Джоулевых потерь для случая $\epsilon_{a1} > \epsilon_a = \epsilon_0$, приведены на рис. 4.2,а (кривые 1 соответствуют $\epsilon_{a1} = 10\epsilon_0$, кривые 2 — $\epsilon_{a1} = 80\epsilon_0$). Для случая $\epsilon_a > \epsilon_{a1} = \epsilon_0$ аналогичные графики приведены на рис. 4.2,б (кривая 1 соответствует $\epsilon_a = 10\epsilon_0$, кривая 2 — $\epsilon_a = 80\epsilon_0$).

4. Графики коэффициентов отражения при $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma = 0$ рассчитываются по (4.9), (4.15). Поле в верхнем полупространстве при этом существенно не отличается от поля в случае идеальных диэлектриков. Графики зависимостей от угла падения модулей и фаз коэффициентов отражения приведены на рис. 4.2,в ($\epsilon_a = \epsilon_0$, $\epsilon_{a1} = 10\epsilon_0$). Сравнение этих графиков с соответствующими графиками, изображенными на рис. 4.2,а, показывает, что для параллельной поляризации при $\sigma_1 \neq 0$ характерно присутствие минимума модуля коэффициента отражения, но явления полного преломления в чистом виде не наблюдается. Кривые $|R_{\perp}(\theta_0)|$ имеют монотонный характер и для одних и тех же углов падения $|R_{\parallel}| < |R_{\perp}|$. С увеличением σ_1 при $\lambda = \text{const}$ величины $|R_{\parallel}|$ и $|R_{\perp}|$ возрастают. Фаза Φ_{\parallel} меньше 180° , в области углов, близких к углам Брюстера, Φ_{\parallel} резко изменяет свое значение. Фаза Φ_{\perp} изменяется монотонно и равна почти 180° .

5. Пусть на поверхность раздела сред падает волна, имеющая произвольную линейную поляризацию. Вектор \vec{E}^n разложим на сумму двух векторов, один из которых *параллелен*, а другой *перпендикулярен* плоскости падения. В общем случае $|R_{\perp}| \neq |R_{\parallel}|$. Значит, в точке p соотношение между амплитудами составляющих векторов напряженностей полей отраженных параллельно и нормально поляризованных волн отличается от соответствующего соотношения для падающего поля. Фазы Φ_{\parallel} и Φ_{\perp} неодинаковы. Поэтому составляющие векторов напряженностей параллельно и нормально поляризованных отраженных полей сдвинуты по фазе относительно друг друга. Поэтому *резльтирующее отраженное поле имеет эллиптическую поляризацию*. В частном случае, когда обе среды являются идеальными диэлектриками или нижнее полупространство — идеальный проводник, разность фаз $\Phi_{\perp} - \Phi_{\parallel}$ равна нулю или 180° и волна остается линейно поляризованной.

4.3. Импедансные граничные условия

Рассмотрим структуру поля преломленной волны и получим приближенные граничные условия на поверхности раздела сред.

Векторы напряженностей поля в нижнем полупространстве (4.4), (4.8) и (4.12), (4.13), имеют экспоненциальные множители, определяемые значениями $k_1 \sin \vartheta_{\text{пр}}$ и $k_1 \cos \vartheta_{\text{пр}}$. При $\sigma = 0$ величина $k_1 \sin \vartheta_{\text{пр}} = k \sin \vartheta_0$ действительна, так как k и ϑ_0 — действительны. Поскольку k_1 — комплексная величина, то $\vartheta_{\text{пр}}$ тоже комплексно. Выразим $k_1 \cos \vartheta_{\text{пр}}$. Учтем, что

$$k_1 \cos \vartheta_{\text{пр}} = k_1 (1 - \sin^2 \vartheta_{\text{пр}})^{1/2} = [k_1^2 - (k_1 \sin \vartheta_{\text{пр}})^2]^{1/2}, \quad k_1 = \beta_1 - i\alpha_1.$$

Тогда

$$k_1 \cos \vartheta_{\text{пр}} = \sqrt{k_1^2 - k^2 \sin^2 \vartheta_0} = \sqrt{\beta_1^2 - \alpha_1^2 - k^2 \sin^2 \vartheta_0 - i2\beta_1\alpha_1}. \quad (4.23)$$

Обозначим $k_1 \cos \vartheta_{\text{пр}} = k_y = \beta_y - i\alpha_y$, где β_y и α_y определяются по (4.23). Для нормальной поляризации: $\dot{E}_{1y} = \dot{E}_{1z} = \dot{H}_{1x} = 0$ и из (4.4), (4.8) с учетом (4.23)

$$\begin{aligned} \dot{E}_{1x} &= \kappa_{\perp} \dot{E}_0^{\text{п}} \cdot e^{\alpha_y y} \cdot e^{i(\beta_y y - kz \sin \vartheta_0)}, \\ \dot{H}_{1y} &= W_1^{-1} \dot{E}_{1x} \frac{k}{k_1} \sin \vartheta_0, \quad \dot{H}_{1z} = W_1^{-1} \dot{E}_{1x} \frac{\beta_y - i\alpha_y}{k_1}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Эти выражения описывают волну, у которой поверхностями равных фаз являются плоскости: $\beta_y y - kz \sin \vartheta_0 = \text{const}$ (см. (1) на рис. 4.3). Поэтому направление распространения преломленной волны определяется

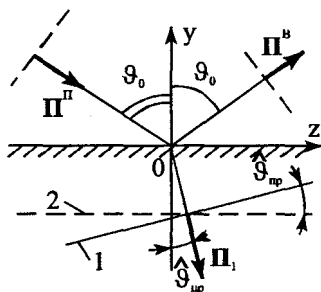


Рис. 4.3. Преломленное поле в проводящей среде

действительным углом $\hat{\vartheta}_{\text{пр}}$, удовлетворяющим

выражению:

$\text{tg } \hat{\vartheta}_{\text{пр}} = k \sin \vartheta_0 / \beta_y$. С увеличением $|y|$ амплитуды составляющих векторов напряженностей поля затухают по экспоненциальному закону (из-за потерь на нагревание). Поверхностями равных амплитуд (2) являются поверхности $y = \text{const}$. Поверхности равных амплитуд и фаз наклонены друг к другу под углом $\hat{\vartheta}_{\text{пр}}$.

Рассмотрим важный случай. Пусть $|k_1| \gg |k|$. При этом из (4.23), учитывая малость $|k^2/k_1^2|$, получаем: $k_y \approx k_1 - (k^2 \sin^2 \vartheta_0)/2k_1$. Кроме того, фронт волны почти параллелен плоскости раздела сред, так как угол $\hat{\vartheta}_{\text{пр}}$ очень мал ($\hat{\vartheta}_{\text{пр}} \approx 0$). Из (4.24) имеем

$$\dot{E}_{1x} = \frac{k_1}{k_y} W_1 \dot{H}_{1z} \approx \left(1 + \frac{k^2}{2k_1^2} \sin^2 \vartheta_0 \right) W_1 \dot{H}_{1z}, \quad \dot{H}_{1y} \approx 0. \quad (4.25)$$

Для параллельной поляризации аналогичным образом из (4.13) находим

$$\dot{E}_{1z} \approx - \left(1 - \frac{k^2}{2k_1^2} \sin^2 \vartheta_0 \right) W_1 \dot{H}_{1x}, \quad \dot{E}_{1y} \approx 0. \quad (4.26)$$

Выражения (4.25), (4.26) описывают неоднородную плоскую Т-волну, распространяющуюся вдоль нормали к поверхности раздела ($\hat{\vartheta}_{\text{пр}} \approx 0$). Поперечные составляющие векторов напряженностей поля в любой точке нижнего полупространства, в том числе и на поверхности раздела S , связаны характеристическим сопротивлением W_1 среды и слабо зависят от угла падения волны. Если обозначить

$Z_S^\perp \approx W_1 [1 \pm (k^2 \sin^2 \vartheta_0)/2k_1^2]$, то

$$\dot{E}_{1x} = Z_S^\perp \dot{H}_{1z}, \quad \dot{E}_{1z} = -Z_S^\perp \dot{H}_{1x} \text{ на } S. \quad (4.27)$$

На S выполняются строго граничные условия (4.3), (4.14):

$$\dot{E}_{1x} = \dot{E}_x, \quad \dot{H}_{1z} = \dot{H}_z; \quad \dot{E}_{1z} = \dot{E}_z, \quad \dot{H}_{1x} = \dot{H}_x.$$

Заменяя в (4.27) составляющие $\dot{E}_{1x}, \dot{H}_{1z}$ и $\dot{E}_{1z}, \dot{H}_{1x}$ составляющими \dot{E}_x, \dot{H}_z и \dot{E}_z, \dot{H}_x в соответствии с последними равенствами, получаем для полного поля в *верхнем полупространстве*:

$$\dot{E}_x = Z_S^\perp \dot{H}_z, \quad \dot{E}_z = -Z_S^\perp \dot{H}_x \text{ на } S. \quad (4.28)$$

Параметр Z_S в этом случае называют *поверхностным сопротивлением (импедансом)*. Равенства (4.28) можно представить в векторной форме:

$$[\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}] = Z_S^\perp [\mathbf{n}, [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}]] \text{ на границе раздела сред,} \quad (4.29)$$

где \mathbf{n} — орт внешней относительно области, в которой определяются векторы $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$, нормали к границе раздела сред.

Приближенные соотношения (4.28), (4.29) называют *импедансными граничными условиями* (граничными условиями Леонтовича). При нормальном падении волны ($\vartheta_0 = 0$) $Z_S = W_1$. Поскольку значение

$\left| (k \sin \vartheta_0)^2 / 2k_1^2 \right|$ мало при всех углах падения, то часто полагают $Z_S \approx W_1$. Если $\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, то при этом величина ошибки вычисления поверхностного сопротивления имеет порядок $1/2|\tilde{n}_1|^2$, (где $\tilde{n}_1 = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_1 \mu_1}$, $\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{\varepsilon}_{a1} / \varepsilon_0$), причем максимальной ошибка будет при $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$.

Импедансные граничные условия (4.29) часто применяют для неплоских поверхностей раздела сред. Возможность их применения в математических моделях необходимо изучить в каждом конкретном случае. Отметим, что радиус кривизны поверхности при этом должен быть намного больше глубины проникновения (δ_1) поля в проводящую среду, которая (δ_1), в свою очередь, должна быть очень малой по сравнению с λ ; поле, падающее на S , должно иметь одинаковую амплитуду на S .

Импедансные граничные условия позволяют не рассматривать ЭМ поле внутри тела и учитывать влияние тела на ЭМ поле вне его с помощью граничных условий на его поверхности. В поверхностном сопротивлении заложена информация о параметрах тела и поведении ЭМ поля внутри него. Аналогичные свойства имеют граничные условия на поверхности идеального проводника.

4.4. Сопротивление плоского проводника при поверхностном эффекте

1. В § 2.5, п.4 показано, что в проводнике $k_1 \approx \beta_1(1-i)$, $\alpha_1 \approx \beta_1 \approx (\omega \mu_{a1} \sigma_1 / 2)^{1/2}$, значение β_1 велико, поэтому длина волны $\lambda_1 = 2\pi/\beta_1$ мала по сравнению с длиной волны в свободном пространстве. Даже если частота ω мала, в проводнике λ_1 может быть малой и волновые процессы существенно выражены. Плотность энергии электрического поля очень мала по сравнению с плотностью энергии магнитного поля.

2. Рассмотрим плоский проводник. Пусть i_1 — ток, протекающий через поперечное сечение S_\perp проводника при нормальной поляризации (рис. 4.4,а). По закону Ома $\dot{j}_1 = \sigma_1 \dot{E}_1$, $\dot{E}_1 = \mathbf{1}_x \dot{E}_{1x}$, где \dot{E}_{1x} определяется по (4.4), (4.9). Поэтому

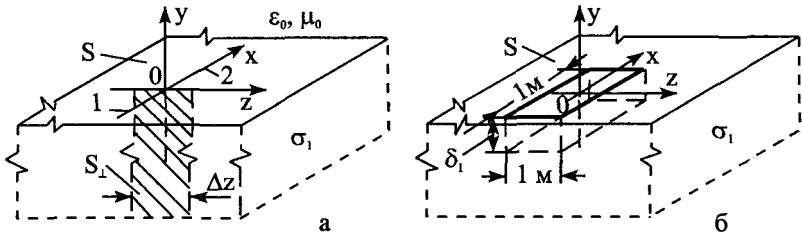


Рис. 4.4. К определению погонного внутреннего импеданса

$$i_1 = \int_{S_{\perp}} \sigma_1 \dot{E}_1 \mathbf{1}_x dS = \sigma_1 \kappa_{\perp} \dot{E}_0^n \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} e^{-ik_1 z \sin \vartheta_{np}} dz \int_0^{\infty} e^{ik_1 y \cos \vartheta_{np}} dy.$$

Выполнив интегрирование, находим $i_1 = \sigma_1 \kappa_{\perp} \dot{E}_0^n \Delta z / ik_1 \cos \vartheta_{np}$.

Падение напряжения между точками 1 и 2, расположенными на расстоянии Δx (рис. 4.4,а), равно $\dot{u} = \dot{E}_{1x} \Delta x$. Если $\Delta x = 1$ м, то $\dot{u}_{01} = \dot{E}_{1x} \cdot (1 \text{ м})$ определяет напряжение на единичной длине проводника. *Погонным внутренним импедансом* называется величина $Z_f = \dot{u}_{01} / i_1$ (при $y = 0$). Так как $\cos \vartheta_{np} \approx 1$, то $Z_f \approx \beta_1 (1 + i) / \Delta z \sigma_1 = (\omega \mu_{a1} / 2 \sigma_1)^{1/2} (1 + i) / \Delta z$. Таким образом, при $\Delta z = 1$ м погонный внутренний импеданс равен поверхностному сопротивлению, $Z_f \approx Z_S$. Он обобщает понятие погонного сопротивления, вводимого для постоянного тока как отношение падения напряжения на единицу длины проводника к току в последнем. Падение напряжения \dot{u}_{01} берется на поверхности проводника, так как оно измеряется вольтметром, присоединенным к различным точкам поверхности проводника. Активная составляющая Z_f определяет мощность потерь в проводнике. Реактивная составляющая Z_f имеет индуктивный характер, что объясняется тем, что в проводнике запасается энергия магнитного поля. Если $Z_f = R_f + iX_f$, где R_f и X_f — активная и реактивная составляющие погонного сопротивления, то $R_f = X_f = (\omega \mu_{a1} / 2 \sigma_1)^{1/2} / \Delta z$, или $R_f = X_f = 1 / \sigma_1 \delta_1 \Delta z = 1 / (\sigma_1 \cdot S_3)$, где $S_3 = \delta_1 \Delta z$. Значит, активная и реактивная составляющие внутреннего погонного импеданса проводника прямоугольного поперечного сечения равны погонному сопротивлению проводника, имеющего площадь поперечного сечения S_3 при постоян-

ном токе (рис. 4.4,б). В ЭМ процессах эффективно участвует только малая площадь поперечного сечения проводника S_3 , так как $S_3 < S_\perp$; $S_3 = \delta_1 \cdot \Delta z$ уменьшается с ростом частоты, поэтому погонное сопротивление проводника возрастает при этом. Значения R_f и X_f с ростом ω возрастают как $\omega^{1/2}$. Поэтому увеличение частоты в 10 раз приводит к увеличению сопротивления в 3,16 раз. Часть проводника, лежащая ниже нескольких глубин проникновения ($|y| > N\delta_1$, N обычно равно 3–5), не влияет на ЭМ процессы, происходящие в проводнике (и вне его).

Так как $X_f = \omega L_f$, где L_f — погонная внутренняя индуктивность, то $L_f = (\mu_{a1} / 2\sigma_1 \omega)^{1/2}$. При увеличении частоты L_f уменьшается, поскольку глубина проникновения поля в проводник уменьшается и, значит, запасаемая энергия магнитного поля уменьшается.

Полученные выражения для Z_f справедливы и при параллельной поляризации поля.

4.5. Метод зеркальных изображений

1. Излучатель может находиться над поверхностью земли на такой высоте y_0 (рис. 4.5,а), что падающее на поверхность земли ЭМ поле нельзя считать плоским. Значение угла падения ϑ_0 в отличие от случая падения плоской волны зависит от положения излучателя q в пространстве и координаты точки $p(x,0,z)$ на поверхности раздела сред. Поэтому выражения (4.9), (4.15) для коэффициентов Френеля при расчете вторичных полей непосредственно использовать нельзя. Однако, в случае, когда поле определяется на большом расстоянии r_{qp} от

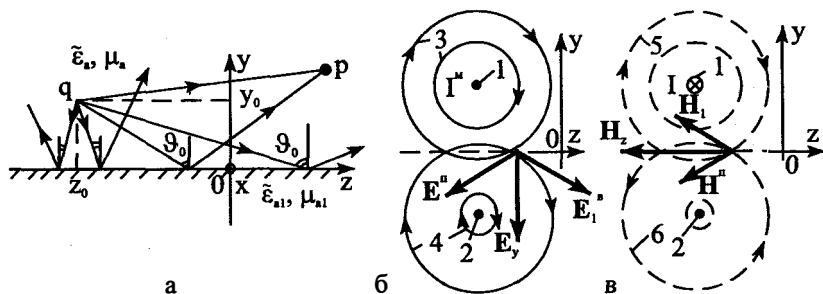


Рис. 4.5. Нить тока у плоской поверхности раздела сред

источника в верхнем полупространстве ($y \geq 0$), при расчетах возможно применение простых выражений для коэффициентов отражения.

2. Рассмотрим математическую модель: пусть в условиях граничной задачи, сформулированной в § 4.1, п.2, падающее ЭМ поле возбуждает бесконечная прямолинейная нить синфазного магнитного тока, параллельная поверхности раздела сред (рис. 4.5,а). Плоскость xz ДСК совместим с поверхностью раздела сред ($y = 0$), ось x направим параллельно нити тока, координаты которой обозначим через y_0, z_0 . Тогда $\dot{\mathbf{j}}^{m,c} = \mathbf{1}_x j_x^{m,c}$, $j_x^{m,c} = I_0^m \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$.

Если $|k|y_0 \gg 1$, то падающую на поверхность раздела сред волну можно считать цилиндрической. Но если $|k|y_0$ мало, то на поверхность раздела сред под излучателем ($y = 0, z \approx z_0$) падает волна, еще не сформировавшаяся в цилиндрическую (§ 2.9). Обозначим через $\dot{\mathbf{A}}, \dot{\mathbf{A}}^m$ и $\dot{\mathbf{A}}_1, \dot{\mathbf{A}}_1^m$ векторные потенциалы в верхнем и нижнем полупространствах. Так как плотности сторонних электрических токов отсутствуют, то $\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}_1 = 0$. В верхнем полупространстве $\dot{\mathbf{A}}^m = \dot{\mathbf{A}}^{m,\pi} + \dot{\mathbf{A}}^{m,\nu}$, где $\dot{\mathbf{A}}^{m,\pi}$ — векторный потенциал нити магнитного тока в неограниченном пространстве. Он известен (§ 2.9) и определяет падающее поле, являющееся на больших расстояниях от нити цилиндрической волной. Однако, поверхность раздела является плоской. Непосредственно удовлетворить граничным условиям на ней для цилиндрических волн не удастся. Естественным при этом является разложение падающего и вторичных полей по системам плоских волн. Поскольку для плоских волн, как показывают результаты § 4.1, удовлетворить граничным условиям на плоской поверхности раздела сред легко, то оказывается возможным получить при этом решение поставленной задачи.

Выполним разложение $\dot{\mathbf{A}}_x^{m,\pi}$ по системе плоских волн. В соответствии с (П4.4)

$$\dot{\mathbf{A}}^{m,\pi} = \mathbf{1}_x \dot{A}_x^{m,\pi}, \quad \dot{A}_x^{m,\pi} = \int_{V_n} j_x^{m,c} G(p, q) dV', \quad y \geq 0.$$

Подставляя в это выражение $j_x^{m,c}(q)$ и функцию Грина из (П4.3), используя основное свойство δ -функции и учитывая, что получающийся интеграл по x' в бесконечных пределах равен $2\pi\delta(\kappa_1 - 0)$, имеем

$$\dot{A}_x^{m,\pi} = \frac{j_0^m}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\kappa_2(y-y_0) - i\kappa_3(z-z_0)}}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - k^2} d\kappa_1 d\kappa_2, \quad y \geq 0.$$

Выполнив интегрирование по κ_2 так же, как в случае выражения (П4.5), получаем

$$A_x^{M,\Pi} = \frac{j^M}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} e^{\pm q(y-y_0) - i\kappa(z-z_0)} d\kappa, \quad y \geq 0, \quad (4.30)$$

где $\kappa = \kappa_3$, $q = (\kappa^2 - k^2)^{1/2}$, верхний знак берется при $y - y_0 < 0$, а нижний — при $y - y_0 > 0$.

Векторы \dot{E}^{Π} , \dot{H}^{Π} определяются по (1.124), (1.125):

$$\dot{E}^{\Pi} = -\text{rot } \dot{A}^{M,\Pi}, \quad \dot{H}^{\Pi} = -i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{A}^{M,\Pi} + \frac{1}{i\omega \mu_a} \text{grad div } \dot{A}^{M,\Pi}.$$

Поскольку $\dot{A}_x^{M,\Pi}$ от x не зависит, то $\partial \dot{A}_x^{M,\Pi} / \partial x = 0$ и $\text{div } \mathbf{1}_x \dot{A}_x^{M,\Pi} = 0$. Отличающимися от нуля касательными к поверхности раздела сред составляющими векторов первичного поля являются

$$\dot{E}_z^{\Pi} = \partial \dot{A}_x^{M,\Pi} / \partial y \quad \text{и} \quad \dot{H}_x^{\Pi} = -i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{A}_x^{M,\Pi}. \quad (4.31)$$

Вектор $\dot{E}^{\Pi} = \mathbf{1}_y \dot{E}_y^{\Pi} + \mathbf{1}_z \dot{E}_z^{\Pi}$. Таким образом, имеем *параллельную поляризацию падающего поля*. Можно считать, что на поверхности раздела сред в соответствии с принципом эквивалентных поверхностных токов падающее поле наводит вторичный магнитный поверхностный ток, имеющий только составляющую j_x^M . Поэтому векторные потенциалы вторичного магнитного поверхностного тока имеют только составляющие $\dot{A}_x^{M,B}$, A_{1x}^M . Тогда из (1.124), (1.125) получаем:

$$\begin{aligned} \dot{E}^B &= -\text{rot } \mathbf{1}_x \dot{A}_x^{M,B} = -\mathbf{1}_y \frac{\partial \dot{A}_x^B}{\partial z} + \mathbf{1}_z \frac{\partial \dot{A}_x^B}{\partial y}, \quad \dot{H}^B = -i\omega \tilde{\epsilon}_a \mathbf{1}_x \dot{A}_x^{M,B}; \\ \dot{E}_1 &= -\text{rot } \mathbf{1}_x \dot{A}_{1x}^M = -\mathbf{1}_y \frac{\partial \dot{A}_{1x}^M}{\partial z} + \mathbf{1}_z \frac{\partial \dot{A}_{1x}^M}{\partial y}, \quad \dot{H}_1 = -i\omega \tilde{\epsilon}_{a1} \mathbf{1}_x \dot{A}_{1x}^M; \end{aligned} \quad (4.32)$$

Для касательных составляющих векторов напряженностей полного поля (верхнего полупространства) и прошедшего в нижнее полупространство поля должны удовлетворяться граничные условия (4.14). Подставляя в них (4.31) и используя (4.32), получаем:

$$\frac{\partial \dot{A}_{1x}^M}{\partial y} - \frac{\partial \dot{A}_x^{M,B}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{A}_x^{M,\Pi}}{\partial y}; \quad \tilde{\epsilon}_{a1} \dot{A}_{1x}^M - \tilde{\epsilon}_a \dot{A}_x^{M,B} = \tilde{\epsilon}_a \dot{A}_x^{M,\Pi} \quad \text{при } y = 0. \quad (4.33)$$

Векторные потенциалы определяют вторичные поля, поэтому уравнения Гельмгольца (1.117), (1.122), которым они удовлетворяют, являются однородными. Таким образом, имеем

$$\Delta \dot{A}_x^{M,B} + k^2 \dot{A}_x^{M,B} = 0, \quad \Delta \dot{A}_{1x}^M + k_1^2 \dot{A}_{1x}^M = 0. \quad (4.34)$$

Для определения векторов ЭМ поля, надо найти решения одно-
родных уравнений (4.34), связанные *неоднородными граничными усло-*
виями (4.33). Роль неоднородностей (т.е. источников вторичных полей)
в последних играют их правые части. Векторы искомого вторичных по-
лей (4.32) должны удовлетворять условиям излучения.

3. Решение уравнений (4.34) ищем в виде, аналогичном (4.30) и
удовлетворяющем дифференциальным уравнениям (4.34):

$$A_x^{M,B} = \frac{I_0^M}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^M(\kappa) \frac{1}{q} e^{-qy - i\kappa(z-z_0)} d\kappa, \quad y \geq 0, \quad (4.35)$$

$$A_{ix}^M = \frac{I_0^M}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1^M(\kappa) \frac{1}{q_1} e^{q_1 y - i\kappa(z-z_0)} d\kappa, \quad y \leq 0, \quad (4.36)$$

где $f^M(\kappa)$, $f_1^M(\kappa)$ — спектральные плотности, которые надо найти из
граничных условий (4.33), $q_1 = (\kappa - k_1)^{1/2}$. Так как источниками вто-
ричных полей можно считать эквивалентные поверхностные токи при
 $y = 0$, то в (4.35), в экспоненциальном множителе, выбран знак «-» при
 $y \geq 0$, а в (4.36) — знак «+» при $y \leq 0$.

Подставляя (4.35), (4.36) и (4.30) в (4.33) — при $y = 0$ и затем,
применяя обратное преобразование Фурье, получаем для спектральных
плотностей f^M и f_1^M :

$$f_1^M(\kappa) = \exp(-qy_0) - f^M(\kappa),$$

$$\tilde{\epsilon}_{a1} \frac{1}{q_1} f_1^M(\kappa) = \tilde{\epsilon}_a \frac{1}{q} [\exp(-qy_0) + f^M(\kappa)].$$

Решая эту систему функциональных уравнений, находим

$$f^M = e^{-qy_0} \frac{\tilde{\epsilon}_{a1} q - \tilde{\epsilon}_a q_1}{\tilde{\epsilon}_{a1} q + \tilde{\epsilon}_a q_1}; \quad f_1^M = e^{-qy_0} \frac{2\tilde{\epsilon}_a q_1}{\tilde{\epsilon}_{a1} q + \tilde{\epsilon}_a q_1}. \quad (4.37)$$

Формулы (4.35)–(4.37) совместно с (4.32) определяют отраженное и
преломленное поля. Последние удовлетворяют уравнениям Максвелла, гранич-
ным условиям и условиям излучения. Значит, они определяют единственное
решение задачи.

4. Заменяя нить магнитного тока в условиях предыдущей задачи прямолиней-
ной нитью стороннего синфазного электрического тока (рис. 4.5,а). Тогда
 $\mathbf{j}^c = \mathbf{1}_x \dot{I}_0 \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$. Так как сторонний магнитный ток отсутствует, то $\dot{A}^{M,n} = 0$.

Электрический векторный потенциал \dot{A}^n нити тока в неограниченном пространстве из-
вестен (§ 2.9). Его представляем так же, как в (4.30) — в виде системы плоских волн:

$$\dot{A}^n = \mathbf{1}_x \dot{A}_x^n, \quad \dot{A}_x^n = \frac{I_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} e^{\pm q(y-y_0) - i\kappa(z-z_0)} d\kappa, \quad y \geq 0. \quad (4.38)$$

Поскольку \dot{A}_x^n не зависит от x , то из (1.124), (1.125) находим:

$$\dot{\mathbf{H}}^n = \text{rot} \mathbf{1}_x \dot{A}_x^n = \mathbf{1}_y \frac{\partial \dot{A}_x^n}{\partial z} - \mathbf{1}_z \frac{\partial \dot{A}_x^n}{\partial y}, \quad \dot{\mathbf{E}}^n = -i\omega \mu_a \mathbf{1}_x \dot{A}_x^n, \quad (4.39)$$

т.е. отличаются от нуля только составляющие $\dot{E}_x^n = -i\omega \mu_a \dot{A}_x^n$, $\dot{H}_y^n = \partial \dot{A}_x^n / \partial z$, $\dot{H}_z^n = -\partial \dot{A}_x^n / \partial y$. Поэтому поляризация падающего поля является нормальной.

В соответствии с принципом эквивалентных поверхностных токов источником вторичных полей можно считать эквивалентные поверхностные токи при $y=0$. Падающее поле наводит на поверхности раздела сред электрический поверхностный ток, имеющий только одну составляющую \dot{J}_x . Значит, векторные потенциалы, определяющие вторичные поля, надо искать в виде $\dot{\mathbf{A}}^b = \mathbf{1}_x \dot{A}_x^b$, $\dot{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{1}_x \dot{A}_{1x}$. При этом из (1.124), (1.125) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^b &= -i\omega \mu_a \mathbf{1}_x \dot{A}_x^b, \quad \dot{\mathbf{H}}^b = \mathbf{1}_y \frac{\partial \dot{A}_x^b}{\partial z} - \mathbf{1}_z \frac{\partial \dot{A}_x^b}{\partial y}; \\ \dot{\mathbf{E}}_1 &= -i\omega \mu_{a1} \mathbf{1}_x \dot{A}_{1x}, \quad \dot{\mathbf{H}}_1 = \text{rot} \mathbf{1}_x \dot{A}_{1x} = \mathbf{1}_y \frac{\partial \dot{A}_{1x}}{\partial z} - \mathbf{1}_z \frac{\partial \dot{A}_{1x}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Подставляя в (4.3) значения касательных к границе раздела сред составляющих векторов напряженностей полей, получаем граничные условия для составляющих векторных потенциалов:

$$\mu_{a1} \dot{A}_{1x} - \mu_a \dot{A}_x^b = \mu_a \dot{A}_x^n; \quad \frac{\partial \dot{A}_{1x}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{A}_x^b}{\partial y} = \frac{\partial \dot{A}_x^n}{\partial y} \quad \text{при } y=0. \quad (4.41)$$

Составляющие A_x^b, A_{1x} удовлетворяют однородным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta A_x^b + k^2 A_x^b = 0, \quad \Delta A_{1x} + k_1^2 A_{1x} = 0. \quad (4.42)$$

Необходимо найти решение дифференциальных уравнений (4.42), удовлетворяющих граничным условиям (4.41). Векторы искомого поля (4.40) должны удовлетворять условиям излучения.

5. Решение задачи ищем в виде, аналогичном (4.38) и удовлетворяющем (4.42):

$$\begin{aligned} \dot{A}_x^b &= \frac{j_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa) \frac{1}{q} e^{-qy - i\kappa(z-z_0)} d\kappa, \quad y \geq 0, \\ \dot{A}_{1x} &= \frac{j_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\kappa) \frac{1}{q_1} e^{q_1 y - i\kappa(z-z_0)} d\kappa, \quad y \leq 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Спектральные плотности $f(\kappa), f_1(\kappa)$ находим, подставляя (4.38), (4.43) в граничное условие (4.41):

$$f = e^{-q_0} \frac{q \mu_{a1} - q_1 \mu_a}{q \mu_{a1} + q_1 \mu_a}; \quad f_1 = e^{-q_0} \frac{2q_1 \mu_a}{q \mu_{a1} + q_1 \mu_a}. \quad (4.44)$$

Выражения (4.43), (4.44) совместно с (4.40) определяют отраженное и прошедшее поля.

6. Рассмотрим важный частный случай. Пусть среда, заполняющая нижнее полупространство, является идеальным проводником, т.е. $\sigma_1 \rightarrow \infty$. Тогда $\tilde{\epsilon}_{a1} \rightarrow -i\infty$,

$k_1^2 \rightarrow -i\infty$. С учетом этого из формул (4.37), (4.44) в пределе получаем

$$f^M = e^{-q_0}, \quad f_1^M / q_1 = f_1 / q_1 = 0, \quad f = -e^{-q_0}.$$

Для нити магнитного тока из (4.36), (4.35) имеем $\dot{A}_{1x}^{MB} = 0$ и

$$\dot{A}_x^{MB} = \frac{\dot{I}_0^M}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} e^{-q(y+y_0) - i\kappa(z-z_0)} d\kappa. \quad (4.45)$$

Для нити электрического тока из выражений (4.43) находим $\dot{A}_{1x}^B = 0$ и

$$\dot{A}_x^B = \frac{-\dot{I}_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} e^{-q(y+y_0) - i\kappa(z-z_0)} d\kappa. \quad (4.46)$$

Сравнивая два последних выражения с (4.30) и (4.38), определяющими поля нитей токов в однородном неограниченном пространстве, находим, что в случае идеальной проводимости нижнего полупространства отраженное поле как бы возбуждается нитью тока, имеющей в плоскости уз координаты $(-y_0, z_0)$, т.е. в точке, являющейся зеркальным (мнимым) изображением истинного источника. В случае нити магнитного тока токи в зеркальном и истинном источниках не отличаются по фазе и амплитуде (рис. 4.5,б); в случае нити электрического тока токи в зеркальном и истинном источниках равны по амплитуде, а по фазе сдвинуты на угол, равный 180° (рис. 4.5,в). Таким образом, при $\sigma_1 \rightarrow \infty$ воздействие нижнего полупространства на ЭМ поле можно заменить воздействием фиктивного источника а — зеркального изображения. При этом система, состоящая из истинного источника и идеально проводящего полупространства, заменяется системой, состоящей из истинного источника и его зеркального изображения (рис. 4.5,б,в). Этот метод учета влияния поверхности раздела на ЭМ поле в верхнем полупространстве называется методом зеркальных изображений (мнимых источников).

В случае нити магнитного тока при $t = t_1$ силовые линии E^n имеют вид окружностей 3, силовые линии E_1 зеркального источника имеют вид окружностей 4 (рис. 4.5,б). В случае нити электрического тока силовые линии H^n истинного источника имеют вид окружностей 5, а силовые линии H_1 зеркального источника имеют вид окружностей 6 (рис. 4.5,в). Складывая векторы напряженностей первичного и вторичного полей, для поля нити магнитного тока получаем

$$\dot{E}_y = 2\dot{E}_y^n, \quad \dot{H}_x = 2\dot{H}_x^n, \quad \dot{E}_z = 0, \quad \dot{y} = 0; \quad (4.47)$$

для поля нити электрического тока —

$$\dot{H}_z = 2\dot{H}_z^n, \quad \dot{H}_y = 0, \quad \dot{E}_x = 0, \quad \dot{y} = 0. \quad (4.48)$$

Если нить тока приближается к идеально проводящей поверхности ($y_0 \rightarrow 0$), то истинный и зеркальный источники сближаются. В случае нити магнитного тока в пределе ($y_0 = 0$) поле при $y \geq 0$ определяется магнитным током, равным сумме тока истинного источника и тока зеркального изображения. Поскольку эти токи равны, то полное поле в верхнем полупространстве удваивается по сравнению с полем нити магнитного тока в неограниченном пространстве. В пределе, когда нить электрического тока располагается на идеально проводящей поверхности, полное поле равно нулю. Поле истинного источника при этом компенсируется полем зеркального изображения, поскольку поля истинного источника и зеркального изображения сдвинуты по фазе на π .

7. Для вычислений отраженного поля при произвольных $\tilde{\epsilon}_{a1, \mu a1}$ необходимо выполнить интегрирование в (4.35), (4.43) с учетом (4.37), (4.44). Считаем, что $\sigma = 0$, т.е. $\alpha = 0$, $k = \beta$. Приближенные значения интегралов при $kr' \gg 1$, $kr'' \gg 1$ находятся методами теории функций комплексного переменного (метод перевала [45]) (рис. 4.6,а). Выполняя интегрирование [46], находим по (1.125) в случае нити магнитного тока

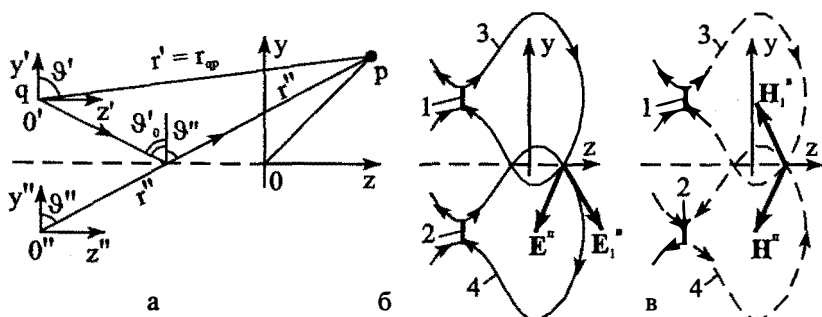


Рис. 4.6. К пояснению метода зеркальных изображений

$$\dot{H}_x^e(p) = R_{\parallel} \dot{H}_{x0}^e(p), \quad \dot{H}_y^e = \dot{H}_z^e = 0, \quad \dot{H}_{x0}^e = -\omega \bar{\epsilon}_0 \dot{I}_0^e F(r^*)/4, \quad y \geq 0. \quad (4.49)$$

Выполняя оценку [46] интеграла (4.43), находим по (1.124) в случае нити электрического тока

$$\dot{E}_x^e(p) = R_{\perp} \dot{E}_{x0}^e(p), \quad \dot{E}_z^e = \dot{E}_y^e = 0, \quad \dot{E}_{x0}^e \approx \omega \mu_0 \dot{I}_0^e F(r^*)/4, \quad y \geq 0. \quad (4.50)$$

где $R_{\parallel} = \dot{H}_x^e / \dot{H}_{x0}^e$, $R_{\perp} = \dot{E}_x^e / \dot{E}_{x0}^e$ при $y=0$; R_{\parallel} и R_{\perp} определены выражениями (4.9) и (4.15); $F(r^*) = \sqrt{2/\pi k r^*} \cdot \exp(-ikr^* - i\pi/4)$. Значения $\dot{I}_0^e R_{\parallel}$ и $\dot{I}_0^e R_{\perp}$ можно рассматривать как комплексные амплитуды токов зеркальных источников. В пределе, когда $\sigma_1 \rightarrow \infty$, $R_{\perp} \rightarrow -1$, $R_{\parallel} \rightarrow 1$, поэтому токи зеркальных изображений стремятся к \dot{I}_0^e и к $\dot{I}_0^e \exp(-i\pi)$.

Аналогичным образом можно вычислить и преломленное поле.

8. Если изучается ЭМ поле прямолинейной нити тока конечной длины, то исследование отраженного и преломленного полей производится тем же методом. Составляющие векторов напряженностей полей разлагаются по системам плоских волн, амплитуды плоских волн (спектральные плотности) определяются из граничных условий. При этом количественные соотношения для составляющих векторов напряженностей становятся более сложными. Но качественные представления остаются такими же, как в случае бесконечно длинной нити стороннего тока. Например, если конечной длины нить магнитного тока $\dot{\mathbf{I}}^m$ параллельна границе раздела (параллельная поляризация), то граничное условие на идеально проводящей поверхности ($\dot{E}_t^m + \dot{E}_t^e = 0$) удовлетворяется только в том случае, когда магнитный ток источника и магнитный ток его зеркального изображения одинаковы по амплитуде и по фазе (рис. 4.5, б). Если конечной длины нить электрического тока $\dot{\mathbf{I}}^e$ параллельна поверхности раздела (нормальная поляризация), то на идеально

проводящей поверхности граничное условие ($\dot{H}_n^{\text{п}} + \dot{H}_n^{\text{з}} = 0$) удовлетворяется, когда электрический ток источника и электрический ток его зеркального изображения равны по амплитуде, но противоположны по фазе (рис. 4.5,в). При конечных проводимостях сред можно считать, что поле в точке p , расположенной на большом расстоянии от излучателя в верхнем полупространстве, возбуждается истинным и зеркальным источниками, причем ток в зеркальном источнике равен или $R_{\parallel} \dot{I}^{\text{м}}$, или $R_{\perp} \dot{I}$.

Если конечной длины нить (1) стороннего электрического тока перпендикулярна поверхности раздела сред (параллельная поляризация), то на идеально проводящей поверхности раздела граничные условия удовлетворяются, когда ток зеркального изображения (2) равен (по амплитуде и по фазе) току источника (рис. 4.6,б). При конечных проводимостях сред влияние плоской поверхности раздела на поле в удаленной точке наблюдения в верхнем полупространстве можно заменить влиянием зеркального изображения, ток которого равен $R_{\parallel} \dot{I}$.

Если конечной длины нить стороннего магнитного тока перпендикулярна поверхности раздела сред (нормальная поляризация), то на идеально проводящей поверхности граничные условия удовлетворяются, когда ток зеркального изображения равен по амплитуде источнику тока, а по фазе сдвинут на $-\pi$ (рис. 4.6,в). При конечных проводимостях сред влияние плоской поверхности раздела на поле в удаленной точке в верхнем полупространстве можно заменить влиянием зеркального изображения, ток которого равен $R_{\perp} \dot{I}^{\text{м}}$. (Обозначения рис. 4.6,б,в соответствуют обозначениям рис. 4.5,б,в.)

ЗАДАЧИ

1. Записать условия полного отражения от плоской границы раздела с воздухом распространяющейся во фторопласте волны.
2. Полуволновый прямолинейный электрический вибратор наклонен к плоской поверхности раздела двух сред под углом 45° . Построить зеркальное изображение вибратора. Написать выражение тока зеркального изображения.
3. Элементарная рамка электрического тока перпендикулярна поверхности раздела двух сред. Построить ее зеркальное изображение. Написать выражение тока зеркального изображения.
4. Плоская волна падает из воздуха на плоскую границу раздела с латуной. Вычислить поверхностный импеданс на частотах 300 МГц и 3 ГГц.
5. Решить задачу 4 для границы раздела воздух–железо.

5. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

5.1. Определения

1. Энергию ЭМ поля часто необходимо передавать от излучателя (возбудителя) к нагрузке так, чтобы она была локализована в определенном канале. В качестве таких каналов используют *направляющие системы* в виде покрытых слоями диэлектриков металлических проводов и стержней, металлических труб, диэлектрических стержней и др. Вдоль направляющих систем, называемых также *линиями передачи энергии*, распространяются *направляемые ЭМ волны*.

На рис. 5.1 показаны поперечные сечения наиболее часто применяемых линий передачи энергии: двухпроводной (а), экранированной двухпроводной (б), коаксиальной (в), однопроводной (г) и полосковой (д) линий; прямоугольного (е), П-образного (ж), круглого (з), эллиптического (и), диэлектрического (к) волноводов.

Линии передачи а), г), д), к) являются *линиями открытого* типа, в которых ЭМ поле имеет характер поверхностных волн, большая часть энергии поля переносится вблизи направляющих систем. Их называют *открытыми волноводами*. Линии передачи б), в), е)–и) — *линии закрытого* типа, в которых ЭМ поля локализованы в экранированном от внешнего пространства канале, их называют и *волноводами*.

Размеры и форма поперечного сечения направляющей системы,

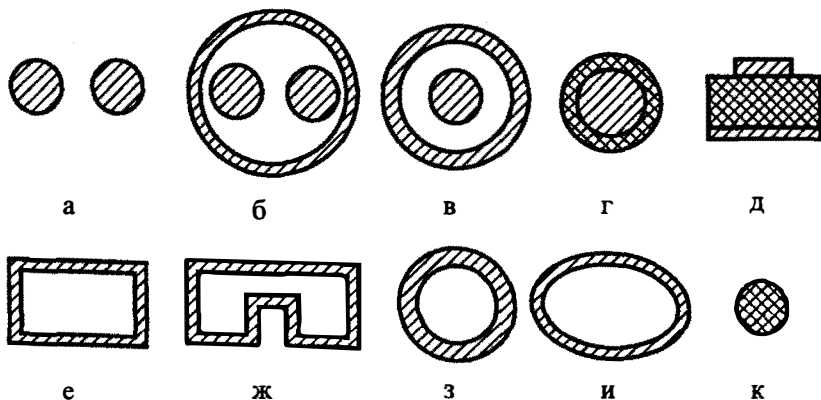


Рис. 5.1. Поперечные сечения направляющих систем

ЭМ параметры среды, заполняющей эту систему, определяют электродинамические характеристики линии передачи энергии. Металлические стенки волноводов и провода линий имеют конечную проводимость. ЭМ поле проникает в металл и нагревает его. Амплитуды векторов распространяющегося поля за счет джоулевых потерь затухают. Но в математических моделях направляющих систем металлы считают, как правило, идеально проводящими. При этом граничные условия на поверхностях раздела сред упрощаются. Решения соответствующих граничных задач тоже упрощаются.

Ниже рассматриваются только *регулярные направляющие системы*, в которых в продольном направлении неизменны ЭМ свойства заполняющих сред и неизменны и параллельны самим себе поперечные сечения.

2. Требования к линии передачи: размеры поперечного сечения и масса ее должны быть минимальными, линия передачи должна пропускать необходимую мощность без пробоя, коэффициент затухания должен быть минимальным, искажения передаваемого сигнала должны быть минимальными. Для обеспечения последнего требования необходимо изучить дисперсионные характеристики направляющих систем.

5.2. Граничные задачи для электрических и магнитных волн

1. В гл. 2 показано, что бегущая в продольном направлении волна переносит ЭМ энергию в этом направлении. Пусть продольное направление определяется координатой z , $-\infty < z < \infty$. Тогда для точки наблюдения поля направляющей системы имеем $p = p(p_{\perp}, z)$, где p_{\perp} — точка наблюдения, лежащая в поперечной плоскости. В ДСК $p_{\perp} = p_{\perp}(x, y)$, в ЦСК $p_{\perp} = p_{\perp}(r, \varphi)$.

Обозначим через $\dot{\mathbf{E}}_{\perp}, \dot{\mathbf{H}}_{\perp}$ векторы напряженностей ЭМ поля, лежащие в поперечной плоскости направляющей системы. Тогда $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_{\perp} + \mathbf{1}_z \dot{E}_z$, $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_{\perp} + \mathbf{1}_z \dot{H}_z$, где \dot{E}_z, \dot{H}_z — продольные составляющие векторов напряженностей ЭМ поля.

Направляемые волны в регулярной направляющей системе должны иметь вид бегущих вдоль продольной координаты z волн:

$$\dot{\mathbf{E}}(p) = \dot{\mathbf{E}}(p_{\perp})e^{\pm ihz}, \quad \dot{\mathbf{H}}(p) = \dot{\mathbf{H}}(p_{\perp})e^{\pm ihz}, \quad (5.1)$$

где $\dot{\mathbf{E}}(p_{\perp}), \dot{\mathbf{H}}(p_{\perp})$ — комплексные амплитуды, зависящие только от поперечных координат, h — коэффициент распространения волны вдоль продольной координаты, нижний знак по условию излучения соответствует прямой волне, распространяющейся вдоль возрастающих значений z (в направлении орта $\mathbf{1}_z$), а верхний — обратной волне, рас-

пространяющейся вдоль уменьшающихся значений z (в направлении орта (-1_z)). Тогда

$$\partial^2 \dot{\mathbf{E}}(p) / \partial z^2 = -h^2 \dot{\mathbf{E}}(p), \quad \partial^2 \dot{\mathbf{H}}(p) / \partial z^2 = -h^2 \dot{\mathbf{H}}(p). \quad (5.2)$$

При условии (5.1) возможно, во-первых, выразить поперечные векторы $\dot{\mathbf{E}}_{\perp}$, $\dot{\mathbf{H}}_{\perp}$ только через продольные составляющие \dot{E}_z , \dot{H}_z и, во-вторых, разделить ЭМ волны в направляющей системе на сумму электрических волн и магнитных волн.

2. Выразим $\dot{\mathbf{E}}_{\perp}$, $\dot{\mathbf{H}}_{\perp}$ через \dot{E}_z , \dot{H}_z . Уравнения Максвелла вне сторонних источников однородны

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}.$$

Из первого и второго уравнений Максвелла

$$\dot{E}_x = \frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_a} \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} \right), \quad \dot{E}_y = \frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_a} \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right), \quad (5.3)$$

$$\dot{H}_x = -\frac{1}{i\omega \mu_a} \left(\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} \right), \quad \dot{H}_y = -\frac{1}{i\omega \mu_a} \left(\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right). \quad (5.4)$$

Если подставить в (5.3) значения \dot{H}_x и \dot{H}_y из (5.4), а затем подставить в (5.4) значения \dot{E}_x и \dot{E}_y из (5.3), учесть (5.2) и обозначить $k^2 - h^2 = k_{\perp}^2$, то выразим поперечные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}_{\perp}$ и $\dot{\mathbf{H}}_{\perp}$ через \dot{E}_z и \dot{H}_z :

$$\dot{E}_x = \frac{1}{k_{\perp}^2} \left(-i\omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z \partial x} \right), \quad \dot{E}_y = \frac{1}{k_{\perp}^2} \left(i\omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z \partial y} \right); \quad (5.5)$$

$$\dot{H}_x = \frac{1}{k_{\perp}^2} \left(\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z \partial x} + i\omega \tilde{\epsilon}_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} \right), \quad \dot{H}_y = \frac{1}{k_{\perp}^2} \left(\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z \partial y} - i\omega \tilde{\epsilon}_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right). \quad (5.6)$$

Для магнитных волн $\dot{E}_z = 0$ и получаем:

$$\dot{E}_x^m = -\frac{i\omega \mu_a}{k_{\perp}^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}, \quad \dot{H}_x^m = \frac{1}{k_{\perp}^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z \partial x}, \quad (5.7)$$

$$\dot{E}_y^m = \frac{i\omega \mu_a}{k_{\perp}^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, \quad \dot{H}_y^m = \frac{1}{k_{\perp}^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z \partial y}.$$

Для электрических волн $\dot{H}_z = 0$ и из (5.5), (5.6) получаем:

$$\begin{aligned}\dot{E}_x^3 &= \frac{1}{k_{\perp}^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z \partial x}, & \dot{H}_x^3 &= \frac{i\omega \tilde{\epsilon}_a}{k_{\perp}^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, \\ \dot{E}_y^3 &= \frac{1}{k_{\perp}^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z \partial y}, & \dot{H}_y^3 &= -\frac{i\omega \tilde{\epsilon}_a}{k_{\perp}^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Общее поле направляющей системы есть сумма полей магнитных и электрических волн.

3. Выражения (5.7), (5.8) можно обобщить, представив их в векторной форме. Для этого скалярно умножим два верхних выражения в (5.7) на $\mathbf{1}_x$, а два нижних — на $\mathbf{1}_y$ и сложим результаты. Имеем

$$\dot{E}_{\perp}^M = \frac{i\omega \mu_a}{k_{\perp}^2} [\mathbf{1}_z, \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z], \quad \dot{H}_{\perp}^M = \frac{1}{k_{\perp}^2} \text{grad}_{\perp} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial z}. \quad (5.9)$$

Индекс \perp при градиенте означает, что учитываются только слагаемые с частными производными по поперечным координатам.

Аналогичным образом из (5.8) получаем

$$\dot{E}_{\perp}^3 = \frac{1}{k_{\perp}^2} \text{grad}_{\perp} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z}, \quad \dot{H}_{\perp}^3 = -\frac{i\omega \tilde{\epsilon}_a}{k_{\perp}^2} [\mathbf{1}_z, \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z]. \quad (5.10)$$

Таким образом, ЭМ поле направляющей системы разложено на сумму полей магнитных и электрических волн. Для вычисления $\dot{E}_{\perp} = \dot{E}_{\perp}^M + \dot{E}_{\perp}^3$, $\dot{H}_{\perp} = \dot{H}_{\perp}^M + \dot{H}_{\perp}^3$ необходимо определить продольные составляющие векторов напряженностей поля.

4. Умножим векторно \dot{H}_{\perp}^M в (5.9) на орт $\mathbf{1}_z$. Сравнив результат с векторным произведением для \dot{E}_{\perp}^M в (5.9) и учитывая (5.1), находим

$$\dot{E}_{\perp}^M = \pm Z_M [\mathbf{1}_z, \dot{H}_{\perp}^M], \quad Z_M = \omega \mu_a / h = kW / h. \quad (5.11)$$

Умножив векторно \dot{E}_{\perp}^3 в (5.10) на $\mathbf{1}_z$, сравнив результат с векторным произведением для \dot{H}_{\perp}^3 в (5.10) и учитывая (5.1), находим

$$[\dot{E}_{\perp}^3, \mathbf{1}_z] \approx \pm Z_3 \dot{H}_{\perp}^3, \quad Z_3 = h / \omega \tilde{\epsilon}_a = hW / k. \quad (5.12)$$

В (5.11), (5.12) Z_M , Z_3 называют *характеристическими сопротивлениями H- и E-волн*. Они связывают поперечные составляющие векторов поля так же, как в случае бегущих (по продольной координате) волн в неограниченном однородном пространстве. Если в направляющей системе нет джоулевых потерь, то $k = \beta$. При h положительном Z_M и Z_3 — действительные положительные величины. Это показывает, что поперечные составляющие \dot{E}_{\perp}^M , \dot{H}_{\perp}^M и \dot{E}_{\perp}^3 , \dot{H}_{\perp}^3 векторов напряжен-

ностей полей соответственно и магнитных и электрических волн синфазны и ЭМ поле переносит энергию в продольном направлении.

Если волновое движение в продольном направлении отсутствует, т.е. если h — мнимая величина ($h = -ih'$), то Z_m, Z_3 — мнимые величины. Это указывает на то, что вектор \dot{E}_\perp^m сдвинут по фазе на $\pi/2$ относительно вектора \dot{H}_\perp^m , а вектор \dot{E}_\perp^3 сдвинут по фазе на $\pi/2$ относительно вектора \dot{H}_\perp^3 . Поэтому переноса энергии вдоль направляющей системы не происходит. Амплитуды векторов поля, как видно из (5.1), затухают при росте $|z|$ по экспоненциальному закону. Это не связано с джоулевыми потерями энергии, происходит локализация поля у возбуждающего устройства, ЭМ поле становится местным (локализованным) полем. Оно не распространяется вдоль продольного направления.

Критическое значение коэффициента распространения $h = 0$ определяет границу между распространяющимися и нераспространяющимися волнами.

Если умножить векторно (5.11) и (5.12) на 1_z , затем раскрыть двойное векторное произведение и учесть, что $1_z \cdot \dot{E}_\perp^{m,3} = 0$, $1_z \cdot \dot{H}_\perp^{m,3} = 0$, то получим эквивалентные (5.11), (5.12) формы

$$[\dot{E}_\perp^m, 1_z] = \pm Z_m \dot{H}_\perp^m, \quad \dot{E}_\perp^3 = \pm Z_3 [1_z, \dot{H}_\perp^3]. \quad (5.13)$$

Таким образом, (5.11)–(5.13) можно представить в общей форме

$$[\dot{E}_\perp, 1_z] = \pm Z \dot{H}_\perp, \quad \dot{E}_\perp = \pm Z [1_z, \dot{H}_\perp], \quad (5.14)$$

где для Н-волн $Z = Z_m$, а для Е-волн $Z = Z_3$.

5. Для определения продольных составляющих векторов напряженностей ЭМ поля используем уравнения Гельмгольца (1.129). Учтем, что $\nabla^2 = \nabla_\perp^2 + \partial^2 / \partial z^2$, где ∇_\perp — оператор Гамильтона включает только производные по поперечным координатам. Применим (5.2). При этом из (1.129) получаем уравнения Гельмгольца

$$\nabla_\perp^2 \dot{E}_z + k_\perp^2 \dot{E}_z = -\dot{M}_z, \quad \nabla_\perp^2 \dot{H}_z + k_\perp^2 \dot{H}_z = -\dot{M}_z^m, \quad (5.15)$$

из которых следует, что $k_\perp = (k^2 - h^2)^{1/2}$ имеет смысл коэффициента распространения поля в поперечном направлении направляющей системы.

Если присоединить к уравнению (5.15) для \dot{E}_z граничное условие для \dot{E}_z на поверхностях раздела сред направляющей системы, то получим граничную задачу для \dot{E}_z . Решением этой задачи определяют

ся электрические волны. Если присоединить к уравнению (5.15) для \dot{H}_z граничное условие для \dot{H}_z на поверхностях раздела сред направляющей системы, то получим граничную задачу для \dot{H}_z . Решением этой задачи определяются магнитные волны. Обе эти задачи являются граничными задачами возбуждения ЭМ волн.

6. Для точек наблюдения, находящихся вне сторонних источников, $\dot{M}_z = \dot{M}_z^M = 0$. Поэтому для таких точек имеем однородные уравнения Гельмгольца

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E}_z + k_{\perp}^2 \dot{E}_z = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 \dot{H}_z + k_{\perp}^2 \dot{H}_z = 0. \quad (5.16)$$

Однородное уравнение Гельмгольца для \dot{E}_z с однородным граничным условием для \dot{E}_z составляют граничную задачу для определения возможности существования электрических волн в направляющей системе.

Однородное уравнение Гельмгольца для \dot{H}_z с однородным граничным условием для \dot{H}_z составляют граничную задачу для определения возможности существования магнитных волн в направляющей системе.

Для закрытых направляющих систем (волноводов) граничные задачи на существование типов волн являются внутренними граничными задачами. Решение (5.16) ищется в поперечном сечении волновода S_{\perp} , ограниченном контуром l . На контуре l поставлены однородные граничные условия. Отличающиеся от нуля решения таких задач возможны только при дискретных вещественных положительных значениях $k_{\perp mn}^2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$), называемых собственными значениями граничной задачи. Каждому собственному значению соответствует по крайней мере одна собственная функция \dot{E}_{zmn} или \dot{H}_{zmn} граничной задачи. Значение \dot{E}_{zmn} совместно с (5.10) определяет E_{mn} -волну, а значение \dot{H}_{zmn} совместно с (5.9) определяет H_{mn} -волну.

Собственные значения и собственные функции определяются формой и размерами контура l и образуют бесконечную последовательность частных решений граничной задачи, удовлетворяющих совместно с (5.9), (5.10) уравнениям Максвелла. Так как последние линейны, то общее решение задачи есть двойная бесконечная сумма (по m и n) частных решений граничной задачи. При этом дискретные значения продольных коэффициентов распространения $h_{mn} = (k^2 - k_{\perp mn}^2)^{1/2}$.

Для открытых направляющих систем граничные задачи на существование типов волн могут быть внешними. Решение (5.16) ищется в поперечном сечении S_{\perp} направляющей системы, ограниченном внутренним контуром l , на котором задано однородное граничное условие, и внешним контуром, находящимся на бесконечности. На внешнем контуре в качестве граничных условий применяются условия излучения. Поиск $k_{\perp mn}^2$, \dot{E}_{zmn} , \dot{H}_{zmn} при этом значительно усложняется.

7. При решении задачи возбуждения ЭМ поля в направляющей системе вместо уравнений Гельмгольца (5.15) часто применяются уравнения Гельмгольца (1.117), (1.122) для векторных потенциалов. При этом правые части уравнений непосредственно выражаются через плотности сторонних токов. Граничные условия для составляющих векторов \dot{A} , \dot{A}^* получают из граничных условий для составляющих векторов \dot{E} , \dot{H} .

5.3. Мощность, переносимая полем через поперечное сечение направляющей системы

1. В векторах напряженностей полей частных решений \dot{E}_{mn} , \dot{H}_{mn} здесь индексы m, n для сокращения записи опускаем.

Рассмотрим мощность, переносимую полем прямой волны. Через поперечное сечение $S_{\perp}(z)$ направляющей системы (рис. 5.2) ЭМ поле переносит мощность

$$\dot{P}_{\perp}(z) = \int_{S_{\perp}(z)} \dot{\Pi} n dS, \quad (5.17)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{1}_z$. Учтем, что

$$\begin{aligned} \dot{\Pi} \mathbf{n} &= 0,5[\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] \mathbf{n} = \\ &= 0,5[\dot{\mathbf{E}}_{\perp} + \mathbf{1}_z \dot{E}_z, \dot{\mathbf{H}}_{\perp}^* + \mathbf{1}_z \dot{H}_z^*] \mathbf{n} = \\ &= 0,5[\dot{\mathbf{E}}_{\perp}, \dot{\mathbf{H}}_{\perp}^*] \mathbf{n}, \end{aligned}$$

так как $[\mathbf{1}_z, \dot{\mathbf{H}}_{\perp}^*] \mathbf{1}_z = 0$ и $[\dot{\mathbf{E}}_{\perp}, \mathbf{1}_z] \mathbf{1}_z = 0$, поскольку векторы $[\dot{\mathbf{E}}_{\perp}, \mathbf{1}_z]$ и $[\mathbf{1}_z, \dot{\mathbf{H}}_{\perp}^*]$ перпендикулярны $\mathbf{1}_z$, а $[\mathbf{1}_z, \mathbf{1}_z] = 0$. Применяя правило (П1.9) вычисления смешанного произведения векторов, имеем

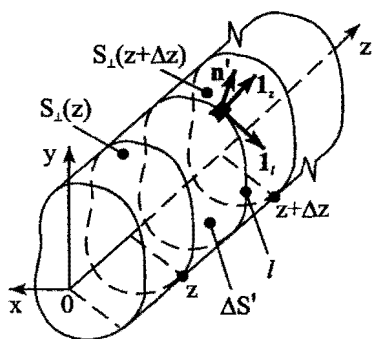


Рис. 5.2. К определению коэффициента затухания

$\dot{\Pi}n = 0,5[\dot{E}_\perp, \dot{H}_\perp^*]n = 0,5[n, \dot{E}_\perp]\dot{H}_\perp^* = 0,5[\dot{H}_\perp^*, n]\dot{E}_\perp$. Если здесь с помощью (5.14) заменить векторные произведения, то получим

$$\dot{\Pi}n = (2Z^*)^{-1}|\dot{E}_\perp|^2 = 0,5Z|\dot{H}_\perp|^2. \text{ При этом из (5.17) имеем}$$

$$\dot{P}_\perp(z) = \frac{1}{2Z^*} \int_{S_1(z)} |\dot{E}_\perp(p)|^2 dS = \frac{Z}{2} \int_{S_1(z)} |\dot{H}_\perp(p)|^2 dS, \quad (5.18)$$

где для Н-волн $\dot{E}_\perp = \dot{E}_\perp^M$, $\dot{H}_\perp = \dot{H}_\perp^M$, $Z = Z_M$, а для Е-волн — $\dot{E}_\perp = \dot{E}_\perp^E$, $\dot{H}_\perp = \dot{H}_\perp^E$, $Z = Z_E$.

Из этого выражения следует, что при отсутствии джоулевых потерь в направляющей системе для распространяющейся волны, когда Z_M , Z_E — чисто действительные величины, \dot{P}_\perp чисто действительная величина. Для нераспространяющихся «волн» \dot{P}_\perp — мнимая величина, так как Z_M и Z_E — мнимые величины.

Мощность, переносимая полем обратной волны, определяется тоже по (5.18).

Для увеличения \dot{P}_\perp необходимо увеличивать напряженность электрического поля. Но последняя ограничена предельным значением $E_{\text{разр}}$ — разрядной напряженности электрического поля, при которой в диэлектрике, заполняющем направляющую систему, может начаться *высокочастотный пробой* [9]. Среда в режиме высокочастотного пробоя имеет большое значение проводимости, регулярность направляющей системы нарушается. ЭМ волны отражаются от нерегулярностей, режим работы генератора нарушается. Значение $E_{\text{разр}}$ определяется заполняющим диэлектриком. Сухой воздух, например, при нормальных давлении и начальной ионизации имеет $E_{\text{разр}} = 2,9 \cdot 10^6$ В/м = 29 кВ/см. Если в (5.18) подставить $E_{\text{разр}}$ для диэлектрика, заполняющего направляющую систему, то найдем разрядное значение мощности $P_{\perp \text{разр}}$. В оригиналах направляющих систем допустимая рабочая мощность $P_{\perp \text{доп}} = \eta P_{\perp \text{разр}}$ должна быть меньше разрядной, так как в них существуют отраженные от нерегулярностей ЭМ волны, увеличивающие напряженность электрического поля. Поэтому коэффициент запаса электрической прочности выбирается в пределах $\eta = 1/3 + 1/5$. Коэффициент запаса η зависит и от условий эксплуатации направляющей системы.

5.4. Коэффициенты затухания векторов поля

1. Вычислим коэффициент затухания векторов поля в направляющей системе за счет джоулевых потерь в металле. Индексы m, n в частных решениях задачи \dot{E}_{mn} , \dot{H}_{mn} опускаем для сокращения записи. В математических моделях направляющих систем проводимость метал-

лических труб, проводников принимается бесконечной. Однако, в оригинале металл имеет конечную проводимость. Распространяющееся ЭМ поле проникает в металл, возникают тепловые потери, на последние тратится часть мощности источника. Строго определить коэффициент затухания можно, вычисляя строго поле внутри и вне металлических тел и приравнявая касательные составляющие напряженностей полей на границах раздела металла и прилегающей среды. Решение позволит определить значения коэффициентов распространения, в том числе коэффициента затухания. Однако, такие решения являются очень громоздкими.

Для вычисления коэффициента затухания используется приближенный метод. Он состоит в том, что поле в направляющей системе определяется на основе математической модели с идеально проводящим металлом. Затем считается, что при конечной проводимости металла поле в направляющей системе остается таким же, как при идеальной его проводимости, но касательная к металлической поверхности составляющая вектора \dot{E} на поверхности металла равна не нулю, а отличается от нуля. Ее определяют с помощью импедансных граничных условий (4.29).

Если обозначить через \dot{E}_τ и \dot{H}_τ касательные к металлической поверхности составляющие векторов \dot{E} и \dot{H} , а \mathbf{n} — орт внешней нормали к металлической поверхности, то из (4.29) имеем $[\mathbf{n}, \dot{E}_\tau] = Z_S \dot{H}_\tau$ на поверхности S металла. Считаем, что $Z_S = W_1$, где $W_1 = \sqrt{\mu_a / \tilde{\epsilon}_a} \approx \sqrt{\omega \mu_{a1} / \sigma_1} \exp(i\pi/4)$ — характеристическое сопротивление металла (см. § 2.5). Так как $|W_1|$ очень мало, то значение $|\dot{E}_\tau|$ на поверхности металла мало отличается от нуля. Но это значение (совместно с $|\dot{H}_\tau|$) определяет нормальную к поверхности металла составляющую вектора Пойнтинга, а значит, мощность, затрачиваемую полем на нагревание металла.

Если в направляющей системе имеются только потери за счет нагревания металла, то в (5.1) $h = h' - i\alpha_m$, где α_m — коэффициент затухания, $h' > 0$. При этом из (5.1) для прямой волны имеем

$$\begin{aligned} \dot{E}(p) &= \dot{E}(p_\perp) \exp(-ih'z) \exp(-\alpha_m z), \\ \dot{H}(p) &= \dot{H}(p_\perp) \exp(-ih'z) \exp(-\alpha_m z). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Поперечные сечения $S_\perp(z)$ и $S_\perp(z + \Delta z)$ направляющей системы выделяют цилиндр с ограничивающей его боковой поверхностью $\Delta S'$ проводника и длиной образующей Δz , причем $\Delta S' = l \Delta z$, где l — контур поперечного сечения, определяющий $\Delta S'$; \mathbf{n}' — орт внешней нормали

(рис. 5.2). По (5.18) находим мощности $\dot{P}_\perp(z)$ и $\dot{P}_\perp(z + \Delta z)$ в поперечных сечениях $S_\perp(z)$ и $S_\perp(z + \Delta z)$. За счет затухания векторов поля с увеличением z $\text{Re } \dot{P}_\perp(z) > \text{Re } \dot{P}_\perp(z + \Delta z)$. Разность мощностей $\text{Re } \dot{P}_\perp(z) - \text{Re } \dot{P}_\perp(z + \Delta z)$ есть мощность $\Delta P^{\text{пт}}$ джоулевых потерь в металле на длине Δz направляющей системы: $\Delta P^{\text{пт}} = \text{Re } \dot{P}_\perp(z) - \text{Re } \dot{P}_\perp(z + \Delta z) = P_{\perp cp}(z) - P_{\perp cp}(z + \Delta z)$.

Разделим $\Delta P^{\text{пт}}$ на Δz и пусть $\Delta z \rightarrow 0$. Тогда по определению $[P_{\perp cp}(z + \Delta z) - P_{\perp cp}(z)] / \Delta z = dP_{\perp cp}(z) / dz$, а $\Delta P^{\text{пт}} / \Delta z$ — потери мощности на единичной длине направляющей системы (погонные потери):

$$\frac{\Delta P^{\text{пт}}}{\Delta z} = - \frac{dP_{\perp cp}(z)}{dz} \quad (5.20)$$

Определим $\Delta P^{\text{пт}} / \Delta z$. Потери мощности на нагревание металлического цилиндра, имеющего поверхность $\Delta S'$, возникают за счет потока вектора $\dot{\mathbf{P}}$ через эту поверхность:

$$\Delta P^{\text{пт}} = \text{Re} \int_{\Delta S'} \dot{\mathbf{P}} \mathbf{n}' dS.$$

Векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ представим в виде: $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_n' + \dot{\mathbf{E}}_\tau'$, $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_n' + \dot{\mathbf{H}}_\tau'$, где $\dot{\mathbf{E}}_n'$, $\dot{\mathbf{H}}_n'$ — нормальные к поверхности металла составляющие векторов. Тогда на $\Delta S'$ $\dot{\mathbf{P}} \mathbf{n}' = 0,5[\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] \mathbf{n}' = 0,5[\dot{\mathbf{E}}_n' + \dot{\mathbf{E}}_\tau', \dot{\mathbf{H}}_n'^* + \dot{\mathbf{H}}_\tau'^*] \mathbf{n}'$. Применяя правило вычисления смешанного произведения векторов и учитывая, что $\dot{\mathbf{E}}_n' \parallel \mathbf{n}'$, $\dot{\mathbf{H}}_n' \parallel \mathbf{n}'$, получаем $\dot{\mathbf{P}} \mathbf{n}' = 0,5[\dot{\mathbf{E}}_\tau', \dot{\mathbf{H}}_\tau'^*] \mathbf{n}' = 0,5[\mathbf{n}', \dot{\mathbf{E}}_\tau'] \dot{\mathbf{H}}_\tau'^*$. Но в соответствии с импедансным граничным условием $[\mathbf{n}', \dot{\mathbf{E}}_\tau'] = W_1 \dot{\mathbf{H}}_\tau'$. Поэтому на поверхности $\Delta S'$ имеем: $\dot{\mathbf{P}} \mathbf{n}' = 0,5 W_1 |\dot{\mathbf{H}}_\tau'|^2$. Таким образом,

$$\Delta P^{\text{пт}} = \frac{1}{2} \text{Re} W_1 \int_{\Delta S'} |\dot{\mathbf{H}}_\tau'|^2 dS.$$

Обозначим здесь $R_1 = \text{Re} W_1$ и учтем при интегрировании, что по (5.19) $|\dot{\mathbf{H}}_\tau(p)| = |\dot{\mathbf{H}}_\tau(p_\perp)| \exp(-\alpha_m z)$. Тогда при $\alpha_m \Delta z \rightarrow 0$ получаем

$$\Delta P^{\text{пт}} = \frac{R_1}{2} \int_z^{z+\Delta z} e^{-2\alpha_m z} dz \oint_l |\dot{\mathbf{H}}_\tau(p_\perp)|^2 dl = \frac{R_1}{2} e^{-2\alpha_m z} \cdot \Delta z \oint_l |\dot{\mathbf{H}}_\tau(p_\perp)|^2 dl.$$

Разделим это выражение на Δz и подставим значение $\Delta P^{mn} / \Delta z$ в (5.20). Получаем

$$\frac{R_1}{2} e^{-2\alpha_m z} \oint_l |\dot{\mathbf{H}}_\tau(p_\perp)|^2 dl = -\frac{dP_{cp}(z)}{dz}. \quad (5.21)$$

Находим по (5.18) правую часть этого равенства. Так как для распространяющихся волн в математической модели при отсутствии тепловых потерь в диэлектрике характеристическое сопротивление Z — чисто действительная величина ($Z = Z^*$), то в (5.18) при этом $\dot{P}_\perp(z) = P_{\perp cp}(z)$. Учитывая, что $|\dot{\mathbf{H}}_\perp(p)| = |\dot{\mathbf{H}}_\perp(p_\perp)| \exp(-\alpha_m z)$, получаем из (5.18):

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\perp cp}(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \left[Z e^{-2\alpha_m z} \frac{1}{2} \int_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_\perp(p_\perp)|^2 dS \right] = -2\alpha_m e^{-2\alpha_m z} \times \\ &\times \frac{1}{2} Z \int_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_\perp(p_\perp)|^2 dS = -2\alpha_m e^{-2\alpha_m z} P_{\perp 0cp}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где $P_{\perp 0cp}$ — средняя мощность, переносимая полем:

$$P_{\perp 0cp} = \text{Re } \dot{P}_{\perp 0}; \quad \dot{P}_{\perp 0} = \frac{1}{2} Z \int_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_\perp(p_\perp)|^2 dS = \frac{1}{2Z^*} \int_{S_1} |\dot{\mathbf{E}}_\perp(p_\perp)|^2 dS. \quad (5.23)$$

Подставим значение производной (5.22) в (5.21) и сократим экспоненциальный множитель. Получаем

$$\frac{R_1}{2} \oint_l |\dot{\mathbf{H}}_\tau(p_\perp)|^2 dl = 2\alpha_m P_{\perp 0cp},$$

откуда находим коэффициент затухания за счет джоулевых потерь в металле:

$$\alpha_m = \frac{R_1}{4P_{\perp 0cp}} \oint_l |\dot{\mathbf{H}}_\tau(p_\perp)|^2 dl.$$

Восстанавливая индексы m, n для частных решений $\dot{\mathbf{E}}_{mn}, \dot{\mathbf{H}}_{mn}$, получаем

$$\alpha_{mn,m} = \frac{R_1}{4P_{mn,\perp 0cp}} \oint_l |\dot{\mathbf{H}}_{mn,\tau}(p_\perp)|^2 dl. \quad (5.24)$$

Так как $R_1 = \text{Re } W_1 \approx (\omega \mu_{d1} / 2\sigma_1)^{1/2} = 1 / \sigma_1 \delta_1$, то из (5.24) следует, что $\alpha_{mn,m}$ зависит от частоты (длины волны), проводимости металла σ_1 , размеров и формы поперечного сечения, от значения $|\dot{\mathbf{H}}_{mn,\tau}|$

у металлической поверхности. При малых значениях $|\dot{H}_{mn,\tau}|$ должно быть малое значение $\alpha_{mn,m}$. Объясняется это тем, что $|\dot{H}_{mn,\tau}|$ в поверхностном слое (толщины, равной глубине проникновения) металла индуцирует объемные токи, при этом возникают тепловые потери. Если H_{mn} - и E_{mn} - волны имеют разные распределения $|\dot{H}_{mn,\tau}|$ на контуре l , то $\alpha_{mn,m}$ у них должны быть разными.

Число проводников в поперечном сечении направляющей системы может быть равным N . Тогда интеграл в (5.24) есть сумма интегралов по контурам l_1, l_2, \dots, l_N , ограничивающих поперечные сечения. Поэтому при увеличении количества проводников следует ожидать увеличения $\alpha_{mn,m}$.

2. Коэффициент затухания α за счет тепловых потерь в диэлектрике, заполняющем направляющую систему и имеющем проводимость σ , определяется решением граничной задачи. Но его можно найти и по мощности потерь ΔP_d^{nr} , затрачиваемой полем на нагревание цилиндра $\Delta V = \Delta z \cdot S_{\perp}(z)$, заполненного диэлектриком (рис. 5.2). Из уравнения баланса мощностей имеем

$$\Delta P_d^{nr} = \frac{1}{2} \int_{\Delta V} \sigma |\dot{E}(p)|^2 dV. \quad (5.25)$$

Для прямой волны $|\dot{E}(p)| = |\dot{E}(p_{\perp})| \exp(-\alpha z)$. Поэтому из (5.25) имеем при $\alpha \Delta z \rightarrow 0$

$$\Delta P_d^{nr} = \frac{1}{2} \int_z^{z+\Delta z} e^{-2\alpha z} dz \int_{S_{\perp}} \sigma |\dot{E}(p_{\perp})|^2 dS = \frac{1}{2} e^{-2\alpha z} \Delta z \int_{S_{\perp}} \sigma |\dot{E}(p_{\perp})|^2 dS.$$

Тогда погонные потери мощности

$$\frac{\Delta P_d^{nr}}{\Delta z} = \frac{1}{2} e^{-2\alpha z} \int_{S_{\perp}} \sigma |\dot{E}(p_{\perp})|^2 dS. \quad (5.26)$$

При вычислении $P_{1cp}(z)$ по (5.18) надо учитывать, что Z может быть комплексной величиной, так как имеются тепловые потери в диэлектрике. Поэтому по (5.22)

$$\frac{dP_{1cp}}{dz} = -2\alpha e^{-2\alpha z} P_{10cp}, \quad (5.27)$$

где P_{10cp} определяется по (5.23).

Подставляя в (5.20) значения $\Delta P_d^{пт} / \Delta z$ из (5.26) и производной (5.27) и сокращая экспоненциальные множители, получаем

$$\alpha = \frac{1}{4P_{\perp 0,ср} S_{\perp}} \int \sigma |\dot{E}(p_{\perp})|^2 dS.$$

Восстанавливая индексы m, n и для частных решений $\dot{E}_{mn}, \dot{H}_{mn}$, получаем

$$\alpha_{mn} = \frac{1}{4P_{mn, \perp 0, ср} S_{\perp}} \int \sigma |\dot{E}_{mn}(p_{\perp})|^2 dS. \quad (5.28)$$

3. Для обратной волны коэффициенты затухания $\alpha_{m, n}$ и $\alpha_{n, m}$ определяются тоже формулами (5.24) и (5.28).

4. Отметим, что амплитуды векторов поля за счет тепловых потерь уменьшаются на длине $\Delta z = L$ направляющей системы по экспоненциальному закону (5.19), поэтому $|\dot{E}(z)|/|\dot{E}(z+L)| = \exp(\alpha L)$, а мощности — по закону (5.18), поэтому $P_{\perp, ср}(z)/P_{\perp, ср}(z+L) = \exp(2\alpha L)$. Единицей измерения коэффициента затухания является $[\alpha] = 1/\text{м}$ (непер/метр). Однако, чаще применяют единицу измерения $[\alpha'] = \text{децибел/метр}$. Тогда

$$\alpha' L = 10 \lg [P_{\perp, ср}(z)/P_{\perp, ср}(z+L)] = 10 \lg [\exp(2\alpha L)] = 10 \cdot 2\alpha L \lg e = 8,686\alpha L.$$

Поэтому $\alpha' \approx 8,686\alpha$ и $\alpha = 0,1151\alpha'$. Например, если $\alpha' = 10$ дБ/м, то $\alpha = 0,1151 \cdot 10 = 1,151 \text{ м}^{-1}$.

6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЗАКРЫТЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

6.1. Граничная задача о возбуждении прямоугольного волновода

1. Рассмотрим постановку задачи о возбуждении ЭМ поля в прямоугольном волноводе. Пусть имеем бесконечно длинную полую заполненную однородным изотропным диэлектриком металлическую трубу с прямоугольным одинаковым по длине поперечным сечением. Считаем, что металл является идеальным проводником (рис. 6.1,а). Внутри трубы в области V_n заданы сторонние электрические и магнитные токи с комплексными амплитудами $\mathbf{j}^c(\rho, \omega)$ и $\mathbf{j}^{m,c}(\rho, \omega)$, возбуждающие ЭМ поле на частоте ω . Введем ДСК так, чтобы ось z была направлена вдоль волновода (трубы), а область V_n была расположена на конечном расстоянии от начала координат. Касательная к поверхности стенок составляющая вектора напряженности электрического поля и нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля в соответствии с граничными условиями (1.94) на стенках трубы должны обращаться в нуль. По координате z волновод является неограниченным. Поэтому ЭМ поле должно удовлетворять условиям излучения при $z \rightarrow \pm\infty$. Волновод (и область V_n) заполнен однородным изотропным диэлектриком с параметрами $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$. Среда линейна. Положение области V_n по координате z определено на рис. 6.1,б. Надо найти векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Решение неоднородных уравнений Максвелла так же, как в случае неограниченного пространства, сводится к решению неодно-

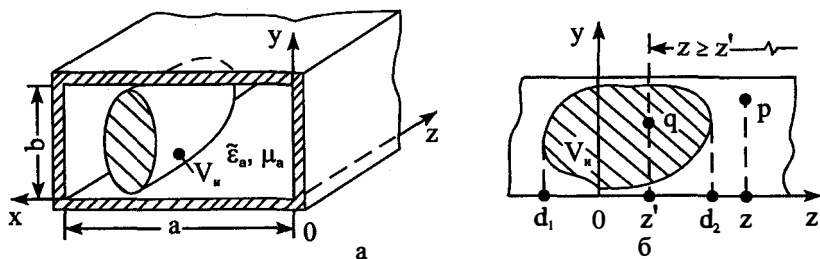


Рис. 6.1. Сторонний источник в прямоугольном волноводе

родных уравнений Гельмгольца (1.117), (1.122) для комплексных амплитуд векторных потенциалов:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} = -\dot{\mathbf{j}}^c, \quad \nabla^2 \dot{\mathbf{A}}^M + k^2 \dot{\mathbf{A}}^M = -\dot{\mathbf{j}}^{M,c}. \quad (6.1)$$

Векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ вычисляются по (1.124), (1.125). Составляющие $\dot{\mathbf{A}}$ и $\dot{\mathbf{A}}^M$ должны удовлетворять на стенках волновода граничным условиям. Последние можно получить из (1.116), (1.117), приравняв касательные составляющие $\dot{\mathbf{E}}$ или нормальные составляющие $\dot{\mathbf{H}}$ на стенках волновода нулю. Уравнения (6.1) необходимо решать при определенных граничных условиях для составляющих векторов $\dot{\mathbf{A}}$ и $\dot{\mathbf{A}}^M$. Этим задача возбуждения ЭМ поля в волноводе отличается от соответствующей задачи для неограниченного пространства.

Обычно прямоугольный волновод возбуждается с помощью прямолинейного электрического вибратора, перпендикулярного продольной оси волновода. Поэтому начнем изучение с этого наиболее важного для практики случая. Пусть сначала $\dot{\mathbf{j}}^c = 1_y \dot{j}_y^c$, $\dot{\mathbf{j}}^{M,c} = 0$. Тогда из уравнений (6.1) имеем $\dot{\mathbf{A}}^M = 0$, $\dot{A}_x = \dot{A}_z = 0$ и

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{A}_y = -\dot{j}_y^c. \quad (6.2)$$

Установим граничные условия для функции \dot{A}_y . Касательными к стенкам волновода, расположенным при $x=0$ и $x=a$ (к боковым стенкам), составляющими $\dot{\mathbf{E}}$ являются \dot{E}_y и \dot{E}_z . Значит, по (1.94)

$$\dot{E}_y = 0, \quad \dot{E}_z = 0 \quad \text{при } x=0, x=a. \quad (6.3)$$

Составляющими $\dot{\mathbf{E}}$, касательными к стенкам волновода, расположенным при $y=0$ и $y=b$ (к нижней и верхней стенкам), являются \dot{E}_x и \dot{E}_z . Поэтому

$$\dot{E}_x = 0, \quad \dot{E}_z = 0 \quad \text{при } y=0, y=b. \quad (6.4)$$

Составляющие $\dot{\mathbf{E}}$ выражаются через \dot{A}_y по (1.124):

$$\dot{E}_x = \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} \frac{\partial^2 \dot{A}_y}{\partial x \partial y}; \quad \dot{E}_y = -i\omega\mu_a \dot{A}_y + \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} \frac{\partial^2 \dot{A}_y}{\partial y^2}; \quad \dot{E}_z = \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} \frac{\partial^2 \dot{A}_y}{\partial z \partial y}. \quad (6.5)$$

Из этих выражений видно, что (6.3) и (6.4) удовлетворяются, если

$$\dot{A}_y = 0 \quad \text{при } x=0, x=a; \quad \frac{\partial \dot{A}_y}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y=0, y=b. \quad (6.6)$$

Следовательно, на части граничной поверхности (на боковых стенках) искомая функция должна обращаться в нуль, на другой же части (на нижней и верхней стенках) должна обращаться в нуль нормальная производная искомой функции.

Отметим, что тот же результат получим, используя граничное условие (1.94) для \dot{H} .

Дифференциальное уравнение (6.2) вместе с граничными условиями (6.6) составляет граничную (краевую) задачу.

2. Выполним решение граничной задачи (6.2), (6.6).

Решение уравнения (6.2) можно искать, последовательно применяя преобразование Фурье по координате x , по координате y , а затем — по координате z . Но ЭМ поле, и, следовательно, решение \dot{A}_y существуют на интервале $0 \leq x \leq a$. Поэтому $\dot{A}_y(x)$ при фиксированных y и z удобно сразу представить в виде разложения в ряд Фурье по x . Считая, что $\dot{A}_y(x)$ удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье, имеем

$$\dot{A}_y(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(y, z) e^{-im\pi x/a},$$

где C_m — коэффициенты Фурье зависят от y, z .

Рассмотрим физическое содержание этого разложения. В выражении $\exp(-im\pi x/a)$ величина $m\pi/a$ — коэффициент фазы бегущей волны. Если $m > 0$, то экспонента описывает бегущую в направлении увеличивающихся значений x волну. Если $m < 0$, то экспонента описывает бегущую в направлении уменьшающихся значений x волну. Эти волны, как можно предположить, должны отражаться от боковых стенок. Наложение бегущих навстречу друг другу волн должно привести к образованию стоячих волн в интервале по x от 0 до a .

Предположим, что переменная z фиксирована, \dot{A}_y как функция y удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье. Тогда

$$\dot{A}_y(p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\pi x/a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{mn}(z) e^{-in\pi y/b},$$

где d_{mn} — коэффициенты Фурье функции $C_m(y)$.

Физическое содержание разложения в интервале $y \in [0, b]$ не отличается от изложенного выше.

Поскольку по координате z ЭМ поле должно существовать в интервале $-\infty < z < \infty$, то функцию $d_{mn}(z)$ представим в виде интеграла Фурье (1.52):

$$\dot{A}_y(p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\pi x/a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\pi y/b} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g'_{ymn}(\kappa) e^{-i\kappa z} d\kappa. \quad (6.7)$$

При фиксированном значении $\kappa = \kappa_0$ подынтегральная функция равна $g'_{ymn}(\kappa_0) \exp(-i\kappa_0 z)$. Если $\kappa_0 > 0$, то экспонента описывает бегущую в направлении возрастающих значений z волну с коэффициентом фазы κ_0 и амплитудой $g'_{ymn}(\kappa_0)$. Это неоднородная плоская волна. Значит, интеграл Фурье представляет собой разложение некоторого поля по спектру плоских волн, распространяющихся в направлении возрастающих значений z при $\kappa > 0$ и — распространяющихся в обратном направлении при $\kappa < 0$. Разложение удовлетворяет условию излучения.

Для определения коэффициентов g'_{ymn} надо использовать граничные условия для \dot{A}_y и, так же, как в случае неограниченного пространства, — уравнение Гельмгольца (6.2).

Подставим (6.7) в граничное условие (6.6) при $x = 0$. Получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\pi y/b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa z} d\kappa \sum_{m=-\infty}^{\infty} g'_{ymn} = 0.$$

Это равенство может удовлетворяться только, если внутренняя сумма по m равна нулю. Разделим ее на частичные суммы и преобразуем:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g'_{ymn} = \sum_{m=0}^{\infty} g'_{ymn} + \sum_{m=-1}^{-\infty} g'_{ymn} = g'_{y0n} + \sum_{m=1}^{\infty} (g'_{ymn} + g'_{y(-m)n}) = 0.$$

Тогда $g'_{y0n} = 0$, $g'_{y(-m)n} = -g'_{ymn}$.

Учитывая это, из (6.7) получаем

$$\dot{A}_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\pi y/b} \int_{-\infty}^{\infty} g''_{ymn}(\kappa) e^{-i\kappa z} d\kappa, \quad (6.8)$$

где $g''_{ymn} = -i2g'_{ymn}$. Граничное условие (6.6) при $x = a$ выражением (6.8) удовлетворяется.

Выражение (6.8) при фиксированных y и z представляет собой разложение решения по системе стоячих на интервале $x \in [0, a]$ волн, имеющих дискретные значения коэффициента фазы $m\pi/a$. Количество узлов данной волны зависит от номера m .

Подставляем выражение (6.8) в граничное условие (6.6) при $y=0$. Приравнявая внутреннюю сумму по n нулю, имеем: $g_{ym(-n)}^* = g_{ymn}^*$. Преобразуя в (6.8) ряд по n с учетом последнего равенства, находим

$$\dot{A}_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{b} y \int_{-\infty}^{\infty} g_{ymn}(\kappa) e^{-i\kappa z} d\kappa, \quad (6.9)$$

где $g_{ymn} = \varepsilon_n g_{ymn}^*$, $\varepsilon_n = 1$ при $n=0$, $\varepsilon_n = 2$ при $n=1,2,3,\dots$. Граничное условие (6.6) выражением (6.9) при $y=b$ удовлетворяется.

При x и z фиксированных (6.8) есть разложение решения по системе стоячих на интервале $y \in [0, b]$ волн, имеющих дискретные значения коэффициента фазы $n\pi/b$.

Подставим разложение (6.8) в уравнение (6.2). Получим, выполняя дифференцирование:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[k^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \kappa^2 \right] g_{ymn}(\kappa) \times \\ \times \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-i\kappa z} d\kappa = -j_y^c(x, y, z).$$

Отсюда следует, что функция распределения плотности объемного возбуждающего тока (в правой части равенства) представлена в виде разложения по той же системе функций, по которой ищется решение граничной задачи.

Чтобы найти g_{ymn} , применим к последнему уравнению обратное преобразование Фурье. С этой целью умножим равенство на $\sin(m'\pi x/a) \cos(n'\pi y/b) \exp(i\kappa'z) / \sqrt{2\pi}$, где m', n', κ' — фиксированные значения m, n и κ , и проинтегрируем результат по всему объему волновода. Учитывая разложение (П2.5) δ -функции, условия ортогональности

$$\frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m'\pi}{a} x dx = \frac{\varepsilon_m}{b} \int_0^b \cos \frac{m\pi}{b} y \cos \frac{m'\pi}{b} y dy = \begin{cases} 0, & m \neq m' \\ 1, & m = m' \end{cases}$$

и проводя замену переменных интегрирования x, y, z на x', y', z' , а κ' — на κ , находим при $h_{mn} = [k^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2]^{1/2}$

$$g_{ymn}(\kappa) = \frac{2\varepsilon_n}{\sqrt{2\pi ab} V_n} \int_V j_y^c(x', y', z') \sin \frac{m\pi}{a} x' \cos \frac{n\pi}{b} y' \frac{\exp(i\kappa z')}{\kappa^2 - h_{mn}^2} dV'. \quad (6.10)$$

Если подставить (6.10) в (6.9), то найдем, что решение содержит интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i\kappa(z-z')]}{\kappa^2 - h_{mn}^2} d\kappa.$$

Применим к нему теорию вычетов (см. § П4). Получим, что он равен $\exp[\pm ih_{mn}(z-z')]/ih_{mn}$, где верхний знак соответствует $z-z' < 0$, а нижний — $z-z' > 0$.

В результате из (6.9), учитывая размеры области V_n по координате z (рис. 6.1,б), имеем

$$\begin{aligned} \dot{A}_y(p) = & \frac{1}{iab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{h_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \int_{S_{\perp}} \sin \frac{m\pi}{a} x' \cos \frac{n\pi}{b} y' \times \\ & \times \left[e^{-ih_{mn}z} \int_{d_1}^z j_y^c(x', y', z') e^{ih_{mn}z'} dz'_{z>z'} + \right. \\ & \left. + e^{ih_{mn}z} \int_z^{d_2} j_y^c(x', y', z') e^{-ih_{mn}z'} dz'_{z<z'} \right] dx' dy', \end{aligned} \quad (6.11)$$

где S_{\perp} означает поперечное сечение волновода.

Заметим, что выражение (6.11) удовлетворяет всем условиям теоремы единственности: оно удовлетворяет граничным условиям на идеально проводящих стенках волновода и условиям излучения, удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (6.2) для точек наблюдения, находящихся в области источников, и однородному уравнению Гельмгольца для точек наблюдения, находящихся вне области источников.

В области источников поле представляется (если h_{mn} — действительная величина) в виде наложения волн, бегущих по z навстречу друг другу. Для точек наблюдения правее источников ($z > d_2$) второе слагаемое в (6.11) равно нулю и поле представляется в виде бегущих волн в направлении возрастающих значений z ; для точек наблюдения левее источников ($z < d_1$) первое слагаемое в (6.11) равно нулю и поле представляется в виде бегущих волн в направлении уменьшающихся значений z .

Выражение (6.11) можно записать в сокращенной форме

$$\dot{A}_y(p) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{ymn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{\pm ih_{mn}z}, \quad (6.12)$$

где

$$a_{ymn} = \frac{\epsilon_n}{iab h_{mn} v_n} \int j_y^c(q) \sin \frac{m\pi}{a} x' \cos \frac{n\pi}{b} y' e^{\mp i h_{mn} z'} dV',$$

где верхний знак берется при $z - z' < 0$, а нижний знак — при $z - z' > 0$. Отметим, что параметр h_{mn} имеет смысл коэффициента распространения волны вдоль оси z .

3. Пусть $j^c = 1_x j_x^c$ и $j^{mc} = 0$. Тогда из уравнений (6.1) имеем $\dot{A}^M = 0$, $\dot{A}_y = \dot{A}_z = 0$, а составляющая \dot{A}_x удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \dot{A}_x + k^2 \dot{A}_x = -j_x^c. \quad (6.13)$$

Составляющие \dot{E} выражаем по (1.124):

$$\dot{E}_x = -i\omega \mu_a \dot{A}_x + \frac{1}{i\omega \epsilon_a} \frac{\partial^2 \dot{A}_x}{\partial x^2}; \quad \dot{E}_y = \frac{1}{i\omega \epsilon_a} \frac{\partial^2 \dot{A}_x}{\partial y \partial x}; \quad \dot{E}_z = \frac{1}{i\omega \epsilon_a} \frac{\partial^2 \dot{A}_x}{\partial z \partial x}. \quad (6.14)$$

Граничные условия для \dot{A}_x получаем из (6.3), (6.4):

$$\dot{A}_x = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b; \quad \partial \dot{A}_x / \partial x = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a. \quad (6.15)$$

Искомую функцию представим выражением (6.7), где g'_{ymn} надо заменить на коэффициенты g'_{xmn} .

Решение граничной задачи (6.13), (6.15) находим так же, как и выше:

$$\dot{A}_x(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{xmn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{\pm i h_{mn} z}, \quad (6.16)$$

где

$$a_{xmn} = \frac{\epsilon_m}{iab h_{mn} v_n} \int j_x^c(q) \cos \frac{m\pi}{a} x' \sin \frac{n\pi}{b} y' e^{\mp i h_{mn} z'} dV'.$$

4. Пусть $j^c = 1_z j_z^c$, $j^{mc} = 0$. Тогда из (6.1) имеем $\dot{A}^M = 0$, $\dot{A}_x = \dot{A}_y = 0$, а составляющая \dot{A}_z удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta \dot{A}_z + k^2 \dot{A}_z = -j_z^c. \quad (6.17)$$

Граничные условия для \dot{A}_z получаем из (6.3), (6.4) и (1.124):

$$\dot{A}_z = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a; \quad y = 0, y = b. \quad (6.18)$$

Решение граничной задачи (6.17), (6.18) находим так же, как для функции \dot{A}_y . Получаем:

$$\dot{A}_z(p) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{zmn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{\pm i h_{mn} z}, \quad (6.19)$$

где

$$a_{zmn} = \frac{2}{iab h_{mn} v_n} \int j_z^c(q) \sin \frac{m\pi}{a} x' \sin \frac{n\pi}{b} y' e^{\mp i h_{mn} z'} dV'.$$

5. Если все составляющие j^c отличны от нуля, то, применяя принцип наложения, получаем $\dot{A} = 1_x \dot{A}_x + 1_y \dot{A}_y + 1_z \dot{A}_z$. Векторы \dot{E} и \dot{H} определяются тогда по (1.124), (1.125).

6. Пусть в волноводе ЭМ поле возбуждается сторонним магнитным током $\mathbf{j}^{m,c} = 1_x j_x^{m,c} + 1_y j_y^{m,c} + 1_z j_z^{m,c}$, а сторонний электрический ток отсутствует: $\mathbf{j}^c = 0$. Тогда $\dot{\mathbf{A}} = 0$, декартовы составляющие \dot{A}_j^M ($j = x, y$ или z) в соответствии с (6.1) определяются скалярными уравнениями Гельмгольца

$$\Delta \dot{A}_j^M + k^2 \dot{A}_j^M = -j_j^{m,c}. \quad (6.20)$$

Подставляя составляющие \dot{E}_x, \dot{E}_y и \dot{E}_z из (1.124) в условия (6.3), (6.4), получаем граничные условия для \dot{A}_x^M, \dot{A}_y^M и \dot{A}_z^M :

$$\begin{aligned} \dot{A}_x^M &= \partial \dot{A}_y^M / \partial x = \partial \dot{A}_z^M / \partial x = 0, & x=0, x=a; \\ \partial \dot{A}_x^M / \partial y &= \dot{A}_y^M = \partial \dot{A}_z^M / \partial y = 0, & y=0, y=b. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Каждое из условий (6.21) совместно с уравнением (6.20) составляет граничную задачу. Применяя для решения задач метод Фурье, находим

$$\begin{aligned} \dot{A}_x^M(\rho) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{xmn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{\pm i h_{mn} z}, \\ \dot{A}_y^M(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{ymn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{\pm i h_{mn} z}, \\ \dot{A}_z^M(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{zmn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{\pm i h_{mn} z}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

где

$$\begin{aligned} b_{xmn} &= \frac{\epsilon_m}{iab h_{mn} V_n} \int j_x^{m,c}(q) \sin \frac{m\pi}{a} x' \cos \frac{n\pi}{b} y' e^{\mp i h_{mn} z'} dV', \\ b_{ymn} &= \frac{\epsilon_m}{iab h_{mn} V_n} \int j_y^{m,c}(q) \cos \frac{m\pi}{a} x' \sin \frac{n\pi}{b} y' e^{\mp i h_{mn} z'} dV', \\ b_{zmn} &= \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{i2ab h_{mn} V_n} \int j_z^{m,c}(q) \cos \frac{m\pi}{a} x' \cos \frac{n\pi}{b} y' e^{\mp i h_{mn} z'} dV'. \end{aligned}$$

Разложения (6.22) по существу не отличаются от разложений (6.12).

Если в объеме V_n волновода отличны от нуля и электрический и магнитный сторонние токи, то $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ вычисляются по (1.124) и (1.125), а составляющие векторных потенциалов — по (6.12), (6.16), (6.19) и (6.22).

Решение задачи о возбуждении поля в бесконечном прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками произвольным распределением плотностей сторонних электрических и магнитных токов является общим. Оно удовлетворяет как однородным, так и неоднородным уравнениям Гельмгольца для векторных потенциалов и, следовательно, удовлетворяет как однородным, так и неоднородным уравнениям Максвелла. Оно удовлетворяет граничным условиям и условиям излучения. Следовательно, решение единственно.

6.2. Свойства электрических и магнитных волн в прямоугольном волноводе

1. Свойства направляемых ЭМ волн рассмотрим на важном для практики случае. Пусть сторонним источником V_n является прямолинейный электрический вибратор длины L , параллельный боковым стенкам (рис. 6.2,а). Ток по длине вибратора распределен по закону стоячей волны, причем точка приложения сторонней э.д.с. расположена у нижней стенки волновода. Если вибратор тонкий, то оригинал можно заменить математической моделью источника — линией стороннего тока (рис. 6.2,б). Распределение плотности линейного стороннего тока по линии (нити) определяется законом стоячей волны $\dot{I}^c = I_0 \sin \beta_0(L - y)$ (рис. 6.2,в). Тогда $\dot{\mathbf{j}}^c = \dot{I}^c(y)\delta(x - x_0)\delta(z - z_0)$.

2. Имея математическую модель стороннего источника, найдем $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. Для этого определим $\dot{\mathbf{A}}_y$. Подставим в (6.11) \dot{j}_y^c и выполним интегрирование. Как отмечалось выше, для точек p , расположенных при $z > z_0$, второй интеграл в квадратных скобках выражения (6.11) равен нулю, так как при $z \leq z'$ равен нулю ток. Первый интеграл в квадратных скобках оказывается конечным, поскольку при $z \geq z'$ ток не равен нулю. Поэтому выражение в квадратных скобках равно $\dot{I}_0 \sin \beta_0(L - y')\delta(x' - x_0)\exp[-ih_{mn}(z - z_0)]$.

Для точек p , расположенных при $z < z_0$, первый интеграл в квадратных скобках равен нулю, поскольку при $z \geq z'$ равен нулю ток; второй интеграл отличен от нуля, так как при $z \leq z'$ отличен от нуля ток. При этом выражение в квадратных скобках равно $\dot{I}_0 \sin \beta_0(L - y')\delta(x' - x_0)\exp[ih_{mn}(z - z_0)]$.

Используя основное свойство δ -функции при интегрировании

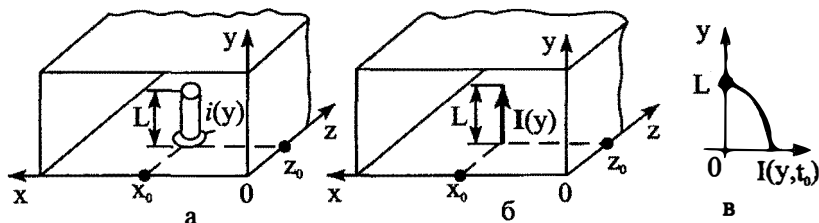


Рис. 6.2. Вибратор и нить тока в волноводе

по x' и выполняя интегрирование по y' в пределах от 0 до L , получаем из (6.11):

$$\dot{A}_y(p) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{\pm i h_{mn} z},$$

где

$$a_{mn} = \frac{i_0 \beta_0 \varepsilon_n (\cos n\pi L / b - \cos \beta_0 L)}{iab h_{mn} [\beta_0^2 - (n\pi / b)^2]} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \exp(\mp i h_{mn} z_0), \quad (6.23)$$

верхний знак берется при $z \leq z_0$, а нижний — при $z \geq z_0$.

Продольную составляющую \dot{E}_z определяем по значению \dot{A}_y и (6.5):

$$\dot{E}_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{E}_{zmn}, \quad \dot{E}_{zmn} = \mp \frac{n\pi h_{mn}}{b\omega \tilde{\varepsilon}_a} a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \exp(\pm i h_{mn} z). \quad (6.24)$$

Продольную составляющую \dot{H}_z определяем по значению \dot{A}_y и (1.125):

$$\dot{H}_z = \frac{\partial \dot{A}_y}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{H}_{zmn}, \quad \dot{H}_{zn} = \frac{m\pi}{a} a_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \exp(\pm i h_{mn} z). \quad (6.25)$$

Из (6.24), (6.25) следует, что \dot{E}_z и \dot{H}_z можно представить так:

$$\dot{E}_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{E}_{zmn}(p_{\perp}) e^{\pm i h_{mn} z}, \quad \dot{H}_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{H}_{zmn}(p_{\perp}) e^{\pm i h_{mn} z}. \quad (6.26)$$

Из (6.5), (1.125) и (6.23) можно определить поперечные составляющие $\dot{E}_{\perp mn} = \mathbf{1}_x \dot{E}_{xmn} + \mathbf{1}_y \dot{E}_{ymn}$, $\dot{H}_{\perp mn} = \mathbf{1}_x \dot{H}_{xmn} + \mathbf{1}_y \dot{H}_{ymn}$. Они имеют форму, аналогичную (6.26):

$$\dot{E}_{\perp} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{E}_{\perp mn}(p_{\perp}) e^{\pm i h_{mn} z}, \quad \dot{H}_{\perp} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{H}_{\perp mn}(p_{\perp}) e^{\pm i h_{mn} z}. \quad (6.27)$$

Из (6.26), (6.27) следуют два вывода. Во-первых, каждой паре индексов m и n соответствуют напряженности поля \dot{E}_{mn} и \dot{H}_{mn} , и эта пара индексов характеризует тип ЭМ волны (моды). Таким образом, \dot{E} и \dot{H} в волноводе представляют собой наложение бесконечного количества полей типов волн (мод) \dot{E}_{mn} и \dot{H}_{mn} .

Во-вторых, если положить $h_{mn} = h$, то поле каждого типа волны представлено в виде (5.1). Значит, оно может быть разделено на сумму полей магнитных и электрических волн. При этом для каждого типа волны справедливы выражения (5.9)–(5.24), т.е.

$$\dot{E}_{\perp mn}^m = \frac{i\omega\mu_a}{k_{\perp mn}^2} [1_z, g_{\perp} \dot{H}_{zmn}], \quad \dot{H}_{\perp mn}^m = \frac{1}{k_{\perp mn}^2} g_{\perp} d_{\perp} \frac{\partial \dot{H}_{zmn}}{\partial z}; \quad (6.28)$$

$$\dot{E}_{\perp mn}^3 = \frac{1}{k_{\perp mn}^2} g_{\perp} d_{\perp} \frac{\partial \dot{E}_{zmn}}{\partial z}, \quad \dot{H}_{\perp mn}^3 = -\frac{i\omega\tilde{\epsilon}_a}{k_{\perp mn}^2} [1_z, g_{\perp} \text{grad}_{\perp} \dot{E}_{zmn}], \quad (6.29)$$

где $k_{\perp mn} = [(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]^{1/2}$.

3. Изучим типы ЭМ волн. Поле любого из типов волн распределено по поперечным координатам по закону *стоячей волны*: целое число m определяет число *полуволн* (вариаций поля) составляющей вектора поля, укладываемых на интервале $0 \leq x \leq a$, а целое число n определяет количество *полуволн* (вариаций поля) той же составляющей вектора поля, укладываемых на интервале $0 \leq y \leq b$. *Магнитную волну, характеризуемую индексами m и n , называют волной типа H_{mn} (или H_{mn} -волной). Электрическую волну, характеризуемую индексами m и n , называют волной типа E_{mn} (или E_{mn} -волной). Поле H_{mn} -волн описывается выражениями (6.25), (6.28), поле E_{mn} -волн — выражениями (6.24), (6.29).*

4. Коэффициент распространения m, n -го типа ЭМ волны $h_{mn} = \beta_{mn} - i\alpha_{mn}$, где β_{mn}, α_{mn} — коэффициенты фазы и затухания. Предположим временно, для упрощения анализа, что диэлектрик, заполняющий волновод, не имеет джоулевых потерь, поэтому $\alpha = 0$ и $k = \beta$. Тогда $h_{mn} = \beta_{mn} - i\alpha_{mn} = [\beta^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2]^{1/2}$. При изменении λ и $(m\pi)$ меняется значение h_{mn} . При этом возможны три случая (см. § 5.2).

*В первом случае λ, m и n таковы, что $\beta^2 = (2\pi/\lambda)^2 > (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$. Тогда $\beta_{mn} = [\beta^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2]^{1/2}$, $\alpha_{mn} = 0$. Составляющие векторов поля m, n -го типа волны зависят от продольной координаты по закону $\exp(\pm i\beta_{mn}z)$. Волна является *бегущей волной, распространяющейся от вибратора в обе стороны (увеличивающихся и уменьшающихся значений z) без затухания. В направляющей системе имеется волновой процесс.**

Во втором случае λ, m и n могут быть таковы, что $\beta^2 < (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$. Тогда $\beta_{mn} = 0$, $\alpha_{mn} = [(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 - \beta^2]^{1/2}$. Составляющие векторов поля этого типа волны зависят от продольной координаты по закону $\exp(\pm \alpha_{mn}z)$, т.е. амплитуды их экспоненциально убывают с удалением точки наблю-

дения от возбуждающего устройства. Волновой процесс для этого типа волны отсутствует. Этот тип волны называют затухающим. Он является нераспространяющимся и термин «волна» в этом случае применяется лишь условно.

Третий случай является критическим — это граница между первым и вторым случаями. При этом λ , m и n таковы, что $h_{mn} = 0$, т.е. при заданных размерах волновода a и b длина волны λ выбрана так, что она стала критической $\lambda_{kp,mn}$, при которой $[\beta_{kp,mn}^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2]^{1/2} = 0$. Так как $\beta_{kp,mn} = 2\pi/\lambda_{kp,mn}$, то

$$\lambda_{kp,mn} = 2/[(m/a)^2 + (n/b)^2]^{1/2}. \quad (6.30)$$

Чем больше числа m и n при заданных размерах a и b , тем меньше критическая длина волны волновода.

Для распространяющихся типов волн (в первом случае) с учетом (6.30) $\beta_{mn} = \beta[1 - (\lambda/\lambda_{kp,mn})^2]^{1/2} = \omega\Gamma_{mn}/v_\phi$, где $v_\phi = (\epsilon_a\mu_a)^{-1/2}$, $\Gamma_{mn} = [1 - (\lambda/\lambda_{kp,mn})^2]^{1/2}$. Поэтому фазовая и групповая скорости и длина волны в волноводе m, n -го типа волны

$$v_{\phi,mn} = \omega/\beta_{mn} = v_\phi\Gamma_{mn}^{-1}, \quad v_{gr,mn} = (d\beta_{mn}/d\omega)^{-1} = v_\phi\Gamma_{mn}, \quad (6.31)$$

$$\lambda_{v,mn} = \lambda\Gamma_{mn}^{-1},$$

Из этих выражений видно, что фазовая и групповая скорости типов волн зависят от длины волны (частоты). Значит, волновод обладает дисперсионными свойствами.

Для нераспространяющихся типов «волн» (во втором случае) с учетом (6.30) $\alpha_{mn} = \beta[(\lambda/\lambda_{kp,mn})^2 - 1]^{1/2}$ и понятий фазовой и групповой скоростей, длины волны в волноводе нет, так как коэффициент фазы равен нулю, $\beta_{mn} = 0$, и волнового процесса нет.

Таким образом, в волноводе возбуждается бесконечный дискретный спектр типов волн. Но только конечное число типов волн с наименьшими индексами m и n являются распространяющимися и бесконечное число типов волн с большими индексами m и n являются затухающими. Поля затухающих типов волн существуют только вблизи стороннего источника (локальные, местные поля) и на некотором достаточно большом расстоянии от источника затухают настолько, что ими можно пренебречь. Тогда можно считать, что $\dot{E}(p)$, $\dot{H}(p)$ в этих удаленных от источника точках наблюдения определяются только распространяющимися типами волн.

5. Пример. Имеем волновод с размерами $a = 0,71\lambda$, $b = 0,5\lambda$. Тогда волна с индексами $m = 1$, $n = 0$ имеет коэффициент фазы $\beta_{10} = 0,705\beta$, $\alpha_{10} = 0$. Все типы «волн» с $m > 1$, $n > 0$ имеют $\beta_{mn} = 0$, $\alpha_{mn} \neq 0$. Например, у «волны» типа $m = 1$, $n = 1$ $\beta_{11} = 0$, $\alpha_{11} = 1,22\beta$. Значит, все типы «волн» с индексами $m > 1$, $n > 0$ являются нераспространяющимися. Поэтому на достаточно большом расстоянии от стороннего источника можно считать, что векторы поля определяются не бесконечными двойными рядами (6.26), (6.27), а одним членом ряда, т.е.

$$\dot{E}(p) = \dot{E}_{10}(p), \quad \dot{H}(p) = \dot{H}_{10}(p). \quad (6.32)$$

6.3. Волна основного типа в прямоугольном волноводе

1. Рассмотрим H_{10} -волну. При этом $\dot{E}_{z10} = 0$, а составляющие векторов \dot{E}_{10}^M и \dot{H}_{10}^M определяются из (6.25) и (6.28).

$$\dot{H}_{z10} = \frac{\pi a_{10}}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \exp(\pm i h_{10} z), \quad \dot{H}_{x10}^M = \mp i h_{10} a_{10} \sin \frac{\pi x}{a} \exp(\pm i h_{10} z), \quad (6.33)$$

$$\dot{H}_{y10}^M = 0, \quad \dot{E}_{x10}^M = 0; \quad \dot{E}_{y10}^M = -i a_{10} W k \sin \frac{\pi x}{a} \exp(\pm i h_{10} z).$$

Длина волны в волноводе, фазовая и групповая скорости определяются по (6.31), а критическая длина волны — по (6.30): $\lambda_{kp10} = 2a$. Характеристическое сопротивление по (5.11) равно: $Z_{m,10} = kW / h_{10}$.

Если размеры волновода выбрать так, что $a > b$, то $\lambda_{kp10} = 2a$ оказывается наибольшей из критических волн всех других типов. Поэтому поперечные размеры волновода при заданной длине волны λ оказываются самыми малыми, если в нем распространяется только H_{10} -волна. По этой причине для передачи энергии по прямоугольному волноводу используется в основном H_{10} -волна. Эта волна (при $a > b$) имеет наименьшую критическую частоту. Поэтому она называется *волной основного типа*. Волны всех остальных типов (они могут быть и распространяющимися и затухающими) называют *волнами высших типов*.

Волна основного типа имеет самое малое значение коэффициента затухания, обусловленного потерями в металлических стенках.

Для существования в волноводе только волны основного типа при заданном значении λ (или частоты $f = v_{\phi} / \lambda$) размеры поперечного сечения волновода при $a > b$ должны выбираться из неравенства $\lambda_{крм} < \lambda < 2a$, где $\lambda_{крм}$ — наибольшая критическая длина волны из

полей высшего типа. Если в волноводе (линии передачи энергии) во всей полосе частот сигнала λ удовлетворяет этому условию, то волновод (линию передачи) называют *одноволновым*; если условие не удовлетворяется, то в волноводе распространяются наряду с основным высшие типы волн и волновод называют *многоволновым* (*многомодовым*).

При $a < b$ основной волной является H_{01} -волна, $\lambda_{кр01} = 2b$. Условием одноволновости волновода является $\lambda_{крм} < \lambda < 2b$.

При $a > 2b$ наибольшую критическую длину волны $\lambda_{крм}$ имеет поле типа H_{20} , поэтому $\lambda_{крм} = \lambda_{кр20} = a$. При $a < 2b$ $\lambda_{кр01} = 2b$. Поэтому для того, чтобы волновод был одноволновым, необходимо выполнение условий: при $a < 2b$ должно быть $2b < \lambda < 2a$; при $a \geq 2b$ должно быть $a < \lambda < 2a$.

Наибольший коэффициент перекрытия рабочего диапазона длин волн (диапазона частот), в котором прямоугольный волновод является одноволновым, при $a \geq 2b$ равен $\lambda_{кр10}/\lambda_{крм} = 2$, при $a < 2b$ — равен $\lambda_{кр01}/\lambda_{крм} = a/b$.

Отметим, что в волноводе может возбуждаться ЭМ поле и при условии, что λ больше критической длины волны основного типа волны. При этом амплитуды векторов $\dot{\mathbf{E}}_{mn}$ и $\dot{\mathbf{H}}_{mn}$ экспоненциально убывают при удалении точки p от излучателя. Такой волновод называют *запредельным* (*закритическим*) и применяют в аттенюаторах и других устройствах.

2. Рассмотрим силовые линии полей H_{10} -волны. Определим мгновенные значения составляющих $\mathbf{E}_{10}^M, \mathbf{H}_{10}^M$. Будем считать, что выполняется условие (6.32). Для определенности положим $z - z_0 > 0$. Из (6.33), обозначая $a_{10} = |a_{10}| \exp(i\Phi_{10})$ и полагая $\Phi_{10} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} E_{y10}^M &= -Z_{m,10} H_{x10}^M; \\ H_{z10} &= \frac{\pi |a_{10}|}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - \beta_{10} z); \\ H_{x10}^M &= -\beta_{10} |a_{10}| \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta_{10} z). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Касательные к стенкам волновода составляющие \mathbf{H}_{10}^M на стенках имеют экстремум, а нормальная к стенкам составляющая \mathbf{H}_{10}^M так

же, как и касательная составляющая E_{10}^M на стенках, обращается в нуль во все моменты времени.

Для фиксированного момента времени $t = t_1$ с помощью выражений (6.34) можно построить графики (эпюры) составляющих векторов поля в зависимости от координат x , y и z . Графики составляющих векторов напряженностей поля в зависимости от x при $z = z_1$ изображены на рис. 6.3,а. Значения E_{y10}^M и H_{x10}^M у боковых стенок (при $x = 0; a$) равны нулю, H_{z10} на боковых стенках имеет экстремумы. Вдоль интервала $0 \leq x \leq a$ укладывается одна ($m = 1$) полуволна поля.

Все составляющие векторов поля не зависят от координаты y . В некотором сечении $z = z_1$ при $x = x_1$ графики составляющих векторов поля в зависимости от y имеют вид прямой, параллельной оси y (рис. 6.3,б). Вдоль интервала $0 \leq y \leq b$ укладывается $n = 0$ полуволн поля. Графики составляющих векторов напряженностей поля в зависимости от координаты z при $x = x_1$ изображены на рис. 6.3,в.

Если рассмотреть силовые линии поля в поперечной плоскости x, y , то найдем, что E_{y10}^M не зависит от y , при $x = 0; a$ обращается в

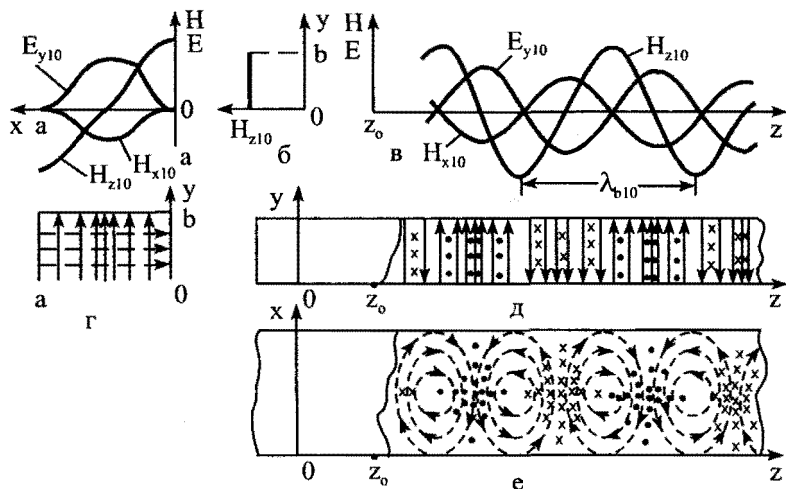


Рис. 6.3. Эпюры составляющих векторов E_{10}, H_{10} ; силовые линии полей H_{10} -волны

нуль и имеет экстремум при $x = a/2$. Поэтому наибольшая густота силовых линий электрического поля имеется в окрестности $x = a/2$. H_{x10}^M тоже имеет экстремум при $x = a/2$ и равен нулю при $x = 0; a$ (см. рис. 6.3,а). Силовые линии поля изображены на рис. 6.3,з.

Силовые линии электрического и магнитного полей в плоскости yz при $x = a/2$ изображены на рис. 6.3,д. Так как вектор E_{10}^M имеет только одну составляющую E_{y10}^M , то силовые линии электрического поля параллельны орту 1_y ; E_{y10} имеет экстремумы в тех же точках оси z , в которых имеет экстремумы H_{x10}^M .

Вектор H_{10}^M лежит в плоскости xz , так как $H_{y10}^M = 0$. Силовые линии магнитного поля в плоскости xz изображены на рис. 6.3,е (пунктирные линии). По координате z структура имеет периодический характер, что ясно из рис. 6.3,в. В любой поперечной плоскости вектор H_{x10}^M имеет одно и то же направление при всех значениях x , что подтверждается графиком $H_{x10}^M(x)$, приведенным на рис. 6.3,а. В плоскости xz силовые линии электрического поля представляются точками и крестиками.

3. Поверхностный электрический ток на внутренних стенках волновода $\dot{J} = [\dot{H}_{10}^M, \mathbf{n}]$, где \mathbf{n} — орт внешней нормали (рис. 6.4,а). Так как $\dot{H}_{10}^M = 1_x \dot{H}_{x10}^M + 1_z \dot{H}_{z10}^M$, то на стенке при $x=0$, где $\mathbf{n} = -1_x$, имеем $\dot{J} = -1_y \dot{H}_{z10}^M(0, y, z)$. На стенке при $x=a$, где $\mathbf{n} = 1_x$, имеем $\dot{J} = 1_y \dot{H}_{z10}^M(a, y, z)$. Токи J_y на боковых стенках не зависят от y , поскольку \dot{H}_{z10}^M не зависит от y . Токи на боковых стенках являются

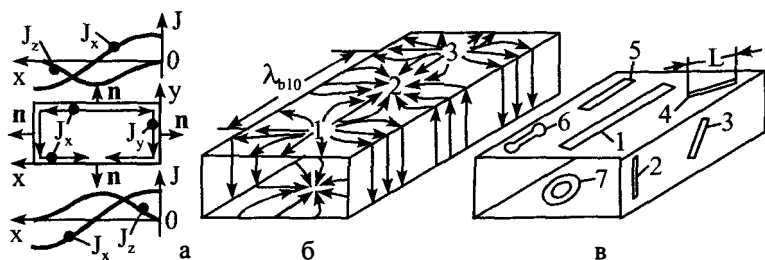


Рис. 6.4. Поверхностные токи H_{10} -волны; щели в стенках волновода

только поперечными токами (рис. 6.4,а). В каждом сечении $z = z_1$ токи J_y на противоположных стенках в один и тот же момент времени направлены в одну и ту же сторону — синфазны (в выражениях для токов надо учесть, что \dot{H}_{z10} у противоположных боковых стенок имеют разные знаки).

На стенке волновода при $y = 0$ (нижней стенке) $\dot{J} = \mathbf{1}_x \dot{H}_{z10} - \mathbf{1}_z \dot{H}_{x10}^M$, на верхней стенке волновода ($y = b$) $\dot{J} = -\mathbf{1}_x \dot{H}_{z10} + \mathbf{1}_z \dot{H}_{x10}^M$, т.е. имеются продольные \dot{J}_z и поперечные \dot{J}_x составляющие вектора тока. На нижней стенке $\dot{J}_z = -\dot{H}_{x10}^M$, на верхней стенке $\dot{J}_z = \dot{H}_{x10}^M$, т.е. векторы продольных токов направлены в противоположные стороны (противофазны). Так как H_{x10}^M в фиксированное время имеет экстремум в середине нижней (верхней) стенки, а у боковых стенок равно нулю (см. рис. 6.4,а), то и продольные токи \dot{J}_z в середине имеют экстремум, а у боковых стенок — нулевое значение. Поперечные токи, определяемые значением H_{z10} на стенке, наоборот, в середине нижней (верхней) стенки равны нулю, а у боковой стенки имеют экстремум.

Графики $J_x(x), J_z(x)$ мгновенных значений составляющих в фиксированный момент времени изображены на рис. 6.4,а. Силовые линии поверхностного тока изображены на рис. 6.4,б. Токи проводимости в областях, отмеченных цифрами 1, 2, 3, близки к нулю. В этих областях составляющая $|\dot{E}_{y10}^M|$ имеет экстремумы, значит, ток смещения, равный $|\omega \epsilon_a \dot{E}_{y10}^M|$, тоже имеет экстремальные значения. Поверхностный ток проводимости на стенках волновода переходит в ток (объемный) смещения в волноводе и линии полного тока, таким образом, являются замкнутыми.

4. В стенках волновода часто прорезаются щели. Поперечный ток в серединах верхней и нижней стенок равен нулю. Значит, если в середине верхней или нижней стенки прорезана узкая продольная щель, то токи проводимости ее не пересекают, и щель практически не влияет на распространяющуюся в волноводе волну (см. щель-1 на рис. 6.4,в). Такие щели используются в измерительных устройствах, в щель вводится вибратор, перемещаемый с помощью механических приспособлений вдоль оси волновода. Щель-2, параллельная поперечному току на боковой стенке, тоже не пересекается поверхностным током и практически не влияет на поле в волноводе.

Щель может быть расположена так, что ее пересекает ток проводимости (щели 3–7). Тогда между кромками щели возникает электрическое поле $\dot{E}_{щ}$, (токи проводимости переходят на щели в ток смещения). Значение $\dot{E}_{щ}$ можно заменить эквивалентным поверхностным током $\dot{J}^M = [n, \dot{E}_{щ}]$. Если ширина щели Δ значительно меньше длины волны и длины L щели, то поверхностный ток на щели можно заменить линейным $\dot{J}^M \approx \dot{J}^M \Delta$, и таким образом получить магнитный излучатель. Узкую щель в стенке волновода можно считать оригиналом линейного магнитного излучателя (см. § 2.2). Щель-6 имеет форму гантели, круговая щель-7 (с учетом толщины металлических стенок волновода) является оригиналом рамки (витка) линейного магнитного тока (см. § 2.8).

5. ЭМ поле H_{10} -волны можно представить в виде наложения двух локально плоских парциальных волн, переотражающихся между боковыми стенками волновода (см. § 4.2).

Стоячие волны на интервале по x от 0 до a образуются за счет наложения бегущих навстречу друг другу по x переотражающихся от боковых стенок волн (§ 6.1). Теперь в выражениях (6.33) осуществим обратный переход: заменим стоячую вдоль широкой стенки волну бегущими навстречу друг другу волнами. С этой целью применим к $\sin \pi x/a$ формулу Эйлера. Для упрощения рассмотрим только прямую по z волну.

Считаем, что $h_{10} = \beta_{10}$. Обозначим $e_0 = a_{10} \cdot W\beta$. Тогда $\dot{E}_y^M = \dot{E}_y^{(1)} + \dot{E}_y^{(2)}$, где $\dot{E}_y^{(1)} = e_0 \exp[-i(\pi x/a + \beta_{10} z)]$, $\dot{E}_y^{(2)} = e_0 \exp[-i\{(a-x)\pi/a + \beta_{10} z\}]$.

Пусть $\pi/a = \beta \cos \psi$. При этом $\beta_{10} = [\beta^2 - (\pi/a)^2]^{1/2} = \beta \sin \psi$; $\pi x/a + \beta_{10} z = \beta \rho_1$; $(a-x)\pi/a + \beta_{10} z = \beta \rho_2$, где $\rho_1 = x \cos \psi + z \sin \psi$; $\rho_2 = (a-x) \cos \psi + z \sin \psi$ (рис. 6.5). Поэтому $\dot{E}_y^{(1)} = e_0 \exp(-i\beta \rho_1)$, $\dot{E}_y^{(2)} = e_0 \exp(-i\beta \rho_2)$.

Аналогичным образом из (6.33) получаем $\dot{H}_{x10}^M = \dot{H}_x^{(1)} + \dot{H}_x^{(2)}$, $\dot{H}_{z10} = \dot{H}_z^{(1)} + \dot{H}_z^{(2)}$, где $\dot{H}_x^{(1,2)} = -W^{-1} \dot{E}_y^{(1,2)} \sin \psi$; $\dot{H}_z^{(1)} = W^{-1} \dot{E}_y^{(1)} \cos \psi$, $\dot{H}_z^{(2)} = -W^{-1} \dot{E}_y^{(2)} \cos \psi$.

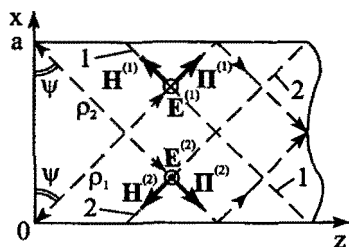


Рис. 6.5. Парциальные волны

Таким образом, векторы поля H_{10} -волны являются наложением векторов поля двух парциальных волн. Обе волны имеют локально плоские фронты (1) и (2) и распространяются под углами ψ к оси x . На фронте (1) первой парциальной волны $\dot{H}^{(1)} = 1_x \dot{H}_x^{(1)} + 1_z \dot{H}_z^{(1)} = \tau_1 W^{-1} \dot{E}_y^{(1)}$, где вектор $\tau_1 = -1_x \sin \psi + 1_z \cos \psi$ лежит на фронте (1).

На фронте второй парциальной волны $\dot{H}^{(2)} = 1_x \dot{H}_x^{(2)} + 1_z \dot{H}_z^{(2)} = \tau_2 (-W^{-1} \dot{E}_y^{(2)})$, где

вектор $\tau_2 = \mathbf{1}_x \sin \psi + \mathbf{1}_z \cos \psi$ лежит на фронте (2).

Первая парциальная волна падает на боковую стенку при $x = a$ и отражается от нее с коэффициентом отражения $R_{\perp} = -1$. Фронт отраженной волны становится параллельным фронту (2).

Вторая парциальная волна падает на боковую стенку при $x = 0$, отражается с тем же коэффициентом отражения $R_{\perp} = -1$. Фронт отраженной волны становится параллельным фронту (1).

Угол падения волн на отражающую поверхность определяется выражением $\cos \psi = \pi / (a\beta) = \lambda / 2a$, т.е. $\psi = \arccos(\lambda / 2a)$. Поэтому, если $\lambda < 2a$, то $\psi > 0$ и парциальные волны являются распространяющимися. Если $\lambda > 2a$, то ψ становится мнимым и распространение обеих волн невозможно.

Таким образом, поле H_{10} -волны представлено в виде суммы двух бегущих локально плоских волн, распространяющихся под углом к оси x , зависящим от величины $\lambda / 2a$. Фазовые скорости этих волн в направлении нормалей к своим фронтам $v_{\phi} = \omega / \beta = (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}$. В направлении увеличивающихся значений z фронты передвигаются со скоростью $v_{\phi n} = \omega / \beta \sin \psi = \omega / \beta_{10} = v_{\phi} \Gamma_{10}^{-1}$, т.е. большей v_{ϕ} .

6.4. Физические соображения о возбуждении типов волн

1. Чтобы определить тип возбуждаемой в волноводе волны (магнитная, электрическая) применяют следующие соображения: если вибратор возбуждает в неограниченном пространстве первичное ЭМ поле (\dot{E}^n, \dot{H}^n) , то составляющие векторов поля \dot{E} и \dot{H} , возбуждаемого в волноводе, сохраняются. Это значит, что если \dot{H}^n имеет продольную составляющую \dot{H}_z^n в волноводе, то вектор \dot{H} тоже содержит продольную составляющую \dot{H}_z и поэтому в волноводе возбуждается H -волна. Если \dot{E}^n имеет \dot{E}_z^n в волноводе, то \dot{E} тоже содержит составляющую \dot{E}_z и поэтому в волноводе возбуждается E -волна.

Например, прямолинейный электрический вибратор возбуждает в неограниченном пространстве поле, у которого силовые линии H^n лежат в плоскостях, перпендикулярных вибратору, а силовые линии E^n — в плоскостях, проходящих через ось вибратора (§ 2.3). Если вибратор расположить в поперечной плоскости волновода (рис. 6.2), то первичное поле содержит продольные составляющие H_z^n и E_z^n . Поэтому такой вибратор возбуждает и магнитную и электрическую волны. Но если этот вибратор расположить параллельно продольной оси волновода, то силовые линии первичного магнитного поля будут лежать только

в поперечных плоскостях и $H_z^n = 0$, а силовые линии первичного электрического поля будут содержать составляющую $E_z^n \neq 0$. Поэтому магнитная волна не будет возбуждаться, а электрическая будет возбуждаться.

Зная силовые линии первичных полей вибраторов (см. § 2.6–2.8), можно выбрать тип вибратора и его положение в волноводе для того, чтобы возбудить необходимый тип волны.

2. Силовые линии электрического и магнитного полей H_{mn} -волн и E_{mn} -волн можно построить с помощью (6.24), (6.25), (6.29) таким же образом, как это сделано для волны основного типа. Но силовые линии можно построить, и руководствуясь только физическими соображениями. При этом используются граничные условия: касательная к поверхности составляющая \dot{E}_{mn} и нормальная составляющая \dot{H}_{mn} на идеально проводящей поверхности равны нулю, а касательная к поверхности составляющая \dot{H}_{mn} и нормальная составляющая \dot{E}_{mn} на идеально проводящей поверхности имеют экстремумы. Последовательность построения силовых линий рассмотрим на примере.

Пусть необходимо построить силовые линии поля H_{11} -волны при $t = t_1$. Считаем, что $z - z_0 > 0$. H_{11} -волна имеет составляющие векторов поля $E_{x11}^M, E_{y11}^M, H_{x11}^M, H_{y11}^M$ и H_{z11}^M . Вектор E_{x11} (индекс “м” для сокращения записи в настоящем параграфе опустим) касателен верхней и нижней стенкам волновода, поэтому должен быть равен нулю на них (рис. 6.6, а, б). Вдоль оси y имеется одна полуволна поля ($n = 1$), поэтому график $E_{x11}(y)$ должен быть таким, какой изображен на рис. 6.6, б. Вектор E_{x11}

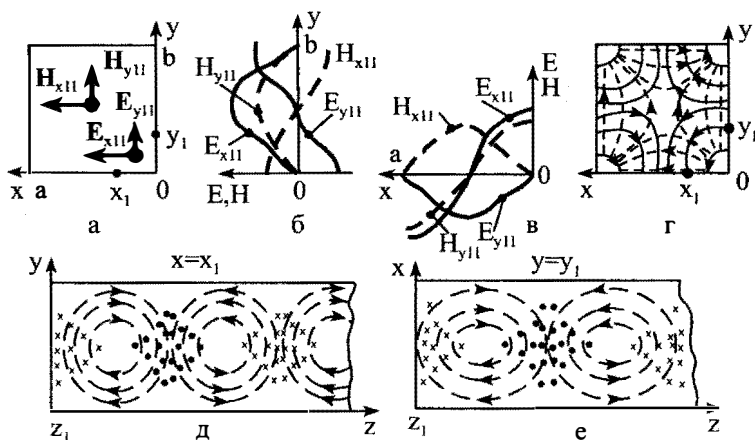


Рис. 6.6. Эпюры составляющих векторов E_{11}^M и H_{11}^M ; силовые линии полей H_{11} -волны

перпендикулярен боковым стенкам и, значит, на них имеет экстремум. Поскольку $m=1$, то на интервале $0 \leq x \leq a$ укладывается одна полуволна (рис. 6.6,е).

Вектор E_{y11} параллелен боковым и перпендикулярен верхней и нижней стенкам (рис. 6.6,а). Поэтому на боковых стенках $E_{y11} = 0$, а на верхней ($y=b$) и нижней ($y=0$) стенках E_{y11} имеет экстремумы (рис. 6.6,б).

Графики, изображенные на рис. 6.6,б,в, показывают, что функция $E_{x11}(x, y)$ имеет экстремумы при $y=b/2$ и $x=0, x=a$, а функция $E_{y11}(x, y)$ — при $x=a/2$ и $y=0, y=b$. Значит, силовая линия электрического поля должна показывать, что проекция вектора E_{11} на ось x имеет экстремальные значения при $y=b/2$ и $x=0, x=a$, и нулевое значение — при $x=a/2$. Кроме того, в интервалах $0 \leq x < a/2$ и $a/2 < x \leq a$, как следует из графика (рис. 6.6,в), направления вектора E_{x11} должны быть противоположны. С увеличением y длина вектора E_{x11} в интервале $0 \leq y < b/2$ увеличивается, а в интервале $b/2 < y \leq b$ — уменьшается. Силовые линии электрического поля должны искривляться так, чтобы учитывалось поведение вектора E_{x11} при изменении координат x, y (рис. 6.6,з).

Проекция вектора E_{11} на ось y имеет экстремумы при $x=a/2$ и $y=0, y=b$, нулевые значения — при $x=0, x=a$ и $y=b/2$. В интервалах $0 \leq y < b/2$ и $b/2 < y \leq b$ направления вектора E_{y11} должны быть противоположны. В интервале $0 \leq x < a/2$ с увеличением x длина вектора E_{y11} увеличивается, а в интервале $a/2 < x \leq a$ — уменьшается. Силовые линии электрического поля должны искривляться так, чтобы учитывалось поведение вектора E_{y11} при изменении координат x, y (рис. 6.6,з).

Вектор H_{x11} касателен верхней и нижней стенкам и перпендикулярен боковым стенкам, поэтому $H_{x11}(x)$ имеет экстремумы при $y=0, y=b$ и равно нулю при $x=0, x=a$ (рис. 6.6,б,в). Вектор H_{y11} перпендикулярен верхней и нижней стенкам и касателен боковым стенкам, поэтому $H_{y11} = 0$ при $y=0, y=b$ и имеет экстремумы при $x=0, x=a$.

Графики, изображенные на рис. 6.6,б,в, позволяют построить с помощью тех же рассуждений силовые линии вектора H_{11} . Силовые линии вектора H_{11} должны искривляться так, чтобы учитывалось поведение векторов H_{x11} и H_{y11} при изменении координат x, y (рис. 6.6,з). Взаимная ориентация векторов E_{11} и H_{11} должна быть такой, чтобы вектор Пойнтинга был направлен вдоль орта $\mathbf{1}_z$.

Чтобы построить силовые линии полей в плоскости yz (при $x=x_1$), надо учесть, что вектор H_{z11} касателен стенкам волновода, и поэтому H_{z11} имеет на них экстремумы. Поскольку $m=1, n=1$, то направления вектора H_{z11} противоположны у противоположных стенок. Все составляющие E_{11} и H_{11} распределены по координате z по закону бегущей волны, поэтому направления силовых линий в поперечных сечениях,

сдвинутых на $\lambda_{B11}/2$, должны быть противоположными. В плоскости yz должны быть видны сечения силовых линий электрического поля (на рис. 6.6,д изображены точками и крестиками).

В плоскости xz силовые линии электрического и магнитного полей можно построить на основе силовых линий в плоскостях xy и yz (рис. 6.6,е).

Силовые линии полей E_{11} -волны, H_{21} -волны и E_{21} -волны при $t = t_1$ можно построить аналогичным образом (рис. 6.7). Из анализа рисунков следует, что силовые линии поля H_{21} -волны (или E_{21} -волны) можно получить, если мысленно разделить интервал $0 \leq x \leq a$ на две ($m = 2$) части и в каждой из образовавшихся областей волновода построить силовые линии поля H_{11} -волны (или E_{11} -волны).

Силовые линии поля E_{mn} -волны (или H_{mn} -волны) можно построить, разделив (мысленно) на m равных частей интервал $0 \leq x \leq a$, — на n равных частей интервал $0 \leq y \leq b$ и построив в каждой из образовавшихся областей волновода силовые линии полей E_{11} -волн (или H_{11} -волн); в соседних областях векторы ЭМ поля противофазны.

3. Ни один из индексов, m или n , E_{mn} -волн не может быть равным нулю, поскольку \dot{E}_{zmn} должно быть равно нулю на стенке волновода, а значение $m = 0$ или $n = 0$ указывает, что \dot{E}_{z0n} или \dot{E}_{z00} не меняется вдоль x или y и, значит, должно быть равно

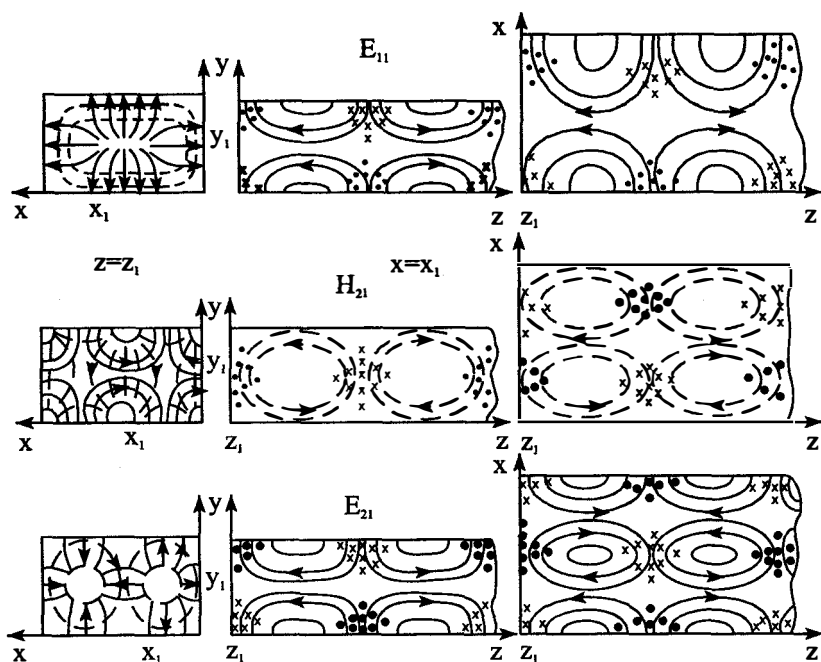


Рис. 6.7. Силовые линии полей волн E_{11} , H_{21} и E_{21}

нулю всюду. Если \dot{E}_{zmn} некоторого типа волны равна нулю, то в соответствии с выражениями (6.29) $\dot{E}_{\perp mn}^2 = 0$ и $\dot{H}_{\perp mn}^2 = 0$. Наименьшими значениями индексов m и n являются $m=1, n=1$. Поэтому наибольшей критической длиной волны из E_{mn} -волн обладает E_{11} -волна.

Один из индексов m или n H_{mn} -волн может быть равен нулю.

Волны с разными полями, но с одинаковыми коэффициентами распространения, называются вырожденными. При этом для H_{mn} -волны и $H_{m'n'}$ -волны имеем $(m/a)^2 + (n/b)^2 = (m'/a)^2 + (n'/b)^2$. Аналогично E_{mn} -волны с разным строением силовых линий поля, но с одинаковыми коэффициентами распространения, тоже являются вырожденными. Вырожденные волны имеют одинаковые фазовые и групповые скорости.

6.5. Мощности. Коэффициент затухания типов волн в прямоугольном волноводе

Считаем, что в волноводе распространяется волна только одного типа с индексами m и n . Тогда $\dot{E} = \dot{E}_{mn}$, $\dot{H} = \dot{H}_{mn}$.

1. Определим по (5.23) мощность, переносимую через поперечное сечение волновода распространяющейся H_{mn} - или E_{mn} -волной (индексы m, n при $\dot{P}_{0\perp}^{M(\pm)}$ опускаем):

$$\dot{P}_{0\perp}^{M(\pm)} = \frac{1}{2} Z_{M(\pm), mn} \int_{S_{\perp}} \left| \dot{H}_{\perp mn}^{M(\pm)}(x, y) \right|^2 dx dy = \frac{1}{2Z_{M(\pm), mn}} \int_{S_{\perp}} \left| \dot{E}_{\perp mn}^{M(\pm)}(x, y) \right|^2 dx dy, \quad (6.35)$$

где $\dot{P}_{0\perp}^M, \dot{P}_{0\perp}^E$ — мощности, переносимые H_{mn} - или E_{mn} -волной, $Z_{M, mn} = kW/h_{mn} = W\Gamma_{mn}^{-1}$, $Z_{E, mn} = h_{mn}/\omega\epsilon_a = W\Gamma_{mn}$ — характеристические сопротивления H_{mn} - и E_{mn} -волн, определенные по (5.11), (5.12). В (6.35) $\dot{H}_{\perp mn}^{M(\pm)} = 1_x \dot{H}_{xmn}^{M(\pm)} + 1_y \dot{H}_{ymn}^{M(\pm)}$, $\dot{E}_{\perp mn}^{M(\pm)} = 1_x \dot{E}_{xmn}^{M(\pm)} + 1_y \dot{E}_{ymn}^{M(\pm)}$. По (5.13), (5.12) $\dot{H}_{xmn}^{M(\pm)} = \pm Z_{M(\pm), mn}^{-1} \cdot \dot{E}_{ymn}^{M(\pm)}$, $\dot{H}_{ymn}^{M(\pm)} = \mp Z_{M(\pm), mn}^{-1} \cdot \dot{E}_{xmn}^{M(\pm)}$, а из (6.28), (6.29) получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_{xmn}^M &= -\frac{i kW}{k_{\perp mn}^2} \frac{\partial \dot{H}_{ymn}}{\partial y}, & \dot{E}_{ymn}^M &= \frac{i kW}{k_{\perp mn}^2} \frac{\partial \dot{H}_{xmn}}{\partial x}, \\ \dot{E}_{xmn}^E &= \pm \frac{i h_{mn}}{k_{\perp mn}^2} \frac{\partial \dot{E}_{ymn}}{\partial x}, & \dot{E}_{ymn}^E &= \pm \frac{i h_{mn}}{k_{\perp mn}^2} \frac{\partial \dot{E}_{xmn}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Если, например, в (6.35) подставить (6.36), то получим

$$\dot{P}_{0\perp}^{M(\pm)} = \frac{1}{2Z_{M(\pm), mn}} \int_{S_{\perp}} \left(\left| \dot{E}_{xmn}^{M(\pm)}(x, y) \right|^2 + \left| \dot{E}_{ymn}^{M(\pm)}(x, y) \right|^2 \right) dx dy. \quad (6.37)$$

Подставляя в (6.36) значения \dot{H}_{xmn} или \dot{E}_{xmn} из (6.24) или (6.25) и выполняя интегрирование поперечных составляющих, находим

$$\dot{P}_{0\perp}^M = \frac{S_{\perp} W^2 k^2}{4\epsilon_n Z_{M, mn}^* \cdot k_{\perp mn}^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 |a_{mn}|^2, \quad S_{\perp} = ab, \quad (6.38)$$

$$\dot{P}_{0\perp}^3 = \frac{S_{\perp} W^2 h_{mn}^4}{4\epsilon_n Z_{3,mn}^* \cdot k \cdot k_{\perp mn}^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 |a_{mn}|^2. \quad (6.39)$$

В этих выражениях a_{mn} и $Z_{m^{(3)},mn}$ зависят от Γ_{mn} , поэтому: $\dot{P}_{0\perp}^M$ пропорционально Γ_{mn}^{-1} , а $\dot{P}_{0\perp}^3$ пропорционально Γ_{mn} , которое при изменении λ в окрестности $\lambda_{kp,mn}$ резко меняет свою величину. Значит, $\dot{P}_{0\perp}^{M(3)}$ очень критичны к изменению λ в окрестности $\lambda_{kp,mn}$.

Выражения (6.38), (6.23) позволяют по известному току возбудителя \dot{I}_0 рассчитать возбуждаемую мощность или, наоборот, по заданной мощности — необходимый ток. Их можно использовать для расчета сопротивления излучения возбудителя. При этом надо иметь в виду, что бегущие H_{mn} - или E_{mn} -волны распространяются в направлениях $z \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow -\infty$.

2. Коэффициент затухания волн, обусловленный джоулевыми потерями в металлических стенках волновода, определяется по (5.24). Диэлектрик считаем идеальным ($Z_{m^{(3)},mn} = Z_{m^{(3)},mn}^*$). Тогда из (5.24) имеем

$$\alpha_{mn} = \frac{R_1}{4P_{mn0\perp}} \oint_l \left| \dot{H}_{zmn}(p_{\perp}) \right|^2 dl \quad (6.40)$$

где для H_{mn} -волн $P_{mn0\perp} = P_{mn0\perp}^M$ определено в (6.38), для E_{mn} -волн $P_{mn0\perp} = P_{mn0\perp}^3$ определено в (6.37). Сопротивление $R_1 = (\sigma_1 \cdot \delta_1)^{-1}$ зависит от λ и проводимости σ_1 металла, из которого сделан волновод. Так, для меди $\delta_1 = 3,9\lambda^{-1/2}$ мкм, для латуни $\delta_1 = 7,3\lambda^{1/2}$ мкм, для серебра $\delta_1 = 3,7\lambda^{1/2}$ мкм (λ берется в метрах).

В (6.40) для H_{mn} -волн $\left| \dot{H}_{zmn} \right|^2 = \left| \dot{H}_{zmn}^M \right|^2 + \left| \dot{H}_{zmn}^3 \right|^2 + \left| \dot{H}_{ymn}^M \right|^2$, для E_{mn} -волн $\left| \dot{H}_{zmn} \right|^2 = \left| \dot{H}_{zmn}^3 \right|^2 + \left| \dot{H}_{ymn}^3 \right|^2$.

Поскольку $\left| \dot{H}_x^{M(3)}(x,0) \right|^2 = \left| \dot{H}_x^{M(3)}(x,b) \right|^2$, $\left| \dot{H}_z^{M(3)}(0,y) \right|^2 = \left| \dot{H}_z^{M(3)}(a,y) \right|^2$, то интеграл по l в (6.40) упрощается.

Для H_{mn} -волн

$$\begin{aligned} \oint_l \left| \dot{H}_{zmn}^M(p_{\perp}) \right|^2 dl &= 2 \int_0^a \left[\left| \dot{H}_{zmn}^M(x,0) \right|^2 + \left| \dot{H}_{zmn}^M(x,0) \right|^2 \right] dx + \\ &+ 2 \int_0^b \left[\left| \dot{H}_{ymn}^M(0,y) \right|^2 + \left| \dot{H}_{ymn}^M(0,y) \right|^2 \right] dy, \end{aligned}$$

для E_{mn} -волн

$$\oint_l \left| \dot{H}_{zmn}^3(p_{\perp}) \right|^2 dl = 2 \int_0^a \left| \dot{H}_{zmn}^3(x,0) \right|^2 dx + 2 \int_0^b \left| \dot{H}_{ymn}^3(0,y) \right|^2 dy.$$

Подставляя значения составляющих векторов \dot{H}_{mn} в подынтегральные выражения и выполняя интегрирование, а затем подставляя результат в (6.40) с учетом (6.38), (6.39), найдем α_{mn} . Окончательные выражения для α_{mn} не приводим из-за их громоздкости. Результаты расчетов α_{mn} для медного волновода с размерами $a = 50,8$ мм, $b = 0,5a$, заполненного воздухом (потери в воздухе не учитываются), приведены на рис. 6.8,а. Из графиков видно, что H_{10} -волна имеет наименьший коэффициент затухания. При $\lambda \rightarrow \lambda_{kr,mn}$ величина $\alpha_{mn} \rightarrow \infty$ для всех типов волн, что является следствием допущений, сделанных при выводе формулы (5.24).

На рис. 6.8,б приведены графики коэффициентов затухания H_{10} -волны при $a = 23$ мм при разных значениях b/a ($\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$). С уменьшением λ от значений, близких к $\lambda_{kr,10}$, α_{10} сначала уменьшается, а затем увеличивается. При $\lambda \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow \infty$) α_{10} растет пропорционально $\lambda^{-1/2}$, что связано с такой же зависимостью от λ сопротивления R_1 металла. Минимальное значение α_{10} обеспечивается при $b/a = 1,18$. Однако, значение отношения b/a не является критичным — его изменение от 0,5 до 2 лишь незначительно меняет α_{10} .

Измеренные значения α_{mn} на 15–20% больше рассчитанных. Объясняется это тем, что на стенках волновода имеются микронеровности (шероховатости), из-за которых увеличивается длина пути токов (увеличивается R_1), а значит, растут потери.

3. Вектор Пойнтинга волны основного типа имеет две составляющих \dot{P}_{x10} и \dot{P}_{z10} :

$$\dot{P}_{10} = 0,5[\dot{E}_{10}^M, \dot{H}_{10}^{M*}] = 0,5(-1_z \dot{E}_{y10}^M \dot{H}_{x10}^{M*} + 1_x \dot{E}_{y10}^M \dot{H}_{z10}^{M*})$$

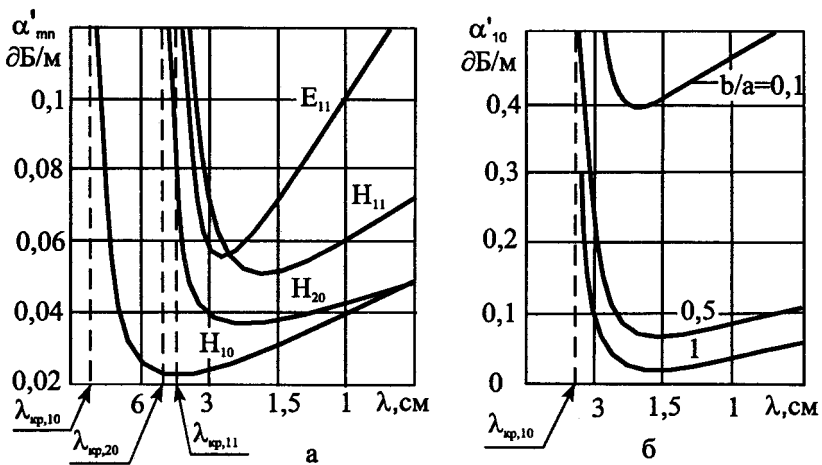


Рис. 6.8. Зависимости коэффициентов затухания от λ

При идеальном диэлектрике, заполняющем волновод, $k_{10} = \beta_{10}$. Используя (6.35) или (6.36), находим

$$\dot{\Gamma}_{z_{10}} = \mp 0,5 |a_{10}|^2 W \beta_{10} \sin^2 \frac{\pi x}{a}, \quad \dot{\Gamma}_{x_{10}} = -\frac{i \beta W \pi}{2a} |a_{10}|^2 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a}.$$

Продольная составляющая вектора Пойнтинга является чисто действительной; это значит, что ЭМ поле переносит энергию вдоль волновода. Поперечная составляющая вектора Пойнтинга является чисто мнимой. Это еще раз указывает на то, что ЭМ поле не переносит энергию в направлении стенок волновода. Это соответствует физическим представлениям: как отмечалось выше, волны переотражаются между идеально проводящими стенками волновода, вследствие чего образуется стоячая волна поля на интервале $0 \leq x \leq a$.

Найдем мощность P_{0L}^M , переносимую H_{10} -волной через поперечное сечение волновода. Диэлектрик считаем идеальным. Из (6.38) и (6.23) получаем

$$P_{0L}^M = \frac{S_{\perp} W^2 \beta_0^2 |a_{10}|^2}{4Z_{m,10}} = Z_{m,10} \frac{|j_0|^2 (1 - \cos \beta_0 L)^2}{4\beta_0^2 S_{\perp}} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a}, \quad (6.41)$$

откуда видно, что P_{0L}^M зависит от характеристического сопротивления волновода, электрической длины $\beta_0 L$ возбуждателя и положения последнего относительно боковых стенок волновода.

Найдем разрядную мощность волновода. Если $\dot{E}_{y_{10}}(p_{\perp}) = \dot{E}_0 \sin \frac{\pi x}{a}$, то, подставив это выражение в (6.37), находим

$$P_{0L}^M = (S_{\perp} / 4Z_{m,10}) \cdot |\dot{E}_0|^2.$$

Если $|\dot{E}_0| = E_{\text{разр}}$, то получим разрядное значение мощности

$$P_{0L\text{разр}} = (S_{\perp} / 4Z_{m,10}) \cdot E_{\text{разр}}^2. \quad (6.42)$$

4. Рассмотрим поведение составляющих векторов поля в случае, когда диэлектрик, заполняющий волновод, имеет джоулевы потери. При этом

$$h_{mn} = \beta_{mn} - i\alpha_{mn} = [k^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2]^{1/2} = [\beta^2 - \alpha^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2 - i2\alpha\beta]^{1/2}.$$

Если $\beta^2 - \alpha^2 > (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$, то, возводя в квадрат правую и левую части последнего равенства, приравнявая действительные и мнимые части, решая биквадратные уравнения и выбирая корни, удовлетворяющие условию излучения, получаем

$$\begin{aligned} \beta_{mn} &= \left\{ 0,5 \left[M_{mn} + (M_{mn} + 4\alpha^2 \beta^2)^{1/2} \right] \right\}^{1/2}, \\ \alpha_{mn} &= \left\{ 0,5 \left[-M_{mn} + (M_{mn} + 4\alpha^2 \beta^2)^{1/2} \right] \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

где $M_{mn} = \beta^2 [\Gamma_{mn}^2 - (\alpha/\beta)^2]$.

Обычно в волноводах применяются диэлектрики с малыми потерями, когда $\sigma \ll \omega \epsilon_a$. При этом $\beta \approx \omega(\epsilon_a \mu_a)^{1/2}$, $\alpha = 0,5\sigma W$ (см. § 2.5). Значит, $(\alpha/\beta)^2 \ll 1$. На частотах, на которых $4\alpha^2 \beta^2 \ll \beta^4 \Gamma_{mn}^2$, из (6.43) находим $\beta_{mn} = \beta \Gamma_{mn}$, $\alpha_{mn} = \alpha \Gamma_{mn}^{-1}$.

Таким образом, в волноводе, заполненном диэлектриком с малыми потерями, коэффициент фазы, а значит, фазовая и групповая скорости и длина волны в волноводе

распространяющихся типов волн приближенно равны соответствующим значениям, полученным выше для волновода, заполненного идеальным диэлектриком.

Коэффициент затухания α_{mn} зависит от проводимости диэлектрика, длины волны, размеров волновода и типа распространяющейся волны. Коэффициент затухания H_{mn} -волн и E_{mn} -волн больше коэффициента затухания в неограниченном пространстве, и он увеличивается с возрастанием чисел m и n . Все составляющие векторов ЭМ поля распространяющихся типов волн зависят от продольной координаты по закону $\exp(\pm i\beta_{mn}z \pm \alpha_{mn}z)$, т.е. с ростом $|z|$ убывают по экспоненциальному закону. Последнее объясняется, как известно, переходом части энергии распространяющегося поля в тепловую.

Итак, наличие малых потерь в диэлектрике, заполняющем волновод, приводит к тому, что в приближении, указанном выше, изменяется только распределение поля по продольной координате. Поэтому можно проводить анализ ЭМ поля в волноводе в предположении, что диэлектрик идеальный.

5. Пример. Волновод с размерами $a = 0,71\lambda$, $b = 0,5a$ заполнен фторопластом.

На длине волны $\lambda = 3$ см фторопласт имеет $\epsilon = 2$, $\text{tg} \Delta = 3 \cdot 10^{-4}$. Найти коэффициент затухания H_{10} -волны за счет джоулевых потерь в фторопласте.

Вычислим $\sigma = \omega \epsilon_a \text{tg} \Delta = \omega \epsilon \epsilon_0 \text{tg} \Delta$. На частоте $f = 10$ ГГц $\sigma = 3,3 \cdot 10^{-4}$ См/м. При этом $\alpha \approx 0,5\sigma(\mu_0/\epsilon_a)^{1/2} = 0,5\sigma W_0(\epsilon)^{-1/2} = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$. Значение $\beta = 2\pi/\lambda = 2,09 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$, поэтому $\alpha/\beta = 2,1 \cdot 10^{-4} \ll 1$; $\alpha\beta = 9,21$. Находим $M_{10} \approx \beta^2 \Gamma_{10}^2 = 2,2 \cdot 10^4$. Условие $4(\alpha\beta)^2 \ll M_{10}^2$ выполняется и для вычислений можно применять приближенные формулы. Поэтому $\alpha_{10} \approx \alpha \Gamma_{10}^{-1} = 6,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$, $\alpha'_{10} \approx 8,686\alpha_{10} = 0,54$ дБ/м.

На длине волновода $L_1 = 1$ м амплитуды векторов поля уменьшаются в $|\dot{E}_{10}(z)|/|\dot{E}_{10}(z + L_1)| = \exp(\alpha \cdot 1) = 1,064$ раза, а мощности в 1,13 раза.

6. Пример. Вычислить уменьшение переносимой H_{10} -волной мощности через поперечные сечения волновода, расположенные на расстоянии $L_1 = 10$ м друг от друга в медном волноводе, заполненном сухим воздухом при нормальном давлении, если $\alpha = 3$ см, $a = 23$ мм, $b = 0,5a$.

Джоулевыми потерями в диэлектрике пренебрегаем. Из графика, изображенного на рис. 6.7,б для $b/a = 0,5$ получаем $\alpha'_{10} = 0,19$ дБ/м. Поэтому $\alpha = 0,1151\alpha' = 0,022 \text{ м}^{-1}$ (см. § 5.4). Амплитуды векторов поля затухают на расстоянии $L_1 = 10$ м в $|\dot{E}(z)|/|\dot{E}(z + L_1)| = \exp(0,022 \cdot 10) = 1,24$ раза, а мощности — в $P_{\perp}(z)/P_{\perp}(z + L_1) = \exp(2 \cdot 0,22) = 1,55$ раза.

7. Пример. Волновод имеет размеры $a = 23$ мм, $b = 0,5a$ и заполнен сухим воздухом; в нем распространяется волна основного типа. Найти разрядную и допустимую мощности на $\lambda = 3,2$ см.

Потерями в сухом воздухе пренебрегаем. Тогда $Z_{m,10}^* = Z_{m,10} = W_0 \Gamma_{10}^{-1/2}$; $W_0 = 377,1$ Ом, $\Gamma_{10}^{-1/2} = [1 - (\lambda/2a)^2]^{-1/2} = 1,39$. Поэтому $Z_{m,10} = 525$ Ом. Далее,

$S_{\perp} = ab = 2,645 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $E_{\text{разр}} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ В/м}$. Подставив эти численные значения в (6.42),

получим $P_{0\perp\text{разр}} = 1,06 \cdot 10^6 \text{ Вт} = 1,06 \text{ МВт}$, $P_{\perp\text{доп}} = (0,2 + 0,33) \times P_{0\perp\text{разр}} = 212 + 353 \text{ кВт}$ (зависит от условий эксплуатации).

8. Пример. Найти мощность в поперечном сечении волновода, заполненного сухим воздухом, если $a = 23 \text{ мм}$, $b = 0,5a$, ток возбуждителя $|i_0| = 1 \text{ А}$, $\beta_0 L = 0,4\pi$, $x_0 = a/4$, $\lambda = 3,2 \text{ см}$.

Так как $a < \lambda < 2a$, то в волноводе распространяется только H_{10} -волна. Потерями в сухом воздухе пренебрегаем. Поэтому $Z_{m,10} = 525 \text{ Ом}$. Далее, $\cos\beta_0 L = \cos 72^\circ = 0,309$, $(1 - \cos\beta_0 L)^2 = 0,477$; $\sin\pi x_0/a = \sin\pi/4 = 0,707$; $\beta_0^2 S_{\perp} = 10,19$. Подставляем численные значения в (6.41). Получаем $P_{0\perp}^M = 3,06 \text{ Вт}$ ($P_{0\perp}^M$ переносится полем в направлении $z \rightarrow \infty$. Такая же мощность переносится в направлении $z \rightarrow -\infty$).

9. Определим активную составляющую сопротивления излучения вибратора в волноводе. Для этого надо по (1.71) найти среднюю мощность, отдаваемую источником в волновод. Считаем, что джоулевы потери отсутствуют. Тогда источник расходует мощность только на возбуждение поля излучения:

$$-\text{Re } \dot{P}^c = P_{\Sigma} = \oint_S \dot{\mathbf{I}} n dS,$$

где поверхность S ограничивает объем V , внутри которого находится источник. В качестве объема V выбираем объем, ограниченный поперечными сечениями $S_{\perp}(z_1)$ и $S_{\perp}(z_2)$, ($z_1 - z_0 > 0$, $z_2 - z_0 < 0$), в которых можно считать, что выполняется условие (6.32), и внутренней поверхностью стенок волновода. Поскольку на последних касательные составляющие \dot{E}_{t0} равны нулю, то нормальная к поверхности стенок составляющая вектора Пойнтинга $\dot{\mathbf{I}}_{n10} = 0$. Поэтому $P_{\Sigma} = P_{0\perp 1}^M + P_{0\perp 2}^M$, где $P_{0\perp 1}^M$, $P_{0\perp 2}^M$ — мощности в сечениях $S_{\perp}(z_1)$ и $S_{\perp}(z_2)$, определенные в (6.41). Таким образом, $P_{\Sigma} = 2P_{0\perp}^M$.

Излучатель для источника представляет нагрузку, поэтому $P_{\Sigma} = |i_0|^2 R_{\Sigma} / 2$, где R_{Σ} — сопротивление излучения вибратора в бесконечном волноводе. Приравняв два последних выражения и учитывая (6.41), получаем

$$R_{\Sigma} = \frac{W(1 - \cos\beta_0 L)^2}{\beta_0^2 S_{\perp} \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \sin^2 \pi x_0 / a, \quad (6.44)$$

откуда следует, что R_{Σ} существенно зависит от положения вибратора относительно параллельной ему стенки (от x_0/λ), от электрической длины вибратора $\beta_0 L$ и относительных размеров волновода (от $\beta_0^2 S_{\perp}$). В случае если $\lambda \rightarrow \lambda_{kp,10} = 2a$, то $R_{\Sigma} \rightarrow \infty$, причем даже при малых изменениях λ в окрестности $\lambda_{kp,10}$ R_{Σ} резко меняется.

Реактивную составляющую сопротивления излучения источника можно найти с помощью (1.72), определяя энергии электрического и магнитного полей в объеме V .

10. Пример. На длине волны $\lambda = 3,2$ см найти активную составляющую сопротивления излучения вибратора в прямоугольном волноводе, в котором распространяется волна основного типа. Волновод заполнен сухим воздухом, $a = 23$ мм, $b = 0,5a$, $\beta_0 L = \pi/2$, $x_0 = a/2$.

При заполнении сухим воздухом $W = W_0 = 377,1$ Ом. Далее, $\cos \beta_0 L = 0$, $1 - \cos \beta_0 L = 1$, $\sin \pi x_0 / a = 1$, $\{1 - (\lambda/2a)^2\}^{1/2} = 0,72$. При $\beta_0 = \beta$ имеем $\beta_0^2 S_{\perp} = 10,19$. Поэтому $R_{\Sigma} = 51,4$ Ом.

11. Пример. На длине волны $\lambda = 4,5$ см найти R_{Σ} при параметрах, указанных в предыдущем примере.

Получаем: $\{1 - (\lambda/2a)^2\}^{1/2} = 0,207$; $\beta_0^2 S_{\perp} = 5,14$. Поэтому $R_{\Sigma} = 354$ Ом, т.е. R_{Σ} изменяется почти в 7 раз при изменении λ в 1,4 раза.

6.6. Круглый волновод

1. Рассмотрим постановку задачи. Имеется бесконечно длинная металлическая труба, заполненная однородным изотропным диэлектриком с параметрами $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$ (рис. 6.9). В области V_n заданы сторонние токи $\mathbf{j}^c, \mathbf{j}^m, c$. Найти векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ возбуждаемого поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла, граничным условиям на стенке трубы и условиям излучения.

Ось z ЦСК направим вдоль оси трубы. При этом поверхность трубы совпадает с координатной поверхностью $r = a$ и можно ожидать, что решение задачи будет наиболее простым. Считаем, что труба является волноводом. Тогда продольные составляющие векторов поля можно представить в виде (6.24), (6.25).

Рассмотрим граничные задачи на существование электрических и магнитных волн; при этом точка наблюдения поля находится вне стороннего источника V_n , значит, продольные составляющие векторов поля (6.24), (6.29) удовлетворяют однородным уравнениям Гельмгольца (5.16).

Переходя к математической модели, считаем, что металл является идеальным проводником. Тогда граничные условия для продольных составляющих векторов поля в соответствии с (1.94) упрощаются: $\dot{E}_{zmn} = 0$ и $\partial \dot{H}_{zmn} / \partial r = 0$ при $r = a$, так как $\mathbf{n} = \mathbf{1}_r$.

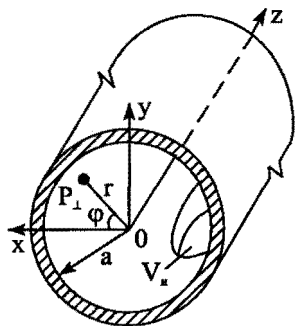


Рис. 6.9. К постановке задачи для круглого волновода

Таким образом, в соответствии с (6.24), (6.25)

$$\dot{E}_z(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{E}_{zmn}(p_{\perp}) e^{\pm i h_{mn} z}, \quad \dot{H}_z(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{H}_z(p_{\perp}) e^{\pm i h_{mn} z}. \quad (6.45)$$

Подставляя $\dot{E}_z(p)$ в (5.16), имеем для точек p , расположенных вне V_n ,

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E}_{zmn}(p_{\perp}) + k_{\perp mn}^2 \dot{E}_{zmn}(p_{\perp}) = 0. \quad (6.46)$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка необходимо решить при граничном условии

$$\dot{E}_{zmn}(p_{\perp}) = 0 \text{ при } r = a \quad (6.47)$$

и выполнении условий излучения при $z \rightarrow \pm\infty$ в (6.45). Это задача на возможность существования E_{mn} -волн в круглом волноводе — граничная задача 1-го рода (задача Дирихле).

Подставляя $\dot{H}_z(p)$ из (6.45) в (5.16), имеем для $p \in V_n$

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{H}_{zmn}(p_{\perp}) + k_{\perp mn}^2 \dot{H}_{zmn}(p_{\perp}) = 0. \quad (6.48)$$

Это уравнение необходимо решить при граничном условии

$$\partial \dot{H}_{zmn} / \partial r = 0 \text{ при } r = a \quad (6.49)$$

и выполнении условий излучения при $z \rightarrow \pm\infty$ в (6.45). Это задача на возможность существования H_{mn} -волн в круглом волноводе — граничная задача 2-го рода (задача Неймана).

2. Решение граничной задачи о возможности существования E_{mn} -волн выполним методом разделения переменных (методом собственных функций, или методом Фурье). Существо метода состоит в том, что искомую функцию двух переменных представляют в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от своей одной переменной. Из уравнения в частных производных (6.46) получают для каждой одномерной функции обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка, методы решения которого считаются известными.

Используем эту схему построения решения задачи. В ЦСК (6.46) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{zmn}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{zmn}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_{zmn}}{\partial \varphi^2} + k_{\perp mn}^2 \dot{E}_{zmn} = 0. \quad (6.46)$$

Представим искомую функцию произведением функций

$$\dot{E}_{zmn}(r, \varphi) = R_{mn}(r) \Phi_m(\varphi) \quad (6.50)$$

и подставим в предыдущее уравнение. Тогда, умножив результат на $r^2 (R_{mn} \Phi_m)^{-1}$, получим

$$\frac{r^2}{R_{mn}} \frac{\partial^2 R_{mn}}{\partial r^2} + \frac{r}{R_{mn}} \frac{\partial R_{mn}}{\partial r} + k_{\perp mn}^2 r^2 + \frac{1}{\Phi_m} \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (6.51)$$

Это равенство показывает, что сумма первых трех слагаемых может зависеть только от r ; обозначим эту сумму через $f(r)$. Четвертое слагаемое может быть только функцией φ , т.е. $f_1(\varphi)$. Имеем $f(r) + f_1(\varphi) = 0$. Так как r и φ независимые переменные, то равенство может выполняться только при условии, если $f(r) = \text{const}$ и $f_1(\varphi) = -\text{const}$.

Таким образом, имеем

$$\frac{1}{\Phi_m} \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial \varphi^2} = \text{const} = -k_m^2 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \Phi_m(\varphi)}{\partial \varphi^2} + k_m^2 \Phi_m(\varphi) = 0.$$

Это обыкновенное дифференцированное уравнение 2-го порядка. Оно имеет два частных решения $\cos k_m \varphi$ и $\sin k_m \varphi$, определяющих стоячие по φ волны. Бегущие по φ волны могут быть получены с помощью линейной комбинации частных решений (формулы Эйлера): $\cos k_m \varphi \pm i \sin k_m \varphi = \exp(\pm i k_m \varphi)$. Общее решение дифференциального уравнения

$$\Phi_m(\varphi) = C_{1m} \cos k_m \varphi + C_{2m} \sin k_m \varphi = C_m \cos(k_m \varphi + \psi_m),$$

где C_{1m} , C_{2m} , C_m и ψ_m — постоянные.

Определим параметр k_m . В волноводе решение должно удовлетворять условию периодичности по φ , т.е. необходимо, чтобы $\dot{E}_{zmn}(r, \varphi) = \dot{E}_{zmn}(r, \varphi + 2\pi)$. Это условие играет роль граничного условия по φ . Поэтому необходимо $\Phi_m(\varphi) = \Phi_m(\varphi + 2\pi)$. Этому условию удовлетворяет общее решение, когда $k_m = m$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, $\Phi_m(\varphi) = C_m \cos(m\varphi + \psi_m)$. Поэтому $\partial^2 \Phi_m / \partial \varphi^2 = -m^2 \Phi_m$. При этом из (6.46) получаем

$$\frac{\partial^2 R_{mn}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{mn}}{\partial r} + \left(k_{\perp mn}^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R_{mn} = 0$$

— обыкновенное дифференциальное уравнение. Оно определяет собой класс специальных функций — функций Бесселя (цилиндрических функций, см. § П.3). Общим решением уравнения является

$$R_{mn}(r) = b_{mn} J_m(k_{\perp mn} r) + d_{mn} N_m(k_{\perp mn} r), \quad (6.52)$$

где b_{mn}, d_{mn} — постоянные коэффициенты. Графики зависимостей функций Бесселя и Неймана порядка $m=0, m=1, m=2$ от аргумента ξ изображены на рис. 6.10. При $m=0$ функция $J_0(\xi)$ подобна $\cos \xi$. Точки на оси ξ , в которых функция обращается в нуль, называются корнями функции $J_0(\xi)$. Первый корень $v_{01} \approx 2,405$, второй корень $v_{02} \approx 5,52$ и т.д. Корней бесконечное количество ($n=1,2,\dots$), обозначим их через $v_{01}, v_{02}, \dots, v_{0n}, \dots$. Функция Бесселя 1-го порядка $J_1(\xi)$ имеет корни $v_{11} \approx 3,83$, $v_{12} \approx 7,02$ и т.д. Обозначим их через v_{1n} . Вообще корни уравнения $J_m(\xi) = 0$ обозначим через v_{mn} (см. § П.3).

Функции Неймана при $\xi \rightarrow 0$ (т.е. при $r \rightarrow 0$) по (П.3.5) имеют особенности, т.е. $N_m(\xi) \rightarrow -\infty$. Но на оси волновода (при $r=0$) $\dot{E}_{zmn}(0, \varphi)$ должно быть конечной величиной — это требование вытекает из физических соображений: при всех z на оси волновода ($r=0$) нет причин для обращения в бесконечность продольной составляющей векторов искомого поля. Поэтому в (6.52) необходимо положить $d_{mn} = 0$. Тогда $R_{mn} = b_{mn} J_m(k_{Lmn} r)$. Таким образом, по (6.50) имеем

$$\dot{E}_{zmn}(r, \varphi) = e_{mn} J_m(k_{Lmn} r) \cos(m\varphi + \psi_m),$$

где $e_{mn} = b_{mn} \cdot C_m$.

Поперечный коэффициент распространения k_{Lmn} определяем из граничного условия (6.47):

$$\dot{E}_{zmn}(a, \varphi) = e_{mn} J_m(k_{Lmn} a) \cos(m\varphi + \psi_m) = 0.$$

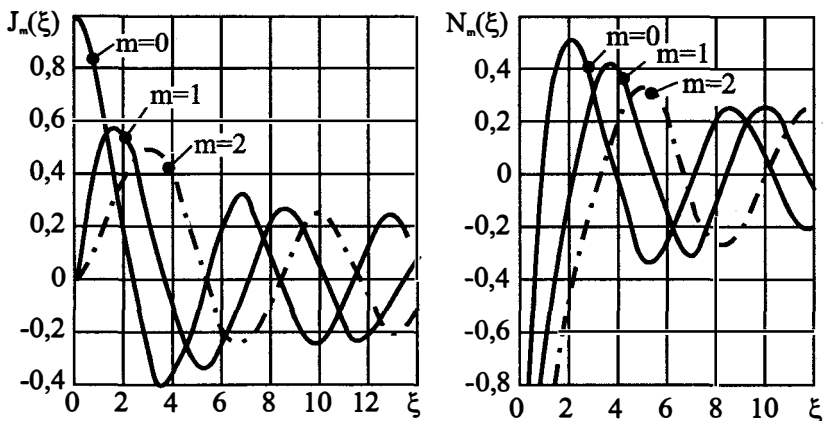


Рис. 6.10. Графики функций Бесселя и Неймана

Это равенство удовлетворяется, если $J_m(k_{\perp mn}a) = 0$. Корнями этого трансцендентного дисперсионного уравнения являются $v_{mn} = k_{\perp mn}a$. Отсюда $k_{\perp mn} = v_{mn}/a$. Найдены собственные функции 1-й граничной задачи. Таким образом, решением задачи является

$$\dot{E}_{zmn}(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e_{mn} J_m \left(v_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos(m\varphi + \Psi_m) e^{\pm i h_{mn} z}, \quad (6.53)$$

где $h_{mn} = (k^2 - k_{\perp mn}^2)^{1/2} = [k^2 - (v_{mn}/a)^2]^{1/2}$. Векторы $\dot{E}_{\perp mn}^3, \dot{H}_{\perp mn}^3$ вычисляются по (6.29).

3. Решение граничной задачи о возможности существования H_{mn} -волн выполняется аналогичным образом. Решение уравнения (6.48) имеет вид

$$\dot{H}_{zmn}(p_{\perp}) = h'_{mn} J_m(k_{\perp mn} r) \cos(m\varphi + \Phi_m),$$

где h'_{mn}, Φ_m — постоянные, а поперечный коэффициент распространения $k_{\perp mn}$ необходимо определить из (6.49), откуда получаем $\partial J_m(k_{\perp mn}/a)/\partial a = 0$. Решением этого трансцендентного (дисперсионного) уравнения являются корни $v'_{mn}, n = 1, 2, 3, \dots$ (см. § П.3), соответствующие n -м экстремумам функции $J_m(\xi)$ (рис. 6.10) и, значит, $k_{\perp mn} = v'_{mn}/a$.

Таким образом, найдены собственные функции 2-й граничной задачи и решением задачи является

$$\dot{H}_z(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h'_{mn} J_m \left(v'_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos(m\varphi + \Phi_m) e^{\pm i h_{mn} z}, \quad (6.54)$$

где $h_{mn} = (k^2 - k_{\perp mn}^2)^{1/2} = [k^2 - (v'_{mn}/a)^2]^{1/2}$. Векторы $\dot{E}_{\perp mn}^M, \dot{H}_{\perp mn}^M$ вычисляются по (6.28).

4. По известным значениям продольных составляющих векторов поля (6.53) и (6.54) с помощью (6.29) и (6.28) могут быть определены поперечные составляющие E_{mn} - и H_{mn} -волн:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{rnn}^3 &= \frac{i\omega \tilde{\epsilon}_a}{k_{\perp mn}^2 r} \frac{\partial \dot{E}_{zmn}}{\partial \varphi}, & \dot{H}_{\varphi mn}^3 &= -\frac{i\omega \tilde{\epsilon}_a}{k_{\perp mn}^2} \frac{\partial \dot{E}_{zmn}}{\partial r}, \\ \dot{E}_{rnn}^3 &= \mp Z_{\varphi mn} \dot{H}_{\varphi mn}^3, & \dot{E}_{\varphi mn}^3 &= \pm Z_{\varphi mn} \dot{H}_{rnn}^3; \\ \dot{E}_{rnn}^M &= -\frac{i\omega \mu_a}{k_{\perp mn}^2 r} \frac{\partial \dot{H}_{zmn}}{\partial \varphi}, & \dot{E}_{\varphi mn}^M &= \frac{i\omega \mu_a}{k_{\perp mn}^2} \frac{\partial \dot{H}_{zmn}}{\partial r}, \\ \dot{H}_{rnn}^M &= \mp \dot{E}_{\varphi mn}^M Z_{\varphi mn}^{-1}, & \dot{H}_{\varphi mn}^M &= \pm \dot{E}_{rnn}^M Z_{\varphi mn}^{-1}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

где $Z_{э, mn} = Wh_{mn} / k$, $Z_{м, mn} = Wk / h_{mn}$.

5. Итак, в круглом волноводе может существовать бесконечное количество E_{mn} - и H_{mn} -волн. Каждой паре значений m и n соответствуют определенные типы электрических и магнитных волн. Целое число m равно числу стоячих полуволн поля (*числу вариаций поля*), укладываемых по концентрической окружности в волноводе. Целое число n характеризует распределение стоячей волны поля вдоль радиуса волновода (вдоль координаты r) и равно числу целых и нецелых полуволн поля, укладываемых вдоль радиуса волновода.

Круглый волновод так же, как прямоугольный, обладает избирательными свойствами: при заданном радиусе a распространяющимися являются волны, у которых β_{mn} — действительные числа, затухающими — «волны», у которых β_{mn} — мнимые числа. Длина волны, при которой $\beta_{mn} = 0$, является критической. Если диэлектрик, заполняющий волновод, не имеет потерь, то $k = \beta = 2\pi/\lambda$. Для E_{mn} -волн получаем: $[(2\pi/\lambda_{E, kpmn})^2 - (v_{mn}/a)^2]^{1/2} = 0$. Для H_{mn} -волн: $[(2\pi/\lambda_{H, kpmn})^2 - (v'_{mn}/a)^2]^{1/2} = 0$. Поэтому $\lambda_{E, kpmn} = 2\pi a / v_{mn}$, $\lambda_{H, kpmn} = 2\pi a / v'_{mn}$. Наименьшим из корней v_{mn} является $v_{01} = 2,405$ (см. § ПЗ и рис. 6.10). Этому значению корня соответствует наибольшая критическая длина волны $\lambda_{E, kр01} = 2,61a$. Наименьшим из корней v'_{mn} является $v'_{11} = 1,84$. Ему соответствует наибольшая критическая длина волны $\lambda_{H, kр11} = 3,41a$. Это самое большое значение критической длины волны для всех типов E_{mn} - и H_{mn} -волн. Радиус волновода при распространении H_{11} -волны является самым малым. Поэтому H_{11} -волну называют волной основного типа круглого волновода. Все другие типы волн являются высшими.

Длина волны в волноводе, фазовая и групповая скорости рассчитываются по (6.31).

Наибольшее значение критической длины волны из высших типов волн имеет E_{01} -волна, $\lambda_{E, kр01} = 2,61a$. Поэтому условием существования *одноволнового режима* в круглом волноводе является $2,61a < \lambda < 3,41a$. Этому неравенству соответствует *наибольший коэффициент перекрытия рабочего диапазона длин волн* (и диапазона частот) $3,41/2,61 \approx 1,3$.

6. По правилу (1.60) с помощью (6.55) и (6.53), (6.54) можно определить мгновенные значения всех составляющих векторов ЭМ поля

в волноводе и для $t = t_1$ построить силовые линии полей E_{mn} и H_{mn} -волн. Для волн типа H_{01}, H_{11}, E_{01} и E_{02} силовые линии изображены на рис. 6.11. Силовые линии (основной) H_{11} -волны мало отличаются от силовых линий (основной) H_{10} -волны прямоугольного волновода.

Вектор плотности поверхностного электрического тока на стенке волновода при распространении H_{11} -волны имеет продольную и поперечную составляющие, так как на стенке (при $r = a$) отличны от нуля $\dot{H}_{\phi 11}^M$ и $\dot{H}_{z 11}^M$. При распространении H_{01} -волны поперечная составляющая $\dot{H}_{\phi 01}^M$ отсутствует, поэтому продольная составляющая вектора плотности поверхностного тока отсутствует, ток является поперечным, поперечные щели в стенке волновода мало влияют на поле этой волны.

В круглом волноводе, как и в прямоугольном, возможно *вырождение типов волн*. Например, вырожденными являются поля типов волн H_{0n} и E_{1n} , имеющие одинаковые критические длины волн, так как $J'_0(x) = -J_1(x)$ и поэтому корни уравнения $J'_0(x) = 0$ равны корням уравнения $J_1(x) = 0$.

Поля типов волн H_{01} и E_{01} (как и H_{0n}, E_{0n}) однородны по координате ϕ (азимутально однородны), т.е. они обладают цилиндрической симметрией. При $m \neq 0$ поля типов волн H_{mn} и E_{mn} несимметричны (неоднородны) по углу ϕ . При вырождении типов волн возможны случаи, когда одному и тому же значению коэффициента распро-

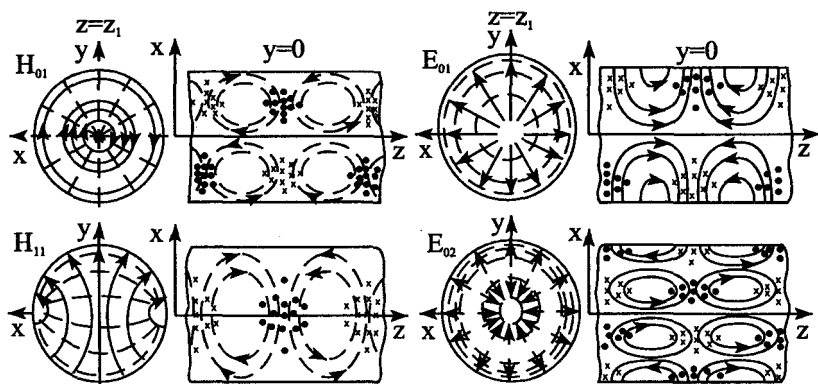


Рис. 6.11. Силовые линии полей волн H_{01}, H_{11}, E_{01} и E_{02}

странения β_{mn} соответствуют силовые линии полей, отличающиеся только поворотом вокруг продольной оси на угол 90° . Чтобы пояснить это явление, учтем, что в (6.53), (6.54) $\cos(m\varphi + \psi_m) = \cos m\varphi \cos \psi_m - \sin m\varphi \sin \psi_m = C_{1m} \cos m\varphi + C_{2m} \sin m\varphi$. Это значит, что по (6.55) возможно существование H_{mn} -волн, отличающихся между собой лишь поворотом вокруг оси Oz на некоторый угол. Аналогично и для E_{mn} -волн.

Обозначим волны, соответствующие $\cos m\varphi$, через $E_{mn}^{\text{ч}}, H_{mn}^{\text{ч}}$ (четные), а волны, соответствующие $\sin m\varphi$ — через $E_{mn}^{\text{н}}, H_{mn}^{\text{н}}$ (нечетные). Критические длины волн $E_{mn}^{\text{ч}}$ и $E_{mn}^{\text{н}}$ и волн $H_{mn}^{\text{ч}}$ и $H_{mn}^{\text{н}}$ совпадают. Это явление называют *поляризационным вырождением*.

Пусть источник возбуждает волну $H_{11}^{\text{ч}}$, поляризованную в плоскости yz . На возможных нерегулярностях волновода часть мощности этой волны передается волне $H_{11}^{\text{н}}$, поляризованной в плоскости xz , при этом возникает разность фаз составляющих векторов поля волн $H_{11}^{\text{ч}}$ и $H_{11}^{\text{н}}$. Значит, в некотором сечении *возбуждается эллиптически поляризованная волна с неустойчивой плоскостью поляризации*.

7. Коэффициент затухания волн α_{mn} , обусловленный потерями в металлических стенках, рассчитывается по (6.40). При этом мощность, переносимая H_{mn} - или E_{mn} -волной через поперечное сечение S_{\perp} волновода, вычисляется по (6.35). Учитывая, что $\dot{E}_{\perp mn}^{\text{M}(\varnothing)} = \mathbf{1}_r \dot{E}_{r mn}^{\text{M}(\varnothing)} + \mathbf{1}_\varphi \dot{E}_{\varphi mn}^{\text{M}(\varnothing)}$, получаем

$$\dot{P}_{0\perp}^{\text{M}(\varnothing)} = \frac{1}{2Z_{\text{M}(\varnothing), mn}^*} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[\left| \dot{E}_{r mn}^{\text{M}(\varnothing)}(r, \varphi) \right|^2 + \left| \dot{E}_{\varphi mn}^{\text{M}(\varnothing)}(r, \varphi) \right|^2 \right] r dr d\varphi.$$

Учтем, что на контуре l (рис. 5.2) $\dot{H}_{\text{mn}}^{\text{M}(\varnothing)} = \mathbf{1}_\varphi \dot{H}_{\varphi mn}^{\text{M}(\varnothing)} + \mathbf{1}_z \dot{H}_{z mn}^{\text{M}(\varnothing)}$.
Имеем

$$\oint_l \left| \dot{H}_{\text{mn}}^{\text{M}(\varnothing)}(p_{\perp}) \right|^2 dl = \int_0^{2\pi} \left[\left| \dot{H}_{\varphi mn}^{\text{M}(\varnothing)}(a, \varphi) \right|^2 + \left| \dot{H}_{z mn}^{\text{M}(\varnothing)}(a, \varphi) \right|^2 \right] a d\varphi.$$

Подставляя в эти выражения значения составляющих векторов поля из (6.55), выполняя интегрирование и используя результат в (6.40), получим для H_{mn} -волн

$$\alpha_{mn} = R_1(aW\Gamma_{mn})^{-1} \begin{cases} \lambda^2 / \lambda_{kp,mn}^2, & m = 0, \\ m^2 / (v_{mn}'^2 - m^2) + \lambda^2 / \lambda_{kp,mn}^2, & m > 0; \end{cases} \quad (6.56)$$

для E_{mn} -волн

$$\alpha_{mn} = R_1(aW\Gamma_{mn})^{-1}. \quad (6.57)$$

Из (6.56) следует, что коэффициент затухания α_{0n} азимутально-однородных H_{0n} -волн с уменьшением λ (с ростом частоты) монотонно и неограниченно убывает. Причина этого аномального явления состоит в том, что составляющая $H_{\varphi 0n}^M$, как видно из (6.55), отсутствует (так как у азимутально-однородных волн $\partial/\partial\varphi = 0$), значит, продольного тока в металле нет. Составляющая \dot{H}_{zmn} , порождающая поперечный ток, с уменьшением λ уменьшается быстрее, чем возрастает сопротивление металла R_1 , что и приводит к уменьшению джоулевых потерь в металле. Это явление можно использовать для создания линий передачи энергии на большие расстояния с малыми потерями.

Графики $\alpha_{mn}(\lambda)$ для медного волновода при $a = 15$ мм, заполненного сухим воздухом при нормальном давлении (рис. 6.12), показывают, что волна основного типа имеет значительное затухание. При $a/\lambda > 0,88$ для азимутально-однородной H_{01} -волны α_{01} становится меньше α_{11} волны основного типа. Существенное уменьшение α_{01} можно получить при больших a/λ .

8. Обладая простотой изготовления, круглый волновод по сравнению с прямоугольным имеет недостатки: а) коэффициент перекрытия рабочего диапазона одноволнового круглого волновода, равный 1,306, существенно меньше этого коэффициента прямоугольного волновода, б) неустойчивость поляризации, в) возможность изменения только одного параметра — радиуса — уменьшает возможность решения ряда практических задач (в прямоугольном волноводе можно менять два размера стенок).

Волну типа E_{01} в круглом волноводе используют в устройствах, в которых поле должно иметь азимутальную однородность (например, вращающиеся сочленения волноводов). Для существования волны радиус волновода должен удовлетворять условию $2,06a < \lambda < 2,61a$, при этом H_{11} -волна является паразитной, для ее устранения необходимо применение поляризационных фильтров.

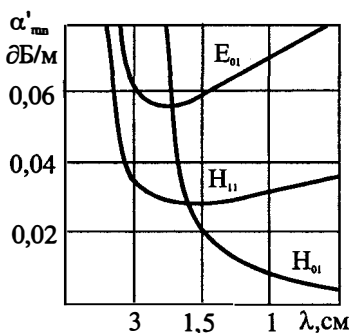


Рис. 6.12. Коэффициенты затухания волн в круглом волноводе

Применение круглых волноводов с рабочей волной типа H_{01} для построения линий связи в миллиметровом диапазоне длин волн может обеспечить малые значения коэффициента затухания α_{01} и чрезвычайно широкую полосу частот. Но при $a/\lambda > 3+4$ в волноводе распространяющимися, кроме волны высшего типа H_{01} , является большое количество других волн высшего типа, которые имеют резко отличающиеся групповые скорости. Волновод является многоволновым. Значит, возможны большие искажения сигналов. На нерегулярностях волновода возможно преобразование H_{01} -волны в другие высшие типы волн и, наоборот, преобразование волн других высших типов в H_{01} -волну. Для исключения этих преобразований волновод необходимо выполнять с высокой точностью и располагать в нем устройства для подавления паразитных типов волн. При этом линия связи становится дорогой.

Решение задачи возбуждения круглого волновода, расчет мощности и сопоставления излучения можно найти в [10].

9. При применении одноволновых волноводов в качестве фидерных трактов, как уже отмечалось в § 6.3, считают нижней границей диапазона длин волн длину волны первого высшего типа $\lambda_{кр.м}$ (соответствующая частота $f_{кр.м}$). Пусть $\lambda_{кр}$ и $f_{кр}$ — длина волны и частота основного типа волны. Тогда наибольшим коэффициентом перекрытия рабочего диапазона длин волн T_m называют отношение $T_m = \lambda_{кр} / \lambda_{кр.м} = f_{кр.м} / f_{кр}$. Для прямоугольных волноводов существуют нормы [11] на коэффициент перекрытия, при котором обеспечивается надежная работа одноволнового волновода. Коэффициент перекрытия определяется отношением верхней $f_v = 0,95 f_{кр.м}$ и нижней $f_n = 1,25 f_{кр}$ частот рабочей полосы: $T_p = f_v / f_n = 0,76 T_m$. Но этим нормам следуют нестрого: иногда принимают $f_v = (0,9 + 0,975) f_{кр.м}$, $f_n = 1,2 f_{кр}$. Тогда $T_p = (0,75 + 0,816) T_m$.

Для круглых волноводов применяют менее жесткие нормы: $T_p = 0,975 f_{кр.м} / 1,1 f_{кр} = 0,886 T_m$.

6.7. Эллиптический волновод

1. Постановка граничных задач о существовании E_{mn} -волн и H_{mn} -волн в полый металлической регулярного эллиптического сечения трубе, заполненной однородным изотропным диэлектриком (рис. 5.1.и), отличается от постановки задачи для металлической трубы с круговым поперечным сечением только тем, что граничные условия (6.47), (6.49) ставятся не на поверхности кругового, а на поверхности эллиптического цилиндра. Для решения задач вводится ортогональная криволинейная система координат эллиптического цилиндра ξ, η, ζ , в которой граничные условия задаются на поверхности $\xi = \xi_0$, являющейся поверхностью эллиптического цилиндра.

Решение уравнений Гельмгольца (6.46) и (6.48) ищутся в виде разложений по собственным функциям эллиптического цилиндра — четным и нечетным угловым функциям Матье. Критические длины волн находят решением трансцендентных уравнений, получаемых из граничных условий.

Расчет параметров эллиптического волновода возможен только численными методами.

2. Характеристикой эллипса является эксцентриситет $e = [1 - (b/a)^2]^{1/2}$, где b и a — малая и большая полуоси. Наименование полей типов волн в эллиптическом и круглом волноводах совпадают. Но *поляризационное вырождение в эллиптическом волно-*

воде отсутствует, так как критические длины волн полей типов волн H_{mn}^q , H_{mn}^h и полей типов волн E_{mn}^q , E_{mn}^h не совпадают.

На рис. 6.13,а приведены силовые линии полей H_{11}^q , H_{11}^h и E_{01}^q в поперечных сечениях волновода при $t = t_1$, критические длины волн полей H_{m1}^q при $e \rightarrow 1$ при постоянном a остаются конечными, так как силовые линии полей H_{m1}^q аналогичны силовым линиям H_{10} -волны в прямоугольном волноводе, размер широкой стенки которого равен большой оси эллипса. С ростом e меняется только размер боковой стенки волновода (малая полуось), а в прямоугольном волноводе критическая длина волны не зависит от размера боковой стенки. При любом эксцентриситете наибольшая критическая длина волны $\lambda_{h,11}^q$ остается у H_{11}^q -волны. Поэтому H_{11}^q -волну считают основной волной эллиптического волновода. На рис. 6.13,б приведены графики зависимостей критических длин волн $\lambda_{xp,11}^q$ и $\lambda_{kp,11}^h$ поля типа H_{11}^q , и $\lambda_{xp,01}^q$ поля типа E_{01}^q от величины эксцентриситета [11]. Оптимальное отношение размеров эллиптического волновода $b/a = 0,5 + 0,6$ выбирается из тех же соображений, что для прямоугольного. При $b/a = 0,5$ волна H_{21}^q высшего типа имеет критическую длину волны $\lambda_{xp,21}^q$ в 1,82 раза меньшую, чем $\lambda_{kp,11}^h$ (рис. 6.13,б). Поэтому наибольший коэффициент перекрытия рабочего диапазона длин волн равен $T_m = 1,82$. Коэффициент перекрытия выбирается из условия $f_b = 0,95f_{kp}$, $f_n = 1,2f_{kp}$: $T_p = 0,792T_m$. При этом получают нежесткие требования к допускам на размеры волновода, фазовая и групповая скорости в рабочей полосе частот изменяются незначительно. Коэффициент затухания уменьшается с увеличением

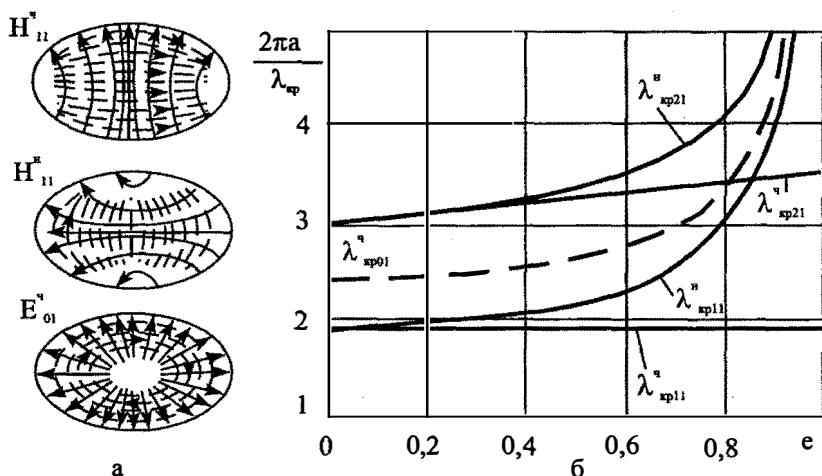


Рис. 6.13. Силовые линии полей и зависимости критических длин волн от эксцентриситета

частоты и близок к минимальному своему значению.

Характеристическое сопротивление H_{11}^N -волны определяется выражением $Z_{м,11}^N \approx 2bW_0 / a\Gamma_{11}$. Расчеты коэффициента затухания H_{11}^N -волны показывают, что при одном и том же периметре поперечного сечения (при одинаковых затратах металла на изготовление волновода) эллиптические волноводы выгоднее прямоугольных и круглых в энергетическом отношении. Величина джоулевых потерь в эллиптическом волноводе со значением $b/a = 0,63 + 0,53$ от 2,25 до 1,5 раза меньше, чем в начале и конце рабочего диапазона частот круглого волновода и приблизительно в 1,2 раза меньше, чем в прямоугольном волноводе (при одинаковых периметрах).

На основе эллиптического волновода разработан гибкий гофрированный в резиновой оплетке одноволновый волновод.

Расчет параметров эллиптических волноводов можно выполнить с помощью результатов работ [12, 13].

6.8. Волноводы П- и Н-образного сечения

1. Для увеличения коэффициента перекрытия рабочего диапазона длин волн применяются волноводы сложных сечений. Основными из них являются Н- и П-образные волноводы (рис. 6.14, а, б). Они представляют собой видоизмененную конструкцию прямоугольного волновода и по сравнению с последним имеют большую критическую длину волны основного типа волны и меньшее характеристическое сопротивление при одинаковых внешних размерах. Как видно из рисунка, Н-образный волновод можно рассматривать как волновод, состоящий из двух одинаковых П-образных волноводов, если на линии симметрии CC' выполняются соответствующие граничные условия. Поэтому для расчетов создают в основном математические модели П-образных волноводов. Кроме того, в П-образном волноводе имеется линия симметрии QQ' , позволяющая рассматривать только одну, Г-образную часть волновода при условии, что на линии QQ' поставлены соответствующие граничные условия.

Постановка задач о существовании E_{mn} - и H_{mn} -волн в волноводах сложных поперечных сечений отличается от задач (6.46)–(6.49) только тем, что граничные условия задаются не на координатной поверхности. Области, в которых ищутся решения граничных задач, являются сложными и их собственные функции неизвестны. Поэтому Г-образная область разбивается [14] на две частичные прямоугольные области: область-I и область-II (рис. 6.14, в). Системы собственных функций прямоугольных областей известны. В области-I решение граничной задачи E_{zmn}^I и H_{zmn}^I может быть разложено по системе собственных функций этой области (тригонометрических) с неопределенными коэф-

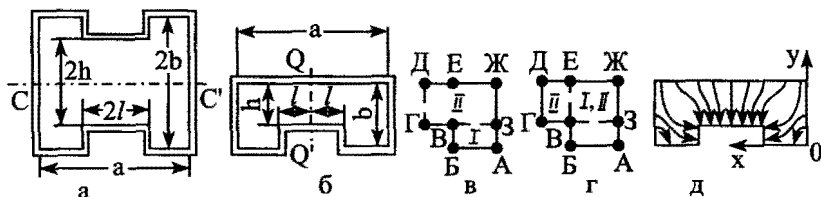


Рис. 6.14. Поперечные сечения Н- и П-образного волновода, их частичные области и силовые линии поля Е

коэффициентами e_{mn}^I или h_{mn}^I . В области-II решение граничной задачи \dot{E}_{zmn}^{Π} или \dot{H}_{zmn}^{Π} может быть разложено по системе собственных функций этой области (тригонометрических) с неопределенными коэффициентами e_{mn}^{Π} , h_{mn}^{Π} . На линии ВЗ касательные составляющие векторов напряженностей полей области-I и области-II должны быть равны («сшиваются») в соответствии с граничными условиями (1.85). На линии ГД граничные условия для \dot{E}_{zmn}^{Π} или \dot{H}_{zmn}^{Π} устанавливаются для четных и нечетных по x типов волн. На идеально проводящей части границы граничные условия для \dot{E}_{zmn} и \dot{H}_{zmn} имеют обычный вид.

Из граничных условий получаются бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов e_{mn}^I , e_{mn}^{Π} , h_{mn}^I , h_{mn}^{Π} . Для вычисления коэффициентов осуществляется редукция этих систем. Порядок образующихся систем линейных алгебраических уравнений определяет точность реализации метода. При увеличении порядка решаемых систем уравнений для получения правильного решения необходимо соблюдать определенное соотношение между порядком редуцированной системы и числом членов, учитываемых в рядах, входящих в матричные системы. В сложных случаях получение таких соотношений затруднительно или невозможно. Физической причиной этого является особенность ЭМ поля на конце В (в точке В) линии сшивания ВЗ, т.е. поведение поля на ребре граничной поверхности.

Усовершенствованным методом является метод частичных пересекающихся областей [15–17]. При этом область-I ограничена контуром АБВЕЖА, а область-II — контуром ВГДЕЖЗВ (рис. 6.14,з). Область, ограниченная контуром ВЕЖЗВ, является общей. Если получить приближенное решение задачи в области-I, то приближенные значения поля на линиях ВЕ и ВЗ можно использовать для вычисления коэффициентов разложения поля в области-II. Этим путем можно построить алгоритм последовательного приближения к искомому решению задачи.

2. Получены [16] трансцендентные уравнения для определения критических длин волн $\lambda_{кр,m0}$ полей H_{m0} -типов. Результаты расчетов $\lambda_{кр10}$, $\lambda_{кр20}$ для некоторых значений параметров П-образного волновода изображены на рис. 6.15,а. Из графиков

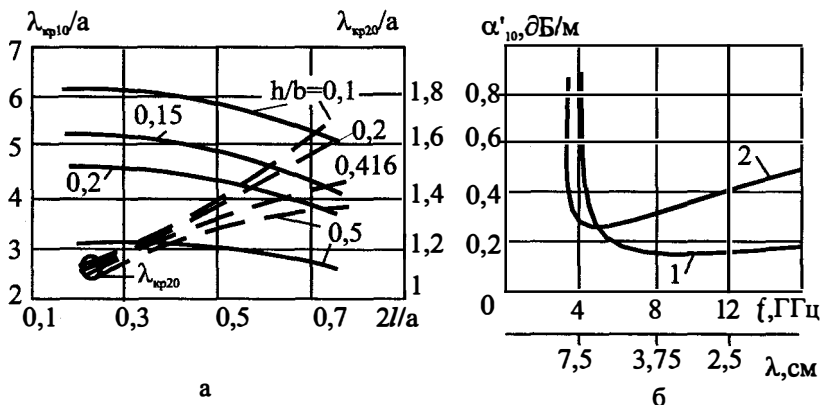


Рис. 6.15. Зависимость $\lambda_{кр,mn}$ П-образного волновода от его размеров и коэффициент затухания Н-образного волновода

следует, что критическая длина волны λ_{kp10} всегда меньше λ_{kp20} , поэтому H_{10} -волна в П-образном (и Н-образном) волноводе является волной основного типа. Критическая длина волны П-образного волновода всегда больше критической длины волны, равной $2a$, прямоугольного волновода. Ближайшей критической длиной волны является λ_{kp20} поля H_{20} высшего типа. Значения λ_{kp10} увеличиваются с уменьшением h и $2l$. При фиксированных внешних размерах λ_{kp10} существенным образом зависит от h/b и $2l/a$. Значения λ_{kp20} возрастают с уменьшением h/b и существенно возрастают при увеличении $2l/a$. При фиксированных внешних размерах волновода λ_{kp20} по сравнению с λ_{kp10} больше зависит от отношения h/b .

Таким образом, с ростом ширины $2l$ П-образного выступа при постоянной его высоте ($h/b = const$) наибольший коэффициент перекрытия рабочего диапазона длин волны T_m уменьшается. Оптимальными для увеличения T_m являются значения $2l/a \approx 0,2 + 0,5$ и малые значения h/b .

Волной типа H_{10} в П- и Н-образных волноводах называют волну, аналогичную H_{10} -волне в прямоугольном волноводе. На рис. 6.14,д изображены силовые линии электрического поля H_{10} -волны при $t = t_1$. В отличие от прямоугольного волновода E_{y10} зависит не только от x , но и от y , и имеется составляющая $E_{x10}(x, y)$. Концентрация силовых линий электрического поля происходит у острия выступа.

3. Пример. Найти наибольшие коэффициенты перекрытия рабочего диапазона длин волн П-образного волновода при высоте П-образного выступа в $b-h = 0,9b$ и двух значениях его ширины: $2l = 0,2a$ и $2l = 0,7a$.

Из графиков, изображенных на рис. 6.15,а, при $b-h = 0,9b$ ($h/b = 0,1$) и $2l/a = 0,2$ находим $\lambda_{kp10} = 6,29a$, $\lambda_{kp20} \approx 1,09a$, поэтому $T_m \approx 5,75$. При $h/b = 0,1$, $2l/a = 0,7$ находим $\lambda_{kp10} \approx 5,23a$, $\lambda_{kp20} \approx 1,63a$, поэтому $T_m \approx 3,2$.

За счет увеличения в 3,5 раза ширины выступа происходит уменьшение T_m в 1,8 раза.

4. Пример. Найти T_m П-образного волновода при высоте П-образного выступа $b-h = 0,5b$ и двух значениях его ширины $2l = 0,2a$ и $2l = 0,7a$.

Из графиков, изображенных на рис. 6.15,а, при $h/b = 0,5$ и $2l/a = 0,2$ находим $\lambda_{kp10} \approx 3,06a$, $\lambda_{kp20} \approx 1,08a$, поэтому $T_m \approx 2,83$. При $h/b = 0,5$, $2l/a = 0,7$ находим $\lambda_{kp10} \approx 2,61a$, $\lambda_{kp20} \approx 1,36a$, поэтому $T_m \approx 1,92$.

За счет увеличения в 3,5 раза ширины выступа происходит уменьшение T_m почти в 1,5 раза.

Увеличение h/b приводит к росту T_m в 2 + 1,7 раза.

5. Коэффициент затухания распространяющихся типов волны можно определить по (6.40). Для примера на рис. 6.15,б приведены результаты расчетов коэффициента затухания H_{10} -волны в медных Н-образных волноводах, заполненных сухим воздухом, график 1 соответствует волноводу с $a = 23$ мм, $2b = 10$ мм, $2l = 9,2$ мм, $2h = 3,62$ мм (у которого $\lambda_{kp10} = 71,4$ мм, $\lambda_{kp20} = 23,4$ мм, $P_{0,1\text{разр}} = 410$ кВт), а график 2 — соответ-

вует волноводу с $a = 23$ мм, $2b = 10$ мм, $2l = 9,2$ мм, $2h = 1,4$ мм (у которого $\lambda_{кр10} = 106,2$ мм, $\lambda_{кр20} = 22,2$ мм, $P_{0,разр} = 150$ кВт).

Сравнение этих графиков с соответствующим графиком для прямоугольного волновода, изображенным на рис. 6.8,б, показывают, что *H-образный волновод* при одинаковых габаритах имеет в рабочем диапазоне длин волн в лучшем случае в 2–3 раза больший коэффициент затухания. При этом *H-образный волновод* обладает значительно большим значением T_m . Отметим, что *H-образный медный волновод* с размерами $a = 4$ мм, $2b = 0,5a$, $2l = 1,2$ мм, $2h = 0,8$ мм в рабочем диапазоне длин волн имеет $\alpha'_{10} \approx (1,8 + 2)$ дБ/м. Эти результаты объясняются увеличением длины контура l в *H-образном* (и *П-образном*) волноводе по сравнению с контуром l в прямоугольном волноводе. В миллиметровом диапазоне длин волн значение сопротивления R_1 велико (оно увеличивается пропорционально $f^{1/2}$, где f — частота).

H-образный волновод имеет меньшее характеристическое сопротивление H_{01} -волны, чем прямоугольный волновод тех же внешних размеров.

Разрядное значение мощности *H-образных* (и *П-образных*) волноводов определяется по (6.42). Выше приведены значения $P_{0,разр}$ для двух *H-образных волноводов*. Они меньше приблизительно в 2,5–7 раз значения разрядной мощности прямоугольного волновода тех же внешних размеров. Уменьшение $P_{0,разр}$ в *H-образных* (и *П-образных*) волноводах объясняется наличием *П-выступов* внутри волноводов. В области ребер возникают большие значения напряженности электрического поля (рис. 6.14,д). В оригиналах ребра закругляют для увеличения $P_{0,разр}$.

6. Таким образом, *П-* и *H-образные волноводы* по сравнению с прямоугольными имеют большее значение критической длины волны, более низкое характеристическое сопротивление при одинаковых внешних размерах. Это позволяет уменьшить поперечные размеры направляющей системы. *П-* и *H-образные волноводы* обладают большим коэффициентом перекрытия рабочего диапазона длин волн. Недостатками *П-* и *H-образных волноводов* являются большее по сравнению с прямоугольным волноводом (тех же внешних размеров) значение коэффициента затухания в одноволновом режиме и меньшее значение разрядной мощности.

6.9. Коаксиальная линия

1. В круглом и прямоугольном волноводах поперечные волны не могут существовать. Это утверждение можно обосновать так: предположим, что в волноводе распространяется волна, у которой векторы \vec{E} и \vec{H} лежат в поперечной плоскости. Силовые линии вектора \vec{H} , являясь замкнутыми, должны охватывать линии тока. Но токи проводимости отсутствуют, поскольку проводников внутри волновода нет. Значит, током может быть только продольный ток смещения. Поэтому должна иметься продольная составляющая вектора \vec{E} . Следовательно, *T-волна* в волноводе не может распространяться. Из этих рассуждений ясно, что для существования *T-волны* в замкнутой направляющей системе необ-

ходимо, чтобы последняя состояла не менее, чем из двух изолированных друг от друга проводников, по которым может протекать ток проводимости. В частности, этому условию удовлетворяет коаксиальная линия (рис. 5.1,в).

Внутренний металлический проводник цилиндрической формы радиуса b изолирован от внешнего цилиндра радиуса a с помощью диэлектрика с малыми потерями или с помощью тонких диэлектрических шайб. Возбуждается коаксиальная линия щелями, прорезанными во внешнем цилиндре, или электрическими вибраторами.

Задача о существовании E - и H -волн в коаксиальной линии ставится так же, как в случае круглого волновода. Отличие заключается в том, что, кроме внешнего цилиндра имеется внутренний металлический цилиндр, на котором ЭМ поле тоже должно удовлетворять граничным условиям. Ось z ЦСК направим вдоль оси внутреннего цилиндра. Считаем, что коаксиальные цилиндры являются бесконечно проводящими. Тогда граничные условия имеют вид

$$\dot{E}_z = 0 \text{ или } \partial \dot{H}_z / \partial r = 0 \text{ при } r = a, r = b. \quad (6.58)$$

Значит, если рассматривать задачу о возможности существования E_{mn} -волн, то необходимо решить граничную задачу Дирихле — уравнение Гельмгольца (6.46) при граничных условиях

$$\dot{E}_{zmn} = 0 \text{ при } r = a, r = b \quad (6.59)$$

и выполнении условий излучения при $z \rightarrow \pm\infty$ в (6.45).

Если рассматривать задачу о возможности существования H_{mn} -волн, то необходимо решить граничную задачу Неймана — уравнение Гельмгольца (6.48) при граничных условиях

$$\partial \dot{H}_{zmn} / \partial r = 0 \text{ при } r = a, r = b \quad (6.60)$$

и выполнении условий излучения при $z \rightarrow \pm\infty$ в (6.45).

ЭМ поле ищем на интервале $b \leq r \leq a$. Начало координат ($r = 0$) из рассмотрения исключается, поскольку поле в проводнике, при $0 \leq r \leq b$, отсутствует.

2. Волны типа E_{mn} . Общим решением уравнения Бесселя является (6.52). Поскольку $r \neq 0$, то в (6.52) $d_{mn} \neq 0$. Таким образом, решением уравнения Гельмгольца (6.46) является

$$\dot{E}_{zmn}(p_{\perp}) = [e_{mn} J_m(k_{\perp mn} r) + e'_{mn} N_m(k_{\perp mn} r)] \cos(m\varphi + \psi_m), \quad (6.61)$$

где e_{mn} , e'_{mn} , ψ_m — постоянные коэффициенты, а поперечный коэффициент распространения $k_{\perp mn}$ необходимо определить из граничных условий (6.59). Подставляя для этого (6.61) в (6.59), и учитывая, что от r зависят только цилиндрические функции, имеем

$$e_{mn}J_m(k_{\perp mn}a) + e'_{mn}N_m(k_{\perp mn}a) = 0,$$

$$e_{mn}J_m(k_{\perp mn}b) + e'_{mn}N_m(k_{\perp mn}b) = 0.$$

Для существования в направляющей системе ЭМ поля, удовлетворяющего поставленным условиям, необходимо, чтобы $e_{mn} \neq 0$, $e'_{mn} \neq 0$. Тогда определитель этой системы алгебраических уравнений должен быть равен нулю, т.е.

$$J_m(k_{\perp mn}a)/N_m(k_{\perp mn}a) = J_m(k_{\perp mn}b)/N_m(k_{\perp mn}b). \quad (6.62)$$

Это характеристическое (дисперсионное) трансцендентное уравнение, имеет бесконечное количество корней $k_{\perp mn}$ ($n=1,2,3,\dots$), определяющих E_{mn} -волны. Таблицы корней даны, например, в [18]. Первым корнем при $m=0$ (азимутально-однородных волн) является значение $k_{\perp 00} = 0$ при $n=0$. Действительно, при $k_{\perp 0n}b \ll 1$, $k_{\perp 0n}a \ll 1$ справедливы асимптотики (ПЗ.5). Тогда из (6.62) получаем

$$\ln(2/1,78k_{\perp 0n}a) = \ln(2/1,78k_{\perp 0n}b).$$

Это равенство удовлетворяется при $k_{\perp 0n} = 0$. Первым корнем ($n=0$) является $k_{\perp 00} = 0$.

В другом крайнем случае, когда $k_{\perp 0n}a \gg 1$, $k_{\perp 0n}b \gg 1$, справедлива асимптотика (ПЗ.4). Используя ее при $m=0$, имеем $\sin k_{\perp 0n}(a-b) \approx 0$.

Корнями этого уравнения являются $k_{\perp 0n} \approx n\pi/(a-b)$, $n=1,2,3,\dots$. При этом $h_{0n} \approx (k^2 - k_{\perp 0n}^2)^{1/2}$. Поэтому при $k = \beta$ критическая длина E_{0n} -волн $\lambda_{kp,0n} \approx 2(a-b)/n$, а критическая частота $f_{kp,0n} \approx v_{\phi} \cdot n/2(a-b)$.

Таким образом, решением задачи является

$$\dot{E}_z(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{E}_{zmn}(p_{\perp}) e^{\pm i h_{mn} z}. \quad (6.63)$$

Поперечные составляющие \dot{E}_{mn}^z , \dot{H}_{mn}^z определяются по (6.29).

3. Волны типа H_{mn} . Решением уравнения Гельмгольца (6.48) является

$$\dot{H}_{zmn}(p_{\perp}) = [h'_{mn}J_m(k'_{\perp mn}r) + h''_{mn}N_m(k'_{\perp mn}r)] \cos(m\phi + \Phi_m).$$

Из граничного условия (6.60) получаем характеристическое (дисперсионное) уравнение для определения $k'_{\perp mn}$:

$$J'_m(k'_{\perp mn}a)/N'_m(k'_{\perp mn}a) = J'_m(k'_{\perp mn}b)/N'_m(k'_{\perp mn}b),$$

где штрих над цилиндрической функцией означают ее производную по аргументу. Это уравнение имеет бесконечное количество корней $k'_{\perp mn}$. Первым корнем является $k'_{\perp 11} \approx 2/(a+b)$. Ему соответствует $h_{11} \approx (k^2 - k'^2_{\perp 11})^{1/2}$. Поэтому при $k = \beta$ критическая длина H_{11} -волны $\lambda_{кр.11} \approx \pi(a+b)$.

Таким образом, решением задачи является

$$\dot{H}_z(p) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{H}_{zmn}(p_{\perp}) e^{\pm i h_{mn} z}. \quad (6.64)$$

Поперечные составляющие $\dot{E}_{mn}^M, \dot{H}_{mn}^M$ определяются по (6.28).

4. Т-волна. Рассмотрим решение задачи (6.63) при корне $k_{\perp 00} \rightarrow 0$. При $m = 0$ ЭМ поле является азимутально-однородным. Оно аналогично ЭМ полю над бесконечной нитью бегущей волны тока (см. § 2.9, п.8, рис. 2,12,в). Из (6.61) имеем

$$\dot{E}_{z00}(p_{\perp}) = [e_{00} J_0(k_{\perp 00} r) + e'_{00} N_0(k_{\perp 00} r)] \cos \psi_0.$$

Из (6.29) при $k_{\perp 00} \rightarrow 0$ получаем $\dot{E}_{\varphi 00}^3 = 0$, $\dot{E}_{r00}^3 = \pm (i h_{00} / k_{\perp 00}^2) \cdot \partial \dot{E}_{z00} / \partial r$.

Обозначим $e_{00} \cos \psi_0 = k_{\perp 00}^2 \cdot A$, $e'_{00} \cos \psi_0 = k_{\perp 00}^2 \cdot B$, где A и B — постоянные, и найдем производную $\partial \dot{E}_{z00} / \partial r$ при $k_{\perp 00} \rightarrow 0$. Применяя формулу (П3.6) производной цилиндрической функции $Z_0(x)$, а затем асимптотические формулы (П3.5), при $k_{\perp 00} \rightarrow 0$ получаем $\partial \dot{E}_{z00} / \partial r = k_{\perp 00}^2 \cdot 2B / \pi r$.

Подставляем этот результат в предыдущее выражение. Имеем $\dot{E}_{r00}^3 = \pm i h_{00} \cdot 2B / \pi r$. Так как $h_{00} = (k^2 - k_{\perp 00}^2)^{1/2}$, то при $k_{\perp 00} \rightarrow 0$ имеем: $h_{00} = k$. Из (5.12) $Z_{3,00} = W$, $\dot{H}_{\varphi 00}^3 = \mp \dot{E}_{r00}^3 / W$, $\dot{H}_{r00}^3 = 0$.

При $k_{\perp 00} \rightarrow 0$ $\dot{E}_{z00} \rightarrow 0$. Таким образом, при $k_{\perp 00} \rightarrow 0$ отличаются от нуля только составляющие \dot{E}_{r00}^3 и $\dot{H}_{\varphi 00}^3$, продольная составляющая $\dot{E}_{z00} = 0$. Значит, E_{00} -волна выродилась в T_{00} -волну. Обозначим $u_0 = ik2B/\pi$ и опустим индексы. Тогда для Т-волны

$$\dot{E}_r = \pm u_0 e^{\pm i k z} / r, \quad \dot{H}_{\varphi} = \mp W^{-1} \dot{E}_r, \quad \dot{E}_{\varphi} = \dot{E}_z = \dot{H}_z = \dot{H}_r = 0. \quad (6.65)$$

Критическая длина волны при $k = \beta$ определяется выражением $h_{00} = k = \beta_{кр.00} = 2\pi / \lambda_{кр.00} = 0$, т.е. $\lambda_{кр.00} \rightarrow \infty$. Поэтому критическая

частота $f_{\text{кр.00}} = 0$. Фазовая скорость равна $(\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}$, $\lambda_{\text{кр.00}}$ является максимальной, поэтому *T-волна является основной волной коаксиальной линии*. Ближайшую критическую длину волны имеет H_{11} -волна, у которой $\lambda_{\text{кр.11}} \approx \pi(a+b)$. Значит, для существования одноволнового режима необходимо выполнить условие $\pi(a+b) < \lambda < \infty$. E_{mn} -волны имеют ближайшую критическую длину волны $\lambda_{\text{кр.01}} \approx 2(a-b)$.

5. В коаксиальной линии используется как основной параметр *волновое сопротивление линии* Z_n . Его определяют, используя понятие напряжения между проводниками линии.

В ЭМ поле электрическое напряжение между двумя точками зависит от формы пути, соединяющего эти точки. Но в случае распространения *T-волны* силовые линии магнитной индукции лежат только в поперечной плоскости. Поэтому поток вектора $\dot{\mathbf{B}}$ через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, лежащим в поперечной плоскости, равен нулю. Значит, циркуляция вектора $\dot{\mathbf{E}}$ вдоль такого контура равна нулю, т.е. электрическое поле имеет потенциальный характер. Это дает возможность ввести однозначное определение напряжения между лежащими в поперечной плоскости точками двух проводников:

$$\dot{u} = \int_b^a \dot{E}_r dr = \pm \dot{u}_0 \ln(a/b) e^{\pm ikz}. \quad (6.66)$$

Определим ток $i(z)$ на внутреннем (и внешнем) проводнике. По закону полного тока

$$i(z) = \oint_l \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{l} = 2\pi r \dot{H}_\varphi = -2\pi W^{-1} \dot{u}_0 e^{\pm ikz},$$

где $d\mathbf{l} = \mathbf{1}_\varphi r d\varphi$. Тогда *волновое сопротивление коаксиальной линии* определяется выражением

$$Z_n = \mp \dot{u}(z) / i(z) = W \ln(a/b) / 2\pi. \quad (6.67)$$

6. Силовые линии полей волн типа *T*, H_{11} и E_{01} приведены на рис. 6.16.

7. Определим мощность, переносимую *T-волной*. Учитывая, что $\dot{E}_\perp(\rho_\perp) = \mathbf{1}_r \dot{E}_r$ из (5.23) с учетом (6.65) находим

$$P_{0\perp} = \frac{1}{2W^*} \int_{s_\perp} |\dot{E}_r|^2 r dr d\varphi = \frac{1}{2W^*} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left| \frac{\dot{u}_0}{r} \right|^2 r dr d\varphi = \frac{\pi}{W^*} |\dot{u}_0|^2 \ln(a/b). \quad (6.68)$$

Если не учитывать тепловые потери, то $W^* = W$. Подставляя значение $|\dot{u}_0| = |\dot{u}| \ln^{-1}(a/b)$ из (6.66) в предыдущее выражение и учитывая (6.67), имеем

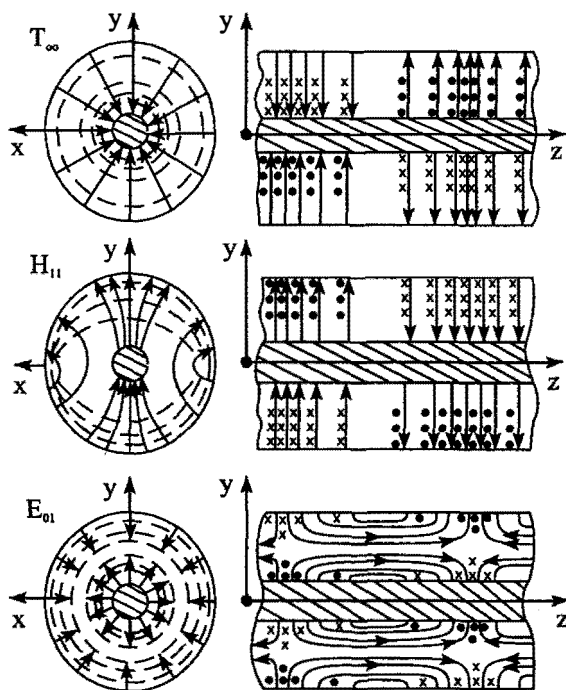


Рис. 6.16. Силовые линии полей волн T , H_{11} и E_{01} в коаксиальной линии

$$P_{0\perp} = \frac{1}{2Z_n} |\dot{u}|^2 = \frac{1}{2} |\dot{u}| \cdot |i(z)| = \frac{1}{2} Z_n |i(z)|^2.$$

С помощью волнового сопротивления линии переносимая основной волной мощность рассчитывается так же, как в теории цепей с сосредоточенными параметрами.

Определим разрядную мощность. Максимальное значение напряженности электрического поля по (6.65) соответствует поверхности внутреннего проводника $r = b$: $|\dot{E}_r|_{\max} = |\dot{u}_0|/b$. Если $|\dot{E}_r|_{\max} = E_{\text{разр}}$, то из (6.67) получаем разрядную мощность

$$P_{0\perp\text{разр}} = \frac{\pi b^2}{W} E_{\text{разр}}^2 \ln a/b. \quad (6.69)$$

Допустимая мощность коаксиальной линии $P_{\text{Доп}} = (0,2 + 0,33)P_{0\perp\text{разр}}$. Разрядная мощность пропорциональна площади поперечного сечения πb^2 внутреннего проводника, зависит от характеристического сопротивления W (ϵ_a диэлектрика), значения $E_{\text{разр}}$ диэлектрика и отношения радиусов a/b . Можно найти оптимальное отношение a/b , обеспечивающее максимум $P_{0\perp\text{разр}}$ при фиксированных a и $E_{\text{разр}}$. Дифференци-

руя (6.68) по b и приравнявая результат нулю, находим это оптимальное отношение $a/b = 1,65$. При $a/b = 1,65$ волновое сопротивление линии (6.67) $Z_{\lambda} \approx 30\epsilon^{-1/2}$ Ом. Диэлектрики, заполняющие линию на частотах $f = 50 \cdot 10^9$ Гц имеют ϵ от 1 до 2,6 (воздух имеет $\epsilon = 1$, полиэтилен — $\epsilon = 2,28$, полистирол — $\epsilon = 2,6$, фторопласт-4 — $\epsilon \approx 2$, полиизобутилен — $\epsilon = 2,3$), поэтому $Z_{\lambda} \approx (19 + 30)$ Ом.

При фиксированном значении a/b для обеспечения одноволнового режима с уменьшением λ необходимо уменьшать b и a . Это приводит к тому, что $R_{0\perp}$ уменьшается как λ^2 . Поэтому при переходе в дециметровый и сантиметровый диапазоны $R_{\perp\text{дон}}$ резко уменьшается и становится меньше соответствующей мощности прямоугольного и круглого волноводов.

8. Коэффициент затухания Т-волны, обусловленный потерями в металлических стенках линии, определяем по (5.24), где интеграл по l состоит из интеграла по окружностям внутреннего и внешнего проводников:

$$\oint_l |\dot{H}_{\tau}(p_{\perp})|^2 dl = \int_0^{2\pi} \left[|\dot{H}_{\Phi}(b)|^2 b + |\dot{H}_{\Phi}(a)|^2 a \right] d\varphi.$$

Подставляя в это выражение \dot{H}_{Φ} из (6.65) и интегрируя, получаем

$$\oint_l |\dot{H}_{\tau}(p_{\perp})|^2 dl = \frac{2\pi}{W^2} |\dot{H}_0|^2 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right).$$

Подставляя этот результат и (6.68) в (5.24), находим

$$\alpha = [R_1 / 2W \ln(a/b)] \cdot (1/b + 1/a). \quad (6.70)$$

Формула позволяет определить оптимальное для получения минимального коэффициента затухания отношение $a/b = 3,59$ при фиксированном a . При этом $Z_{\lambda} = 77\epsilon^{-1/2}$ Ом. Для применяемых в коаксиальных линиях диэлектриков получаем: $Z_{\lambda} \approx 77 \div 48$ Ом.

При уменьшении λ радиусы a и b необходимо уменьшать для обеспечения одноволнового режима. При этом возрастает сопротивление R_1 , что в сантиметровом диапазоне волн приводит к значениям α , превосходящим коэффициенты затухания прямоугольного и круглого волноводов. Поэтому на частотах, больших 1 ГГц, применяют только короткие отрезки коаксиальной линии. На частотах, меньших 1 ГГц, коаксиальные линии применяются очень широко, так как имеют малые поперечные размеры.

Для уменьшения α внутренние поверхности коаксиальной линии, особенно в измерительных устройствах, покрывают слоем серебра (защита от коррозии внутренней медную или латунную поверхность).

Коэффициент затухания Т-волны в диэлектрике, заполняющем коаксиальную линию, рассчитывается так же, как для Т-волны в неограниченном пространстве (§ 2.5). При этом используются значения тангенса угла $\text{tg}\Delta$ электрических потерь: на частоте $f = 10^9$ Гц полиэтилен имеет $\text{tg}\Delta = 4 \cdot 10^{-4}$, полистирол — $\text{tg}\Delta = 2,8 \cdot 10^{-4}$, фторопласт-4 — $\text{tg}\Delta = 2 \cdot 10^{-4}$, полиизобутилен — $\text{tg}\Delta = 5 \cdot 10^{-4}$ [19].

Расчеты показывают, что в гибкой коаксиальной линии (коаксиальном кабеле) на длинах волн до 1,5 м коэффициент затухания, обусловленный потерями в металле, во много раз превосходит коэффициент затухания за счет потерь в диэлектрике и составляет приблизительно около 0,02 дБ/м. Но при уменьшении λ потери в диэлектрике растут и в дециметровом диапазоне длин волн они приблизительно равны потерям в металле (на $\lambda = 16$ см для кабеля РК-6). При дальнейшем уменьшении λ потери в диэлектрике больше потерь в металле: на $\lambda = 3$ см (для РК-6) коэффициент затухания за счет потерь в диэлектрике больше в 2,8 раза коэффициента затухания за счет потерь в металле (0,61 дБ/м) и составляет уже около 1,7 дБ/м.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что при возбуждении прямоугольного волновода элементарным, электрическим вибратором с моментом, параллельным боковым стенкам, для основной волны $a_{10} = (I_y L \sin(\pi x_0 / a) / iab h_0)$.

2. Построить силовые линии электрического и магнитного полей H_{01} -волны в прямоугольном волноводе.

3. Прямоугольный волновод заполнен полистиролом и возбуждается поперечным четвертьволновым электрическим вибратором, параллельным боковым стенкам и расположенным на оси волновода. Вычислить активную составляющую сопротивления излучения на частоте, равной 3 ГГц, если $a = 0,7\lambda$, $b = 0,1\lambda$.

4. Прямоугольный волновод с размерами $a = 0,7\lambda$, $b = 0,1\lambda$ заполнен сухим воздухом и работает в одноволновом режиме. Найти допустимую мощность на частоте, равной 3 ГГц, если коэффициент запаса равен 0,4.

5. Определить коэффициент затухания медного волновода с размерами $a = 0,7\lambda$, $b = 0,1\lambda$, заполненного воздухом и работающего в одноволновом режиме на частоте, равной 12 ГГц.

6. Построить силовые линии электрического и магнитного полей H_{13} - и E_{31} -волн в прямоугольном волноводе.

7. Рассчитать размеры круглого волновода, заполненного фторопластом и обеспечивающего одноволновый режим на частоте, равной 10 ГГц.

8. Рассчитать коэффициент затухания на частоте 10 ГГц круглого медного волновода, заполненного воздухом и работающего в одноволновом режиме. Вычислить групповую скорость волны.

9. Найти наибольший коэффициент перекрытия рабочего диапазона длин волн П-образного волновода при высоте П-образного выступа, равной 0,8 от высоты волновода b , и при ширине выступа, равной 0,6 от ширины волновода a .

10. Выбрать размеры коаксиальной линии для обеспечения одноволнового режима на частоте 50 МГц и рассчитать размеры ее поперечного сечения, если волновое сопротивление должно быть равно 50 Ом (диэлектрик-полистирол).

11. Рассчитать коэффициент затухания коаксиальной линии, работающей в одноволновом режиме на частоте 100 МГц и имеющей волновое сопротивление 50 Ом (диэлектрик-полиизобутилен, металл-медь).

12. Рассчитать поперечные размеры коаксиальной линии, необходимой для работы на E_{01} -волне на частоте 2 ГГц и имеющей волновое сопротивление 50 Ом (диэлектрик-фторопласт).

7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ОТКРЫТЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

7.1. Симметричные линии

1. В качестве линий передачи энергии в диапазонах частот от ОНЧ до ВЧ применяются двухпроводные линии (рис. 5.1,а). Основными преимуществами этих линий (линий Лехера) являются простота конструкции, удобство соединения с симметричными нагрузками, малая стоимость. Но двухпроводная линия — открытая линия, поэтому при увеличении расстояния между ее проводами возрастают потери на излучение. С ростом частоты увеличиваются и джоулевы потери в проводах и изоляторах, служащих для подвески последних.

ЭМ поле двухпроводной линии является *многоволновым*. В ней могут распространяться наряду с основной Т-волной волны высших типов. Появление последних может быть обусловлено случайными нерегулярностями в линии. Высшие типы волн тоже увеличивают потери на излучение.

Как показано в § 2.9 (п.8), над одиночным проводом с бегущей волной тока может распространяться Т-волна. Два параллельных провода с *противофазными токами*, распределенными по закону бегущей волны, образуют двухпроводную линию.

2. Пусть имеем два параллельных провода одинакового радиуса a , расположенных в неограниченном однородном пространстве с параметрами $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$, d — расстояние между проводами ($d \gg a$) (рис. 7.1,а). Считаем, что токи i_1, i_2 вдоль проводов распределены по закону бегущей волны и сдвинуты по фазе относительно друг друга в каждом поперечном сечении на постоянную величину ψ . Необходимо найти векторы \dot{E} и \dot{H} ЭМ поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла, граничным условиям на поверхностях проводов и условиям излучения.

В математической модели считаем, что проводимость проводов $\sigma_1 \rightarrow \infty$, заменяем токи проводов i_1, i_2 плотностями линейных токов \dot{I}_1, \dot{I}_2 параллельных нитей токов, расположенных на расстоянии d друг от друга (рис. 7.1,б). Ось z ЦСК направим вдоль первой нити тока. Тогда $\dot{I}_1(z) = \dot{I}_0 \exp(-ik_0 z) = i_1(z)$, $\dot{I}_2(z) = \dot{I}_1 \exp(i\psi) = i_2(z)$. Поэтому плотность стороннего тока

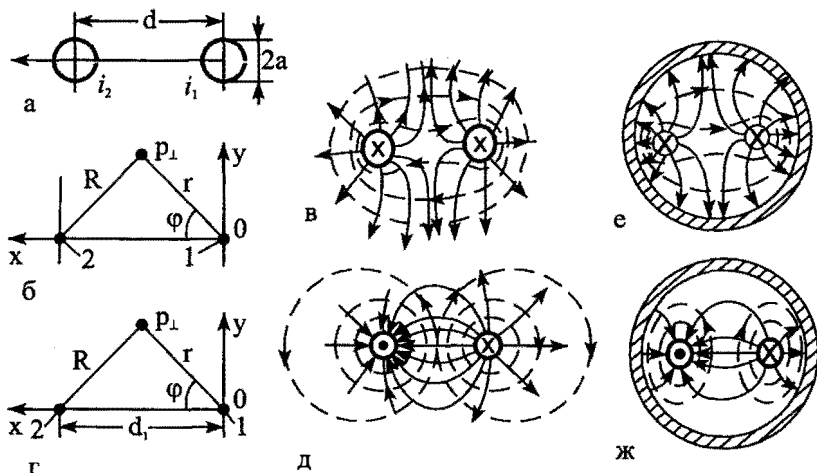


Рис. 7.1. Двухпроводные линии и силовые линии полей

$$\mathbf{j}^c(p) = \mathbf{1}_z \dot{I}_1(z) [\delta(r-0) + \exp(i\psi)\delta(r-d)] \delta(\varphi-0) / r.$$

Расстояние от второй нити до точки наблюдения $p_1(r, \varphi)$ равно $R = (r^2 - 2rd \cos \varphi + d^2)^{1/2}$.

3. Определим векторные потенциалы. Учтем, что $\mathbf{j}^{m,c} = 0$ и поэтому $\dot{\mathbf{A}}^m = 0$. Вектор $\dot{\mathbf{A}}$ находим так же, как в (2.53). С помощью (П3.8) получаем

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_z \dot{A}_z, \quad \dot{A}_z = [\dot{I}_1(z) H_0^{(2)}(\nu r) + \dot{I}_2(z) H_0^{(2)}(\nu R)] / 4i, \quad (7.1)$$

где $\nu = -i(k_0^2 - k^2)^{1/2}$.

Вычислим составляющие вектора $\dot{\mathbf{H}}$ по (1.125). Учитывая правило дифференцирования цилиндрических функций (П3.6), имеем

$$\dot{H}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial \varphi} = -\frac{\nu \dot{I}_1}{r 4i} e^{i\psi} H_1^{(2)}(\nu r) \frac{\partial R}{\partial \varphi}, \quad \dot{H}_z = 0, \quad (7.2)$$

$$\dot{H}_\varphi = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} = \frac{\nu \dot{I}_1}{4i} [H_1^{(2)}(\nu r) + e^{i\psi} H_1^{(2)}(\nu R) \frac{\partial R}{\partial r}].$$

Вычисляя производные по φ и r от R , получаем

$$dR/d\varphi = rd \sin \varphi / R, \quad dR/dr = (r - d \cos \varphi) / R. \quad (7.3)$$

Продольную составляющую \dot{E}_z вектора $\dot{\mathbf{E}}$ определяем по (1.124):

$$\dot{E}_z = -i\omega\mu_a\dot{A}_z + \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial z^2} = \frac{v^2}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} \dot{A}_z.$$

Положим, что $k_0 \rightarrow k$. Тогда $|\nu| \rightarrow 0$. При этом в (7.1) аргументы функций Ганкеля стремятся к нулю. Используем асимптотики функции Ганкеля (П3.5). Тогда при $|\nu| \rightarrow 0$

$$\lim v^2 \dot{A}_z = v^2 \frac{2i}{\pi} \left[i_1 \ln \frac{2}{1,78\nu r} + i_2 \ln \frac{2}{1,78\nu R} \right] = 0.$$

Поэтому $\dot{E}_z = 0$. Таким образом, при $k_0 = k$ *E-волна в двухпроводной линии вырождается в T-волну*. При этом, применяя асимптотики для функций Ганкеля в (7.2) и используя (7.3), получаем

$$\dot{H}_r = -\frac{i_1 d}{2\pi R^2} e^{i\psi} \sin \varphi, \quad \dot{H}_\varphi = \frac{i_1}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + e^{i\psi} \frac{r - d \cos \varphi}{R^2} \right), \quad \dot{H}_z = 0. \quad (7.4)$$

Поперечные составляющие вектора \dot{E} определяем из (5.12), где $h = k$:

$$\dot{E}_r = W\dot{H}_\varphi, \quad \dot{E}_\varphi = -W\dot{H}_r. \quad (7.5)$$

На поверхности проводов нормальная составляющая \dot{H}_n вектора \dot{H} , как следует из (7.4), не равна нулю. Хотя на проводах $|\dot{H}_r|/|\dot{H}_\varphi| \approx a/d \ll 1$, но граничное условие не удовлетворяется. Это происходит потому, что использован приближенный метод решения задачи для двух цилиндров. Таким образом, (7.4), (7.5) есть приближенное решение задачи. Аналогичным образом можно получить приближенное решение задачи для N нитей с бегущими волнами тока (многопроводной линии).

Если $\psi = 0$, то имеем *параллельные нити синфазных токов*. При $d < \lambda/2$ это поле мало отличается от поля (2.62) одной нити тока (рис. 2.12, в). Над двумя нитями токов распространяется *синфазная волна*. Силовые линии электрического и магнитного полей ее при $t = t_0$ изображены на рис. 7.1, в.

4. Рассмотрим *антифазную T-волну*. При этом $\psi = \pi$ и токи в проводах противофазны. Выберем в математической модели расстояние между проводами $d_1 = d[1 - (2a/d)^2]^{1/2}$, которое определяется из условия, чтобы точки расположения нитей тока были инверсными (взаимно обратными) по отношению к окружностям, ограничивающим провода (рис. 7.1, з). При этом $\dot{H}_n = 0$ на поверхности проводов и гранич-

ные условия выполняются. В (7.4), (7.5) необходимо заменить d значением d_1 .

Вектор Пойнтинга направлен вдоль линии, так как $\dot{\mathbf{P}} = 0,5[\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] = 1_z 0,5W(|\dot{H}_\varphi|^2 + |\dot{H}_r|^2)$ и имеет наибольшее значение между нитями, что указывает на то, что основную часть мощности поле переносит в непосредственной близости от нитей.

Силовые линии полей изображены на рис. 7.1, д.

Распределение плотности поверхностного тока $J_z(a, \varphi)$ по периметру цилиндра под влиянием поля другого цилиндра становится *неравномерным*. Это проявление эффекта близости.

В случае Т-волны электрическое поле имеет потенциальный характер и поэтому можно ввести однозначное понятие напряжения между лежащими в одном поперечном сечении точками на проводах:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \int_a^{d-a} \dot{E}_r(r, 0, z) dr = \frac{i_1 W}{2\pi} \int_a^{d-a} \left(\frac{1}{r} - e^{iW} \frac{d_1 - r}{d_1^2 - 2d_1 r + r^2} \right) dr = \\ &= \frac{i_1 W}{2\pi} \int_a^{d-a} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d_1 - r} \right) dr \approx \frac{i_1 W}{\pi} \ln \left(\frac{d}{a} - 1 \right) \quad \text{при } (d/a)^2 \gg 1. \end{aligned}$$

Тогда волновое сопротивление линии $Z_n = \dot{u}/i(z) = W\pi^{-1} \ln(d/a - 1)$.

Мощность, переносимая через поперечное сечение линии, $P_{0\perp} = 0,5Z_n |i_0|^2$.

Для вычисления коэффициента затухания (5.24) определим интеграл по контуру l цилиндра. Пользуясь (7.4), имеем

$$\begin{aligned} \oint_l |\dot{H}_r(a, \varphi, z)|^2 dl &= a \int_0^{2\pi} |\dot{H}_\varphi(a, \varphi, z)|^2 d\varphi = \\ &= \frac{|i_0|^2 a}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(1 - \Delta \cos \varphi)^2}{a(1 - 2\Delta \cos \varphi + \Delta^2)^2} \right]^2 d\varphi \approx \\ &\approx \frac{|i_0|^2}{(2\pi)^2 a} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2\Delta \cos \varphi + \Delta^2} = \frac{|i_0|^2}{2\pi a(1 - \Delta^2)}, \end{aligned}$$

где $\Delta = a/d_1$, $\Delta^2 \ll 1$ и использовано табличное значение интеграла [20].

Учтем, что имеется два цилиндрических провода, и подставим удвоенное значение последнего выражения и мощность $P_{0\perp}$ в (5.24).

Получаем $\alpha \approx R_1 [2\pi a Z_n (1 - \Delta^2)]^{-1}$.

Расчет коэффициента затухания α_d за счет джоулевых потерь в диэлектрике изложен в § 5.4 (п.2). Коэффициент затухания есть сумма $\alpha + \alpha_d$. Т-волна распространяется с фазовой $v_\phi = \omega/\beta$ и групповой $v_{гр} = (d\beta/d\omega)^{-1}$ скоростями. Критическая длина волны отсутствует. Дисперсия в линии обусловлена только тепловыми потерями.

Максимальное значение напряженности электрического поля, как следует из (7.5), создается в точках $p_\perp(a,0)$ и $p_\perp(d-a,0)$: $|\dot{E}_r|_{\max} = |i\omega[2a(1-\Delta)\ln\Delta^{-1}]^{-1}$. Если выразить $P_{0\perp}$ через $|\dot{E}_r|_{\max}$, то получим при $s = \pi a^2$

$$P_{0\perp\max} \approx |\dot{E}_r|_{\max}^2 \frac{2s(1-\Delta)^2}{W} \ln\Delta^{-1}.$$

Приравняв в этом выражении $|\dot{E}_r|_{\max}$ разрядному значению $E_{\text{разр}}$, получим разрядную мощность

$$P_{0\perp\text{разр}} = E_{\text{разр}}^2 \frac{2s(1-\Delta)^2}{W} \ln\Delta^{-1}.$$

Из этого выражения видно, что $P_{0\perp\text{разр}}$ пропорциональна площади поперечного сечения проводов. При выбранном коэффициенте запаса можно рассчитать допустимую для двухпроводной линии мощность.

5. Двухпроводные линии с волновым сопротивлением 500–600 Ом применяются на воздушных линиях связи до частот, равных 120 КГц, и в качестве антенных фидеров на радиоцентрах в диапазонах от НЧ до ОВЧ. Применяют также гибкие двухпроводные линии, выполненные из проводов, соединенных мостиком из диэлектрика, и линии из двух скрученных с отдельной изоляцией проводов.

6. Задача о возбуждении ЭМ поля в экранированной двухпроводной линии (рис. 5.1,б) есть красивая задача с нулевыми граничными условиями для составляющих вектора \dot{E} , касательных к цилиндрическим поверхностям проводов и экрана. Решение граничной задачи получается с помощью разложения искомого решения по системе собственных функций цилиндрической области [19]. Оно сводится к решению систем бесконечных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения. Основными волнами в линии являются синфазная Т-волна и антифазная Т-волна.

Синфазная Т-волна (рис. 7.1,е) соответствует синфазной Т-волне в открытой двухпроводной линии (рис. 7.1,в). По внутренней поверхности экрана протекает продольный ток, равный сумме токов двух проводов, но сдвинутый по фазе на π . Эта волна аналогична Т-волне коаксиальной линии.

Антифазная Т-волна (рис. 7.1,ж) соответствует антифазной Т-волне в открытой двухпроводной линии (рис. 7.1,д).

Обычно используются линии с антифазной волной. Достоинством линии является отсутствие потерь на излучение.

7.2. Возбуждение поверхностных волн над слоем диэлектрика на металле

1. Слой диэлектрика постоянной толщины b и ширины a на плоской металлической поверхности (подложке) используется в качестве открытой направляющей (и излучающей) системы. Над слоем могут распространяться поверхностные волны. Рассмотрим задачу возбуждения поверхностных волн. Математическую модель упростим. Считаем, что ширина слоя $a/\lambda \rightarrow \infty$, параметры диэлектрика $\tilde{\epsilon}_{a1}, \mu_{a1}$ ($k_1^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_{a1} \mu_{a1}$) однородны, подложка является плоскостью, металл — идеальным проводником (рис. 7.2). Внутри слоя находится параллельная поверхностям раздела сред прямолинейная нить синфазного магнитного тока. Устройство расположено в неограниченном однородном пространстве с параметрами $\tilde{\epsilon}_{a2}, \mu_{a2}$ ($k_2^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_{a2} \mu_{a2}$). Считаем, что $\epsilon_1 > \epsilon_2$, $\mu_1 > \mu_2$. Необходимо найти возбуждаемое нитью ЭМ поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла в слое диэлектрика и в окружающем пространстве, граничным условиям на металлической поверхности и на поверхности раздела диэлектриков и условиям излучения.

Введем ДСК и расположим ее так, чтобы ось x была параллельна нити тока, а плоскость xz совпадала с металлической плоскостью. Координаты нити тока обозначим через y_0, z_0 . Тогда $\mathbf{j}_1^{m,c} = \mathbf{1}_x j_{x1}^{m,c} = \mathbf{1}_x \dot{I}_0^m \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$, $\mathbf{j}^c = 0$.

Обозначим через $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{A}}_1^m$ векторы напряженностей электрического и магнитного полей и магнитный векторный потенциал, возбуждаемые сторонним источником в слое диэлектрика, т.е. области,

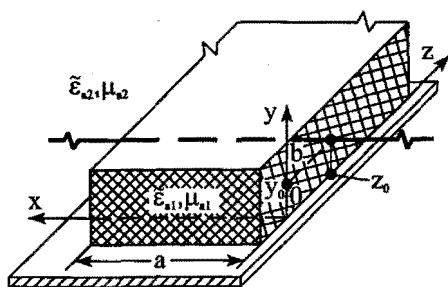


Рис. 7.2. Нить стороннего тока в слое диэлектрика

где $0 \leq y \leq b$, а через $\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_2$ и $\dot{\mathbf{A}}_2^m$ векторы электрического и магнитного полей и магнитный векторный потенциал в верхнем полупространстве (при $y \geq b$). В соответствии с граничным условием (1.94) имеем

$$\dot{E}_{z1} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (7.6)$$

На поверхности раздела диэлектриков получаем из (1.86):

$$\dot{E}_{\tau 1} = \dot{E}_{\tau 2}, \quad \dot{H}_{\tau 1} = \dot{H}_{\tau 2} \quad \text{при} \quad y = b. \quad (7.7)$$

Поскольку $\dot{j}_1^c = 0$, то $\dot{A}_1 = 0$. Вектор $\dot{j}_1^{m,c}$ содержит только одну составляющую $\dot{j}_{x1}^{m,c}$, поэтому $\dot{A}_1^m = 1_x \dot{A}_{x1}^m$, $\dot{A}_2^m = 1_x \dot{A}_{x2}^m$. Функция \dot{A}_{x1}^m удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \dot{A}_{x1}^m + k_1^2 \dot{A}_{x1}^m = -\dot{j}_{x1}^{m,c}, \quad 0 \leq y \leq b. \quad (7.8)$$

Поскольку в области $y \geq b$ сторонних источников нет, то функция \dot{A}_{x2}^m удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \dot{A}_{x2}^m + k_2^2 \dot{A}_{x2}^m = 0, \quad y \geq b. \quad (7.9)$$

Касательные поверхностям раздела сред составляющие векторов \dot{E}_q, \dot{H}_q ($q=1$ или 2) по (1.124), (1.125), отличающиеся от нуля:

$$\dot{E}_{zq} = \frac{\partial \dot{A}_{xq}^m}{\partial y}, \quad \dot{H}_{xq} = -i\omega \tilde{\epsilon}_{aq} \dot{A}_{xq}^m. \quad (7.10)$$

Подставляя последние выражения в (7.6), (7.7), получаем граничные условия для $\dot{A}_{x1}^m, \dot{A}_{x2}^m$:

$$\frac{\partial \dot{A}_{x1}^m}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial \dot{A}_{x1}^m}{\partial y} = \frac{\partial \dot{A}_{x2}^m}{\partial y}, \quad \tilde{\epsilon}_{a1} \dot{A}_{x1}^m = \tilde{\epsilon}_{a2} \dot{A}_{x2}^m \quad \text{при} \quad y = b. \quad (7.12)$$

Уравнения (7.8), (7.9) совместно с граничными условиями (7.11), (7.12) составляют граничную задачу.

2. Для решения задачи используем преобразование Фурье функций \dot{A}_{xq}^m .

Сначала рассмотрим физические соображения, которые применяются при построении решения. Сторонний ток возбуждает ЭМ поле, которое, распространяясь в слое при $0 \leq y \leq b$, возбуждает поле и в верхнем полупространстве (при $y \geq b$). Возбуждаемая нитью тока волна, распространяясь в направлении границы $y = 0$ под некоторым углом, должна отразиться. Отраженная волна, распространяясь в направлении верхней границы под некоторым углом, должна тоже частично или полностью отразиться. Поле в слое диэлектрика образуется, таким образом, за счет наложения переотраженных волн.

Векторы полного ЭМ поля \dot{E}_1, \dot{H}_1 в слое диэлектрика представим в виде $\dot{E}_1 = \dot{E}_1^p + \dot{E}_1^v, \dot{H}_1 = \dot{H}_1^p + \dot{H}_1^v$, где индексы «п» и «в» означают

первичное и вторичное поля. Первичное поле — это поле стороннего источника, расположенного в неограниченном пространстве с параметрами $\tilde{\epsilon}_{a1}, \mu_{a1}$. Вторичное поле обусловлено переотражениями от границ раздела, или возникающими на границах раздела сред эквивалентными поверхностными токами. Поэтому \dot{A}_1^M является суммой векторных потенциалов $\dot{A}_1^{M\Pi}$ первичного и $\dot{A}_1^{MВ}$ вторичного полей:

$$\dot{A}_1^M = \dot{A}_1^{M\Pi} + \dot{A}_1^{MВ}, \quad 0 \leq y \leq b. \quad (7.13)$$

Векторы $\dot{A}_1^{M\Pi}, \dot{A}_1^{MВ}$ удовлетворяют соответственно неоднородному и однородному векторным уравнениям Гельмгольца. Граничные условия (7.11), (7.12) для $\dot{A}_1^{MВ}$ и (7.12) для \dot{A}_2^M являются *неоднородными*, так как в них входит заданная функция $\dot{A}_1^{M\Pi}$. С математической точки зрения *неоднородности в граничных условиях можно считать источниками вторичных полей* и, значит, — функций $\dot{A}_1^{MВ}, \dot{A}_2^M$, удовлетворяющих однородным уравнениям Гельмгольца.

Решение неоднородного уравнения (7.8) для $\dot{A}_{x1}^{M\Pi}$ определено по (П4.4):

$$\dot{A}_{x1}^{M\Pi} = \int_{V_n} \dot{j}_{x1}^{M,c}(q)G(p,q)dV', \quad 0 \leq y \leq b.$$

Подставляя в это выражение функцию Грина из (П4.3) и значение тока, используя основное свойство δ -функции и учитывая, что получающийся интеграл по x' в бесконечных пределах равен $2\pi\delta(x_1 - 0)$, имеем:

$$\dot{A}_{x1}^{M\Pi}(p) = \frac{j_0^M}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\kappa_2(y-y_0) - i\kappa_3(z-z_0)}}{\kappa_2^2 + \kappa_3^2 - k_1^2} d\kappa_2 d\kappa_3.$$

Выполнив интегрирование по κ_2 так же, как в случае выражения (П4.5), получаем

$$\dot{A}_{x1}^{M\Pi} = \frac{j_0^M}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm q_1(y-y_0) - i\kappa(z-z_0)}}{q_1} d\kappa, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (7.14)$$

где $\kappa = \kappa_3$, $q_1 = (\kappa^2 - k_1^2)^{1/2}$; верхний знак берется при $y - y_0 < 0$, а нижний — при $y - y_0 > 0$.

Итак, $\dot{A}_1^{M\Pi} = \mathbf{1}_x \dot{A}_{x1}^{M\Pi}$. Но $\dot{A}_1^{MВ}$ тоже имеет только одну составляющую $\dot{A}_{x1}^{MВ}$, так как $\dot{A}_{y1}^{MВ}$ и $\dot{A}_{z1}^{MВ}$ оказываются равными нулю, если использовать для их определения условия (7.6), (7.7).

Поскольку вторичное поле порождено волнами, отраженными от границ раздела сред при $y = 0$ и при $y = b$, то его ищем в виде сум-

мы полей, одно из которых обусловлено отражением от нижней границы раздела сред, а второе — отражением от верхней границы. Решение однородного уравнения (7.8) для \dot{A}_{x1}^{MB} тогда тоже надо искать в виде аналогичной суммы:

$$\dot{A}_{x1}^{MB}(p) = \frac{j_0^M}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\kappa(z-z_0)}}{q_1} [f_1(\kappa)e^{-q_1 y} + f_2(\kappa)e^{q_1(y-b)}] d\kappa, \quad (7.15)$$

где $f_1(\kappa)$ спектральная плотность волн, возбуждаемых токами, протекающими при $y=0$; поскольку для этих волн $y-0 > 0$, то знак при показателе экспоненты выбран «минус». Аналогично, $f_2(\kappa)$ — спектральная плотность волн, возбуждаемых эквивалентными поверхностными токами, протекающими при $y=b$; поскольку при этом $y-b < 0$, то знак при показателе экспоненты выбран «плюс».

Из граничного условия (7.11) можно получить связь между функциями $f_1(\kappa)$ и $f_2(\kappa)$. С учетом (7.13)–(7.15) из (7.11) имеем:

$$\exp(-q_1 y_0) - f_1(\kappa) + f_2(\kappa) \exp(-q_1 b) = 0,$$

откуда $f_1(\kappa) = f_2(\kappa) \exp(-q_1 b) + \exp(-q_1 y_0)$.

Подставляя $f_1(\kappa)$ в (7.15), находим

$$\dot{A}_{x1}^{MB} = \frac{j_0^M}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\kappa(z-z_0)}}{q_1} [e^{-q_1(y+y_0)} + 2f_2(\kappa)e^{-q_1 b} \operatorname{ch} q_1 y] d\kappa. \quad (7.16)$$

Спектральную плотность $f_2(\kappa)$ определим из (7.12). Для этого надо записать разложение функции \dot{A}_{x2}^M . Поскольку в верхнем полупространстве сторонних источников нет, то поле \dot{E}_2, \dot{H}_2 при $y \geq b$ является вторичным полем, \dot{A}_{x2}^M равна соответствующей составляющей векторного потенциала вторичного поля, источниками которого являются эквивалентные поверхностные токи (вторичные) при $y=b$. Решение уравнения (7.9) поэтому записываем в виде

$$\dot{A}_{x2}^M = \int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa) e^{-q_2(y-b) - i\kappa(z-z_0)} d\kappa, \quad y \geq b, \quad (7.17)$$

где $f(\kappa)$ — спектральная плотность, $q_2 = (\kappa^2 - k_2^2)^{1/2}$; знак при показателе экспоненты выбран «минус» с учетом условия излучения и расположения вторичных источников при $y=b$.

Подставляя (7.14), (7.16), (7.17) в (7.12), получаем, применяя обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} (\dot{I}_0^M/2\pi) \cdot \exp(-q_1 b)[-ch q_1 y_0 + f_2(\kappa)sh q_1 b] &= -q_2 f(\kappa), \\ (\bar{\epsilon}_{a1} \dot{I}_0^M/2\pi q_1 \bar{\epsilon}_{a2}) \cdot \exp(-q_1 b)[-ch q_1 y_0 + f_2(\kappa)ch q_1 b] &= f(\kappa). \end{aligned}$$

Это есть система двух функциональных уравнений относительно $f(\kappa)$ и $f_2(\kappa)$. Решая ее, получаем:

$$\begin{aligned} f_2(\kappa) &= \frac{ch q_1 y_0 (q_1 \bar{\epsilon}_{a2} - q_2 \bar{\epsilon}_{a1})}{q_2 \bar{\epsilon}_{a1} ch q_1 b + q_1 \bar{\epsilon}_{a2} sh q_2 b}, \\ f(\kappa) &= \frac{\dot{I}_0^M \bar{\epsilon}_{a1}}{2\pi} \frac{ch q_1 y_0}{q_2 \bar{\epsilon}_{a1} ch q_1 b + q_1 \bar{\epsilon}_{a2} sh q_2 b}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Если подставить эти функции в (7.16), (7.17) и выполнить интегрирование, то найдем \dot{A}_{x1}^{MB} и \dot{A}_{x2}^M . Векторы напряженности ЭМ поля в слое и над слоем определяются по (1.124), (1.125). Поскольку $\dot{H}_{zq} = 0$, а $\dot{E}_{zq} \neq 0$, то в слое и над слоем распространяется E -волна.

Решение задачи удовлетворяет условиям теоремы единственности.

3. Рассмотрим поле над слоем диэлектрика. Пусть потери в диэлектрике отсутствуют, т.е. $\bar{\epsilon}_{a1} = \epsilon_{a1}$, $\bar{\epsilon}_{a2} = \epsilon_{a2}$. Тогда k_1 и k_2 — действительные величины, $k_1 > k_2$ по условию. Из (7.17) и (7.18) имеем

$$\dot{A}_{x2}^M = \frac{\dot{I}_0^M \epsilon_{a1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ch q_1 y_0 \exp[-q_2(y-b) - i\kappa(z-z_0)]}{q_2 \epsilon_{a1} ch q_1 b + q_1 \epsilon_{a2} sh q_1 b} d\kappa. \quad (7.19)$$

Подынтегральная функция в точках $\kappa = \kappa_{(0)}, \kappa_{(1)}, \dots, \kappa_{(N)}$ имеет $N+1$ полюсов первого порядка, определяемых из уравнения

$$q_2 \epsilon_{a1} ch q_1 b + q_1 \epsilon_{a2} sh q_1 b = 0, \quad (7.20)$$

и точки ветвления при $\kappa = \pm k_1$ и $\kappa = \pm k_2$. Контур интегрирования по действительной оси при $z - z_0 < 0$ замкнем полуокружностью бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости, а при $z - z_0 > 0$ — в нижней полуплоскости. Точки ветвления необходимо выделить разрезами. Вычеты в полюсах равны

$$\frac{\epsilon_{a1} \dot{I}_0^M}{2\pi} \frac{ch q_1 y_0 e^{-q_2(y-b) - i\kappa(z-z_0)}}{[q_2 \epsilon_{a1} ch q_1 b + q_1 \epsilon_{a2} sh q_1 b]'} \quad \text{при } \kappa = \mp \kappa_{(n)},$$

где штрих над квадратной скобкой означает производную по κ , верхний знак соответствует $z - z_0 < 0$, а нижний — $z - z_0 > 0$. Значение интеграла (7.19) за счет наличия полюсов равно $\pm 2\pi i$, умноженному на сумму вычетов в соответствующей полуплоскости. Введем обозначение

$$A_n^{\mp} = \pm 2\pi i \frac{\varepsilon_{a1} j_0^M}{2\pi} \frac{\operatorname{ch} q_1 y_0 \exp(\mp i \kappa_{(n)} z_0)}{[q_2 \varepsilon_{a1} \operatorname{ch} q_1 b + q_2 \varepsilon_{a2} \operatorname{sh} q_1 b]} \quad \text{при} \quad \kappa = \mp \kappa_{(n)}.$$

Тогда из (7.19) имеем

$$\dot{A}_{x2}^M(p) = \sum_{n=0}^N A_n^{\mp} \exp[-\sqrt{\kappa_{(n)}^2 - k_2^2} (y-b) \pm i \kappa_{(n)} z] + \dot{A}_x^{\text{Mnp}}(p), \quad (7.21)$$

где \dot{A}_x^{Mnp} — значение части интеграла (7.19), вычисленное по ветвям разрезов, выделяющих точки ветвления; \dot{A}_x^{Mnp} определяет поле *пространственной волны (поле излучения)*.

Наиболее интересной в случае применения направляющих систем является сумма по n , входящая в (7.21). При $N=0$ имеется только один полюс; получаем

$$\dot{A}_{x2}^M = A_0^{\mp} \exp[-\sqrt{\kappa_0^{(2)} - k_2^2} (y-b) \pm i \kappa_{(0)} z] + \dot{A}_x^{\text{Mnp}}.$$

Первое слагаемое здесь при $\kappa_{(0)}$ действительном и $\kappa_{(0)} > k_2$ определяет *поверхностную волну*. Амплитуда ее максимальна на поверхности раздела сред ($y=b$) и уменьшается по экспоненциальному закону при удалении точки наблюдения вдоль нормали к поверхности раздела. Вдоль увеличивающихся значений $|z|$ поле имеет характер *бегающей волны*. Подобная волна рассматривалась в § 2.12, там она получена за счет подбора распределения тока на математической модели. Возникновение поверхностной волны в настоящей задаче обусловлено наличием слоя диэлектрика.

Если имеем $N+1$ полюсов, то первое слагаемое в формуле (7.21) при $\kappa_{(n)}$ действительных и $\kappa_{(n)} > k_2$ определяет $N+1$ поверхностных волн, каждая из которых имеет свои фазовую скорость $v_{\phi n} = \omega / \kappa_{(n)}$ и распределение поля вдоль оси y . Действительно, обозначая через $q_{2(n)} = (\kappa_{(n)}^2 - k_2^2)^{1/2}$ и через

$$\dot{A}_{x2}^{\text{Mnp}} = \sum_{n=0}^N A_n^{\mp} \exp[-q_{2(n)} (y-b) \pm i \kappa_{(n)} z]$$

слагаемое в (7.21), характеризующее поверхностную волну, находим из (7.10) или (1.124), (1.125) составляющие векторов напряженностей поля $\dot{\mathbf{E}}^{\text{пв}}$, $\dot{\mathbf{H}}^{\text{пв}}$ поверхностных волн:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{z2}^{\text{пв}} &= \sum_{n=0}^N \dot{E}_{z,0n}^{\text{пв}}, & \dot{E}_{z,0n}^{\text{пв}} &= -q_{2(n)} A_n^{\text{т}} \exp[-q_{2(n)}(y-b) \pm i\kappa_{(n)}z], \\
\dot{E}_{y2}^{\text{пв}} &= \sum_{n=0}^N \dot{E}_{y,0n}^{\text{пв}}, & \dot{E}_{y,0n}^{\text{пв}} &= \mp i\kappa_{(n)} A_n^{\text{т}} \exp[-q_{2(n)}(y-b) \pm i\kappa_{(n)}z], \\
\dot{E}_{x2}^{\text{пв}} &= \sum_{n=0}^N \dot{E}_{x,0n}^{\text{пв}}, & \dot{E}_{x,0n}^{\text{пв}} &= -i\omega \epsilon_{a2} A_n^{\text{т}} \exp[-q_{2(n)}(y-b) \pm i\kappa_{(n)}z].
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Эти выражения описывают поле поверхностных E_{0n} -волн (где первый индекс $m=0$, так как ЭМ поле по x однородно). Тип волны характеризуется числом n . Вектор Пойнтинга $\dot{\Pi}_{0n}^{\text{пв}}$ имеет две составляющих: $\dot{\Pi}_{y,0n}^{\text{пв}}$ (чисто мнимо) и $\dot{\Pi}_{z,0n}^{\text{пв}}$ (чисто действительно). Значит, *слой диэлектрика на металле является направляющей системой* — энергия канализируется вдоль слоя перпендикулярно нити стороннего тока. Можно рассчитать с помощью (7.22) значение мощности, переносимой поверхностной волной на разных расстояниях (по оси y) от слоя диэлектрика. Очевидно, что с ростом $\kappa_{(n)}$ волна локализуется у поверхности раздела сред.

4. Чтобы изучить типы поверхностных E_{0n} -волн, надо изучить влияние параметров слоя на значения $\kappa_{(n)}$ в полюсах и на количество полюсов.

Рассмотрим характеристическое (дисперсионное) уравнение (7.20). Пусть $k_{\perp 1} = (k_1^2 - \kappa^2) = iq_1$. Тогда уравнение (7.20) после умножения на b приводится к виду:

$$q_2 b = k_{\perp 1} b (\epsilon_{a2} / \epsilon_{a1}) \operatorname{tg} k_{\perp 1} b. \tag{7.23}$$

Это трансцендентное уравнение проще всего решать и анализировать графическим методом. С этой целью построим график зависимости правой части ξ уравнения от $k_{\perp 1} b$ (рис. 7.3, а, кривые-1). Для того чтобы построить график зависимости левой части уравнения $q_2 b$ от $k_{\perp 1} b$, учтем, что $(q_2 b)^2 + (k_{\perp 1} b)^2 = (k_1^2 - k_2^2) b^2 = (\rho b)^2$, где $\rho = (k_1^2 - k_2^2)^{1/2}$ — известная величина, так как параметры сред заданы. Последнее выражение есть уравнение окружности на плоскости переменных $k_{\perp 1} b$ и $q_2 b$ с центром в начале координат; с его помощью просто построить зависимость левой части уравнения от $k_{\perp 1} b$ (рис. 7.3, а, кривая-2). Точки $k_{\perp 1, n}$ или $q_{2(n)} b$, в которых графики пересекаются, соответствуют равенству левой и правой частей уравнения, т.е. корням уравнения. Величины $k_{\perp 1} b$ и $q_2 b$ являются положительными, поэтому графики функций изображены только в первом квадранте.

Из графиков следует, что уравнение (7.23) может иметь несколько решений $k_{\perp 1(n)} = (k_1^2 - \kappa_{(n)}^2)^{1/2}$ или $q_{2(n)} = (\kappa_{(n)}^2 - k_2^2)^{1/2}$, соответствующих корней

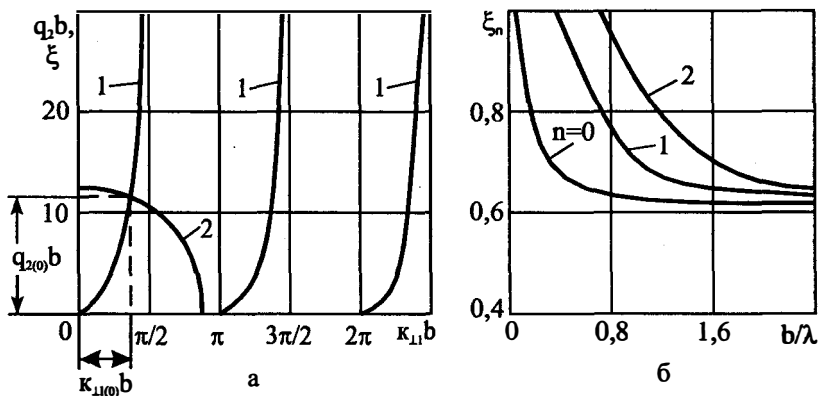


Рис. 7.3. К решению характеристического уравнения (а) и графики коэффициентов замедления (б)

$\kappa_{(n)} = (k_1^2 - k_{\perp 1(n)}^2)^{1/2} = (k_2^2 - q_{2(n)}^2)^{1/2}$. Одна из ветвей кривой-1 проходит через начало координат, поэтому при любом значении ρb имеется решение уравнения (7.23). Значит, при любом малом значении b_0 толщины пластины и любой частоте ω имеется первый корень уравнения $\kappa_{(0)} = (k_1^2 - k_{\perp 1(0)}^2)^{1/2}$. Ветви кривой-1 пересекают оси $k_{\perp 1} b$ в точках, где $k_{\perp 1} b = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Если $0 \leq \rho b = b(k_1^2 - k_2^2)^{1/2} < \pi$, т.е. $0 \leq b < \pi(k_1^2 - k_2^2)^{-1/2}$, то уравнение может иметь лишь одно решение κ_0 . Последнее соответствует основной волне, так как критическая частота при этом равна нулю.

Если $\pi < \rho b < 2\pi$, т.е. $\pi(k_1^2 - k_2^2)^{-1/2} < b < 2\pi(k_1^2 - k_2^2)^{-1/2}$, то возможно еще одно решение $\kappa_{(1)}$ и в направляющей системе может распространяться еще одна волна. Если $N\pi < \rho b < (N+1)\pi$, то в системе возможно распространение $N+1$ волн с разными значениями коэффициентов распространения $\kappa_{(n)}$. Значения

$$b_{кр,n} = n\pi(k_1^2 - k_2^2)^{-1/2} = n(\lambda/2) \cdot (\epsilon_1 \mu_1 / \epsilon_2 \mu_2 - 1)^{-1/2}$$

соответствуют толщинам, при которых могут возникать первый, второй и т.д. типы волн, т.е. волны высших типов.

В случае если b/λ велико, то ветви кривых-1 имеют большую крутизну: пересечение кривой-2 с первой ветвью кривых-1 происходит при $k_{\perp 1(0)} b \approx \pi/2$, при этом $k_{\perp 1} \approx \pi/2b$, т.е. $(k_1^2 - k_2^2)^{-1/2} \approx \pi/2b \approx 0$. Значит, $\kappa_{(0)} \approx k_1$ и основная волна распространяется с фазовой скоростью $v_{\phi 0} \approx (\epsilon_{a1} \mu_{a1})^{-1/2}$. Для волн высших типов с ростом b/λ растет крутизна кривых-1, поэтому $k_{\perp 1(n)} b \rightarrow n\pi$ и значит, $\kappa_{(n)} \rightarrow k_1$, т.е. $v_{\phi n} \rightarrow (\epsilon_{a1} \mu_{a1})^{-1/2}$.

Если $b/\lambda \rightarrow 0$, то $q_{2(0)} = (\kappa_{(0)}^2 - k_2^2)^{1/2} \rightarrow 0$ и $\kappa_{(0)} \rightarrow k_2$, значит, фазовая скорость волны $v_{\text{фо}} \rightarrow (\epsilon_{a2}\mu_{a2})^{-1/2}$. Если толщина слоя $b \rightarrow b_{\text{кр},n}$, то $k_{\perp 1,n}b \rightarrow \rho b$; поэтому $q_{2(n)}b \rightarrow 0$ и для вновь возникающего типа поверхностной волны $\kappa_{(n)} \rightarrow k_2$. При этом $\kappa_{(n)}^2 - k_2^2 \rightarrow 0$, $\dot{E}_{z,on}^{\text{пв}} \rightarrow 0$ и поверхностная E_{on} -волна вырождается в Т-волну, у которой имеются только поперечные составляющие $\dot{E}_{y,on}^{\text{пв}}$ и $\dot{H}_{x,on}^{\text{пв}}$, нелокализованные у поверхности.

Для всех типов волн удовлетворяется соотношение $k_2 < \kappa_{(n)} < k_1$, или $(\epsilon_{a1}\mu_{a1})^{-1/2} < v_{\text{фн}} < (\epsilon_{a2}\mu_{a2})^{-1/2}$. Поверхностные волны по отношению к верхнему полупространству являются медленными. Величина замедления фазовой скорости часто является одним из основных параметров. Поэтому вводят коэффициенты замедления волн $\xi_n = v_{\text{фн}}/v_{\text{ф}} = \beta/\kappa_{(n)}$. Последние можно определить, вычисляя величины $\kappa_{(n)}$. На рис. 7.3,б приведены рассчитанные графики для случая, когда $\epsilon_{a2} = \epsilon_0$, $\mu_{a2} = \mu_0$, $\epsilon_{a1} = 2,6\epsilon_0$.

Силовые линии электрического и магнитного полей поверхностной E_{on} -волны над слоем диэлектрика аналогичны силовым линиям полей, рассмотренных в § 2.12. Силовые линии электрического поля перпендикулярны поверхности раздела $y = b$, так как при $y = b$ $\dot{E}_{z,on}^{\text{пв}} \neq 0$. Характеристическое сопротивление E_{on} -волны определяется по (5.12) или (7.22): $Z_{3(n)} = \kappa_{(n)}W/k$. Коэффициенты затухания за счет потерь в металле (на единичной ширине по x) определяются по (7.22) и (5.24), а мощность, переносимая волной — по (5.23).

5. Рассмотрим поверхностное сопротивление слоя диэлектрика. Пусть толщина слоя мала так, что в направляющей системе распространяется только волна основного типа и $\kappa_{(0)}^2 \ll k_1^2$. При этом $\dot{\Gamma}_{y,on}^{\text{пв}} = 0,5\dot{E}_{z,on}^{\text{пв}}\dot{H}_{x,on}^{\text{пв}}$. Если обозначить $\dot{E}_{z,on}^{\text{пв}} = -Z_{3,n}\dot{H}_{x,on}^{\text{пв}}$, то $\dot{\Gamma}_{y,on}^{\text{пв}} = -0,5Z_{3,n}\left|\dot{H}_{x,on}^{\text{пв}}\right|^2$. Рассмотрим значение величины $Z_{3,n}$ на поверхности раздела сред, т.е. при $y = b$. Используя формулы (7.22), а затем — (7.23), получаем при $n = 0$

$$Z_{3s,0} = -\dot{E}_{z,oo}^{\text{пв}}/\dot{H}_{x,oo} = \frac{\sqrt{\kappa_{(0)}^2 - k_2^2}}{-i\omega\epsilon_{a2}} = -\frac{\sqrt{k_1^2 - \kappa_{(0)}^2}}{i\omega\epsilon_{a1}} \text{tg} \sqrt{k_1^2 - \kappa_{(0)}^2} b.$$

Учитывая, что $\kappa_{(0)}^2 \ll k_1^2$, находим $Z_{3s,0} \approx iW_1 \text{tg} k_1 b$, $W_1 = (\mu_{a1}/\epsilon_{a1})^{1/2}$. Поверхностное сопротивление Z_{3s} имеет индуктивный характер и определяется только параметрами слоя и частотой (см. § 2.12).

Если известно поверхностное сопротивление $Z_{3s,0}$, то при решении граничной задачи возбуждения слоя диэлектрика на металле можно вместо граничных условий (7.7) использовать условие

$$\dot{E}_{z,oo} = -Z_{3s,0}\dot{H}_{x,oo} \quad \text{при } y = b. \quad (7.24)$$

6. Пример. Найти толщины слоя полистирола на металлической подложке, при которых в полистироле и окружающем сухом воздухе распространяется только поверхностная волна основного типа. Определить фазовую скорость волны, ее поверхностное и характеристическое сопротивления. Считаем, что ширина слоя намного больше длины волны, а подложка имеет идеальную проводимость и ее можно заменить плоскостью. При этом используем математическую модель, изученную выше.

Для распространения поверхностной волны основного типа толщина должна удовлетворять неравенству $0 \leq b \leq \pi(k_1^2 - k_2^2)^{-1/2}$ или $0 < b/\lambda < [4(\epsilon_1\mu_1/\epsilon_2\mu_2 - 1)]^{-1/2}$. Полистирол имеет $\epsilon_1 = 2,6$, $\mu_1 = 1$, сухой воздух — $\epsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 1$. Таким образом, толщина слоя выбирается из условия $0 < b/\lambda < 0,395$. При этом коэффициент замедления определяем по графику (рис. 7.3.б): $0,67 < \xi_0 < 1$ и $v_{\phi_0} = \xi_0(\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$, т.е. $0,67c < v_{\phi_0} < c$. Так как $\kappa_{(n)} = \beta/\xi_n$, то характеристическое сопротивление $Z_{3,0} = \kappa_{(0)}W_0/\beta = \xi_0^{-1}W_0$. Поверхностное сопротивление волны основного типа $Z_{3s,0} = i(\beta_1^2 - \kappa_{(0)}^2)^{1/2}W_0\beta^{-1} \operatorname{tg}(\beta_1^2 - \kappa_{(0)}^2)b$. При увеличении b/λ от 0 до 0,395 ЭМ поле локализуется у подложки.

Если, например, $b = 0,2\lambda$, то $\xi_0 = 0,74$, поэтому $v_{\phi_0} = 0,74c$, $Z_{3,0} = 1,35W_0 = 509$ Ом, $Z_{3s,0} = i1,36W_0/\sqrt{\epsilon_1} = i318$ Ом.

7. При отсутствии джоулевых потерь в диэлектриках коэффициент распространения поверхностных волн $\kappa_{(n)}$ удовлетворяет условию $k_2 < \kappa_{(n)} < k_1$. Поэтому $q_{1(n)}$ — мнимая величина: $q_{1(n)} = \sqrt{\kappa_{(n)}^2 - k_1^2} = i\nu_n$, где $\nu_n = \sqrt{k_1^2 - \kappa_{(n)}^2}$. Так как $\operatorname{ch} q_1 y = 0,5[\exp(-i\nu_{(n)}y) + \exp(i\nu_{(n)}y)]$, то значение квадратной скобки в (7.16) определяется наложением бегущих в направлениях металлической плоскости ($y = 0$) и поверхности раздела ($y = b$) диэлектриков волн $\exp(i\nu_{(n)}y)$ и $\exp(-i\nu_{(n)}y)$. Значит, соответствующие волновые функции парциальных волн внутри диэлектрика имеют вид $\exp(i\nu_{(n)}y - i\kappa_{(n)}z)$ и $\exp(-i\nu_{(n)}y - i\kappa_{(n)}z)$. Фронты этих волн плоские. Если обозначить $\kappa_{(n)} = k_1 \sin \vartheta_{(n)}$, то $\nu_{(n)} = k_1 \cos \vartheta_{(n)}$. Тогда фронт $\nu_{(n)}y - \kappa_{(n)}z = k_1(y \cos \vartheta_{(n)} - z \sin \vartheta_{(n)})$ определяет волну, падающую на металлическую плоскость, а фронт $(-\nu_{(n)}y - \kappa_{(n)}z) = k_1(y \cos \vartheta_{(n)} + z \sin \vartheta_{(n)})$ определяет волну, падающую на поверхность раздела диэлектриков. Углы падения волн равны $\vartheta_{(n)}$.

Если угол падения $\vartheta_{(n)} \geq \vartheta_{0,\text{кр}} (\sin \vartheta_{0,\text{кр}} = k_2/k_1)$, то на границе раздела диэлектриков происходит полное внутреннее отражение ЭМ поля. При этом вне слоя ($y > b$) распространяется поверхностная волна типа (4.20). Парциальные волны последовательно переотражаются между поверхностями раздела сред. Волноводные свойства слоя диэлектрика на металле обусловлены явлением полного внутреннего отражения у поверхности раздела диэлектриков.

Если угол падения $\theta_{(n)} < \theta_{0, \text{кр}}$, то внутри и вне слоя диэлектрика распространяются плоские волны.

8. Пусть слой диэлектрика на металлической плоскости возбуждается бесконечной прямолинейной синфазной нитью электрического тока (рис. 7.2). При этом постановка задачи о возбуждении ЭМ поля в структуре не меняется по сравнению с п.1, но сторонние токи имеют вид $\dot{j}_1^e = \mathbf{1}_x \dot{I}_0 \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$, $\dot{j}_1^{m,c} = 0$. Значит, $\dot{A}_1 = \mathbf{1}_x \dot{A}_{x1}$, $\dot{A}_1^m = 0$; $\dot{A}_2 = \mathbf{1}_x \dot{A}_{x2}$, $\dot{A}_2^m = 0$. Очевидно, что граничные условия для касательных составляющих векторов напряженностей поля определяются выражениями (7.6), (7.7). Но в соответствии с формулами (1.124), (1.125) отличаются от нуля $\dot{H}_{zq} = -\partial \dot{A}_{xq} / \partial y$ и $\dot{E}_{xq} = -i\omega \mu_{aq} \dot{A}_{xq}$. Поэтому граничные условия для \dot{A}_{x1} и \dot{A}_{x2} формулируются так: $\dot{A}_{x1} = 0$ при $y = 0$; $\partial \dot{A}_{x1} / \partial y = \partial \dot{A}_{x2} / \partial y$, $\mu_{a1} \dot{A}_{x1} = \mu_{a2} \dot{A}_{x2}$ при $y = b$. Так как $\dot{E}_{z1} = \dot{E}_{z2} = 0$, то возбуждаемое поле является полем Н-волн.

Методика решения граничной задачи не отличается от использованной в п.2. Но поскольку граничные условия в этой задаче имеют другую форму, то вместо (7.23) имеем другое характеристическое уравнение: $q_2 b = -(\mu_{a2} / \mu_{a1}) k_{\perp 1} \text{ctg } k_{\perp 1} b$, определяющее коэффициенты $\kappa_{(n)}$ распространения поверхностных H_{on} -волн.

Решением граничной задачи при $y \geq b$ является

$$\dot{A}_{x2}(p) = \sum_{n=0}^{N_1} B_n^{\mp} \exp[-q_{2(n)}(y-b) \pm i\kappa_{(n)}z] + \dot{A}_x^{\text{np}}(p),$$

где B_n^{\mp} — коэффициенты, $N_1 + 1$ — число решений характеристического уравнения; функция \dot{A}_x^{np} описывает пространственную волну.

В правую часть характеристического уравнения H_{on} -волн входит $\text{ctg } k_{\perp 1} b$. Поэтому первое решение уравнения $\kappa_{(0)}$ появится при $b > \pi / [2(k_1^2 - k_2^2)^{1/2}]$. Значит, поверхностные H_{on} -волны в направляющей системе появляются только при условии, что $b > \lambda / [4(\epsilon_1 \mu_1 / \epsilon_2 \mu_2 - 1)^{1/2}]$.

Если в направляющей системе распространяется только H_{00} -волна, имеющая одно значение коэффициента фазы $\kappa_{(0)}$, то при $y = b$, $\dot{E}_{x,00}^{\text{nb}} = Z_{\text{мс},0} \dot{H}_{z,00}^{\text{nb}}$, где поверхностное сопротивление

$$Z_{\text{мс},0} \approx iW_1 \text{tg } k_1 b \quad (7.25)$$

найдено при условии, что $\kappa_{(0)}^2 \ll k_1^2$.

Волноводные свойства слоя диэлектрика и в этом случае обусловлены полным внутренним отражением ЭМ поля у поверхности раздела диэлектриков.

9. Примененным выше методом можно получить решение граничной задачи возбуждения слоя диэлектрика на металлической плоскости в случае более сложного распределения сторонних источников. Физически ясно, что если, например, вместо бесконечной прямолинейной поперечной нити синфазного магнитного тока используется прямолинейный излучатель конечной длины, то вследствие того, что ЭМ поле будет зависеть от координаты x , в направляющей системе будут отличными от нуля продольные состав-

ляющие векторов \dot{E}_1 и \dot{H}_1 , т.е. поле будет определяться наложением полей E_{mn} -волн и H_{mn} -волн. Аналогичное положение возникает в том случае, когда ширина слоя по координате x конечна.

10. Возбуждающее устройство создает над слоем диэлектрика пространственную волну, т.е. поле излучения. Она описывается слагаемым $\dot{A}_x^{m, np}$ в (7.21).

7.3. Диэлектрическая пластина

1. Рассмотрим возможность существования поверхностных E_{on} - и H_{on} -волн в пластине толщины $2b$, имеющей однородные параметры $\tilde{\epsilon}_{a1}, \mu_{a1}$ (рис. 7.4). В соответствии с результатами § 7.2 волноводные свойства такой пластины при $|k_1| > |k_2|$ обусловлены явлением полного внутреннего отражения парциальных волн у двух поверхностей раздела диэлектриков.

Начало ДСК расположим в середине пластины. Ось y направим перпендикулярно поверхности раздела сред. Считаем, что сторонние источники расположены при $z \rightarrow -\infty$ и рассматриваем только прямые волны. При этом уравнения Максвелла, а значит, и уравнения Гельмгольца для продольных составляющих векторов напряженностей поля однородны. Пространственную волну не рассматриваем. Поле поверхностных волн должно переносить энергию в направлении возрастающих значений z , поэтому продольными составляющими напряженностей поля являются $\dot{E}_{qz, on}^{пв} = \dot{E}_{qz, n}$ и $\dot{H}_{qz, on}^{пв} = \dot{H}_{qz, n}$. (Индексы «пв» и «о» далее опускаем, имея в виду только анализ поверхностных волн и однородность поля по координате x).

Продольный коэффициент распространения κ_n типов поверхностных волн одинаков во всем пространстве и для идеальных диэлектриков $k_2 < \kappa_n < k_1$. Поэтому поперечные коэффициенты распространения

$k_{\perp 1(n)} = \sqrt{k_1^2 - \kappa_n^2} = v_n$, $k_{\perp 2(n)} = \sqrt{k_2^2 - \kappa_n^2} = \mp i q_n$, где $q_n = \sqrt{\kappa_n^2 - k_2^2}$,

верхний знак соответствует $y \geq b$, а нижний — $y \leq -b$.

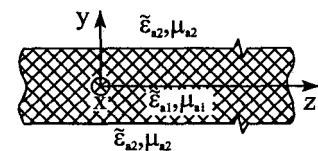


Рис. 7.4. Пластина диэлектрика

2. Рассмотрим условия существования поверхностных E_{on} -волн. $\dot{E}_{qz, n}$ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца ($q = 1$ или 2):

$$\Delta \dot{E}_{qz, n} + k_q^2 \dot{E}_{qz, n} = 0.$$

Решениями этого уравнения для поверхностных волн в соответствии с (7.21), (7.22) являются

$$\begin{aligned} \dot{E}_{2z,n} &= A_n e^{-q_n(y-b)} e^{-i\kappa_n z} & \text{при } y \geq b, \\ \dot{E}_{2z,n} &= B_n e^{q_n(y+b)} e^{-i\kappa_n z} & \text{при } y \leq -b. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Внутри пластины в соответствии с п.7.2.7 поле определяется наложением *парциальных волн*, переотражающихся между поверхностями раздела диэлектриков, т.е.

$$\dot{E}_{1z,n} = (C_n e^{-i\nu_n y} + D_n e^{i\nu_n y}) e^{-i\kappa_n z}, \quad -b \leq y \leq b. \quad (7.27)$$

Коэффициенты A_n, B_n и C_n, D_n , определяющие амплитуды волн, могут зависеть от κ_n .

Определим по (5.10) поперечные составляющие векторов напряженностей поля:

$$\dot{H}_{2x,n}^3 = \frac{i\omega \tilde{\epsilon}_{a2}}{k_{\perp 2(n)}^2} \frac{\partial \dot{E}_{2z,n}}{\partial y} = \frac{i\omega \tilde{\epsilon}_{a2}}{q_n} e^{-i\kappa_n z} \begin{cases} A_n e^{-q_n(y-b)}, & y \geq b, \\ -B_n e^{q_n(y+b)}, & y \leq -b; \end{cases} \quad (7.28)$$

$$\dot{H}_{1x,n}^3 = \frac{i\omega \tilde{\epsilon}_{a1}}{k_{\perp 1(n)}^2} \frac{\partial \dot{E}_{1z,n}}{\partial y} = \frac{\omega \tilde{\epsilon}_{a1}}{\nu_n} (C_n e^{-i\nu_n y} - D_n e^{i\nu_n y}) e^{-i\kappa_n z}, \quad -b \leq y \leq b.$$

$$\dot{E}_{qy,n}^3 = \frac{1}{k_{\perp q(n)}^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_{qz}}{\partial z \partial y};$$

$$\dot{E}_{2y,n}^3 = -\frac{i\kappa_n}{q_n} e^{-i\kappa_n z} \begin{cases} A_n e^{-q_n(y-b)}, & y \geq b, \\ -B_n e^{q_n(y+b)}, & y \leq -b; \end{cases} \quad (7.29)$$

$$\dot{E}_{1y,n}^3 = \frac{\kappa_n}{\nu_n} (-C_n e^{-i\nu_n y} + D_n e^{i\nu_n y}) e^{-i\kappa_n z}, \quad -b \leq y \leq b.$$

Для получения характеристического уравнения используем граничные условия $\dot{E}_{2z,n} = \dot{E}_{1z,n}$, $\dot{H}_{2x,n}^3 = \dot{H}_{1x,n}^3$ при $y = b$ и $y = -b$. При $y = b$ имеем, сокращая множители $\exp(-i\kappa_n z)$:

$$A_n = C_n e^{-i\nu_n b} + D_n e^{i\nu_n b}; \quad \frac{i\tilde{\epsilon}_{a2}}{q_n} A_n = \frac{\tilde{\epsilon}_{a1}}{\nu_n} (C_n e^{-i\nu_n b} - D_n e^{i\nu_n b}).$$

При $y = -b$ получаем:

$$B_n = C_n e^{i\nu_n b} + D_n e^{-i\nu_n b}; \quad \frac{-i\tilde{\epsilon}_{a2}}{q_n} B_n = \frac{\tilde{\epsilon}_{a1}}{\nu_n} (C_n e^{i\nu_n b} - D_n e^{-i\nu_n b}).$$

Исключая A_n и B_n во втором и четвертом равенствах с помощью первого и третьего равенств, объединяя подобные слагаемые и вводя обозначение $\zeta_n = \tilde{\epsilon}_{a2} \nu_n / (\tilde{\epsilon}_{a1} q_n)$, находим:

$$\begin{aligned}(i\zeta_n - 1)e^{-iv_n b} C_n + (i\zeta_n + 1)e^{iv_n b} D_n &= 0, \\ (i\zeta_n + 1)e^{iv_n b} C_n + (i\zeta_n - 1)e^{-iv_n b} D_n &= 0.\end{aligned}$$

Для того, чтобы существовало ЭМ поле, коэффициенты C_n, D_n в выражениях (7.28), (7.29) должны отличаться от нуля. Для этого определитель коэффициентов при C_n, D_n в последней системе уравнений должен быть равен нулю, т.е.

$$\left[(i\zeta_n - 1)e^{-iv_n b} \right] - \left[(i\zeta_n + 1)e^{iv_n b} \right] = 0.$$

Рассматривая это уравнение как алгебраическую разность квадратов двух величин, получаем два характеристических уравнения

$$(i\zeta_n - 1)e^{-iv_n b} - (i\zeta_n + 1)e^{iv_n b} = 0 \quad \text{и} \quad (i\zeta_n - 1)e^{-iv_n b} + (i\zeta_n + 1)e^{iv_n b} = 0.$$

Разлагая здесь экспоненты по формуле Эйлера и сокращая подобные слагаемые, получаем два характеристических (дисперсионных) уравнения:

$$q_n b = \frac{\tilde{\epsilon}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a1}} (v_n b) \operatorname{tg} v_n b; \quad q_n b = -\frac{\tilde{\epsilon}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a1}} (v_n b) \operatorname{ctg} v_n b. \quad (7.30)$$

Первое из этих уравнений не отличается от (7.23). Анализ его решений дан в п.7.2.4. Если $N\pi < b\sqrt{k_1^2 - k_2^2} < (N+1)\pi$, то в пластине возможно распространение $N+1$ волн с разными значениями κ_n . Учтем, что для идеальных диэлектриков

$$\sqrt{k_1^2 - k_2^2} = k_2 \sqrt{(k_1/k_2)^2 - 1} = (2\pi/\lambda) \cdot \gamma,$$

где $\gamma = \sqrt{(k_1/k_2)^2 - 1} = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 / \epsilon_2 \mu_2 - 1}$. Тогда это условие имеет вид $N\lambda/2\gamma < b < (N+1)\lambda/2\gamma$.

Второе из уравнений (7.30) отличается тем, что в правой части его имеется $(-\operatorname{ctg} v_n b)$. При этом кривые-1 на рис. 7.3 сдвинуты на $\pi/2$ по оси абсцисс. Для идеальных диэлектриков первое решение имеется при $\pi/2 < v_n b < 3\pi/2$, т.е. при условии $\lambda/2\gamma < 2b < 3\lambda/2\gamma$. Таким образом, основная волна распространяется при условии, что $0 < 2b < \lambda/2\gamma$, а вообще поверхностные E_{0n} -волны — при условии: $2b > n\lambda/2\gamma$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Коэффициент замедления фазовой скорости рассчитывается так же, как и в п.7.2.4.

3. Условия существования поверхностных H_{0n} -волн рассматриваются аналогично предыдущим. Составляющие $\dot{H}_{qz,n}$ удовлетворяют

однородному уравнению Гельмгольца $\Delta \dot{H}_{qz,n} + k_q^2 H_{qz,n} = 0$, решениями которого являются

$$\begin{aligned} \dot{H}_{2z,n} &= h'_n e^{-q_n(y-b) - i\kappa_n z} && \text{при } y \geq b; \\ \dot{H}_{2z,n} &= h''_n e^{q_n(y+b) - i\kappa_n z} && \text{при } y \leq -b; \\ \dot{H}_{1z,n} &= (c_n e^{-i\nu_n y} + d_n e^{i\nu_n y}) e^{-i\kappa_n z} && \text{при } -b \leq y \leq b. \end{aligned}$$

Касательную к поверхностям раздела сред составляющую $\dot{E}_{qx,n}^M$ определяем по (5.9):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{qx,n}^M &= -\frac{i\omega\mu_{aq}}{k_{1q,n}^2} \frac{\partial \dot{H}_{qz,n}}{\partial y}; \\ \dot{E}_{2x,n}^M &= \frac{i\omega\mu_{a2}}{q_n} e^{-i\kappa_n z} \begin{cases} -h'_n e^{-q_n(y-b)}, & y \geq b, \\ h''_n e^{q_n(y+b)}, & y \leq -b; \end{cases} \\ \dot{E}_{1x,n}^M &= \frac{\omega\mu_{a1}}{\nu_n} (-c_n e^{-i\nu_n y} + d_n e^{i\nu_n y}) e^{-i\kappa_n z}, \quad -b \leq y \leq b. \end{aligned}$$

Для получения характеристического уравнения используем граничные условия на поверхностях раздела сред: $\dot{H}_{2z,n} = \dot{H}_{1z,n}$, $\dot{E}_{2x,n}^M = \dot{E}_{1x,n}^M$ при $y = b$ и $y = -b$. Тем же путем, который использован в п.2, получаем два характеристических уравнения

$$q_n b = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}} \nu_n b \operatorname{tg} \nu_n b; \quad q_n b = -\frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}} \nu_n b \operatorname{ctg} \nu_n b.$$

Анализ решений этих уравнений и возможных типов H_{0n} -волн, которые могут распространяться в пластине, не отличается от предыдущего.

7.4. Круглый диэлектрический волновод

1. Круглым диэлектрическим волноводом называют направляющую систему, выполненную из диэлектрического стержня (рис. 5.1,к). Направляемые волны переносят часть мощности в диэлектрике, а другую часть — в окружающем пространстве, которое, являясь сухим воздухом, имеет малые джоулевы потери. Поэтому тепловые потери такой направляющей системы определяются проводимостью диэлектрика. Появление диэлектриков с очень малыми тепловыми потерями на КВЧ, ГВЧ и в оптическом диапазоне привело к широкому применению диэлектрических волноводов. Применению диэлектрических волноводов обязано развитие интегральной оптики и волоконно-

оптических линий связи. Диэлектрические волноводы применяются и как элементы антенных систем.

2. Рассмотрим постановку граничной задачи о *возможности распространения ЭМ волн в направляющей системе*, состоящей из бесконечного регулярного, однородного, изотропного диэлектрического кругового цилиндра с параметрами $\tilde{\epsilon}_{a1}, \mu_{a1}$, расположенного в неограниченном, однородном, изотропном пространстве с параметрами $\tilde{\epsilon}_{a2}, \mu_{a2}$ (рис. 7.5). Считаем, что $\epsilon_1 \mu_1 > \epsilon_2 \mu_2$. Введем ЦСК. Ось z направим вдоль оси цилиндра. Поверхность цилиндра (стержня) $r = a$ делит все пространство на две области — внутреннюю ($r \leq a$), в которой векторы поля обозначим через \dot{E}_1 и \dot{H}_1 , и внешнюю ($a \leq r \leq \infty$), в которой векторы поля обозначим через \dot{E}_2 и \dot{H}_2 . ЭМ поле должно переносить энергию вдоль направления z (продольного). Продольные составляющие векторов поля должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца

$$\Delta \dot{E}_{1z} + k_1^2 \dot{E}_{1z} = 0, \quad \Delta \dot{H}_{1z} + k_1^2 \dot{H}_{1z} = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad (7.31)$$

$$\Delta \dot{E}_{2z} + k_2^2 \dot{E}_{2z} = 0, \quad \Delta \dot{H}_{2z} + k_2^2 \dot{H}_{2z} = 0, \quad a \leq r \leq \infty. \quad (7.32)$$

Граничные условия на поверхности раздела сред по (1.86) имеют вид $\dot{E}_{1r} = \dot{E}_{2r}$, $\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}$ при $r = a$, т.е.

$$\dot{E}_{1z}(a, \varphi, z) = \dot{E}_{2z}(a, \varphi, z), \quad \dot{H}_{1z}(a, \varphi, z) = \dot{H}_{2z}(a, \varphi, z), \quad (7.33)$$

$$\dot{E}_{1\varphi}(a, \varphi, z) = \dot{E}_{2\varphi}(a, \varphi, z), \quad \dot{H}_{1\varphi}(a, \varphi, z) = \dot{H}_{2\varphi}(a, \varphi, z).$$

При $z \rightarrow \pm \infty$ должны удовлетворяться условия излучения. Поле не должно переносить энергию вдоль радиального направления, поэтому волнового движения вдоль этого направления не должно быть. Этому условию в соответствии с результатами § 2.9 и § 7.2, § 7.3 удовлетворяет поле поверхностной волны. Значит, в области $a \leq r \leq \infty$ ЭМ поле, описываемое векторами \dot{E}_2, \dot{H}_2 , должно быть полем поверхностной волны.

Необходимо найти векторы ЭМ поля \dot{E}_1, \dot{H}_1 и \dot{E}_2, \dot{H}_2 . Для этого надо найти продольные составляющие этих векторов, а затем с помощью (6.28), (6.29) — их поперечные составляющие.

2. Рассмотрим решение поставленной граничной задачи. Для упрощения записи считаем, что бегущие волны распространяются в

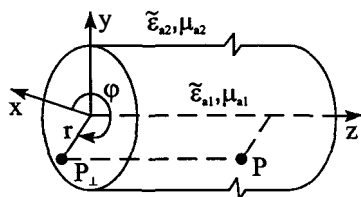


Рис. 7.5. Диэлектрический стержень в неограниченном пространстве

направлении $z \rightarrow \infty$. Тогда в соответствии с (5.1) и результатами § 6.6

$$\dot{E}_{qzmn}(p) = \dot{E}_{qzmn}(p_{\perp})e^{-ix_{qmn}z}, \quad \dot{H}_{qzmn}(p) = \dot{H}_{qzmn}(p_{\perp})e^{-ix_{qmn}z}, \quad (7.34)$$

где $q=1$ для области $0 \leq r \leq \infty$ и $q=2$ для области $a \leq r \leq \infty$, κ_{qmn} — коэффициенты распространения типов волн, удовлетворяющих условиям поставленной задачи, m, n — целые числа, $\dot{E}_{qzmn}(p_{\perp}), \dot{H}_{qzmn}(p_{\perp})$ удовлетворяют уравнениям типа (6.46):

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E}_{qzmn}(p_{\perp}) + v_{qmn}^2 \dot{E}_{qzmn}(p_{\perp}) = 0,$$

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{H}_{qzmn}(p_{\perp}) + v_{qmn}^2 \dot{H}_{qzmn}(p_{\perp}) = 0,$$

где $v_{qmn}^2 = k_q^2 - \kappa_{qmn}^2$, v_{qmn} — поперечные «коэффициенты распространения».

Решениями последних уравнений являются (см. § 6.6)

$$\dot{E}_{qzmn}(p_{\perp}) = e_{qmn} Z_m(v_{qmn}r) e^{-im_q \varphi}, \quad (7.35)$$

$$\dot{H}_{qzmn}(p_{\perp}) = h_{qmn} Z_m(v_{qmn}r) e^{-im_q \varphi},$$

где e_{qmn}, h_{qmn} — постоянные коэффициенты типов волн, $Z_m(v_{1mn}r) = J_m(v_{1mn}r)$, так как область $0 \leq r \leq a$ включает точку $r=0$, и $Z_m(v_{2mn}r) = H_m^{(2)}(v_{2mn}r)$, так как область $a \leq r \leq \infty$ имеет точку, где $r \rightarrow \infty$.

Для того чтобы в области $a \leq r \leq \infty$ ЭМ поле было полем поверхностных волн, необходимо, как показано в § 2.9, п.6, потребовать, чтобы поперечный «коэффициент распространения» $v_{2mn} = v'_{2mn} - iv''_{2mn} = |v_{2mn}| \exp(i\psi_{2mn})$ удовлетворял условию $v''_{2mn} > 0$. Тогда при $|v_{2mn}|r \gg 1$, используя (П3.4), получаем

$$H_m^{(2)}(v_{2mn}r) \approx \left(\frac{2}{\pi |v_{2mn}|r} \right)^{1/2} \exp(-v''_{2mn}r) i^m \exp(-i\Phi_{mn}), \quad (7.36)$$

где $\Phi_{mn} = v'_{2mn}r - \pi/4 + \psi_{2mn}/2$. При этом множитель $\exp(-v''_{2mn}r)$ показывает, что (7.34), (7.35) описывают волну, локализованную у поверхности $r = a$.

Подставим (7.34), (7.35) в граничные условия (7.33). Имеем

$$e_{1mn} J_m(v_{1mn}a) e^{-im_1 \varphi - ix_{1mn}z} = e_{2mn} H_m^{(2)}(v_{2mn}a) e^{-im_2 \varphi - ix_{2mn}z}.$$

Отсюда следует, что целые числа m_q должны быть одинаковыми во внутренней и внешней областях, $m_1 = m_2 = m$, т.е. азимутальная зависимость поля данного типа волны во внутренней и внешней облас-

тях должна быть одинаковой. Кроме того, коэффициенты распространения должны быть одинаковыми в обеих областях, т.е. $\kappa_{1mn} = \kappa_{2mn} = \kappa_{mn}$. Последнее означает, что фазовая и групповая скорости типа волны одинаковы в обеих областях.

Все составляющие векторов поля могут быть определены с помощью (6.28), (6.29). Четыре граничных условия (7.33) позволяют определить четыре неизвестных: отношение трех коэффициентов к четвертому (который остается неизвестным) и коэффициент распространения κ_{mn} (для полного определения коэффициентов необходимо решать неоднородные уравнения (7.31), (7.32), т.е. решать задачу возбуждения поля сторонними источниками).

Ниже для сокращения записи индексы m, n опустим и только в окончательных выражениях их восстановим. Обозначим $\dot{E}_q = \dot{E}_{qmn}$, $\dot{H}_q = \dot{H}_{qmn}$, $e_q = e_{qmn}$, $h_q = h_{qmn}$, $v_q = v_{qmn}$, $\kappa_q = \kappa_{qmn}$. Если из (6.29) найти составляющие $\dot{E}_{q\varphi}^3$, $\dot{H}_{q\varphi}^3$ и подставить их и \dot{E}_{qz} в граничные условия (7.33), то полученная система из трех ($\dot{H}_{qz} = 0$) уравнений оказывается несовместной, т.е. удовлетворить граничным условиям с помощью векторов поля только Е-волны в общем случае невозможно. Аналогично, удовлетворить граничным условиям с помощью векторов поля только Н-волны невозможно. Значит, в диэлектрическом волноводе (в общем случае) не могут существовать порознь Е-волны и Н-волны. Они могут распространяться только совместно.

Граничным условиям (7.33) можно удовлетворить с помощью векторов $\dot{E}_q = \dot{E}_q^3 + \dot{E}_q^M$, $\dot{H}_q = \dot{H}_q^3 + \dot{H}_q^M$. Все составляющие векторов поля оказываются в общем случае связанными. Такие волны называют гибридными HE_{mn} - и EH_{mn} -волнами. Силовые линии полей HE_{mn} -волн более близки силовым линиям полей H_{mn} -волн, а силовые линии полей EH_{mn} -волн — силовым линиям полей E_{mn} -волн.

Отметим, что однородно-азимутальные (симметричные по φ) E_{0n} - и H_{0n} -волны удовлетворяют граничным условиям (порознь). Значит, они могут существовать в диэлектрическом волноводе независимо друг от друга. Случай $m = 0$ (однородности по азимуту) является исключительным.

В (7.33) необходимо подставить $\dot{E}_{q\varphi} = \dot{E}_{q\varphi}^3 + \dot{E}_{q\varphi}^M$ и $\dot{H}_{q\varphi} = \dot{H}_{q\varphi}^3 + \dot{H}_{q\varphi}^M$. Определим их, подставляя (7.35) в (6.28), (6.29) и вы-

полняя дифференциальные операции. Обозначая $W_q = (\mu_{aq} / \tilde{\epsilon}_{aq})^{1/2}$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_{q\varphi}(p_{\perp}) &= \frac{1}{v_q} \left[iW_q h_q k_q Z'_m(v_q r) + \frac{m\kappa}{v_q r} e_q Z_m(v_q r) \right] e^{-im\varphi}, \\ \dot{H}_{q\varphi}(p_{\perp}) &= \frac{1}{v_q} \left[\frac{m\kappa}{v_q r} h_q Z_m(v_q r) - \frac{ik_q}{W_q} e_q Z'_m(v_q r) \right] e^{-im\varphi}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Подставим (7.37) и (7.35) в (7.33). Имеем систему четырех уравнений:

$$\begin{aligned} e_1 J_m(v_1 a) &= e_2 H_m^{(2)}(v_2 a); \quad h_1 J_m(v_1 a) = h_2 H_m^{(2)}(v_2 a); \\ \frac{1}{v_1} \left[iW_1 h_1 k_1 J'_m(v_1 a) - \frac{m\kappa}{v_1 a} e_1 J_m(v_1 a) \right] &= \\ &= \frac{1}{v_2} \left[iW_2 h_2 k_2 H_m^{(2)'}(v_2 a) - \frac{m\kappa}{v_2 a} e_2 H_m^{(2)}(v_2 a) \right]; \\ \frac{1}{v_1} \left[\frac{m\kappa}{v_1 a} h_1 J_m(v_1 a) + \frac{ik_1}{W_1} e_1 J'_m(v_1 a) \right] &= \\ &= \frac{1}{v_2} \left[\frac{m\kappa}{v_2 a} h_2 H_m^{(2)}(v_2 a) + \frac{ik_2}{W_2} e_2 H_m^{(2)'}(v_2 a) \right]. \end{aligned}$$

Из первого и второго уравнений получаем

$$e_2 / e_1 = h_2 / h_1 = J_m(v_1 a) / H_m^{(2)}(v_2 a).$$

Исключим из третьего и четвертого уравнений e_2 и h_2 с помощью последних выражений. Объединяя подобные, разделив результат на $J_m(v_1 a)$ и обозначив через $f_m = J'_m(v_1 a) / J_m(v_1 a)$, $\psi_m = H_m^{(2)'}(v_2 a) / H_m^{(2)}(v_2 a)$, имеем

$$\begin{aligned} i \left(\frac{W_1 k_1}{v_1} f_m - \frac{W_2 k_2}{v_2} \psi_m \right) h_1 + \left(\frac{1}{v_2^2 a} - \frac{1}{v_1^2 a} \right) m\kappa e_1 &= 0, \\ \left(\frac{1}{v_2^2 a} - \frac{1}{v_1^2 a} \right) m\kappa h_1 + i \left(\frac{k_2}{W_2 v_2} \psi_m - \frac{k_1}{W_1 v_1} f_m \right) e_1 &= 0. \end{aligned}$$

Это система двух линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов e_1 , h_1 . Чтобы существовало ЭМ поле, удовлетворяющее заданным условиям, эти коэффициенты не должны быть равны нулю (см. (7.35)). Для этого определитель системы уравнений должен быть равен нулю. Приравняв его нулю, получаем

$$\left(\frac{W_1 k_1}{v_1} f_m - \frac{W_2 k_2}{v_2} \psi_m \right) \left(\frac{k_1}{W_1 v_1} f_m - \frac{k_2}{W_2 v_2} \psi_m \right) = m^2 \kappa^2 \left(\frac{1}{v_2^2 a} - \frac{1}{v_1^2 a} \right)^2. \quad (7.38)$$

Это характеристическое (трансцендентное) уравнение определяет коэффициенты распространения. Для азимутально-однородных волн $m = 0$, поэтому правая часть уравнения равна нулю. Приравнявая нулю выражения в круглых скобках левой части, получаем более простые характеристические уравнения соответственно для H_{0n} -волн и E_{0n} -волн:

$$\frac{W_1 k_1}{v_1} f_0 = \frac{W_2 k_2}{v_2} \psi_0; \quad \frac{k_1}{W_1 v_1} f_0 = \frac{k_2}{W_2 v_2} \psi_0. \quad (7.39)$$

3. Рассмотрим критические длины волн азимутально-неоднородного поля. Диэлектрики считаем идеальными, поэтому κ — чисто действительная величина и $v_q = -iv_q^*$. В направляющей системе вдоль продольного направления должны распространяться поверхностные волны. При $v_{2mn} = 0$ поверхностных волн в соответствии с (7.36) не существует. Поэтому равенство $v_{2mn} = 0$ является пограничным (критическим) между направляемыми и ненаправляемыми волнами. Оно определяет критическую длину волны $\lambda_{kp, mn}$. Таким образом, при $v_{2mn} \rightarrow 0$ решения $v_{1kp, mn}$ уравнения (7.38) являются критическими.

Чтобы упростить решение уравнения (7.38), перемножим содержимое круглых скобок в его левой части, приведем подобные и разделим результат на $(am)^2$. Для сокращения записи введем обозначения $\xi = v_1 a$, $\eta = v_2 a = -iv_2^* a$, $k_1 |\eta|^2 \xi f_m / m = \theta_m$, $k_2 \xi^2 \eta \psi_m / m = \tau_m$. При этом получаем

$$\theta_m^2 - M \tau_m \theta_m + \tau_m^2 - \kappa^2 (\xi^2 - \eta^2) = 0,$$

где $M = (W_1^2 + W_2^2) / W_1 W_2$. Это уравнение рассматриваем как алгебраическое уравнение 2-й степени (квадратное) относительно θ_m . Тогда

$$\theta_m = M/2 \cdot \tau_m \pm [M^2 \tau_m^2 / 4 - \tau_m^2 + \kappa^2 (\xi^2 - \eta^2)]^{1/2}. \quad (7.40)$$

Необходимо получить решение этого трансцендентного уравнения при $\eta \rightarrow 0$.

Рассмотрим асимптотическое поведение функции $\eta \psi_m / m = \eta H_m^{(2)'}(\eta) / m H_m^{(2)}(\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$. Если $m = 1$, то по (П3.6) имеем $H_1^{(2)'}(\eta) = -H_1^{(2)}(\eta) / \eta + H_0^{(2)}(\eta)$. Поэтому при $\eta \rightarrow 0$ по (П3.5) $\eta \psi_m / m \approx -1 - (v_2^* a)^2 \ln(2/1,78 v_2^* a)$.

При $m > 1$ $H_m^{(2)'}(\eta) = -m H_m^{(2)}(\eta) / \eta + H_{m-1}^{(2)}(\eta)$. Применяя при $\eta \rightarrow 0$ (П3.5), имеем $\eta \psi_m / m \approx -1 - (v_2^* a)^2 / 2m(m-1)$. Таким образом, в общем случае при $v_2^* a \rightarrow 0$ получаем:

$$\eta \psi_m / m \approx -1 - (v_2^* a)^2 b_m. \quad (7.41)$$

где $b_m = -\ln(2/1,78v_2^*a)$ при $m=1$ и $b_m = 1/2m(m-1)$ при $m > 1$.

В уравнении (7.40) под знаком корня учтем, что $\kappa^2(\xi^2 - \eta^2)^2 = (k_2^2 - v_2^2)(\xi^2 - \eta^2)^2 \approx k_2^2 \xi^4 - \xi^2 \eta^2 [2k_1^2 - (\xi/a)^2]$, при этом, проводя преобразования и сохраняя слагаемые, имеющие порядок малости по η не ниже второго, получаем при верхнем знаке перед корнем (первая ветвь решения)

$$\theta_m = k_1 |\eta|^2 \xi f_m / m \approx -\frac{2k_2}{M} \xi^2 (v_2^* a)^2 \left(b_m + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{2(k_2 a)^2} \right)$$

Учитывая, что $|\eta|^2 = (v_2^* a)^2$ и сокращая множители в левой и правой частях равенства, имеем

$$f_m / m \approx -\frac{2k_2}{Mk_1} \xi \left(b_m + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{2(k_2 a)^2} \right)$$

Подставляя вместо f_m и ξ их значения, получаем трансцендентное уравнение, определяющее при $v_{2mn}^* a \rightarrow 0$ критические значения $v_{1mn} a$,

$$\frac{J'_m(v_{1mn} a)}{m m(v_{1mn} a)} \approx -\frac{2k_2}{Mk_1} v_{1mn} a \left(b_m + \frac{1}{(v_{1mn} a)^2} + \frac{1}{2(k_2 a)^2} \right) \quad (7.42)$$

Чтобы получить решения уравнения для $m=1$, учтем, что $b_1 = -\ln(2/1,78v_{21n}^* a) \rightarrow -\infty$ при $v_{21n} a \rightarrow 0$ и правая часть стремится к бесконечности. Значит, при конечном $v_{11n} a$ левая часть уравнения, должна обращаться в бесконечность. Для этого необходимо, чтобы знаменатель левой части обращался в нуль. Поэтому при $v_{11n} a \neq 0$ имеем уравнение для определения $v_{1kp,1n} a$

$$J_1(v_{1kp,1n} a) = 0. \quad (7.43)$$

При $v_{11n} a \rightarrow 0$ правая часть уравнения (7.42) тоже обращается в бесконечность. Поэтому знаменатель левой части должен быть равен нулю. Таким образом, (7.43) определяет все критические значения $v_{1kp,1n}$. Корнями (7.43) являются χ_{1n} при $n=1, 2, 3, \dots$: $\chi_{11} = 0$, $\chi_{12} = 3,83$, $\chi_{13} = 7,02, \dots$ (Так как учитывается значение корня $\chi_{11} = 0$, то номера корней изменены по сравнению с § 6.6).

Корни (7.42) при $m > 1$ могут быть определены его численным решением.

Первая ветвь решения соответствует HE_{mn} -волнам. Вторая ветвь решения (соответствующая нижнему знаку в (7.40)) приводит к асимптотическому равенству $(v_1 a) f_m / m = D(v_2^* a)^{-2}$, правая часть которого стремится к бесконечности при $v_2 a \rightarrow 0$. Поэтому корни (7.43) дают решения для этой ветви. Но при этом первый корень соответствует $\chi_{12} = 3,83$. Эта ветвь определяет EH_{1n} -волны ($n > 1$).

Поскольку в критическом случае $v_{2mn} = 0$, то $\kappa_{kp,mn}^2 = k_{2,kp}^2 = \omega_{kp,mn}^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_2 \mu_2 = (2\pi / \lambda_{kp,mn})^2 \epsilon_2 \mu_2$. Но $\kappa_{kp,mn}^2 = k_{1,kp}^2 - v_{1kp,mn}^2 = (2\pi / \lambda_{kp,mn})^2 \epsilon_1 \mu_1 - (\chi_{mn} / a)^2$. Приравняв эти значения $\chi_{kp,mn}^2$, находим

$$\lambda_{кр, mn} = \frac{2\pi a}{\chi_{mn}} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2}, \quad (7.44)$$

где $\lambda_{кр, mn}$ определена как критическая длина волны, соответствующая свободному распространению.

Так как $\chi_{11} = 0$, то $\lambda_{кр, 11} \rightarrow \infty$. Это значит, что $\omega_{кр, 11} \rightarrow \infty$ и поле типа HE_{11} не имеет критической длины волны (и критической частоты) и может распространяться вдоль волновода при любой рабочей частоте.

4. Характеристические уравнения (7.39) азимутально-однородных H_{0n} - и E_{0n} -волн решаются аналогичным образом. Для этого учтем, что $H_0^{(2)'}(\eta) = -H_1^{(2)}(\eta)$. При $\eta = v_2 a = -iv_2^* a$ по (П3.5)

$$\frac{W_1 k_1 J_0'(\xi)}{v_1 a J_0(\xi)} = \frac{W_2 k_2 H_0^{(2)'}(\eta)}{v_2 a H_0^{(2)}(\eta)} = -\frac{W_2 k_2 H_1^{(2)'}(\eta)}{v_2 a H_1^{(2)}(\eta)} = \frac{W_2 k_2}{(v_2^* a)^2 \ln(2/1,78 v_2^* a)}.$$

При $v_2^* a \rightarrow 0$ правая часть этого уравнения стремится к бесконечности. Поэтому необходимо, чтобы $J_0(\xi) = 0$. Таким образом, корни χ_{0n} уравнения $J_0(v_{1,0n} a) = 0$ определяют дискретные значения $v_{1,0n} a = \chi_{0n}$, при которых могут существовать H_{0n} -волны (см. § 6.6).

Характеристическое уравнение E_{0n} -волн имеет те же корни $v_{1,0n} a = \chi_{0n}$ при $v_2^* a \rightarrow 0$. Поэтому критические длины волн полей H_{0n} - и E_{0n} -волн определяются по (7.44)

$$\lambda_{кр, 0n} = \frac{2\pi a}{\chi_{0n}} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2} \quad (7.45)$$

и имеют тот же физический смысл.

5. Наименьшим значением корня χ_{0n} является $\chi_{01} = 2,405$. Поэтому наибольшим значением $\lambda_{кр, 0n}$ является $\lambda_{кр, 01} = 2\pi a (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)^{1/2} / 2,405$. Таким образом, неоднородно-азимутальная волна типа HE_{11} , имеющая $\lambda_{кр, 11} \rightarrow \infty$, является волной основного типа. Для существования одноволнового режима необходимо рабочую длину волны выбирать из условия $\lambda > \lambda_{кр, 01}$. Если стержень расположен в воздухе ($\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 1$) и изготовлен из немагнитного материала ($\mu_1 = 1$), то это условие имеет вид $\lambda > 2,61a(\varepsilon_1 - 1)^{1/2}$.

6. Фазовые скорости всех типов волн в критическом случае определяются выражением $v_{фкр, mn} = \omega_{кр, mn} / \chi_{кр, mn} = \omega_{кр, mn} / k_{2кр, mn} = (\omega_{кр, mn} / \omega_{кр, mn}) (\varepsilon_{a2} \mu_{a2})^{-1/2} = v_{ф2}$, так как $\chi_{кр, mn} = k_{2кр, mn} = [k_{1кр, mn}^2 - (\chi_{mn} / a)^2]^{1/2}$. Значит, фазовые скорости всех типов волн в критиче-

ском режиме равны фазовым скоростям Т-волны в окружающем пространстве (см. § 7.2).

Если в (7.36) v_{2mn}^* возрастают, то поверхностная волна локализуется у цилиндра, при этом κ_{mn} ($\kappa_{mn}^2 = k_{2mn}^2 + v_{2mn}^{*2}$) возрастает. Поэтому $v_{\phi mn} = \omega / \kappa_{mn}$ уменьшается.

Для вычисления $v_{\phi mn}$ при заданных значениях ϵ_q, μ_q и a/λ необходимо решить относительно κ_{mn} уравнение (7.38), учитывая, что $\kappa_{mn} = (k_2^2 - v_{2mn}^2)^{1/2} = (k_1^2 - v_{1mn}^2)^{1/2}$. Решение получают численными (или графическими) методами. Результаты вычислений зависимости коэффициента замедления $\xi_{mn} = v_{\phi mn} / c$ от a/λ при $\epsilon_2 = 1, \mu_2 = \mu_1 = 1$ для HE_{11} -волны и для волны высшего типа H_{01} (пунктирные кривые) приведены на рис. 7.6,а. Коэффициенты замедления для всех типов волн, как и в плоском слое диэлектрика (§§ 7.2 и 7.3), удовлетворяют условию $(\epsilon_1 \mu_1)^{-1/2} \leq \xi_{mn} \leq (\epsilon_2 \mu_2)^{-1/2}$.

По значению коэффициента замедления может быть рассчитана длина волны волновода: $\lambda_{mn} = 2\pi v_{\phi mn} / \omega = v_{\phi mn} / f = \xi_{mn} \lambda_0$, где $\lambda_0 = c / f$.

7. Мощность $P_{\perp mn}$ (5.17), переносимая поверхностной волной через поперечное сечение направляющей системы, есть сумма мощности $P_{1\perp mn}$, переносимой внутри стержня, и мощности $P_{2\perp mn}$, переноси-

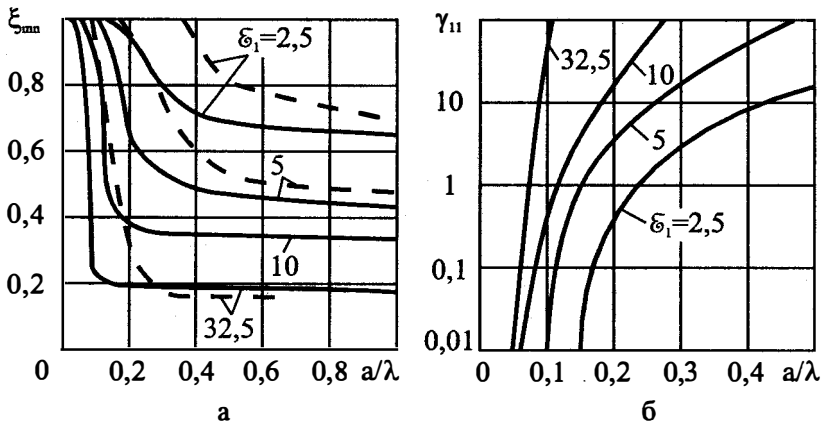


Рис. 7.6. Графики зависимости коэффициентов замедления и локализации мощности от a/λ

мой вне стержня:

$$P_{1\perp mn} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \Pi_{1mn} \mathbf{1}_z r d\varphi dr, \quad P_{2\perp mn} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \Pi_{2mn} \mathbf{1}_z r d\varphi dr, \quad (7.46)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{qmn} \mathbf{1}_z &= \operatorname{Re} \dot{\Pi}_{qmn} \mathbf{1}_z = 0,5 \operatorname{Re} \left[\dot{\mathbf{E}}_{qmn}, \dot{\mathbf{H}}_{qmn}^* \right] \mathbf{1}_z = \\ &= 0,5 \operatorname{Re} \left(\dot{\mathbf{E}}_{qrmn} \dot{\mathbf{H}}_{q\varphi mn}^* - \dot{\mathbf{E}}_{q\varphi mn} \dot{\mathbf{H}}_{qrmn}^* \right), \end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{E}}_{q\varphi mn}, \dot{\mathbf{H}}_{q\varphi mn}$ определены в (7.37), а $\dot{\mathbf{E}}_{qrmn}, \dot{\mathbf{H}}_{qrmn}$ находятся по (6.28), (6.29), (7.35).

По (7.46) можно найти отношение $P_{1\perp mn} / P_{2\perp mn} = \gamma_{mn}$. Коэффициент γ_{mn} описывает локализацию мощности в стержне. Для основного типа волны графики зависимости γ_{11} от a/λ (при $\varepsilon_2 = \mu_2 = \mu_1 = 1$) приведены на рис. 7.6,б [21]. Графики показывают, что с ростом a/λ происходит резкая локализация энергии внутри стержня. При малых a/λ значительная часть мощности переносится над стержнем. Это явление используется для построения разнообразных устройств на диэлектрических волноводах [19, 22].

8. Коэффициент затухания α_{dmn} за счет потерь на нагревание стержня и окружающей среды определяется по (5.28), где

$$\int_{S_{\perp}} \sigma |\dot{\mathbf{E}}_{mn}(p_{\perp})|^2 dS = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma_1 |\dot{\mathbf{E}}_{1mn}(p_{\perp})|^2 r dr d\varphi + \int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma_2 |\dot{\mathbf{E}}_{2mn}(p_{\perp})|^2 r dr d\varphi. \quad (7.47)$$

При этом используются векторы поля для идеальных диэлектриков, поэтому вычисленные значения α_{dmn} являются приближенными.

Выполнив интегрирование в (7.46), (7.47), из (7.47) можно получить [22] при $\sigma_2 = 0$, $\varepsilon_2 = \mu_2 = 1$

$$\alpha_{dmn} = F_{mn} \pi \varepsilon_1^{1/2} \lambda^{-1} \operatorname{tg} \Delta_1, \quad (7.48)$$

где зависящий от ε_1, μ_1 и a/λ коэффициент F_{mn} имеет смысл отношения коэффициента затухания данного типа волны и коэффициента затухания однородной плоской волны в неограниченном пространстве, $\operatorname{tg} \Delta_1$ определен в п.1.8.5.

Для волны основного типа на рис. 7.7,а изображены графики зависимости F_{11} от приведенного диаметра $d_0 = 2a(\varepsilon_1 \mu_1)^{1/2} / \lambda$ [22]. Зависимости мало меняются с изменением $\varepsilon_1 \mu_1$. На частотах, близких

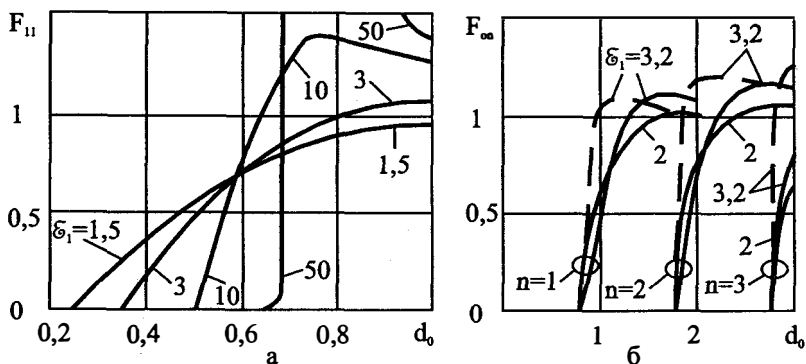


Рис. 7.7. Графики зависимости коэффициентов F_{11} и F_{0n} от приведенного диаметра

к критическим, F_{11} малы, значит, мало значение $\alpha_{д11}$, но последнее резко зависит от частоты.

На рис. 7.7,б изображены графики зависимости F_{0n} для E_{0n} - и H_{0n} -волн при $n = 1, 2, 3$ (для последних — пунктирной линией).

Расчеты коэффициента затухания за счет излучения поля при нарушении регулярности (изогнутых и скрученных волноводов) приведены в [22].

9. Силовые линии полей можно построить, используя (7.35), (7.37) и определяя по (6.28), (6.29) \dot{E}_{qr} , \dot{H}_{qr} . Для E_{03} -волны зависимость $H_{\varphi}(r, \varphi_0, t_0)$ для волновода с параметрами $\epsilon_1 = 2,25$, $a = 1,25\lambda$, $\mu_1 = 1$, расположенного в свободном пространстве, изображена на графике рис. 7.8,а. Индекс $n = 3$, как и в круглом волноводе, равен числу полувольт (неполных), или вариаций поля, укладываемых вдоль радиуса стержня. Силовые линии полей E_{03} -волны в плоскости xz изображены на рис. 7.8,б. Силовые линии полей поверхностной E_{0n} -волны над стержнем отличаются от силовых линий полей поверхностной Е-волны над нитью тока, только разным наклоном у границы раздела и на нити (рис. 2.13,в).

Силовые линии полей волны основного типа волновода с параметрами $\epsilon_1 = 10$, $\mu_1 = 1$, расположенного в свободном пространстве, в поперечной плоскости при разных коэффициентах замедления изображены на рис. 7.8,в,г. Силовые линии электрического поля и магнитного поля имеют кривизны, обратные силовым линиям соответствующим

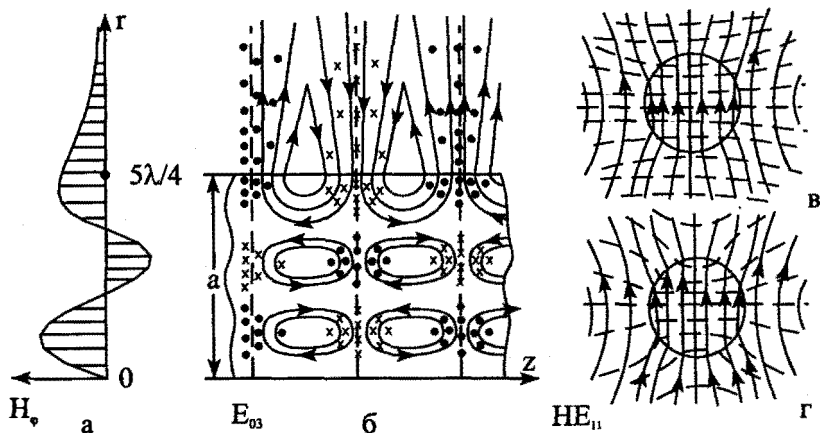


Рис. 7.8. Силовые линии полей E_{03} - и HE_{11} -волн

щих полей волны основного типа круглого металлического волновода (рис. 6.11).

Отметим, что в каждой точке p_{\perp} в случае гибридных волн происходят сложные поляризационные явления.

10. Допустимая передаваемая мощность ограничивается, во-первых, опасностью высокочастотного пробоя в области с максимальной напряженностью поля и, во-вторых, опасностью теплового пробоя, так как выделяющееся тепло повышает температуру материала. Расчеты $P_{\perp, \text{разр}}$ выполнены в [22].

11. Пример. Рассчитать рабочий диапазон частот одноволнового режима двух диэлектрических волноводов, выполненных из фторопластовых бесконечных стержней, радиусов, равных 5 мм и 1 мм, расположенных в сухом воздухе. Найти коэффициенты затухания за счет тепловых потерь основного типа волны на верхних частотах рабочих диапазонов.

Определяем $f_{\text{кр},01} = c/\lambda_{\text{кр},01}$ для $a = 5$ мм. Так как $\epsilon_1 = 2,5$, $\mu_1 = \epsilon_2 = \mu_2 = 1$, то $f_{\text{кр},01} = c \cdot 2,405/2\pi a(1,5)^{1/2} = 18,761$ ГГц. Верхняя частота рабочего диапазона $f_{\text{в}} = 0,95 f_{\text{кр},01} = 17,823$ ГГц. Минимальная длина волны рабочего диапазона $\lambda_{\text{мин}} = c/f_{\text{в}} = 16,83$ мм. Определяем $d_0 = 2a\sqrt{\epsilon_1}/\lambda_{\text{мин}} = 0,93$. По графику рис. 7.7.а находим $F_{11} \approx 1$. Тогда, принимая $\text{tg} \Delta_1 = 2,5 \cdot 10^{-4}$, по (7.48) получаем $\alpha_{\text{д}11} \approx 0,065 \text{ м}^{-1}$ или $\alpha'_{\text{д}11} \approx 8,686 \alpha_{\text{д}11} = 0,57$ дБ/м (соответствуют $\lambda_{\text{мин}}$).

Определим $f_{\text{кр},01}$ для $a = 1$ мм. Имеем $f_{\text{кр},01} = 93$ ГГц. Тогда $f_{\text{в}} = 87,239$ ГГц, $\lambda_{\text{мин}} = 3,439$ мм.

Находим $d_0 = 0,92$ и $F_{11} \approx 1$. Тогда по (7.48) $\alpha_{д11} = 0,36 \text{ м}^{-1}$ или $\alpha'_{д11} = 3,1 \text{ дБ/м}$ (соответствуют $\lambda_{\text{мин}}$).

Таким образом, волновод радиуса $a = 5 \text{ мм}$ имеет рабочий диапазон частот $0 < f < 17,823 \text{ ГГц}$ и коэффициент затухания за счет тепловых потерь в нем не более $0,57 \text{ дБ/м}$, а волновод радиуса $a = 1 \text{ мм}$ имеет рабочий диапазон частот $0 < f < 87,239 \text{ ГГц}$ и коэффициент затухания в нем не более $3,1 \text{ дБ/м}$.

12. Плоскость поляризации HE_{11} -волны так же, как и в круглых металлических волноводах, неустойчива. Поэтому применяются эллиптические диэлектрические волноводы [22] и волноводы прямоугольного поперечного сечения.

Коэффициент затухания $\alpha_{д\text{дтн}}$ за счет тепловых потерь в диэлектрическом волноводе пропорционален частоте, а в металлическом волноводе (за исключением аномального случая H_{0n} -волн в круглом волноводе) — частоте в степени три вторых. При $\lambda < 1 \text{ см}$ коэффициент затухания диэлектрического волновода при прочих равных условиях меньше, чем металлического волновода. Диэлектрические волноводы в диапазонах КВЧ, ГВЧ, в диапазонах децимиллиметровых волн могут использоваться, если применяются материалы с очень малым значением $\text{tg } \Delta_1$. Наличие ЭМ поля во внешней области у диэлектрических волноводов является в этих диапазонах частот даже преимуществом, служащим построению волноводных узлов.

Для возбуждения волны HE_{11} в диэлектрическом волноводе стержень располагают в круглом металлическом волноводе, в котором распространяется H_{11} -волна.

7.5. Однопроводная линия поверхностной волны

1. Явление распространения ЭМ поля вдоль цилиндрического провода с конечной проводимостью начало изучаться еще в 1889 г., а вдоль провода, покрытого слоем диэлектрика — в 1907 г. [6]. Однако возможность применения в направляющих системах возникающих над проводом поверхностных волн появилась только после 1950 г., когда были разработаны устройства для возбуждения и приема поверхностной волны над проводом (Ж.Губо). Таким устройством может быть, например, конический рупор (1), стенки которого образуются расширением внешнего проводника коаксиальной линии (2), а внутренний проводник последней продолжается и образует однопроводную линию (3) поверхностной волны (рис. 7.9,а). Слой диэлектрика на проводе больше локализует ЭМ поля у провода.

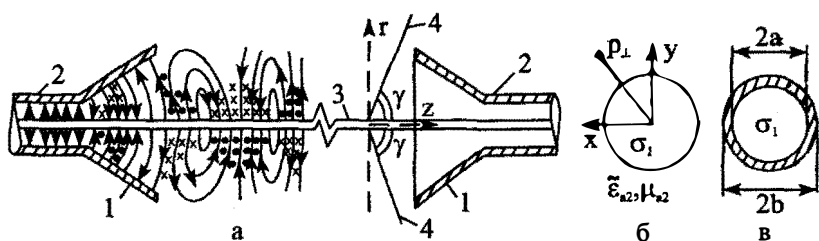


Рис. 7.9. Схема однопроводной линии и поперечные сечения провода

2. Постановка задачи о возможности существования поверхностных волн над цилиндрическим проводом (без слоя диэлектрика (рис. 7.9, б)) не отличается от соответствующей постановки задачи для диэлектрического волновода, если параметры провода и радиус его обозначить через $\tilde{\epsilon}_{a1}, \mu_{a1}, a$. Считаем, что провод расположен в воздухе $\tilde{\epsilon}_{a2} = \epsilon_0, \mu_{a2} = \mu_0$.

3. Решение задачи и его анализ выполнены в § 7.4. Если цилиндр является проводником, то $\sigma_1 \gg \omega \epsilon_{a1}$ и $\tilde{\epsilon}_{a1} \approx -i\sigma_1/\omega$. При этом $k_1 = \beta_1 - i\alpha_1 \approx (\omega \mu_{a1} \sigma_1)^{1/2} \cdot \exp(-i\pi/4)$ и $\beta_1 \approx \alpha_1 \approx (\omega \mu_{a1} \sigma_1 / 2)^{1/2}$, $\delta_1 \approx (2/\omega \mu_{a1} \sigma_1)^{1/2}$, $W_1 \approx (\omega \mu_{a1} / 2 \sigma_1)^{1/2} \cdot (1+i)$ (см. § 2.5, п.4). Глубина проникновения δ_1 поля в проводник очень мала. Коэффициенты затухания всех типов волн, за исключением азимутально-однородных, очень велики. Поэтому интерес представляет исследование аномальных азимутально-однородных волн.

В § 2.9 показано, что над нитью тока может распространяться поверхностная Е-волна. Определим коэффициенты распространения и затухания, коэффициент замедления фазовой скорости, а также коэффициент, определяющий локализацию поверхностной волны. Для этого сначала необходимо решить характеристическое уравнение (7.39) Е-волн.

4. При решении уравнения (7.39) естественно предположить, что коэффициент распространения $\kappa = \beta - i\alpha$ в основном определяется параметрами внешнего пространства, т.е. $|\kappa_2| \approx |\kappa_1|$. Учитывая, что $v_2 = (k_2^2 - \kappa^2)^{1/2}$, $v_1 = (k_1^2 - \kappa^2)^{1/2}$, получаем $v_1 \approx k_1$, так как $|\kappa_2|^2 \ll |\kappa_1|^2$. Кроме того, $|v_2|$ мало. Считаем, что радиус провода такой, что $|v_1|a = |\kappa_1|a \gg 1$ и $|v_2|a \ll 1$. Поскольку $|\kappa_1| = \sqrt{2}/\delta_1$, то $|\kappa_1|a = \sqrt{2}a/\delta_1$ и необходимо, чтобы было $a/\delta_1 \gg 1$. Таким образом, если радиус провода намного больше глубины проникновения поля в провод, то при решении (7.39) можно использовать асимптотическое поведение функций Бесселя и Ганкеля. Учтем, что $J'_0(x) = -J_1(x)$,

$J_m(x) = 0,5[H_m^{(1)}(x) + H_m^{(2)}(x)]$. Используя (П3.4) и имея в виду, что $\exp(-ik_1a) = \exp(-i\beta_1a)\exp(-\alpha_1a) \approx 0$, так как $\alpha_1a \gg 1$, получаем $J_0'(k_1a)/J_0(k_1a) = i$.

Отношение функций Ганкеля в правой части (7.39) определяем по (П3.5) при $|\nu_2|a \ll 1$:

$$H_0^{(2)'}(\nu a)/H_0^{(2)}(\nu a) = [\nu a \ln(i0,89\nu a)]^{-1},$$

где $\nu = \nu_2$. Подставляя эти асимптотические представления в (7.39), получаем трансцендентное характеристическое уравнение

$$-(\nu a)^2 \ln(i0,89\nu a) \approx iW_1(k_2a)/W_2. \quad (7.49)$$

Введем обозначение $(i0,89\nu a)^2 = u$. Тогда $2\ln(i0,89\nu a) = \ln u$, $\nu a = \mp iu^{1/2}/0,89$. Из (7.49) имеем уравнение

$$u \ln u = \nu, \quad (7.50)$$

где $\nu = i2 \cdot 0,89^2 W_1 k_2 a / W_2$. Для решения уравнения применим [6] метод, подобный образованию цепных дробей. Если известно n -е приближение u_n , то $(n+1)$ -е приближение получаем из соотношения

$$u_{n+1} \ln u_n \approx \nu_n. \quad (7.51)$$

Положив $u_0 = \nu$, находим $u_1 = \nu / \ln \nu$, $u_2 = \nu / \ln u_1 = \nu / \ln(\nu / \ln \nu)$ и т.д.

5. Пример. Найти коэффициенты распространения и затухания, коэффициент замедления фазовой скорости и коэффициент, определяющий локализацию поля поверхностной волны однопроводной линии, выполненной из латунного провода диаметром 6 мм, расположенной в сухом воздухе и работающей на частоте 3 ГГц.

Для решения задачи определим глубину проникновения ЭМ поля в латунь. Так как латунь имеет $\sigma_1 = 14,5 \cdot 10^6$ См/м, то $\delta_1 = 2,4 \cdot 10^{-6}$ м. Отношение $a/\delta_1 = 3 \cdot 10^{-3} / 2,4 \cdot 10^{-6} = 1,25 \cdot 10^3$. Значит, условия применимости (7.49) выполняются.

Находим $k_2a = 2\pi a/\lambda = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-3} / 10^{-1} = 0,1885$; $W_2 = W_0 = 377,1$ Ом, $W_1 \approx 2,86 \cdot 10^{-2}(1+i)$. Определяем значение $\nu = 2,2632 \cdot 10^{-5}(i-1)$, $\ln \nu = -10,3494 + i\pi/4$.

Нулевое приближение к решению уравнения (7.50) находим по $u_0 = \nu$. Тогда первое приближение $u_1 = \nu / \ln \nu = 10^{-5}(0,2552 - i0,161)$. Второе приближение — по (7.51) $u_2 = 10^{-5}(0,1699 - i0,1855)$. Третье приближение $u_3 = 10^{-5}(0,1636 - i0,1861)$ уже дает достаточную точность. Четвертое приближение $u_4 = 10^{-5}(0,1631 - i0,186) = 10^{-5} \times 0,2474 \exp(-i0,851)$.

Принимаем $u = u_4$. Тогда $\nu_2 a = \mp iu^{1/2}/0,89 = \mp i10^{-3}(0,73 + i1,611)$. Первое решение $\nu_2 a = 10^{-3}(-0,73 - i1,611)$ удовлетворяет условию (7.36) существования поверхностной волны.

Таким образом, $\nu_2 = \nu_2' - i\nu_2'' = -0,2433 - i0,537$ (т.е. $\nu_2' = -0,2433$, $\nu_2'' = 0,537$).

Определяем продольный коэффициент распространения $\kappa = (k_2^2 - \nu_2^2)^{1/2} = 62,8367 - i2,0793 \cdot 10^{-3}$. Если $\kappa = \beta - i\alpha$, то коэффициент фазы $\beta = 62,8367$ м⁻¹, а коэффициент затухания $\alpha = 2,0793 \cdot 10^{-3}$ м⁻¹ = 0,018 дБ/м. Значит,

коэффициент замедления фазовой скорости $\xi = 0,99997$. При распространении в продольном направлении амплитуды векторов поля уменьшаются в $e = 2,718$ раз на расстоянии в 480 м. В радиальном направлении амплитуды векторов поля на расстояниях $|v_2|r \gg 1$ с ростом r убывают по закону $\exp(-v_2^*r) = \exp(-0,537r)$, т.е. уменьшаются в e раз на расстоянии 1,9 м, т.е. волна слабо локализована у провода.

6. Пример. Решить задачу предыдущего примера для случая, когда провод выполнен из сплава, имеющего проводимость $\sigma_1 = 13,3 \cdot 10^2$ См/м.

Определяем $\delta_1 = 0,252$ мм; $a/\delta_1 = 12$; $|k_1|a = 17$. Находим $W_1 \approx 2,984(1+i)$.

Правая часть уравнения (7.50) $v = 2,363 \cdot 10^{-3}(i-1)$. Решением уравнения (7.50) является $u = 10^{-3}(0,2656 - i0,3356)$. Поэтому решение исходного уравнения (7.49), удовлетворяющее условию (7.36), $v_2a = 10^{-2}(-1,0121 - i2,093)$, т.е. $v_2 = -3,3756 - i6,9757$.

Коэффициент распространения $\kappa = 63,1278 - i0,3728$. Значит, $\beta = 63,1278$, $\alpha = 0,3728$. Поэтому коэффициент замедления $\xi = 0,9866$, поле уменьшается в e раз: в продольном направлении на расстоянии всего $1/\alpha = 2,7$ м, в радиальном направлении — на расстоянии $1/v_2^* = 0,143$ м. Поверхностная волна локализована у провода, но ее затухание велико.

7. Итак, коэффициент фазы β ЭМ поля, распространяющегося в среде над проводником, больше коэффициента фазы β_2 ЭМ поля, распространяющегося в той же среде, но без проводника. Это значит, что присутствие проводника замедляет фазовую скорость тем больше, чем меньше его проводимость. С уменьшением проводимости провода увеличивается коэффициент затухания α , но возрастает направляющее действие провода, поле локализуется у его поверхности.

При наличии потерь на нагревание провода у поверхностной волны, как показано в § 2.9, п.6, и как следует из вышеприведенных примеров, $v_2' < 0$ и из (7.36) и (7.37) получаем как и в (2.59), что зависимость фаз составляющих векторов поля от продольной и радиальной координат определяется выражением $\exp[-i(\beta z + v_2' r)] = \exp[i(-\beta z + |v_2'|r)]$. Значит, в поле поверхностной волны имеется волновое движение в направлении провода. Радиальная составляющая вектора Пойнтинга определяется по (2.60). Активная часть радиальной составляющей Π направлена к проводу и обеспечивает потери мощности на нагревание последнего. Поверхность равных фаз (при $|v_2|r \gg 1$, $t = t_0$) определяется выражением $(-\beta z + |v_2'|r) = D$ (где D — постоянная), откуда имеем уравнение прямой $r = \beta/v_2' z + D/v_2'$. Тангенс угла наклона γ этой прямой $tg\gamma = \beta/|v_2'|$.

Поэтому фронт волны (4) составляет с проводом (осью z) угол, меньший 90° (рис. 7.9,а). Значение γ мало отличается от 90° : в первом примере $\gamma \approx 89^\circ 46'$, во втором — $\gamma \approx 86^\circ 56'$. В пространстве поверхность фронта имеет форму конической воронки, опирающейся отверстием на провод. В отверстии воронки (на проводе) происходит преобразование энергии ЭМ поля в тепловую энергию. Процесс преобразования энергии количественно описывается с помощью составляющей $\text{Re}\Gamma_r$. ЭМ поле за счет этого процесса как бы «прилипает» к проводу, образуя поверхностную волну.

8. Силовые линии электрического и магнитного полей над проводом изображены на рис. 2.12,в и рис. 2.13,б,в, рис. 7.9,а.

Полученные здесь результаты могут быть использованы для построения уточненной математической модели двухпроводной линии передачи (см. § 7.1).

9. При постановке задачи о возможности существования ЭМ волн в направляющей системе, состоящей из металлического провода, покрытого слоем диэлектрика (рис. 5.1,з, рис. 7.9,в), необходимо учесть, что поле может существовать не только внутри цилиндра при $r \leq a$ и во внешнем пространстве при $r \geq b$, но и в слое при $a \leq r \leq b$. При $r \leq a$ и $r \geq b$ решения уравнений Гельмгольца (7.31), (7.32) для $\dot{E}_{qzmn}, \dot{H}_{qzmn}$ не отличаются от соответствующих выражений (7.34), (7.35) диэлектрического волновода. Но в слое ($q=3$) эти решения должны учитывать так же, как в коаксиальной линии, переотражения поля от поверхностей раздела сред при $r = a, r = b$. Поэтому аналогично (6.61) они являются комбинациями функций Бесселя и Неймана.

В направляющей системе имеется две границы раздела сред: при $r = a$ и $r = b$. На них касательные к граничным поверхностям составляющие векторов поля должны быть равны. При $|z| \rightarrow \infty$ необходимо выполнение условий излучения, а при $r \rightarrow \infty$ ЭМ поле над проводом (при $r \geq b$) должно иметь характер поверхностных волн.

Если выразить с помощью (6.28), (6.29) $\dot{E}_{q\varphi mn}, \dot{H}_{q\varphi mn}$ и подставить их и $\dot{E}_{qzmn}, \dot{H}_{qzmn}$ в граничные условия, то получим системы линейных алгебраических уравнений, определяющих коэффициенты разложений. Чтобы система имела решения, удовлетворяющие поставленным условиям, ее определитель должен быть равен нулю. Последнее приводит к характеристическому уравнению для определения коэффициентов распространения κ_{mn} . Решение последнего уравнения осуществляется вычислительными методами.

Минимальное затухание имеет однородно-азимутальная E-волна. Приведенные в [19,21] для нее результаты вычислений показывают, что коэффициент затухания линии определяется джоулевыми потерями в металле (глубиной проникновения δ_1) и пропорционален тангенсу угла потерь $\text{tg } \Delta_3$ в слое диэлектрика. При увеличении толщины слоя $b - a$ при заданном значении ϵ_3 и $\text{tg } \Delta_3$ коэффициенты затухания и фазы сначала резко увеличиваются, а затем почти не меняются, коэффициент замедления зависит в основном от ϵ_3 . Для линий с малым за-

туханием в слое переносится незначительная часть (около 3%) общей мощности и коэффициент замедления близок к единице.

Локализацию поля у линии выражают с помощью понятия радиуса r_0 круговых поперечных сечений $S_{\perp} = \pi r_0^2$, через которые переносится 50, 75, 90 и 99% всей мощности P_{\perp} . Естественно, что увеличение толщины слоя и ϵ_3 приводит к резкому уменьшению r_0 . При этом линия меньше подвержена помехам и уменьшается взаимное влияние линий друг на друга.

Однопроводная линия поверхностной волны имеет малый (меньший, чем у металлических полых волноводов) коэффициент затухания, широкий диапазон частот, простую конструкцию. Недостатками линии являются: зависимость параметров от метеорологических условий (попадание влаги на слой диэлектрика приводит к нарушению регулярности линии — излучению поля), подверженность помехам.

7.6. Сопротивление прямолинейного цилиндрического провода. Поверхностный эффект

Полученные в §§ 7.4 и 7.5 решения граничных задач позволяют определить активное и реактивное сопротивления цилиндрического провода без привлечения импедансных граничных условий.

1. Рассмотрим провод цилиндрической формы, расположенный в пространстве с параметрами $\tilde{\epsilon}_{a2} = \epsilon_0$, $\mu_{a2} = \mu_0$ (рис. 7.9.б). Обозначим через a радиус провода. Ось z ЦСК направим вдоль оси провода. Параметры провода $\tilde{\epsilon}_{a1} = -i\sigma_1/\omega$, μ_{a1} . Над проводом может распространяться азимутально-однородная E -волна (см. § 2.9, § 7.5), имеющая продольную составляющую \dot{E}_{2z} вектора \dot{E}_2 , которая должна удовлетворять уравнению Гельмгольца (7.32) при $m = 0$. Внутри провода в некотором поперечном сечении по (7.35) $\dot{E}_{1z}(p_{\perp}) = e_{1n} J_0(v_{0n} r)$, где v_{0n} определяется уравнением (7.39). В § 7.5 показано, что при $|k_1|^2 \gg |k_2|^2$ ($k_2 = k_0$) получаем $v_{0n} = v_1 \approx k_1$. Значит, $\dot{E}_{1z}(r) \approx e_1 J_0(k_1 r)$. Внутри провода $\dot{j}_{1z}(r) \approx \sigma_1 e_1 J_0(k_1 r)$. На поверхности провода $\dot{j}_{1z}(a) = \sigma_1 e_1 J_0(k_1 a)$. Нормированное значение плотности тока $f(r) = |J_0(k_1 r)| / |J_0(k_1 a)|$.

Определим поведение функции $f(r)$ в области, где $|k_1| r \gg 1$. Представляя $J_0(k_1 r)$ полусуммой функций Ганкеля первого и второго рода (при $m = 0$) и учитывая, что $k_1 = \beta_1 - i\alpha_1 = (1+i)/\delta_1$, получаем $J_0(k_1 r) \approx 0,5(2/\pi k_1 r)^{1/2} [\exp(-i\beta_1 r + i\pi/4 - \beta_1 r) + \exp(i\beta_1 r - i\pi/4 + \beta_1 r)]$. Так как $\beta_1 r \gg 1$, то первое слагаемое здесь пренебрежимо мало по сравнению со вторым. Поэтому $J_0(k_1 r) \approx 0,5(2/\pi k_1 r)^{1/2} \exp(i\beta_1 r + \beta_1 r - i\pi/4)$. Аналогичным образом имеем $J_0(k_1 a) \approx 0,5(2/\pi k_1 a)^{1/2} \exp(-i\beta_1 a - i\pi/4 + \beta_1 a)$. При этом

$f(r) \approx (a/r)^{1/2} \exp[-\beta_1(a-r)] \approx \exp[-(a-r)/\delta_1]$. Таким образом, плотность тока сосредоточена лишь в тонком слое у поверхности провода. На рис. 7.10,а изображены графики распределения плотности тока по радиусу провода при значениях $a/\delta_1 = 1$, $a/\delta_1 = 2$ и $a/\delta_1 = 5$. С ростом частоты a/δ_1 растет, плотность тока сосредотачивается во все более тонком слое провода.

Рассчитаем погонный внутренний импеданс провода. Сопротивление провода длины l постоянному току $R = l/\sigma_1 \pi a^2$. Погонное сопротивление постоянному току $R_0 = l/\sigma_1 \pi a^2$. На частоте ω ток через поперечное сечение провода

$$i_1 = \int_{S_1} \dot{j}_1 dS = \sigma_1 \int_0^{2\pi a} \int_0^0 \dot{E}_{1z} r d\varphi dr = 2\pi \sigma_1 e_1 \int_0^a J_0(k_1 r) r dr = 2\pi \sigma_1 e_1 J_1(k_1 a) / k_1,$$

где использовано табличное значение интеграла [20].

Падение напряжения на длине провода l равно $\dot{u} = \dot{E}_{1z}(a)l$, а на единичной длине — $\dot{u}_{01} = \dot{E}_{1z}(a) \cdot (1 \text{ м})$. Поэтому погонный внутренний импеданс провода

$$Z_f = \dot{u}_{01}(a) / i_1 = (k_1 / 2\pi \sigma_1) \times J_0(k_1 a) / J_1(k_1 a).$$

Разделив Z_f на R_0 , имеем

$$Z_f / R_0 = \frac{k_1 a}{2} J_0(k_1 a) / J_1(k_1 a). \quad (7.52)$$

Если частота ω мала, то δ_1 велико и *поверхностный эффект* выражен слабо. При этом $a/\delta_1 \ll 1$, $k_1 a \approx (1-i)a/\delta_1$, $|k_1|a \approx \sqrt{2}a/\delta_1 \ll 1$ и для функций Бесселя можно применить асимптотику (ПЗ.5): $J_0(k_1 a) \approx 1 - 0,25(k_1 a)^2$, $J_1(k_1 a) \approx 0,5k_1 a$. Поэтому $Z_f / R_0 \approx 1 - 0,25(k_1 a)^2 = 1 + i0,5(\alpha_1 a)^2$, т.е. $R_f \approx R_0$, $X_f \approx 0,5R_0(a/\delta_1)^2$; сопротивление провода R_f равно сопротивлению при постоянном токе; внутреннее реактивное сопротивление X_f очень мало.

Если частота велика, то $a/\delta_1 \gg 1$ (*при сильном поверхностном эффекте*) и

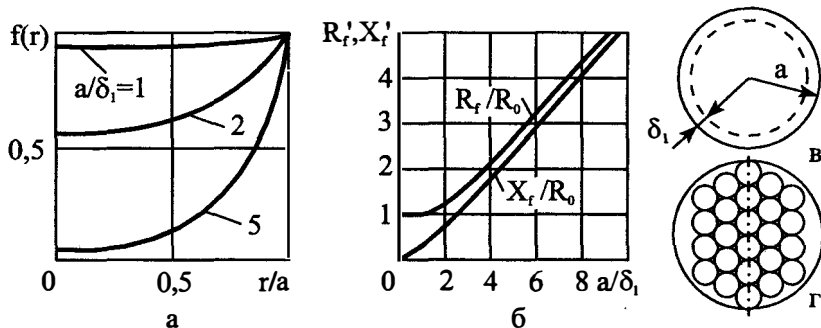


Рис. 7.10. К определению поверхностного эффекта в цилиндрическом проводе

$|k_1|a \gg 1$. Поэтому к функциям Бесселя можно применить асимптотику при больших значениях аргумента. Имеем $J_1(k_1 a) \approx J_0(k_1 a) \exp(-i\pi/2)$. Подставляя это выражение в (7.52), получаем $Z_f / R_0 \approx (0,5a/\delta_1) \cdot (1+i)$, т.е. $R_f / R_0 = X_f / R_0 = 0,5a/\delta_1$.

Таким образом, при сильном поверхностном эффекте $R_f = X_f = 1/(\sigma_1 \delta_1 \cdot 2\pi a)$.

По значению $X_f = \omega L_f$ можно определить внутреннюю погонную индуктивность L_f провода.

На рис. 7.10,б изображены зависимости $R'_f = R_f / R_0$ и $X'_f = X_f / R_0$ от отношения a/δ_1 . Вычисления при промежуточных значениях a/δ_1 выполнены по (7.52). При увеличении частоты активное и реактивное сопротивление единицы длины провода возрастают.

2. Пример. Цилиндрический медный провод имеет радиус $a = 2$ мм. Вычислить внутренние погонные сопротивления и индуктивности провода на частотах $f_1 = 1$ МГц и $f_2 = 1$ ГГц.

Проводимость меди $\sigma_1 = 5,8 \cdot 10^7$ См/м. На частоте f_1 $\delta_1 = 0,065$ мм, $a/\delta_1 = 30,8$. Погонное сопротивление постоянному току $R_0 = (1/\sigma_1 \pi a^2) = 1,37 \cdot 10^{-3}$ Ом/м. Поэтому $R_f = X_f = R_0 \cdot 0,5a/\delta_1 = 21 \cdot 10^{-3}$ Ом/м. Активная составляющая погонного сопротивления увеличивается в 15,4 раза по отношению к R_0 . Погонная внутренняя индуктивность $L_f = X_f / \omega = 3,34 \cdot 10^{-9}$ Гн/м.

На частоте f_2 $R_f = X_f = 486 R_0 = 0,67$ Ом/м, т.е. активная составляющая погонного сопротивления увеличивается 486 раз по отношению к R_0 и в 31,6 раза по отношению к значению R_f на частоте f_1 . Погонная внутренняя индуктивность $L_f = 0,21 \cdot 10^{-9}$ Гн/м.

3. Для уменьшения сопротивления провода R_f переменному току заменяют провод радиуса a (рис. 7.10,в) совокупностью более тонких изолированных друг от друга проводов радиусов $a_m = a/m$, где $m > 1$ (рис. 7.10,г). Если $\delta_1 \ll a_m$, то провод радиуса a_m имеет (эффективную) площадь $S_{эм} \approx 2\pi a_m \delta_1$, а n проводов имеют — $S_{эм} \approx n 2\pi a_m \delta_1$. Поэтому погонное сопротивление переменному току совокупности проводов $R_{fn} \approx (\sigma_1 S_{эм})^{-1} = (2\pi a \sigma_1)^{-1} \cdot m/n = R_f m/n$. Так как $n \gg m$, то $R_{fn} \ll R_f$.

Приведенный расчет является приближенным, так как не учитывает влияние друг на друга ЭМ полей токов в проводах, т.е. перераспределения токов. Ориентировочно за счет этого R_{fn} возрастает в 2 раза.

7.7. Понятие о квазиоптических направляющих системах

1. В диапазоне сантиметровых волн в качестве канализирующих систем широко применяются прямоугольные и круглые металлические волноводы. Размеры волноводов выбираются из условия существования одноволнового режима. Но при длинах волн коро-

че 1-2 мм эти волноводы применять нельзя, так как возрастают тепловые потери в стенках волноводов и возрастают технологические трудности изготовления волноводов. Например, если выбрать размеры прямоугольного волновода из условия распространения в нем только H_{10} -волны ($a = 0,9\lambda$, $b = 0,45\lambda$), то при $\lambda = 0,2$ мм коэффициент затухания становится равным 120 дБ/м, т.е. — совершенно неприемлемой величине.

Увеличение поперечных размеров волновода позволяет уменьшить коэффициент затухания. Но режим является многоволновым. Например, при $\lambda = 0,2$ мм и размерах волновода $a \times b = 23 \times 10$ мм² затухание равно 0,8 дБ/м, т.е. допустимой величине. Но число распространяющихся типов волн превосходит $3 \cdot 10^4$ (последнее приближенно вычисляется по формуле $2\pi S_{\perp} \lambda^2$). Возможность распространения большого числа типов волн приводит к существенному искажению передаваемого сигнала (поскольку каждый тип волны имеет свою групповую скорость).

На волнах миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн могут использоваться линзовые и зеркальные линии передачи — лучевые волноводы.

2. *Линзовая линия* состоит из периодически расположенных на общей оси длиннофокусных диэлектрических линз (рис. 7.11,а). Если расположить в фокусе излучатель (1), то возбуждаемое им ЭМ поле падает на линзу (2), линза фокусирует падающее поле, далее оно распространяется к следующей линзе. Если бы точно выполнялись законы геометрической оптики, то каждая линза формировала бы сходящийся пучок лучей (3), который попадал бы на следующую линзу. Однако, сходящийся пучок, ограниченный прямолинейными образующими, не формируется. На следующую линзу попадает расходящийся пучок, линза фокусирует его. Часть энергии ЭМ поля не попадает на соседнюю линзу, из-за этого появляются потери на излучение — радиационные потери.

Для расчета линзовой линии передачи необходимо знать функцию распределения вектора напряженности электрического или магнитного поля в некотором поперечном сечении линии. Для этого поступают следующим образом: по функции распределения поля на выходе одной из линз находят поле на входе следующей линзы, а затем — функцию распределения на выходе последней. Поле на выходах линз, расположенных на расстояниях, равных периоду, отличается только постоянным множителем. Из этого условия можно получить уравнение для поля волны, распространяющихся вдоль линии.

Каждая из линз осуществляет исправление фронта проходящей волны, т.е. является фазовым корректором.

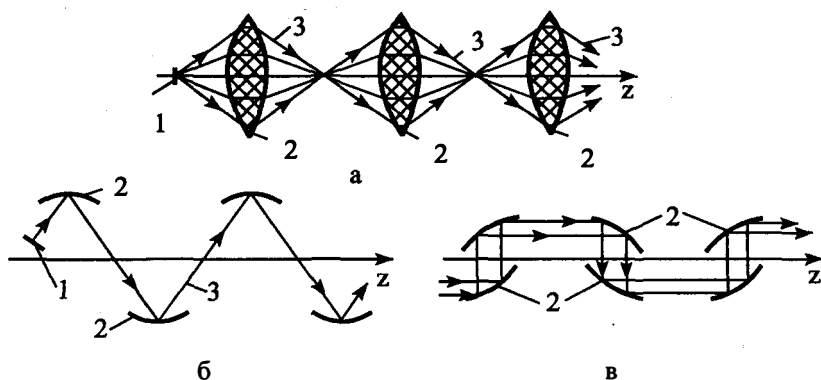


Рис. 7.11. Схематическое устройство линзовой и зеркальной линий

Существенным недостатком линзовых линий являются потери в линзах — часть энергии ЭМ поля отражается от поверхностей линз, часть — превращается в тепло. Свободными от этих потерь являются зеркальные линии.

3. В простой *зеркальной линии* ЭМ поле источника (1) падает на изогнутое зеркало (2) (рис. 7.11,б). Линия состоит из периодически расположенных зеркал. Каждое зеркало является фазовым корректором. Уравнения для расчета линии можно получить геометрическими методами.

Недостатком простой зеркальной линии является большая чувствительность к юстировке, в частности, к перекосам зеркал. Большой устойчивостью в этом смысле обладают перископические зеркальные линии, в которых два зеркала (2), являющихся одним фазовым корректором, жестко скреплены друг с другом (рис. 7.11,в).

7.8. Понятие об оптических волноводах

1. Оптические волноводы (световоды) применяются для передачи ЭМ энергии в оптическом диапазоне длин волн на расстояния от миллиметров (в интегральных микросхемах) до десятков километров (в оптических линиях связи). Их делят на четыре группы: полые (металлические или диэлектрические) с зеркальной внутренней поверхностью; поверхностных волн; диафрагмированные, линзовые, зеркальные; волоконные световоды (ВС).

По сравнению с ВС полые с зеркальной внутренней поверхностью имеют большие поперечные размеры, а волноводы поверхностной волны слабо защищены от внешних влияний. Линзовые световоды состоят из металлической трубы с периодически расположенными линзами (рис. 7.11,а). С помощью линз ЭМ поле фокусируется так, что поперечное сечение, через которое переносится мощность, находится у оси световода и стенки трубы мало влияют на процесс распространения поля. Поэтому коэффициент затухания определяется в основном тепловыми (и дифракционными) потерями в линзах, и может составлять около $2,5 \cdot 10^{-3}$ дБ/м. Недостатками линзовых световодов является их сложная конструкция, необходимость выполнения сложных юстировочных работ.

В зеркальных световодах система зеркал, изображенная на рис. 7.11,б, устанавливается вдоль трубы через каждые 100-500 м. Коэффициент затухания в них составляет $(2-3) \cdot 10^{-3}$ дБ/м, недостатки те же, что у линзовых световодов.

2. Волоконные световоды — это диэлектрические волноводы. Наибольшее распространение получили диэлектрические волноводы круглого поперечного сечения, состоящие из нескольких concentрических слоев диэлектрика. В качестве параметра диэлектрика при расчетах используют коэффициент (показатель) преломления диэлектрика $n = \epsilon^{1/2}$. Показатель преломления внутреннего слоя (сердцевины) является функцией радиальной координаты r , $n_1 = n_1(r)$. Функция $n_1(r)$ называется *профилем показателя преломления*. Показатели преломления $n_2 = \epsilon_2^{1/2}$, $n_3 = \epsilon_3^{1/2}$ внешних слоев (оболочек) постоянны. Сердцевину и оболочки изготавливают из немагнитных материалов ($\mu = 1$).

ВС имеет основные параметры: число и структуру распространяющихся типов волн, профиль показателя преломления, геометрические размеры сердцевины и оболочки, числовую апертуру, коэффициент затухания и уширение импульсов.

Поперечные сечения типичных ВС и профили их показателей преломления изображены на рис. 7.12. При однородной сердцевине и однородной оболочке ВС называют *световодом со ступенчатым профилем показателя преломления* (рис. 7.12,а).

ВС, состоящие из нескольких concentрических однородных слоев диэлектрика, в зависимости от соотношения между показателями преломления слоев, называют *кольцевыми световодами, световодами W-типа или кольцевыми W-типа* (рис. 7.12,б).

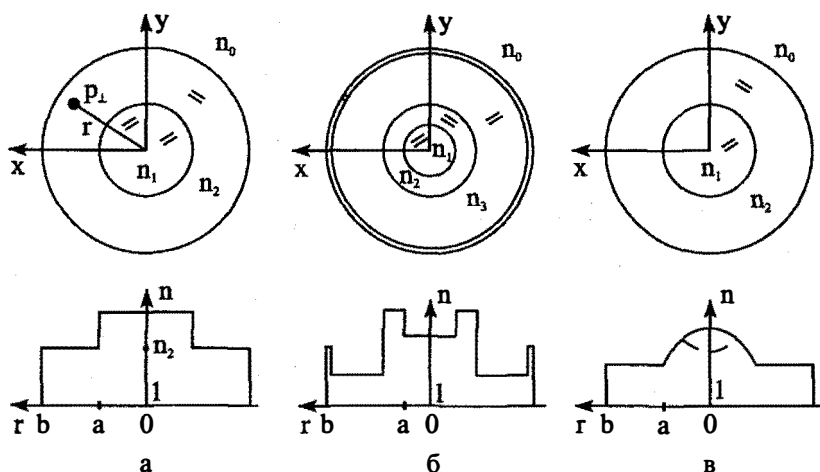


Рис. 7.12. Поперечные сечения и профили показателей преломления волоконных световодов

ВС называют *градиентом* или *градиентным*, если показатель преломления непрерывно изменяется вдоль r (рис. 7.12,в). Последние наиболее изучены при $n(r) = n_1[1 - 2\Delta(r/a)^g]$, $0 \leq r \leq a$, где $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$, g — показатель степени, a — радиус сердцевины. При $g = 2$ ВС называют *параболическим*. Если в центре сердцевины n_1 уменьшается (это происходит по технологическим причинам), то волновод называют световодом с осевым провалом профиля показателя преломления (рис. 7.12,в, график изображен пунктиром).

Числовая апертура ВС определяется выражением $A = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \approx (\epsilon_1 - \epsilon_2)^{1/2} \approx n_1 \sqrt{2\Delta}$. Эффективность ввода в ВС излучения лазера или светодиода зависит от A , ею же определяются потери мощности на микроизгибах, дисперсия импульсов, число распространяющихся типов волн. Числовая апертура характеризует способность волокна собирать поток лучей: чем она больше, тем эффективнее волокно.

Однородный двухслойный волновод имеет число типов волн $N = V^2/2$, ВС со степенным показателем преломления — $N = gV^2/2(g+2)$, где $V = 2\pi a(\epsilon_1 - \epsilon_2)^{1/2}/\lambda$ — нормированная рабочая частота. В градиентном ВС число N меньше, чем в двухслойном при тех же геометрических размерах и n_1, n_2 .

3. В пластмассовых ВС сердцевина изготавливается из полистирола, оболочка — из полиметакрилата ($n_1 = 1,59$, $n_2 = 1,49$, $\Delta = 0,0628$, $A = 0,555$) или — сердцевина из полиметакрилата, а оболочка — из сополимера ($n_1 = 1,49$, $n_2 = 1,393$, $\Delta = 0,0651$, $A = 0,53$).

В ВС на основе кварцевых стекол для изменения n окиси кремния используют различные добавки (бор, германий, титан, фосфор, алюминий). Средние коэффициенты затухания градиентных ВС на основе кварцевых стекол меньше, чем у ВС на основе пластмасс, и составляют около 2,7 дБ/км на $\lambda = 0,85$ мкм и 0,8 дБ/км на $\lambda = 1,3$ мкм. У одно-

волновых кварцевых ВС Δ меняется от 0,2 до 1%, у многоволновых — от 0,5 до 2%, $A \approx 0,2+0,25$.

Для многоволновых ВС установлен международный стандарт: диаметр сердцевины — 50 мкм, диаметр оболочки — 125 мкм. ЭМ поле HE_{11} -волны в одноволновых ВС переносит в оболочке около 20% мощности. Чтобы уменьшить излучение поля при изгибах ВС и взаимную связь между ВС толщину оболочки делают на порядок большей радиуса, обычно диаметр ее равен 125 мкм.

Коэффициент затухания α ВС, изготовленных из многокомпонентных стекол, больше α кварцевых ВС. Обычно $\alpha = 5+10$ дБ/км, для пластмассовых ВС $\alpha \approx 20+100$ дБ/км. В ВС из поликристалла бромистого и бромйодистого таллия на $\lambda = 4-5$ мкм получен $\alpha \approx 0,01$ дБ/км.

4. Волоконно-оптический кабелем (ВОК) называют ВС (или группу волоконных световодов) в конструкции, отвечающей комплексу оптических и механических требований и условиям эксплуатации в окружающей среде. ВОК имеют сложную конструкцию и состоят из многих элементов: ВС — ключевого элемента, центрального армирующего стержня из пластмассы или металла, защитной оболочки, заполняющих элементов. ВОК разделяют на монтажные, объектовые, городские, зоновые, магистральные. Конструктивные особенности ВОК, технология изготовления их изложены в [22, 23].

5. Постановка и решение граничной задачи о возможности существования ЭМ поля в однородных двухслойных ВС не отличается от соответствующих задач, рассмотренных в § 7.3 и § 7.4. Имеются три области: внутренняя ($0 \leq r \leq a$) — в сердцевине, внутренняя — в оболочке ($a \leq r \leq b$) и внешняя $r \geq b$. Поле в последней должно иметь характер поверхностных волн, поле во внутренней области при $r=0$ не должно обращаться в бесконечность, а в оболочке поле переотражается между поверхностями раздела сред. Граничные условия приводят к характеристическому уравнению. Решение последнего дает возможность определить коэффициент распространения.

Решение граничной задачи для градиентных (неоднородных) ВС получают в основном приближенными методами [23-26].

7.9. Полосковые волноводы

1. Полосковые волноводы (линии) имеют преимущества печатных схем. По сравнению с металлическими волноводами у них меньшие поперечные размеры и масса, проще технология изготовления. Различают два основных типа полосковых волноводов: *несимметричные* (рис. 7.13,а-в) и *симметричные* (рис. 7.13,г-е). Каждый тип классифицируют в зависимости от вида крепления полоски и характера заполнения пространства между экранирующими пластинами и полоской. На рис. 7.13,а,г изображены поперечные сечения волноводов с воздушным заполнением пространства между токонесущей полоской (1) и заземленной проводящей пластиной (2).

Полоска крепится с помощью редко расположенных столбиков или шайб. Эти волноводы имеют меньший коэффициент затухания по сравнению с другими полосковыми волноводами, но более сложную технологию изготовления. Сплошной диэлектрик (3) заполняет пространство между полоской (1) и заземленной пластиной (2) в конструкциях, изображенных на рис. 7.13,б,д. Несимметричный волновод прост в изготовлении, при большом значении ϵ диэлектрика имеет меньший коэффициент затухания по сравнению с симметричным, но при малых ϵ — большие потери на излучение, несимметричный волновод имеет также более жесткие допуски на поперечные размеры при его изготовлении. Свойства волноводов с частичным заполнением пространства между полоской и пластиной (рис. 7.13,в,е) зависят от плотности заполнения пространства диэлектриком:

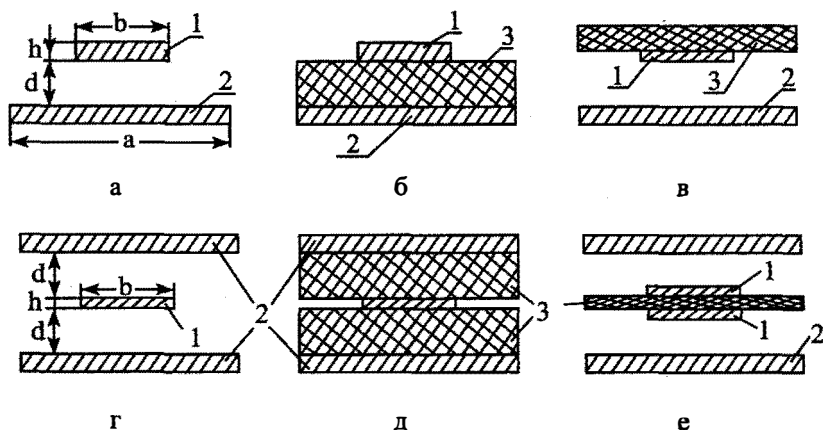


Рис. 7.13. Поперечные сечения полосковых волноводов

при малой плотности заполнения их свойства близки свойствам волноводов с воздушным заполнением пространства.

Несимметричный полосковый волновод со сплошным заполнением диэлектриком наиболее прост в изготовлении, наименьше подвержен асимметрии при монтаже элементов. Поэтому он применяется наиболее часто.

Микрополосковыми волноводами (линиями) называют несимметричные полосковые волноводы (линии), изготавливаемые методами пленочной технологии. При этом применяются диэлектрики с малым значением $\operatorname{tg} \Delta$ ($\operatorname{tg} \Delta < 10^{-3}$) и большим значением ϵ . Проводники изготавливаются из меди.

В полосковых волноводах применяются органические диэлектрики — полиэтилен, фторопласт, полистирол, имеющие $\epsilon \approx 2 + 2,5$, и композиционные пластики, имеющие $\epsilon \approx 2,5 - 16$. Материалы, применяемые для полосковых волноводов, описаны в [27, 13].

2. *Щелевые и компланарные линии* (волноводы) относятся к модификациям полосковых линий. Щелевая линия образуется узкой щелью (1) в проводящей пластине (2), нанесенной на тонкий слой диэлектрика (3) (рис. 7.14,а). Компланарный волновод образуется из двух щелей (1) между тонкой металлической полоской (2), проложенной между параллельными ей проводящими (заземленными) пластинами (3), расположенными на поверхности слоя диэлектрика (4) (рис. 7.14,б). Слой диэлектрика (подложка) должен иметь высокое значение ϵ , что обеспечивает локализацию поля в щелях.

3. Несмотря на простоту конструкции, строгий анализ ЭМ поля полоскового

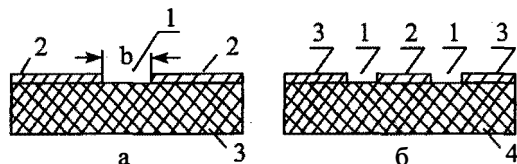


Рис. 7.14. Поперечные сечения щелевой и компланарной линий

волновода затруднен из-за сложных граничных условий: ЭМ поле существует в диэлектрике волновода и во всем неограниченном пространстве. Если принять в математической модели проводимость металла бесконечной, то касательные к поверхности проводников составляющие вектора \dot{E} должны быть равны нулю на проводниках. Над волноводом ЭМ поле должно иметь характер поверхностных волн. Решение граничной задачи в строгой постановке к настоящему времени выполнено только численными методами [16, 28]. Вообще при теоретическом исследовании полосковых волноводов применяются три следующих подхода [28, 29]: в первом подходе считается, что в волноводе распространяется только Т-волна, при этом задача сводится к решению уравнения Лапласа с заданными условиями на границах частичных областей. Задача решается строгими методами, может быть получено аналитическое решение [27, 30]. При втором подходе поставленная граничная задача о возможности существования волн в волноводе решается строго численными методами [16, 28, 31]. Третий подход является гибридным: применяются и аналитические и численные методы решения.

В полосковых волноводах измеренная длина волны отличается на 6-14% от рассчитанной в предположении существования только Т-волны (квази-Т-волны) [27, 30]. Это дает возможность приближенно считать, что токи проводимости в полоске и заземленных пластинах являются продольными.

Это условие выполняется, если ширина полоски b и расстояние d между ней и пластиной меньше половины длины волны в волноводе. При этих условиях электрическое и магнитное поля сосредоточены только между полоской и пластиной, и их можно рассматривать раздельно. Если ввести ДСК, ось z которой направить вдоль оси волновода, а плоскость xz совместить с заземленной пластиной, то $\dot{j} = 1_z \dot{j}_z$. Поэтому $\dot{A} = 1_z \dot{A}_z$, а \dot{A}_z вне источников удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (6.17). Предположив, что в волноводе имеется только Т-волна, имеем $k_{mn} = k = \omega(\epsilon_a \mu_a)^{1/2}$. Тогда $\dot{A}_z = \dot{A}(x, y) \exp(-ikz)$, $\dot{\phi}(p) = \dot{\phi}(p_\perp) \exp(-ikz)$ и из (1.117), (1.103) имеем $\nabla_\perp^2 \dot{A} = 0$, $\nabla_\perp^2 \dot{\phi}(p_\perp) = 0$, т.е. в указанном предположении полосковый волновод можно изучать на основе уравнений Лапласа. Из условия Лоренца $\dot{\phi} = -\text{div} \dot{A} / i\omega \epsilon_a = W \dot{A}_z$, где $W = (\mu_a / \epsilon_a)^{1/2}$ — характеристическое сопротивление волновода (неограниченного пространства). Поэтому можно определять только одну из функций — \dot{A} или $\dot{\phi}$. Векторы \dot{E} и \dot{H} находятся по (1.124), (1.125). Отношение поперечных составляющих векторов поля равно характеристическому сопротивлению. Например, $\dot{E}_x / \dot{H}_y = W$.

Волновое сопротивление полоскового волновода, как и в длинной линии, определяется выражением $Z = \dot{u}(z) / \dot{i}(z) = (L/C)^{1/2}$, где напряжение $\dot{u}(z)$ и ток $\dot{i}(z)$ удовлетворяют, как и \dot{E}_x, \dot{H}_y , уравнениям Лапласа, L, C — индуктивность и емкость на единицу длины волновода. Волновое сопротивление не зависит от z . Так как в полосковом волноводе $v_\phi = (LC)^{-1/2} = (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}$, то $Z = (LC)^{1/2} / C = 1 / v_\phi C = \sqrt{\epsilon \mu} / c C$, где c — скорость света в вакууме. Зная емкость C с воздушным заполнением волновода, можно найти волновое сопротивление.

Выражение для емкости C получается с помощью метода конформных преобразований. Применением интеграла Кристоффеля-Шварца задача, как в случае несимметричного, так и симметричного полосковых волноводов, сводится к определению емкости эквивалентного плоского конденсатора единичной по z длины, в котором края отсутствуют.

Не выписывая громоздких формул для C , отметим, что Z определяется отношением полных эллиптических интегралов первого рода, зависящих от b/d и h/d . При расчетах обычно применяют графики зависимостей $Z(b/d)$ или аппроксимированные формулы, дающие достаточную для инженерных расчетов точность: $Z = M / (1 + b/d) \sqrt{\epsilon}$, где $M = 311$ Ом для несимметричного волновода и $M = 216$ Ом для симметричного волновода.

Кроме волнового сопротивления, к основным параметрам полосковых волноводов относятся допустимая рабочая мощность $P_{\text{доп}}$ и коэффициент затухания. Величина $P_{\text{разр}}$ рассчитывается по значению $E_{\text{разр}}$. Максимального значения напряженность электрического поля достигает на краю полоски и существенно зависит от ее толщины. Для несимметричного волновода значение $P_{\text{доп}}$ рассчитывают по формуле $P_{\text{доп}} \approx 38 \cdot 10^8 \sqrt{\epsilon} d^2 r_b \Delta$, где считается, что $h \rightarrow 0$, r_b — больший корень трансцендентного уравнения $r - \ln r - 1 - \pi b / 2d = 0$ (таблицы значений r_b приводятся в [27, 30]). Для симметричного волновода $P_{\text{доп}} = 12,15 \cdot 10^9 \sqrt{\epsilon} d^2 (0,1 + \Delta/d)(4 + b/d)$. В последних выражениях коэффициент запаса электрической прочности принят равным 0,5.

Коэффициент затухания полоскового волновода $\alpha = \alpha_m + \alpha_d + \alpha_n$, где α_m , α_d и α_n — коэффициенты затухания за счет нагревания металлических полоски и пластины, слоя диэлектрика (подложки) и вследствие излучения. Для симметричных полосковых волноводов считается, что $\alpha_n \approx 0$, для несимметричных $\alpha_n = 320(\pi h / \lambda_0)^2 / Z$. Коэффициент затухания за счет потерь в диэлектрике (в дБ/м) для волновода, имеющего N слоев диэлектрика $\alpha_d = 27,3 \sum_{n=1}^N q_n \sqrt{\epsilon_n} \operatorname{tg} \Delta_n / \lambda_0$, где q_n — коэффициент заполнения диэлектриком n -го слоя, ϵ_n , $\operatorname{tg} \Delta_n$ — диэлектрическая проницаемость и тангенс угла потерь n -го слоя. Если $\operatorname{tg} \Delta_n < 10^{-3} + 10^{-5}$, то α_d вплоть до частоты 10 ГГц не превышает 0,5 дБ/м.

Основным источником потерь в полосковых волноводах являются потери на нагревание металла. Анализ потерь в полоске и пластине осложняется неравномерным распределением магнитного поля по их поверхностям, шероховатостью последних и другими причинами. В несимметричном полосковом волноводе $\alpha_m \approx 8,7 R_1 / Zb$ (в дБ/м). В симметричном полосковом волноводе α_m приблизительно в два раза меньше.

Силовые линии электрического и магнитного полей несимметричного (а) и симметричного (б) полосковых волноводов для $t = t_0$ изображены на рис. 7.15, а, б.

4. Для исследования высших типов волн в полосковых волноводах применяется метод частичных областей подобно тому, как это делается [16] в случае П- и Н-образных волноводов (§ 6.8). Затем для решений сформулированной граничной задачи используется альтернирующий метод Шварца [31].

При применении гибридных методов бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения скалярного потенциала (или составляющих векторного потенциала) преобразуются с помощью спектрального представления (инте-



Рис. 7.15. Силовые линии полей в поперечных сечениях полосковых волноводов

грала Фурье) и модифицированного метода вычетов так, что сводятся к решению более простых систем уравнений [28].

5. При решении задачи о возможности существования ЭМ поля в щелевой и компланарной линиях необходимо учитывать, что поле, кроме щели, существует в подложке, в пространстве над проводящей пластиной (пластинами) и под подложкой. Напряженность электрического поля в щели может быть заменена плотностью поверхностного магнитного тока, а при узкой щели ($b \ll \lambda_0$) — плотностью линейного магнитного тока. На пластине должны выполняться нулевые граничные условия для касательных составляющих вектора \vec{E} .

Представление об ЭМ поле над пластиной щелевой линии можно получить, анализируя поле нити бегущей волны магнитного тока (§ 2.9). Строго задача решается методом интегральных уравнений.

Представление об ЭМ поле над компланарной линией можно получить, рассматривая две параллельных противофазных нити бегущей волны магнитного тока.

Коэффициенты затухания в щелевой и компланарной линиях даже при использовании диэлектриков с малым значением $\text{tg}\Delta$ не являются малыми: в диапазоне частот от 4 ГГц до 9 ГГц они приблизительно такие же, как у микрополоскового волновода.

Широкое применение полосковые конструкции получили в устройствах СВЧ и как элементы сложных излучателей [32,33].

7.10. Возбуждение поверхностных волн над ребристой структурой. Периодические структуры

1. В качестве замедляющих систем в электронных приборах диапазона СВЧ применяются [34, 35] ребристые (гофрированные) структуры, представляющие собой металлические поверхности, в которых прорезана система параллельных друг другу канавок, или пазов (рис. 7.16,а). Над поверхностью расположен сторонний источник — нить тока I . Над структурой может распространяться поверхностная волна. Коэффициент замедления волны зависит от параметров ребристой структуры и частоты. Чтобы найти коэффициент замедления, надо решить граничную задачу о возбуждении ЭМ поля над структурой. Ребристые структуры применяются и в качестве направляющих систем, в антенной технике.

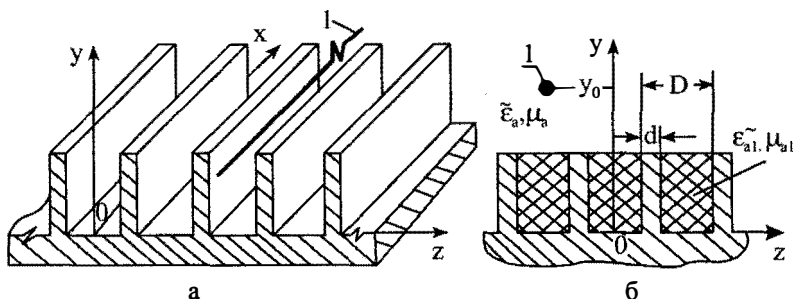


Рис. 7.16. Ребристая структура

2. Рассмотрим постановку граничной задачи. Обычно применяются плоские периодические структуры, период которых D много меньше длины волны поля в канавке, толщина ребра $d \ll D$, а глубину канавки b надо определить (рис. 7.16,б). Канавки могут быть заполнены магнитодиэлектриком, параметры которого $\tilde{\epsilon}_{a1}, \mu_{a1}$. Введем ДСК так, как показано на рис. 7.16. В математической модели по координате x канавки бесконечны и однородны, проводимость металла считаем бесконечной. Дно каждой из канавок расположено при $y = 0$, а вершина ребра — при $y = b$. В верхнем полупространстве, при $y \geq b$, среда имеет диэлектрическую и магнитную проницаемости $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$.

ЭМ поле возбуждается бесконечной прямолинейной синфазной нитью магнитного тока, параллельной канавкам и расположенной в верхнем полупространстве, т.е. $y_0 \geq b$. При этом $\mathbf{j}^{m,c} = \mathbf{1}_x j_x^{m,c} = \mathbf{1}_x \dot{I}_0^m \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$. Обозначим векторы напряженностей поля в канавках через $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$, а поля над канавками — через $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$. Поле в канавках должно удовлетворять граничным условиям на поверхности канавок. Касательная составляющая вектора $\dot{\mathbf{E}}$ на поверхности ребер должна быть равна нулю. В пределах канавки, на поверхности $y = b$, касательные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}_1, \dot{\mathbf{H}}$ должны совпадать.

Уравнения Максвелла поля $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ неоднородны, векторный потенциал $\dot{\mathbf{A}}^m = \mathbf{1}_x \dot{A}_x^m$ удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца; уравнения Максвелла поля $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ однородны, уравнение Гельмгольца для $\dot{A}_1^m = \mathbf{1}_x \dot{A}_{1x}^m$ однородно.

Считаем, что $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^n + \dot{\mathbf{E}}^b$, $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}^n + \dot{\mathbf{H}}^b$, где $\dot{\mathbf{E}}^n, \dot{\mathbf{H}}^n$ — описывают первичное поле источников в неограниченном пространстве с параметрами $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$, а $\dot{\mathbf{E}}^b, \dot{\mathbf{H}}^b$ — вторичное поле, обусловленное наличием эквивалентных поверхностных токов. Значит, $\dot{A}_x^m = \dot{A}_x^{m,n} + \dot{A}_x^{m,b}$, причем $\dot{A}_x^{m,n}$ и $\dot{A}_x^{m,b}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla^2 \dot{A}_x^{m,n} + k^2 \dot{A}_x^{m,n} = -j_x^{m,c}, \quad \nabla^2 \dot{A}_x^{m,b} + k^2 \dot{A}_x^{m,b} = 0. \quad (7.53)$$

Векторы $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ описывают вторичное поле, \dot{A}_{1x}^m удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \dot{A}_{1x}^m + k_1^2 \dot{A}_{1x}^m = 0. \quad (7.54)$$

Вместо граничных условий (7.7), как показано в § 7.2, могут быть использованы *импедансные граничные условия* (7.24), (7.25):

$$\dot{E}_z = -Z_{3S} \dot{H}_x, \quad \dot{E}_x = Z_{MS} \dot{H}_z, \quad y = b, \quad (7.55)$$

где поверхностные сопротивления Z_{3S} и Z_{MS} должны быть выражены через параметры структуры. Тогда граничные условия для \dot{A}_x^M и \dot{A}_{1x}^M должны быть записаны на основе (7.55).

Для определения Z_{3S} и Z_{MS} рассматриваем канавки как волноводы. ЭМ поле в них распространяется в отрицательном направлении оси y . В канавке относительно этого направления в общем случае могут возбуждаться Е-волны, Н-волны и Т-волны. Но поскольку расстояние между пластинами канавки $D - d \ll \lambda$, то так же, как между пластинами полоскового волновода в ней может распространяться только поле Т-волны (приближенно). Тогда решение уравнения (7.54) можно представить в виде только двух бегущих волн — одна распространяется в положительном направлении оси y , а другая — в отрицательном:

$\dot{A}_{1x}^M = A_1 \exp(-ik_1 y) + A_2 \exp(ik_1 y)$, где $A_1(z_2)$, $A_2(z_2)$ — постоянные коэффициенты, z_2 — координата середины исследуемой канавки. Из выражений (1.124), (1.125) при этом получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_{1z} &= ik_1 (-A_1 e^{-ik_1 y} + A_2 e^{ik_1 y}), & \dot{E}_{1x} &= \dot{E}_{1y} = 0; \\ \dot{H}_{1x} &= -i\omega \tilde{\epsilon}_{a1} (A_1 e^{-ik_1 y} + A_2 e^{ik_1 y}), & \dot{H}_{1y} &= \dot{H}_{1z} = 0. \end{aligned}$$

На дне канавки, при $y = 0$, должно удовлетворяться граничное условие $\dot{E}_{1z} = 0$. Поэтому $A_2 = A_1$. Значит, $\dot{E}_{1z} = -2k_1 A_1 \sin k_1 y$, $\dot{H}_{1x} = -i\omega \tilde{\epsilon}_{a1} 2A_1 \cos k_1 y$. Вдоль оси y в канавке устанавливается стоячая волна поля, узел \dot{E}_{1z} и пучность \dot{H}_{1x} находятся на дне канавки. Используя понятие характеристического сопротивления канавки, имеем $\dot{E}_{1z} = -Z_T \dot{H}_{1x}$, где Z_T — характеристическое сопротивление для Т-волны:

$$Z_T = -\dot{E}_{1z} / \dot{H}_{1x} = iW_1 \operatorname{tg} k_1 y. \quad (7.56)$$

Отношение $\dot{E}_{1z} / \dot{H}_{1x}$ необходимо определить при $y = b$ в пределах периода структуры. При этом на торце ребра $\dot{E}_{1z} = 0$. Учитывая, что толщина ребра мала ($d \ll D$) усредняя отношение (7.56) по периоду структуры, находим при $y = b$

$$Z_{3S} = (-\dot{E}_{1z} / \dot{H}_{1x})_{y=b}^{\text{cp}} = (Z_T)_{y=b}^{\text{cp}} = i \frac{D-d}{D} W_1 \operatorname{tg} k_1 b. \quad (7.57)$$

Над структурой относительно продольного направления, определяемого координатой z , распространяется Е-волна.

Таким образом, поверхностный импеданс Е-волны является чисто реактивным при отсутствии тепловых потерь в канавках; в зависимости от значения b/λ , импеданс может быть индуктивным или емкостным.

Если над структурой распространяется поле Н-волны, то $\dot{E}_z = 0$, $\dot{E}_{1x} \neq 0$. Но ЭМ поле, имеющее составляющую \dot{E}_{1x} вектора \dot{E}_1 , не может распространяться в канавке при $D - d \ll \lambda_1$ (см. § 6.2). Поэтому $\dot{E}_{1x} = 0$ в пределах ширины канавки и на торце ребра. Значит, $Z_{MS} = 0$ при $y = b$, т.е. для Н-волн поверхность ребристой структуры представляет собой поверхность тела с идеальной проводимостью.

Выражения (7.57) для Z_{MS} можно уточнить, если векторы \dot{E}_1, \dot{H}_1 определять с учетом наличия высших типов волн.

Найдем граничное условие для \dot{A}_x^M . Так как $\dot{E}_z = \partial \dot{A}_x^M / \partial y$, $\dot{H}_x = -i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{A}_x^M$, то из выражения (7.55) получаем

$$\partial \dot{A}_x^M / \partial y - ikZ \dot{A}_x^M = 0 \text{ при } y = b, \quad (7.58)$$

где $Z = Z_{\Sigma S} / W$ — нормированное поверхностное сопротивление Е-волны.

Уравнение (7.53) для $\dot{A}_x^{M,B}$ совместно с граничным условием (7.58) составляют граничную задачу третьего рода.

3. Найдем решение граничной задачи. Функция $\dot{A}_x^{M,\Pi}$, удовлетворяющая (7.53), в общем виде представляется выражением (7.14), в котором k_1 надо заменить на k . Если $q = (\kappa^2 - k^2)^{1/2}$, то по (7.14)

$$\dot{A}_x^{M,\Pi}(p) = \frac{i_0^M}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} \exp[\pm q(y - y_0) - i\kappa(z - z_0)] d\kappa. \quad (7.59)$$

Функция $\dot{A}_x^{M,B}$, удовлетворяющая (7.53) и неоднородному граничному условию (7.58), обусловлена наличием вторичных токов на поверхности $y = b$, поэтому должна иметь представление, аналогичное (7.16):

$$\dot{A}_x^{M,B}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} \Phi(\kappa) \exp[-q(y - b) - i\kappa(z - z_0)] d\kappa. \quad (7.60)$$

Спектральную плотность $\Phi(\kappa)$ найдем, подставляя последние два выражения в (7.58). Считая при этом Z независящим от координат и применяя обратное преобразование Фурье, имеем

$$\varphi(\kappa) = \frac{i_0^M}{4\pi} e^{q(b-y_0)} \frac{q - ikZ}{q + ikZ}.$$

Найдем продольную составляющую \dot{E}_z^B . Из выражений (1.124), (7.60), получаем

$$\dot{E}_z^B = -\frac{i_0^M}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{q(b-y_0)} \frac{q - ikZ}{q + ikZ} e^{-q(y-b) - i\kappa(z-z_0)} d\kappa. \quad (7.61)$$

Чтобы выполнить интегрирование, учтем, что подынтегральное выражение здесь имеет особые точки типа полюсов и точек ветвления. Полюса определяются из условия обращения знаменателя в нуль, т.е.

$$q + ikZ = 0 \text{ или } \kappa^2 - k^2 = -(kZ)^2. \quad (7.62)$$

Значит, полюса расположены при $\kappa = \kappa_{(1)(2)} = \mp k(1-Z)^{1/2}$, точками ветвления являются $\kappa = \pm k$.

Замкнем путь интегрирования по действительной оси κ полуокружностью бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости при $z - z_0 < 0$ и — в нижней полуплоскости при $z - z_0 > 0$. С помощью разрезов выделяем однозначные ветви подынтегральных функций, для которых удовлетворяется условие излучения. По теореме Коши интеграл равен сумме вычетов в полюсах подынтегральной функции, умноженной на $\pm 2\pi i$ (знак «плюс» — при $z - z_0 < 0$ и знак «минус» — при $z - z_0 > 0$), и интегралу по берегам разреза.

В верхней и нижней полуплоскостях имеется по одному полюсу. Вычеты в полюсах равны

$$-\frac{i_0^M}{4\pi} \exp[q(b-y_0)] \frac{q - ikZ}{(q + ikZ)'_{\kappa}} \begin{cases} \text{при } z - z_0 < 0, & \kappa = \kappa_{(1)}, \\ \text{при } z - z_0 > 0, & \kappa = \kappa_{(2)}, \end{cases} \quad (7.63)$$

где $(q + ikZ)'_{\kappa} = \partial(q + ikZ) / \partial\kappa = \kappa / q$.

4. Выполним анализ решения задачи. Из условия (7.62) можно установить необходимый для возбуждения поверхностных волн характер реактивности поверхностного импеданса. В разложениях (7.59) и (7.61) $\text{Re}[(\kappa/k)^2 - 1]^{1/2} > 0$, что обеспечивает сходимость интегралов при $y \rightarrow \infty$ и выполнение условий излучения. Значит, $-\pi/2 \leq \arg[(\kappa/k)^2] \leq \pi/2$. Из уравнения (7.62) следует, что необходимо выполнение условия

$$0 \leq \arg Z \leq \pi. \quad (7.64)$$

Это значит, что мнимая часть Z должна быть положительной, т.е. *поверхностное сопротивление должно иметь индуктивный харак-*

мер: $Z = R + iX$, $X > 0$. При импедансе емкостного характера ($X < 0$) поверхностная волна не появляется.

Итак, выражение (7.61) представляется в виде суммы двух слагаемых: первое слагаемое, обусловленное вычетами, обозначим через $\dot{E}_z^{в,пв}$, второе слагаемое обусловлено интегралами по берегам разреза, обозначим его через $\dot{E}_z^{в,пр}$. Учитывая значения вычетов (7.64), находим из (7.61):

$$\dot{E}_z^{в}(p) = -\frac{iI_0^M k Z^2}{(1-Z^2)^{1/2}} e^{ikZ(y-2b+y_0) \pm ik(1-Z^2)^{1/2}(z-z_0)} + \dot{E}_z^{в,пр}, \quad (7.65)$$

где верхний знак берется при $z - z_0 < 0$, а нижний — при $z - z_0 > 0$. Слагаемое $\dot{E}_z^{в,пр}$ определяет продольную составляющую вектора $\dot{E}^в$ пространственной волны. Появление последней объясняется непосредственным отражением поля источника от поверхности раздела $y = b$ — от импедансной поверхности. Часть энергии ЭМ поля, излучаемого источником, переходит в энергию поверхностной волны, а остальная часть энергии идет на формирование поля сложной пространственной волны, распространяющейся от плоскости раздела по всем направлениям.

Для направляющих систем представляет интерес случай, когда поверхностный импеданс является чисто реактивным: $Z = iX$. Пусть среды в канавках и над канавками не имеют потерь на нагревание ($k = \beta$, $k_1 = \beta_1$). При этом для первого слагаемого (7.65) имеем

$$\dot{E}_z^{в,пв} = \frac{i\beta I_0^M X^2}{(1+X^2)^{1/2}} e^{-\beta X(y_0-2b) \pm i\beta(1+X^2)^{1/2}(z-z_0)} \cdot e^{-\beta X y}.$$

Таким образом, ЭМ поле над поверхностью с чисто реактивным индуктивного характера поверхностным сопротивлением имеет поверхностный характер. Поверхностная волна может распространяться, если $\beta X = \beta W^{-1} W_1 \operatorname{tg} \beta_1 b > 0$, т.е. при условии, что $\operatorname{tg} 2\pi b / \lambda_1 > 0$. Значит, наименьшими глубинами канавок, при которых может распространяться поверхностная волна вдоль ребристой поверхности, являются $0 < b < \lambda_1 / 4$. Локализация поверхностной волны у направляющей системы определяется величиной βX .

Фазовая скорость поверхностной волны $v_{ф,п} = \omega / \beta(1+X^2)^{1/2} = v_{ф} / \sqrt{1+X^2}$, т.е. меньше фазовой скорости $v_{ф}$ в неограниченном пространстве. Коэффициент замедления равен $(1+X^2)^{-1/2}$. Путем выбора размеров ребристой структуры его можно менять в широких пре-

делах. Отметим, что в области больших значений $|\operatorname{tg} \beta_1 b|$ формула (7.56) несправедлива, поэтому для вычисления коэффициента замедления необходимо найти значение поверхностного импеданса строгими методами или использовать строгое граничное условие (7.7).

5. Ребристая структура при постоянной глубине канавок является частным случаем периодических структур. Каждый период регулярной структуры равноправен. ЭМ поле, распространяясь от периода к периоду, приобретает сдвиг фаз на постоянную величину Φ . Поэтому фазы векторов поля соседних периодов сдвинуты на Φ , т.е.

$$\dot{\mathbf{E}}(p_{\perp}, z + D) = \dot{\mathbf{E}}(p_{\perp}, z) \exp(-i\Phi), \quad \dot{\mathbf{H}}(p_{\perp}, z + D) = \dot{\mathbf{H}}(p_{\perp}, z) \exp(-i\Phi).$$

Эти соотношения выражают частный случай теоремы Флоке и позволяют построить периодические по z функции.

Векторы $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ в регулярной направляющей системе, имеющей пространственный период вдоль продольной координаты, подобно (5.1) можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{E}}(p) = \dot{\mathbf{E}}^0(p_{\perp}, z) e^{-ihz}, \quad \dot{\mathbf{H}}(p) = \dot{\mathbf{H}}^0(p_{\perp}, z) e^{-ihz},$$

где $\dot{\mathbf{E}}^0, \dot{\mathbf{H}}^0$ в отличие от $\dot{\mathbf{E}}(p_{\perp}), \dot{\mathbf{H}}(p_{\perp})$ в (5.1) зависят от z . Они могут быть разложены в ряды Фурье

$$\dot{\mathbf{E}}^0(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{E}}_n(p_{\perp}) e^{-ih_n z}, \quad \dot{\mathbf{H}}^0(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{H}}_n(p_{\perp}) e^{-ih_n z},$$

где $h_n = 2\pi n / D$, $\dot{\mathbf{E}}_n, \dot{\mathbf{H}}_n$ — коэффициенты Фурье функций $\dot{\mathbf{E}}^0, \dot{\mathbf{H}}^0$.

Таким образом, периодичность структуры по z как бы модулирует функции $\dot{\mathbf{E}}^0, \dot{\mathbf{H}}^0$, они приобретают по z ту же периодичность, что и сама структура. Векторы поля $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ представляются наложением ряда пространственных гармоник с коэффициентами распространения $\kappa_n = h + h_n$.

Внутри канавок $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ тоже можно представить в виде наложения пространственных гармоник (по z). На поверхности ребер $\dot{E}_{\tau n} = 0$, а в пределах канавок $\dot{E}_{\tau n} = \dot{E}_{1\tau n}$, $\dot{H}_{\tau n} = \dot{H}_{1\tau n}$. При этих граничных условиях надо решать краевую задачу.

7.11. Спиральный волновод

1. Круглый спиральный волновод получают намоткой металлического провода с углом захода ψ и шагом d на круглый цилиндр радиуса a (рис. 7.17, а, б). Спиральные волноводы применяются в качестве электродинамических замедляющих систем в электронных приборах типа лампы бегущей волны и лампы с обратной волной. При использовании в качестве излучателя [34, 35] в антенной технике спираль является продолжением внутреннего проводника коаксиальной линии, а внешний проводник последней расширяется, образуя конус так же, как это делается в случае возбуждения однопроводной линии (рис. 7.9, а).

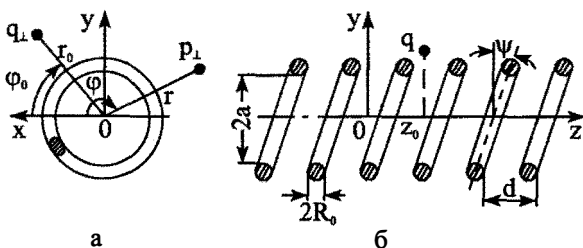


Рис. 7.17. Поперечное и продольное сечения спирального волновода

Спиральная замедляющая система может представлять собой и коаксиальную линию передачи со спиральным внутренним проводником. При возбуждении такой линии ток проводимости протекает вдоль направления винтовой линии (вдоль спирали) со скоростью, близкой к $v_\phi = (\epsilon_a, \mu_a)^{-1/2}$. Следовательно, вдоль одного витка волна распространяется за время $\Delta t = 2\pi a / v_\phi$. За это время волна смещается по оси z на расстояние шага d . Если обозначить фазовую скорость вдоль оси спирали (волновода) через $v_{\phi c}$, то $\Delta t = d / v_{\phi c}$. Значит, коэффициент замедления волны $v_{\phi c} / v_\phi = d / 2\pi a$. Эти приближенные представления показывают, что коэффициент замедления волны не зависит от частоты и должен зависеть от отношения шага к радиусу (от ψ). Строгий анализ показывает, что распространяющиеся волны обладают дисперсионными свойствами, коэффициенты распространения волн зависят от угла ψ .

Теория бесконечного спирального волновода может быть построена на основе представления о возбуждении ЭМ поля бесконечно длинным намотанным по винтовой линии проводом, по которому распространяется бегущая волна тока $\dot{I} = \dot{I}_0 \exp(-ihz) = \dot{I}_0 \exp(-ih\xi \sin \varphi)$, где ξ — линейная координата, направленная вдоль оси провода. Для определения значения h из граничного условия на поверхности провода получается характеристическое уравнение. Последнее имеет сложный вид. Поэтому ниже рассматривается приближенный метод, основанный на приближенных граничных условиях.

2. Рассмотрим постановку задачи о возбуждении спирального волновода. Направим вдоль оси волновода ось z ЦСК. Пусть продольный элементарный электрический вибратор, расположенный в точке $q(r_0, \varphi_0, z_0)$, возбуждает ЭМ поле (рис. 7.17,а). В математической модели считаем, что спираль бесконечна по координате z , расположена в неограниченном пространстве. Провод спирали считаем идеально про-

водящим. Поэтому касательная составляющая вектора напряженности электрического поля на поверхности провода должна быть равна нулю. Формулировка этого граничного условия на винтовой линии с учетом толщины провода математически сложна. Строго решить задачу возбуждения волновода из-за сложного вида граничных условий не удается. Поэтому используют приближенные граничные условия.

Считаем, что толщина провода спирали и шаг намотки стремятся к нулю. Тогда все пространство делится поверхностью цилиндра $r = a$ на внутреннюю область ($r \leq a$) и внешнюю область ($r \geq a$). Параметры сред во внутренней и внешней областях обозначим соответственно через $\tilde{\epsilon}_{a1}, \mu_{a1}$ и $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$. Векторы поля и векторные потенциалы во внутренней области обозначим через \dot{E}_1, \dot{H}_1 и \dot{A}_1, \dot{A}_1^M , а во внешней области — через \dot{E}, \dot{H} и \dot{A}, \dot{A}^M . Во внешней области поле должно иметь характер поверхностной волны.

На винтовой идеально проводящей линии при $r = a$ должны удовлетворяться граничные условия: $\dot{E}_{\psi 1} = 0, \dot{E}_{\psi} = 0$, где $\dot{E}_{\psi 1}, \dot{E}_{\psi}$ — касательные составляющие векторов \dot{E}_1, \dot{E} к направлению вдоль провода. Проектируя векторы \dot{E}_1 и \dot{E} на винтовую линию, получаем: $\dot{E}_{1\varphi} \cos \psi + \dot{E}_{1z} \sin \psi = 0, \dot{E}_{\varphi} \cos \psi + \dot{E}_z \sin \psi = 0$.

Считаем, что поверхностная проводимость между витками отсутствует, поэтому нормальные к бесконечно тонкой винтовой линии составляющие векторов \dot{E}_1 и \dot{E} при переходе через поверхность $r = a$ должны быть непрерывными (нормаль лежит на поверхности $r = a$). Проектируя векторы \dot{E}_1, \dot{E} на нормаль к винтовой линии, имеем:

$$-\dot{E}_{1\varphi} \sin \psi + \dot{E}_{1z} \cos \psi = -\dot{E}_{\varphi} \sin \psi + \dot{E}_z \cos \psi.$$

Последнее условие совместно с двумя предыдущими приводит к следующим трем равенствам:

$$\dot{E}_{1z} = \dot{E}_z, \dot{E}_{1\varphi} = \dot{E}_{\varphi}, \dot{E}_{1\psi} = -\dot{E}_{1z} \operatorname{tg} \psi \quad \text{при } r = a. \quad (7.66)$$

Так как считается, что токи проводимости в направлении нормали к виткам спирали отсутствуют, то на поверхности $r = a$ должны быть непрерывны касательные к направлению вдоль витков составляющие векторов \dot{H}_1 и \dot{H} , т.е.

$$\dot{H}_{1\varphi} \cos \psi + \dot{H}_{1z} \sin \psi = \dot{H}_{\varphi} \cos \psi + \dot{H}_z \sin \psi \quad \text{при } r = a. \quad (7.67)$$

Граничные условия (7.66), (7.67) не учитывают влияния на возбуждаемое поле толщины провода и возможных токов проводимости

между витками, возникающих по закону Ома (за счет проводимости среды). Они являются примером приближенных *анизотропных граничных условий*, связанных с анизотропным характером проводимости цилиндрической поверхности $r = a$. Ими можно пользоваться при малом значении d/λ .

Итак, необходимо найти векторы напряженностей полей \dot{E}_1, \dot{H}_1 и \dot{E}, \dot{H} , удовлетворяющие уравнениям Максвелла, граничным условиям (7.66), (7.67), условию излучения при $|z| \rightarrow \infty$, а при $r > a$ ЭМ поле должно иметь характер поверхностной волны.

3. Сторонние магнитные токи отсутствуют, поэтому $\dot{A}_1^M = \dot{A}^M = 0$.

ЭМ поля \dot{E}_1, \dot{H}_1 и \dot{E}, \dot{H} представим в виде наложения первичных полей \dot{E}_1^n, \dot{H}_1^n и \dot{E}^n, \dot{H}^n и вторичных полей \dot{E}_1^s, \dot{H}_1^s и \dot{E}^s, \dot{H}^s :

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_1^n + \dot{E}_1^s, \quad \dot{H}_1 = \dot{H}_1^n + \dot{H}_1^s, \quad \dot{E} = \dot{E}^n + \dot{E}^s, \quad \dot{H} = \dot{H}^n + \dot{H}^s. \quad (7.68)$$

Аналогично $\dot{A}_1 = \dot{A}_1^n + \dot{A}_1^s, \quad \dot{A} = \dot{A}^n + \dot{A}^s$.

Первичные поля определим как поля, возбуждаемые сторонним источником в неограниченном пространстве. Если сторонний источник находится во внутренней области ($r_0 < a$), а во внешней области сторонних источников нет, то \dot{A}_1^n удовлетворяет неоднородному векторному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{A}_1^n + k_1^2 \dot{A}_1^n = -\dot{j}_1^c, \quad (7.69)$$

а $\dot{A}^n = 0$. Если, наоборот, сторонний источник находится во внешней области ($r_0 > a$), а во внутренней области сторонние источники отсутствуют, то $\dot{A}_1^n = 0$, а \dot{A}^n удовлетворяет неоднородному векторному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{A}^n + k^2 \dot{A}^n = -\dot{j}^c. \quad (7.70)$$

Векторные потенциалы вторичных токов \dot{A}_1^s, \dot{A}^s удовлетворяют однородным уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{A}_1^s + k_1^2 \dot{A}_1^s = 0, \quad \nabla^2 \dot{A}^s + k^2 \dot{A}^s = 0.$$

Источниками их в математическом смысле можно считать неоднородности в граничных условиях. Пусть продольный элементарный электрический вибратор находится во внутренней области:

$\dot{\mathbf{j}}_i^c = \mathbf{1}_z \dot{j}_{iz}^c = \mathbf{1}_z \dot{I}_0 L \delta(r-r_0) \delta(\varphi-\varphi_0) \delta(z-z_0) / r$, где $r_0 < a$. Тогда $\dot{\mathbf{A}}^n = \dot{\mathbf{E}}^n = \dot{\mathbf{H}}^n = 0$, а (7.69) дает:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{A}_{1z}^n}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{A}_{1z}^n}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_{1z}^n}{\partial z^2} + k_1^2 \dot{A}_{1z}^n = -\dot{j}_{iz}^c.$$

Решение этого уравнения определено формулой (П4.4). Подставляя в неё значения \dot{j}_{iz}^c и G из (П4.6), используя при интегрировании основное свойство δ -функции, обозначая $v_1 = -i(h^2 - k_1^2)^{1/2}$, получаем

$$\dot{A}_{1r}^n = \dot{A}_{1\varphi}^n = 0,$$

$$\dot{A}_{1z}^n(p) = \frac{\dot{I}_0 L}{8\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z_0)} dh \begin{cases} J_n(v_1 r_0) H_n^{(2)}(v_1 r), & r \geq r_0 \\ J_n(v_1 r) H_n^{(2)}(v_1 r_0), & r \leq r_0 \end{cases} \quad (7.71)$$

Найдем продольные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}_1^n$ и $\dot{\mathbf{H}}_1^n$ с помощью (1.124), (1.125):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{1z}^n(p) &= \frac{\dot{I}_0 L}{8\pi i} \frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_{al}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} k_{1\perp}^2 e^{-ih(z-z_0)} dh \times \\ &\times \begin{cases} J_n(v_1 r_0) H_n^{(2)}(v_1 r), & r \geq r_0 \\ J_n(v_1 r) H_n^{(2)}(v_1 r_0), & r \leq r_0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (7.72)$$

$$\dot{H}_{1z}^n = 0, \text{ где } k_{1\perp}^2 = k_1^2 - h^2.$$

Таким образом, продольная составляющая вектора напряженности первичного магнитного поля отсутствует. Из выражения (1.125) находим, что $\dot{H}_{1\varphi}^n \neq 0$. Но $\dot{H}_{1\varphi}^n$ входит наряду с \dot{H}_{1z}^n в левую часть граничного условия (7.67). В правую часть (7.67) входит и функция \dot{H}_z^B . Значит, несмотря на то, что \dot{H}_{1z}^n отсутствует, вторичные поля должны содержать продольные составляющие векторов напряженностей магнитных полей. В волноводе возбуждаются *гибридные волны*. Это является следствием анизотропного характера граничных условий.

Векторы вторичных полей $\dot{\mathbf{E}}_1^B, \dot{\mathbf{H}}_1^B$ и $\dot{\mathbf{E}}^B, \dot{\mathbf{H}}^B$ в соответствии с выражениями (1.129) удовлетворяют однородным уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}}_1^B + k_1^2 \dot{\mathbf{E}}_1^B = 0, \quad \nabla^2 \dot{\mathbf{H}}_1^B + k_1^2 \dot{\mathbf{H}}_1^B = 0, \quad (7.73)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}}^B + k^2 \dot{\mathbf{E}}^B = 0, \quad \nabla^2 \dot{\mathbf{H}}^B + k^2 \dot{\mathbf{H}}^B = 0. \quad (7.74)$$

Если найти продольные составляющие векторов напряженностей этих полей, то продольные составляющие векторов напряженностей полных полей определим по (7.68):

$$\dot{E}_{1z} = \dot{E}_{1z}^{\text{п}} + \dot{E}_{1z}^{\text{в}}, \quad \dot{H}_{1z} = \dot{H}_{1z}^{\text{в}}, \quad \dot{E}_z = \dot{E}_z^{\text{в}}, \quad \dot{H}_z = \dot{H}_z^{\text{в}}. \quad (7.75)$$

Поперечные составляющие выражаются через продольные составляющие векторов полных полей с помощью (5.9), (5.10).

Таким образом, необходимо найти решения однородных уравнений Гельмгольца (7.73), (7.74), удовлетворяющие граничным условиям (7.66), (7.67).

4. Решения уравнений (7.73), (7.74) для продольных составляющих векторов ищем в виде, аналогичном виду выражения (7.72). При этом учитываем, что вторичные источники, возбуждающие поле $\dot{E}_1^{\text{в}}, \dot{H}_1^{\text{в}}$, расположены при $r = a$; для внутренней области, где $r \leq a$, $\dot{E}_{1z}^{\text{в}}, \dot{H}_{1z}^{\text{в}}$ выражаются через функцию $J_n(v_1 r)$, имеющую конечное значение при $r = 0$. Для внешней области, где $r \geq a$, $\dot{E}_z^{\text{в}}, \dot{H}_z^{\text{в}}$ должны удовлетворять условию существования поверхностных волн (см. §§ 2.9; 7.2–7.4), точка $r = 0$ из рассмотрения исключается, поэтому $\dot{E}_z^{\text{в}}, \dot{H}_z^{\text{в}}$ выражаются через функцию $H_n^{(2)}(vr)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \dot{E}_{1z}^{\text{в}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} f_{1n}^{\text{в}}(h) e^{-ih(z-z_0)} J_n(v_1 r) dh, \\ \dot{H}_{1z}^{\text{в}} & \end{aligned} \quad (7.76)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_z^{\text{в}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{\text{в}}(h) e^{-ih(z-z_0)} H_n^{(2)}(vr) dh, \\ \dot{H}_z^{\text{в}} & \end{aligned} \quad (7.77)$$

где $v = -i(h^2 - k^2)^{1/2}$. Спектральные плотности $f_n(h)$ необходимо определить из граничных условий (7.66), (7.67).

Входящие в граничные условия $\dot{E}_{1\varphi}, \dot{H}_{1\varphi}$ и $\dot{E}_\varphi, \dot{H}_\varphi$ находим или с помощью выражений (5.9), (5.10), рассматривая их как формулы, определяющие пространственные гармоники, или — с помощью уравнений Максвелла для $\dot{E}_1^{\text{в}}, \dot{H}_1^{\text{в}}$ и $\dot{E}^{\text{в}}, \dot{H}^{\text{в}}$. Подставляя затем найденные выражения и (7.76), (7.77) в (7.66), (7.67) и применяя к полученным равенствам обратное преобразование Фурье, получаем систему четырех линейных алгебраических уравнений, определяющих спектральные плотности (четыре функции $f_n^{\text{в}}, f_{1n}^{\text{в}}, f_n^{\text{м}}, f_{1n}^{\text{м}}$). Решая эту систему в частном случае, когда $\tilde{\epsilon}_{a1} = \epsilon_a$, $\tilde{\mu}_{a1} = \mu_a$ ($k_{1\perp} = k_{\perp} = (k^2 - h^2)^{1/2}$), подставляя значения спектральных плотностей в выражения (7.76), (7.77) и выполняя интегрирование, найдем продольные составляющие векторов напряженности полей. При интегрировании, например, выражения (7.76) получаем, что особые точки типа полюса являются корнями характеристического уравнения

$$\frac{(ak_{\perp}^2 \operatorname{tg} \psi - nh)^2 J_n(va) H_n^{(2)}(va)}{(ak)^2 J_n'(va) H_n^{(2)'}(va)} = -v^2. \quad (7.78)$$

Чтобы построить графики зависимости коэффициента замедления от значения a/λ (проанализировать дисперсионные характеристики замедляющей системы), необхо-

димо численно решать трансцендентное уравнение (7.78) при разных значениях n , a/λ и $\text{tg}\psi$.

Заданному номеру n азимутальной гармоники соответствует некоторое количество корней уравнения $h_{n(m)}$. Значит, распространяющиеся волны имеют дискретные значения коэффициентов распространения $h_{n(m)}$. При этом фиксированному значению n соответствует свое распределение амплитуд составляющих векторов поля в поперечном и продольном сечениях волновода. Если $h_{n(m)}$ действительны и $h_{n(m)} > |k|$, то все азимутальные гармоники поля во внешней области имеют характер поверхностных волн, так как $v_{n(m)} = -i(h_{n(m)}^2 - k^2)^{1/2}$ и при $|v_{n(m)}|r \rightarrow \infty$ из (7.36) следует, что $H_n^{(2)}(v_{n(m)}r) \sim r^{-1/2} \exp[-(h_{n(m)}^2 - k^2)^{1/2} r]$.

Фазовые скорости волн поля во внешней и внутренней областях одинаковы, определяются выражением $v_{\phi, n(m)} = \omega/h_{n(m)} < (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}$, т.е. волны являются медленными.

5. Найдем коэффициенты замедления волн в частном случае, когда вибратор расположен на оси волновода, т.е. $r_0 = 0$. При этом $J_0(0) = 1$ и $J_n(0) = 0$ при $|n| > 0$. Значит, отличны от нуля только спектральные плотности $f_0(h)$, соответствующие нулевой азимутальной гармонике ($n = 0$). ЭМ поле в этом случае однородно по азимутальному углу, что соответствует физическим представлениям о поле продольного вибратора, расположенного на оси волновода.

Уравнение (7.78) при $n = 0$ имеет вид

$$\frac{J_0(va)H_0^{(2)}(va)}{J_0'(va)H_0^{(2)'}(va)} = \frac{v^2 k^2}{k^2 \text{tg}^2 \psi}. \quad (7.79)$$

Если $|v|a \ll 1$, т.е. $a/\lambda \ll 1$ (низкие частоты), то, подставляя в это уравнение асимптотические значения функций Бесселя и Ганкеля и их производных при малых аргументах и решая полученное уравнение, найдем, что $h_{0(1)} \approx k + \Delta h$, где $|\Delta h| \ll |k|$. Величина Δh слабо зависит от значений ka и ψ . Коэффициент замедления $\beta/h_{0(1)}$ близок к единице.

Если $|v|a \gg 1$, т.е. $a/\lambda \gg 1$ (высокие частоты), то, используя в (7.79) асимптотические значения цилиндрических функций при больших аргументах и решая полученное уравнение, найдем, что $h_{0(2)} \approx k(1 + \text{ctg}^2 \psi)^{1/2}$. При малых углах захода (намотки) спирали ψ получаем $h_{0(2)} \approx k \text{tg} \psi$, т.е. фазовая скорость волны на высоких частотах $v_{\phi, 0(2)} \approx (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2} \text{tg} \psi$ определяется лишь углом намотки ее витков или отношением длины витка к шагу спирали. Значит, на высоких час-

тотах волна как бы распространяется вдоль винтовой линии, т.е. как бы «прилипает» к проводу спирали и распространяется вдоль него. Коэффициент замедления волны $\xi = \beta/h_{0(2)} \approx \operatorname{tg} \psi$ может быть существенно меньше единицы. График $\xi(d/\lambda)$, рассчитанный по (7.79), подтверждает эти рассуждения (рис. 7.18,а).

В случае азимутально-неоднородных волн ($n=1$) на низких частотах вдоль спирали могут распространяться две волны, поля которых мало отличаются от полей неоднородных плоских волн с круговыми поляризациями правого и левого направлений вращения. Эти волны распространяются вдоль спирали «не ощущая» ее влияния. С ростом частоты эти две волны по-разному замедляются спиралью. Коэффициенты замедления на рис. 7.18,б рассчитаны по (7.78). Из графиков видно, что волна, у которой направление вращения вектора \mathbf{E} противоположно направлению намотки спирали ($\xi_1^-(d/\lambda)$), замедляется больше и при значении $(d/\lambda) > 0,08$ ее нет. Волна, у которой направление вращения вектора \mathbf{E} совпадает с направлением намотки спирали ($\xi_1^+(d/\lambda)$), замедляется меньше и может существовать на очень больших частотах.

6. В случае если спираль помещена внутри круглого металлического волновода (трубы), то решение задачи возбуждения ЭМ волн в системе можно получить аналогичным образом. Но поле в области $r \geq a$ при этом должно удовлетворять условиям $\vec{E}_\tau = 0$ на поверхности трубы. В выражениях (7.77) надо иметь в качестве слагаемых дополнительные спектральные плотности, учитывающие наличие вторичных токов на стенках трубы.

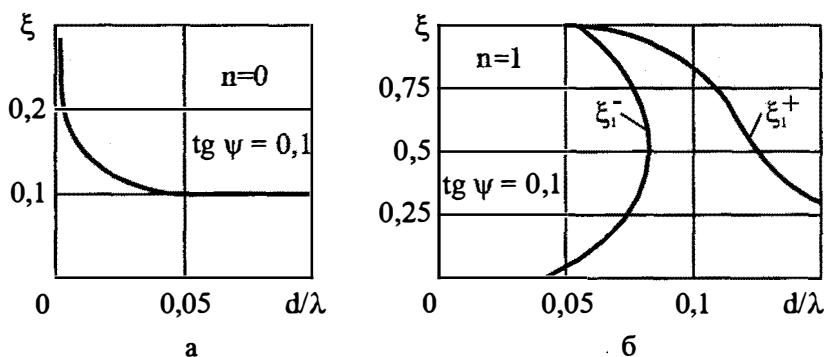


Рис. 7.18. Коэффициенты замедления азимутально-однородной и неоднородных волн

ЗАДАЧИ

1. Рассчитать коэффициент затухания поля в двухпроводной воздушной линии на частоте, равной 100 кГц, если радиус стальных проводов равен 2 мм, расстояние между проводами равно 0,4 м.

2. Рассчитать допустимую мощность для двухпроводной линии на частоте, равной 120 кГц. Параметры линии даны в предыдущей задаче, коэффициент запаса равен 0,5.

3. Рассчитать поверхностное сопротивление полиэтиленового слоя на металлической плоскости, при котором в полиэтилене и окружающем воздухе распространяется волна основного типа с фазовой скоростью $0,7c$ на частоте, равной 9 ГГц. Рассчитать толщину слоя.

4. Найти толщины слоя полистирола на металлической плоскости, при которых в полистироле и окружающем воздухе распространяется первая волна высшего типа.

5. Рассчитать рабочий диапазон частот одноволнового режима полиизобутиленового цилиндрического волновода, радиус которого равен 0,1 мм. Рассчитать максимальный коэффициент затухания. Волновод расположен в сухом воздухе.

6. По цилиндрическому фторопластовому стержню радиуса, равного 10 мм, расположенному в сухом воздухе, распространяется ЭМ поле в многоволновом режиме. Рассчитать максимальные коэффициенты затухания первых трех однородно-азимутальных волн, их критические длины волн.

7. Рассчитать критические частоты первых трех типов гибридной HE_{1n} -волны, распространяющейся по полистироловому цилиндрическому волноводу радиуса 0,5 мм, расположенному в сухом воздухе.

8. В однопроводной линии, расположенной в сухом воздухе, на частоте, равной 4 ГГц, распространяется азимутально-однородная волна. Применен медный провод радиуса 3 мм. Вычислить коэффициент затухания и построить график зависимости активной составляющей вектора Пойнтинга от радиальной координаты.

9. Рассчитать волновое сопротивление несимметричного полоскового волновода на кварцевой подложке ($\epsilon = 3,78$), у которого $d = b = 19,05$ мм, $h = 0,254$ мм.

10. Рассчитать волновое сопротивление и коэффициент затухания симметричного полоскового волновода на полиэтиленовой подложке, если $b = 20$ мм, $d = 24$ мм, полоска и пластина выполнены из меди, $f = 9$ ГГц.

11. Рассчитать допустимую рабочую мощность для симметричной полосковой линии, параметры которой даны в предыдущей задаче.

тотах волна как бы распространяется вдоль винтовой линии, т.е. как бы «прилипает» к проводу спирали и распространяется вдоль него. Коэффициент замедления волны $\xi = \beta / h_{0(2)} \approx \operatorname{tg} \psi$ может быть существенно меньше единицы. График $\xi(d/\lambda)$, рассчитанный по (7.79), подтверждает эти рассуждения (рис. 7.18,а).

В случае азимутально-неоднородных волн ($n=1$) на низких частотах вдоль спирали могут распространяться две волны, поля которых мало отличаются от полей неоднородных плоских волн с круговыми поляризациями правого и левого направлений вращения. Эти волны распространяются вдоль спирали «не ощущая» ее влияния. С ростом частоты эти две волны по-разному замедляются спиралью. Коэффициенты замедления на рис. 7.18,б рассчитаны по (7.78). Из графиков видно, что волна, у которой направление вращения вектора \mathbf{E} противоположно направлению намотки спирали ($\xi_1^-(d/\lambda)$), замедляется больше и при значении $(d/\lambda) > 0,08$ ее нет. Волна, у которой направление вращения вектора \mathbf{E} совпадает с направлением намотки спирали ($\xi_1^+(d/\lambda)$), замедляется меньше и может существовать на очень больших частотах.

6. В случае если спираль помещена внутри круглого металлического волновода (трубы), то решение задачи возбуждения ЭМ волн в системе можно получить аналогичным образом. Но поле в области $r \geq a$ при этом должно удовлетворять условиям $\dot{E}_r = 0$ на поверхности трубы. В выражениях (7.77) надо иметь в качестве слагаемых дополнительные спектральные плотности, учитывающие наличие вторичных токов на стенках трубы.

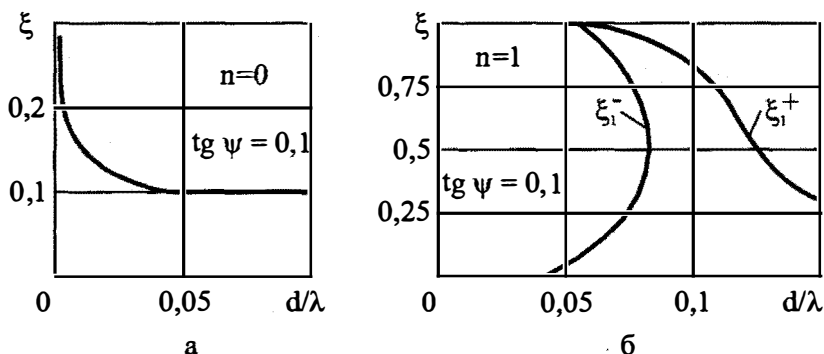


Рис. 7.18. Коэффициенты замедления азимутально-однородной и неоднородных волн

ЗАДАЧИ

1. Рассчитать коэффициент затухания поля в двухпроводной воздушной линии на частоте, равной 100 кГц, если радиус стальных проводов равен 2 мм, расстояние между проводами равно 0,4 м.

2. Рассчитать допустимую мощность для двухпроводной линии на частоте, равной 120 кГц. Параметры линии даны в предыдущей задаче, коэффициент запаса равен 0,5.

3. Рассчитать поверхностное сопротивление полиэтиленового слоя на металлической плоскости, при котором в полиэтилене и окружающем воздухе распространяется волна основного типа с фазовой скоростью $0,7c$ на частоте, равной 9 ГГц. Рассчитать толщину слоя.

4. Найти толщины слоя полистирола на металлической плоскости, при которых в полистироле и окружающем воздухе распространяется первая волна высшего типа.

5. Рассчитать рабочий диапазон частот одноволнового режима полиизобутиленового цилиндрического волновода, радиус которого равен 0,1 мм. Рассчитать максимальный коэффициент затухания. Волновод расположен в сухом воздухе.

6. По цилиндрическому фторопластовому стержню радиуса, равного 10 мм, расположенному в сухом воздухе, распространяется ЭМ поле в многоволновом режиме. Рассчитать максимальные коэффициенты затухания первых трех однородно-азимутальных волн, их критические длины волн.

7. Рассчитать критические частоты первых трех типов гибридной HE_{1n} -волны, распространяющейся по полистироловому цилиндрическому волноводу радиуса 0,5 мм, расположенному в сухом воздухе.

8. В однопроводной линии, расположенной в сухом воздухе, на частоте, равной 4 ГГц, распространяется азимутально-однородная волна. Применен медный провод радиуса 3 мм. Вычислить коэффициент затухания и построить график зависимости активной составляющей вектора Пойнтинга от радиальной координаты.

9. Рассчитать волновое сопротивление несимметричного полоскового волновода на кварцевой подложке ($\epsilon = 3,78$), у которого $d = b = 19,05$ мм, $h = 0,254$ мм.

10. Рассчитать волновое сопротивление и коэффициент затухания симметричного полоскового волновода на полиэтиленовой подложке, если $b = 20$ мм, $d = 24$ мм, полоска и пластина выполнены из меди, $f = 9$ ГГц.

11. Рассчитать допустимую рабочую мощность для симметричной полосковой линии, параметры которой даны в предыдущей задаче.

ГЛАВА 8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В РЕЗОНАТОРАХ

8.1. Определения

1. Объемные резонаторы применяются в диапазонах ОВЧ–ГВЧ в качестве резонансных систем в усилителях, генераторах, измерителях частоты (волномерах), для построения частотных фильтров [34, 35]. В генераторах с их помощью осуществляется отбор энергии от потока электронов, согласование нагрузки генератора с электронным прибором и стабилизация частоты. В устройствах обработки сигнала с их помощью реализуется селекция сигналов по частоте, они являются основными элементами конструкций переключателей типа «прием–передача». Объемные резонаторы являются основными элементами волномеров и анализаторов спектра.

Как резонансная система объемный резонатор имеет основные параметры: *резонансную (собственную) длину волны λ_v* (резонансную (собственную) частоту ω_v или f_v) и *собственную добротность Q_v* .

Применение объемных резонаторов в диапазонах ОВЧ–ГВЧ вместо обычных LC-контуров с сосредоточенными параметрами объясняется следующим. В LC-контуре энергия электрического поля сосредоточена в конденсаторе, а энергия магнитного поля — в катушке индуктивности. Конденсатор и катушка разнесены в пространстве, поэтому переход энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратный переход сопровождаются распространением ЭМ поля. Линейные размеры элементов и соединительных проводов LC-контура в диапазонах НЧ, СЧ и ВЧ очень малы по сравнению с длиной волны. Поэтому мощность излучения ЭМ поля ничтожно мала и добротность контура определяется только потерями мощности на нагревание проводников и потерями в диэлектрике конденсатора.

По мере перехода в диапазон ОВЧ, а затем — УВЧ, для увеличения резонансной частоты контура $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ и получения заданной величины добротности $Q = (L/C)^{1/2}/R$, где R — сопротивление проводов, необходимо уменьшать индуктивность L , емкость C и R . С этой целью уменьшают площадь пластин конденсатора и количество витков катушки, увеличивают расстояние между пластинами. Уже в диапазоне ОВЧ размеры витка сравнимы с длиной волны. Поэтому LC-контур излучает ЭМ поле. Потери мощности на излучение снижают

его добротность так, что применение LC-контура в качестве резонансной системы невозможно. Параллельное включение в контур ряда витков приводит к уменьшению излучаемой мощности в результате экранирования поля витками, позволяет уменьшить индуктивность и, следовательно, увеличить резонансную частоту. Увеличение количества витков приводит к *объемному (тороидальному) резонатору*, ЭМ поле которого экранировано от внешнего пространства.

Прямоугольные пластины конденсатора можно соединить прямолинейными проводниками. В результате получим внутреннюю область параллелепипедной формы, ограниченную металлическими стенками и называемую *прямоугольным объемным резонатором*. Если к круглым пластинам конденсатора присоединять прямолинейные витки и увеличивать их количество, то в пределе получим полость цилиндрической формы, ограниченную металлическими стенками и называемую *цилиндрическим объемным резонатором*.

В объемных резонаторах нельзя выделить области пространства со свойствами только емкости или только индуктивности. Лишь в некоторых частных случаях резонатор специальной формы можно приближенно рассматривать как LC-контур и выделять область резонатора, где сосредоточена преимущественно энергия электрического поля и область, где преимущественно сосредоточена энергия магнитного поля. Например, в тороидальном резонаторе электрическое поле сосредоточено в основном между параллельными пластинами, а магнитное поле — в желобе. Этому типу резонаторы называют *квазистационарными*.

ЭМ колебания, как это следует из уравнения баланса мощностей (§ 1.9), могут существовать в ограниченном объеме любой формы, если размеры объема достаточно велики по сравнению с длиной волны. По аналогии с линиями передачи закрытого типа объемные резонаторы, в которых ЭМ поле ограничено от внешнего пространства металлическими стенками, называют *закрытыми*. Их можно рассматривать как отрезки закрытых направляющих систем, в поперечных сечениях которых расположены металлические пластины.

Применение закрытых объемных резонаторов в диапазонах КВЧ, ГВЧ и оптическом связано с теми же трудностями, что и применение закрытых направляющих систем. Поэтому в этих диапазонах нашли применение *открытые* объемные резонаторы, в которых полностью или частично металлические стенки резонатора удалены. При определенных условиях излучение поля в окружающее пространство может быть малым, а добротность системы большой. Примером открытого объемного резонатора является отрезок диэлектрического волновода.

2. В объемных резонаторах различают *режимы собственных и вынужденных колебаний*. Собственные колебания — это ЭМ поля, ко-

торые могут существовать в объемном резонаторе в отсутствие стороннего источника. ЭМ поле резонатора состоит из наложения ЭМ полей бесконечного числа *типов колебаний*, каждый из которых имеет собственные длину волны λ_{mnq} (частоту ω_{mnq}), добротность Q_{mnq} и картину силовых линий поля. Если от стороннего источника мощность в резонатор не поступает, то ЭМ поле в резонаторе с течением времени затухает, происходит его релаксация тем быстрее, чем больше в резонаторе потери мощности.

Незатухающие колебания в резонаторе существуют в режиме вынужденных колебаний. При этом в резонатор от стороннего источника через возбуждающее устройство (элемент связи) должна поступать мощность. Если частота стороннего источника совпадает с одной из собственных частот резонатора, то амплитуды векторов поля в резонаторе возрастают, происходит резонанс.

3. *Возбуждение закрытых резонаторов* осуществляется с помощью электрического вибратора (рис. 8.1,а), магнитного вибратора — рамки, щели (отверстия) (рис. 8.1,б,в) и электронного потока.

Вибратор (1), изображенный на рис. 8.1,а, является продолжением внутреннего проводника (2) коаксиальной линии (3), он вводится в резонатор через малого диаметра отверстие (4) в стенке резонатора (5). При выводе энергии из резонатора с помощью электрического вибратора связь называют *электрической*, или *емкостной*. Силовые линии электрического поля в резонаторе должны быть параллельны оси вибратора. В этом случае для поля в коаксиальной линии ток в вибраторе связи, возбуждаемый ЭМ полем резонатора, является сторонним.

На рис. 8.1,б изображена петля (1), образованная продолжением внутреннего проводника (2) коаксиальной линии (3), введенного в отверстие (4) и изогнутого в петлю; конец проводника припаян к стенке (5)

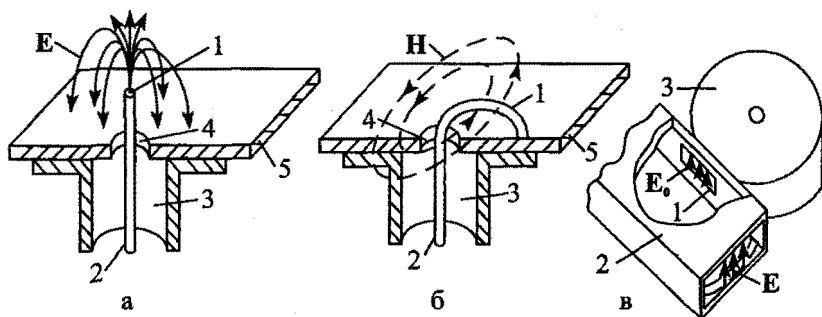


Рис. 8.1. Устройства, применяемые для возбуждения резонаторов

резонатора. При выводе энергии из резонатора с помощью витка связь называют *магнитной*. Плоскость витка должна быть перпендикулярна силовым линиям магнитного поля. Ток в петле связи, наводимый ЭМ полем резонатора, является сторонним для поля в коаксиальной линии.

Щель (1), изображенная на рис. 8.1, в, прорезана в стенках волновода (2), по которому распространяется H_{10} -волна, и резонатора (3). При возбуждении резонатора H_{10} -волна наводит в щели (или отверстиях) поле с напряженностями \dot{E}_0, \dot{H}_0 . Последнее является сторонним для поля в резонаторе. При выводе энергии из резонатора, поле резонатора индуцирует ЭМ поле на щели, которое является сторонним для поля в волноводе, связь при этом часто называют *дифракционной*.

Электронная связь образуется при пролете электронов через область резонатора с максимальной напряженностью электрического поля. Обычно используют область между параллельными дисками тороидального резонатора. Диски изготавливаются из металлических сеток, через которые может пролетать пучок электронов.

4. Требования к резонаторам зависят от их назначения и условий эксплуатации. Так, например, резонаторы, применяемые в качестве резонансных систем генераторов, должны обеспечивать высокое значение коэффициента полезного действия, значение собственной добротности в пределах $200 + 1000$, заданный диапазон перестройки резонансных частот, достаточную электрическую прочность и др. Резонаторы, применяемые, например, в измерительных устройствах и для стабилизации частоты, должны обеспечить высокие значения добротности, для достижения чего используют материалы в режиме сверхпроводимости [36].

8.2. Добротность

1. Рассмотрим собственные колебания в резонаторе и его добротность. Для сокращения записи считаем, что $(m, n, p) = \nu$. Пусть \dot{E}_ν, \dot{H}_ν — комплексные амплитуды напряженностей поля на частоте $\tilde{\omega}_\nu$ в резонаторе. Стенки последнего имеют проводимость σ_1 , заполняющий диэлектрик не имеет потерь. Тогда, подставляя в первое уравнение Максвелла значение \dot{H}_ν из второго уравнения, умножая результат на \dot{E}_ν^* и интегрируя его по объему резонатора V_0 , ограниченному поверхностью S , находим

$$\tilde{\omega}_\nu^2 = \int_{V_0} \dot{E}_\nu^* \operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{E}_\nu dV / (\epsilon_a \mu_a \int_{V_0} |\dot{E}_\nu|^2 dV).$$

Поскольку $\dot{\mathbf{E}}_v^* \operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_v = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_v \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_v^* - \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_v^*, \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_v]$ то, применяя теорему Остроградского–Гаусса, получаем

$$\tilde{\omega}_v^2 = \left(\int_{V_0} |\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_v|^2 dV - \oint_S [\dot{\mathbf{E}}_v^*, \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_v] dS \right) / \left(\epsilon_a \mu_a \int_{V_0} |\dot{\mathbf{E}}_v|^2 dV \right) \quad (8.1)$$

Выражая $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_v$ из второго уравнения Максвелла и учитывая определение $\dot{\mathbf{H}}_v$, имеем

$$\oint_S [\dot{\mathbf{E}}_v^*, \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_v] dS = -i \tilde{\omega}_v \mu_a \oint_S [\dot{\mathbf{E}}_v^*, \dot{\mathbf{H}}_v] dS = -i 2 \tilde{\omega}_v \mu_a \oint_S \dot{\mathbf{H}}_v dS. \quad (8.2)$$

Если $\sigma_1 \rightarrow \infty$, то этот интеграл стремится к нулю, так как $\dot{\mathbf{E}}_{\tau v} \rightarrow 0$ на стенках резонатора. Обозначая собственную частоту резонатора без потерь через ω_v , получаем

$$\omega_v^2 = \int_{V_0} |\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_v|^2 dV / \left(\epsilon_a \mu_a \int_{V_0} |\dot{\mathbf{E}}_v|^2 dV \right).$$

Определим собственную частоту резонатора при σ_1 конечном. Тогда интеграл (8.2) не будет равен нулю. Заменяя в нем величину $\tilde{\omega}_v$ на малоотличающуюся известную величину ω_v , получаем

$$\tilde{\omega}_v^2 = \omega_v^2 [1 + i 2 \oint_S \dot{\mathbf{H}}_v dS / (\omega_v \epsilon_a \int_{V_0} |\dot{\mathbf{E}}_v|^2 dV)].$$

Пренебрегая во втором слагаемом малой действительной частью по сравнению с единицей и учитывая, что $(1 + i/Q_v)^{1/2} \approx 1 + i/2Q_v$, получаем для собственной частоты резонатора с потерями

$$\tilde{\omega}_v \approx \omega_v (1 + i/2Q_v), \quad (8.3)$$

где

$$Q_v = \omega_v \epsilon_a \int_{V_0} |\dot{\mathbf{E}}_v|^2 dV / 2 \operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{H}}_v dS. \quad (8.4)$$

Если $\sigma_1 \rightarrow \infty$, то на стенках $\dot{\mathbf{E}}_{\tau v} \rightarrow 0$, $\dot{\mathbf{H}}_{\tau v} \rightarrow 0$. Поэтому $Q_v \rightarrow \infty$, а $\tilde{\omega}_v \rightarrow \omega_v$. Таким образом, при большой проводимости стенок резонатора собственные частоты колебаний в резонаторе близки собственным частотам резонатора без потерь (собственным частотам математической модели резонатора).

Мгновенные значения векторов напряженностей поля определяем по (1.60) с учетом (8.3):

$$\mathbf{E}_v(p, t) = \operatorname{Re} \left(\dot{\mathbf{E}}_v e^{i\omega_v t} e^{-\tau_v t} \right), \quad \mathbf{H}_v(p, t) = \operatorname{Re} \left(\dot{\mathbf{H}}_v e^{i\omega_v t} e^{-\tau_v t} \right)$$

где $\tau_v = \omega_v / 2Q_v$. Они затухают во времени по экспоненциальному закону. Скорость затухания зависит от значений Q_v и ω_v . По аналогии с обычным LC-контуром величину Q_v называют *собственной добротностью объемного резонатора*. Поскольку

$$\frac{1}{2} \epsilon_a \int_{V_0} |\dot{\mathbf{E}}_v|^2 dV = 2W_v^3 = W_v,$$

где W_v — энергия ЭМ поля в резонаторе (§ 1.9), а

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{P}}_v d\mathbf{S} = P_v^{\text{пм}},$$

где $P_v^{\text{пм}}$ — мощность потерь, то из (8.4) имеем

$$Q_v = \omega_v W_v / P_v^{\text{пм}}. \quad (8.5)$$

Если при вычислении интегралов в числителе и знаменателе (8.4) применить теорему о среднем значении, то найдем, что Q_v пропорционально отношению V_0/S , откуда следует, что большую собственную добротность должны иметь резонаторы с большим значением V_0/S . Кроме того, $P_v^{\text{пм}}$ в закрытом резонаторе пропорционально глубине проникновения δ_1 . Поэтому Q_v обратно пропорционально объему $\delta_1 S$.

2. Мощность джоулевых потерь в закрытом резонаторе (на нагревание стенок резонатора) обозначили через $P_v^{\text{пм}}$. Она определяется так же, как и в случае направляющей системы (§ 5.4):

$$P_v^{\text{пм}} = \frac{1}{2} \oint_S R_1 |\dot{\mathbf{H}}_{\text{тв}}|^2 dS. \quad (8.6)$$

Мощность потерь в диэлектрике, заполняющем резонатор, определяется по (1.70):

$$P_{\text{вд}}^{\text{п}} = \frac{\sigma}{2} \int_{V_0} |\dot{\mathbf{E}}_v|^2 dV. \quad (8.7)$$

В (8.5) мощность потерь равна сумме мощностей потерь в стенках резонатора и в заполняющем диэлектрике. В случае открытых резонаторов к этой сумме добавляется мощность потерь на излучение $P_v^{\text{пн}}$.

Резонаторы применяются в сочетании с нагрузками. В нагрузке имеются потери энергии. Поэтому к мощности потерь в резонаторе добавляется мощность потерь в нагрузке $P_v^{\text{пн}}$. Добротность резонатора

с учетом собственных потерь и потерь в нагрузке называется *нагруженной добротностью* $Q_{\text{нв}}$:

$$Q_{\text{нв}} = \omega_v W_v / (P_v^{\text{пм}} + P_{\text{вд}}^{\text{п}} + P_v^{\text{пн}} + P_v^{\text{пн}})$$

или

$$1/Q_{\text{нв}} = (P_v^{\text{пм}} + P_{\text{вд}}^{\text{п}} + P_v^{\text{пн}}) / \omega_v W_v + P_v^{\text{пн}} / \omega_v W_v.$$

Первое слагаемое здесь соответствует обратной величине добротности изолированного резонатора — собственной добротности или *ненагруженной добротности* Q_v (8.5). Второе слагаемое называют *внешней или вносимой добротностью* $Q_{\text{внв}} = \omega_v W_v / P_v^{\text{пн}}$, т.е. внешняя, или вносимая добротность, определяется отношением энергии, накопленной в резонаторе, к мощности потерь в нагрузке.

8.3. Возбуждение прямоугольного резонатора

1. В *режиме вынужденных колебаний* в резонаторе должен быть сторонний источник. Рассмотрим постановку граничной задачи о возбуждении ЭМ поля в прямоугольном резонаторе (рис. 8.2). Резонатор заполнен однородным диэлектриком с параметрами $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$, ЭМ поле с векторами $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ возбуждается сторонними токами $\dot{\mathbf{j}}^c, \dot{\mathbf{j}}^{mc}$, заданными в объеме V_n . В математической модели проводимость σ_1 металлических стенок резонатора бесконечна. Введем ДСК так же, как в случае прямоугольного волновода (§ 6.1). Плоскость xu совместим с плоскостью переднего торца резонатора. Тогда задний торец находится при $z=l$. Поле в резонаторе должно удовлетворять граничному условию $\dot{\mathbf{E}}_t = 0$ на стенках. Поэтому к условиям (6.3), (6.4) необходимо добавить граничные условия на торцевых стенках, т.е. при $z=0$ и $z=l$.

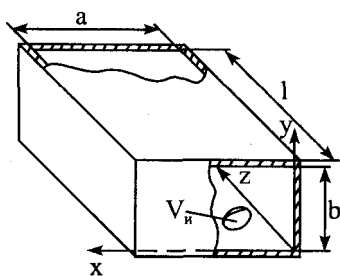


Рис. 8.2. Прямоугольный резонатор

Таким образом получаем граничные условия на стенках резонатора:

$$\dot{E}_x \Big|_{y=0;b} = 0, \dot{E}_y \Big|_{x=0;a} = 0; \dot{E}_z \Big|_{z=0;l} = 0. \quad (8.8)$$

Векторные потенциалы $\dot{\mathbf{A}}, \dot{\mathbf{A}}^m$ удовлетворяют уравнениям (6.1).

Векторы $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ вычисляются по (1.124), (1.125). Поэтому составляющие вектора $\dot{\mathbf{A}}$ на боковых, нижней и верхней стенках удовлетворяют тем же

граничным условиям (6.6), (6.15), (6.18), которые имеют место в прямоугольном волноводе. На торцах резонатора из (1.124), (6.5) имеем дополнительно: $\dot{A}_x = 0$, $\dot{A}_y = 0$ и $\partial \dot{A}_z / \partial z = 0$ при $z = 0; l$. Таким образом, составляющие векторного потенциала должны удовлетворять граничным условиям:

$$\begin{aligned} \dot{A}_x|_{y=0;b} = 0, \quad \left. \frac{\partial \dot{A}_x}{\partial x} \right|_{x=0;a} = 0, \\ \dot{A}_y|_{x=0;a} = 0, \quad \left. \frac{\partial \dot{A}_y}{\partial y} \right|_{y=0;b} = 0, \\ \dot{A}_z|_{x=0;a} = 0, \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\dot{A}_x = 0, \quad \dot{A}_y = 0, \quad \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, z = l. \quad (8.10)$$

Уравнение (6.1) и граничные условия (8.9), (8.10) составляют *граничную задачу о возбуждении резонатора сторонним электрическим током*.

2. Из выражений (1.124) и (8.8) находим, что составляющие вектора $\dot{\mathbf{A}}^M$ должны удовлетворять граничным условиям (6.21) и $\partial \dot{A}_x^M / \partial z = \partial \dot{A}_y^M / \partial z = \dot{A}_z^M = 0$ при $z = 0; l$. Таким образом, составляющие векторного потенциала $\dot{\mathbf{A}}^M$ должны удовлетворять граничным условиям:

$$\begin{aligned} \dot{A}_x^M|_{x=0;a} = 0, \quad \left. \frac{\partial \dot{A}_x^M}{\partial y} \right|_{y=0;b} = 0, \\ \dot{A}_y^M|_{y=0;b} = 0, \quad \left. \frac{\partial \dot{A}_y^M}{\partial x} \right|_{x=0;a} = 0, \\ \left. \frac{\partial \dot{A}_z^M}{\partial y} \right|_{y=0;b} = 0, \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial \dot{A}_x^M}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \dot{A}_y^M}{\partial z} = 0, \quad \dot{A}_z^M = 0 \quad \text{при} \quad z = 0; z = l. \quad (8.12)$$

Уравнение (6.1) и граничные условия (8.9), (8.10) составляют *граничную задачу о возбуждении резонатора сторонним магнитным током*.

3. Пусть резонатор возбуждается электрическим сторонним током таким, что $\dot{\mathbf{j}}^c = \mathbf{1}_y \dot{j}_y^c$. Найдем решение граничной задачи для \dot{A}_y . Граничная задача возбуждения ЭМ поля в резонаторе отличается от

соответствующей задачи возбуждения прямоугольного волновода (§ 6.1) только тем, что резонатор по z имеет ограниченную длину. Поэтому ЭМ поле существует на интервале $0 \leq z \leq l$. Составляющие векторных потенциалов при фиксированных x и y необходимо представлять в виде разложений в ряды Фурье по z . Значит, вместо (6.9) имеем

$$\dot{A}_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{b} y \sum_{q=-\infty}^{\infty} q'_{ymnq} e^{-iq\pi z/l}, \quad (8.13)$$

т.е. \dot{A}_y представлено в виде разложения по системе волн, бегущих вдоль увеличивающихся значений z при $q < 0$. Коэффициенты распространения этих волн равны $|q|\pi/l$. Амплитуды волн определяются коэффициентами разложения q'_{ymnq} .

Подставляя (8.13) в (8.10), получаем $q'_{ymno} = 0$, $q'_{ymn(-q)} = -q'_{mnq}$, $q > 0$. Поэтому из (8.13) получаем

$$\dot{A}_y = \sum_{m=1n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} q_{ymnq} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{q\pi}{l} z, \quad (8.14)$$

где $q_{ymnq} = -i2q'_{ymnq}$. Здесь \dot{A}_y представлено в виде разложения по системе стоячих вдоль оси z волн, т.е. наложение бегущих навстречу друг другу волн, отраженных от торцевых стенок резонатора, приводит к системе стоячих волн.

Подставим (8.14) в (6.2). Дифференцируя \dot{A}_y по x , y и z , умножая результат на $\sin(m'\pi x/a) \cos(n'\pi y/b) \sin(q'\pi z/l)$, где m' , n' , q' — фиксированные значения, интегрируя по объему резонатора и используя условия ортогональности тригонометрических функций, получаем

$$q_{ymnq} = \frac{4\epsilon_n}{V_0(k_{mnq}^2 - k^2)} \int j_y^c(x', y', z') \sin \frac{m\pi}{a} x' \cos \frac{n\pi}{b} y' \sin \frac{q\pi}{l} z' dV', \quad (8.15)$$

где $k_{mnq}^2 = k_{\perp mn}^2 + (q\pi/l)^2$, $k_{\perp mn}^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$, $V_0 = abl$ — объем резонатора.

4. Найдем решение граничной задачи возбуждения ЭМ поля в резонаторе электрическими вибраторами, параллельными осям x и z . Используя (6.16), (6.19), (8.10) и (6.13), (6.17), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{A}_x &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} q_{xmnq} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{q\pi}{l} z, \\ \dot{A}_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} q_{zmnq} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{q\pi}{l} z, \end{aligned} \quad (8.16)$$

где

$$q_{xmnq} = \frac{4\varepsilon_m}{V_0(k_{mnq}^2 - k^2)V_n} \int j_x^{i,c}(x', y', z') \cos \frac{m\pi}{a} x' \sin \frac{n\pi}{b} y' \sin \frac{q\pi}{l} z' dV',$$

$$q_{zmnq} = \frac{4\varepsilon_q}{V_0(k_{mnq}^2 - k^2)V_n} \int j_z^{i,c}(x', y', z') \sin \frac{m\pi}{a} x' \sin \frac{n\pi}{b} y' \cos \frac{q\pi}{l} z' dV'.$$

5. Найдем решение граничной задачи для \dot{A}^M . Используем разложения (6.22). Разложим их в ряды Фурье по координате z при фиксированных значениях x, y . Для определения коэффициентов разложения применим сначала граничные условия (8.12), а затем — уравнения Гельмгольца (6.1). В результате получим:

$$\begin{aligned} \dot{A}_x^M &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} q_{xmnq}^M \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{q\pi}{l} z, \\ \dot{A}_y^M &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} q_{ymnq}^M \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{q\pi}{l} z, \\ \dot{A}_z^M &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} q_{zmnq}^M \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{q\pi}{l} z, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где

$$q_{xmnq}^M = \frac{2\varepsilon_n \varepsilon_q}{V_0(k_{mnq}^2 - k^2)V_n} \int j_x^{i,c}(x', y', z') \sin \frac{m\pi}{a} x' \cos \frac{n\pi}{b} y' \cos \frac{q\pi}{l} z' dV',$$

$$q_{ymnq}^M = \frac{2\varepsilon_m \varepsilon_q}{V_0(k_{mnq}^2 - k^2)V_n} \int j_y^{i,c}(x', y', z') \cos \frac{m\pi}{a} x' \sin \frac{n\pi}{b} y' \cos \frac{q\pi}{l} z' dV',$$

$$q_{zmnq}^M = \frac{2\varepsilon_m \varepsilon_n}{V_0(k_{mnq}^2 - k^2)V_n} \int j_z^{i,c}(x', y', z') \cos \frac{m\pi}{a} x' \cos \frac{n\pi}{b} y' \sin \frac{q\pi}{l} z' dV'.$$

6. Проанализируем частный случай. Пусть резонатор возбуждается элементарным электрическим вибратором, расположенным в точке x_0, y_0, z_0 , ориентированным вдоль оси y . Тогда $\dot{j}^c = 1_y \dot{j}_y^c = 1_y \dot{I}_0 L \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$, $\dot{j}^{i,c} = 0$. Из выражений (8.16), (8.17) имеем $\dot{A}_x = \dot{A}_z = 0$, $\dot{A}^M = 0$. Из (8.15)

$$q_{ymnq} = \frac{4\varepsilon_n \dot{I}_0 L}{V_0(k_{mnq}^2 - k^2)} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \cos \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{q\pi}{l} z_0. \quad (8.18)$$

Считаем «продольной» координату z . «Продольные» составляющие векторов \dot{E} и \dot{H} находим по (1.124), (1.125):

$$\dot{E}_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \dot{E}_{zmnq}, \quad \dot{H}_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \dot{H}_{zmnq},$$

где

$$\dot{E}_{zmnq} = \frac{1}{i\omega \tilde{\varepsilon}_a} \frac{n\pi}{b} \frac{q\pi}{l} q_{ymnq} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{q\pi}{l} z, \quad (8.19)$$

$$\dot{H}_{zmnq} = \frac{m\pi}{a} q_{ymnq} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{q\pi}{l} z. \quad (8.20)$$

Числа m и n имеют здесь тот же смысл, что и в случае прямоугольного волновода. Величина q равна числу полуволн, укладываемых вдоль длины резонатора l . Поле в резонаторе является наложением бесконечного числа стоячих волн, возникающих в направлении осей x , y и z . Понятие волн теряет в резонаторе смысл. Возникающую структуру поля удобно называть колебаниями (модами) электрического или магнитного типов и обозначить как E_{mnq} -колебание и H_{mnq} -колебание. Отметим, что направление, относительно которого определяется наличие «продольной» составляющей векторов $\dot{\mathbf{E}}$ или $\dot{\mathbf{H}}$, т.е. «продольное» направление, можно выбрать совпадающим с осью или z , или x , или y , так как в резонаторе нет выделенного (отличающегося от других) направления.

Из формул (8.19), (8.20) видно, что «поперечный» элементарный электрический вибратор возбуждает в резонаторе поле, являющееся наложением полей E_{mnq} -колебаний и H_{mnq} -колебаний.

Предположим, что диэлектрик, заполняющий резонатор, не имеет потерь ($\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$). Тогда при заданных размерах резонатора и фиксированных значениях m, n, q можно подобрать частоту ω стороннего источника так, что $k_{mnq}^2 - k^2 = 0$ в знаменателе выражения (8.18). При этом \dot{E}_z, \dot{H}_z возрастает до бесконечности, т.е. наступает резонанс. Частота колебаний ω совпадает с собственной резонансной частотой $\omega_{mnq} = \omega_v$ резонатора для заданного типа колебаний: $\omega_{mnq}^2 \epsilon_a \mu_a = k_{mnq}^2$. Значит, при $v_\phi = (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}$

$$\omega_{mnq} = v_\phi \pi [(m/a)^2 + (n/b)^2 + (q/l)^2]^{1/2}. \quad (8.21)$$

Собственная длина волны резонатора

$$\lambda_{mnq} = 2l \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (q/l)^2}.$$

В оригинале резонатора k есть комплексная величина, поэтому $k_{mnq}^2 - k^2 \neq 0$ и $\tilde{\omega}_{mnq} \neq \omega_{mnq}$. Векторы $|\dot{\mathbf{E}}|, |\dot{\mathbf{H}}|$ при резонансе имеют большое, но конечное значение, зависящее от σ, σ_1 , электрического момента $I_0 L / i\omega$ и положения источника. Меняя последнее, можно регулировать эффективность возбуждения данного типа колебаний.

Пусть частота ω стороннего источника близка к собственной резонансной частоте резонатора $\tilde{\omega}_{\kappa\nu\chi}$ данного типа или $E_{\kappa\nu\chi}$ - или $H_{\kappa\nu\chi}$ -колебаний (κ, ν, χ — фиксированы). Тогда $|\dot{E}_{\kappa\nu\chi}| \gg |\dot{E}_{mnq}|$, $|\dot{H}_{\kappa\nu\chi}| \gg |\dot{H}_{mnq}|$, где или $\kappa \neq m$, или $\nu \neq n$, или $\chi \neq q$. В этом случае можно считать, что ЭМ поле в резонаторе определяется только векторами $\dot{E}_{\kappa\nu\chi}, \dot{H}_{\kappa\nu\chi}$, т.е. $\dot{E}(p) \approx \dot{E}_{\kappa\nu\chi}(p)$, $\dot{H}(p) \approx \dot{H}_{\kappa\nu\chi}(p)$. Например, если частота ω близка к собственной частоте резонатора $\tilde{\omega}_{101}$, то, пренебрегая всеми другими типами колебаний, имеем:

$$\dot{E}(p) \approx \dot{E}_{101}, \quad \dot{H}(p) \approx \dot{H}_{101}. \quad (8.22)$$

Эти выражения аналогичны выражениям (6.32) для прямоугольного волновода.

Различные типы колебаний могут иметь одинаковые собственные частоты. При одних и тех же значениях чисел m, n, q возможен, например, резонанс для E_{mnq} -колебаний и H_{mnq} -колебаний. Такое явление называется *вырождением колебаний*. Если одно из чисел m, n, q равно нулю, то вырождения не возникает.

7. Рассмотрим резонатор без потерь мощности. *Основным (низшим) колебанием* резонатора при заданных размерах называют колебание, имеющее наименьшую собственную резонансную частоту. В случае H_{mnq} -колебаний или колебание H_{101} или H_{011} имеет самую низкую собственную частоту:

$$\omega_{101} = v_{\phi} \pi \left(1/a^2 + 1/l^2 \right)^{1/2}, \quad \text{или} \quad \omega_{011} = v_{\phi} \pi \left(1/b^2 + 1/l^2 \right)^{1/2}.$$

Если $\omega = \omega_{101}$ и в резонаторе возбуждается H_{101} -колебание, то все другие колебания с малыми амплитудами векторов поля являются *высшими типами колебаний*. Для H_{101} -колебания, обозначая $q_{y101} = q$, имеем из (8.19), (8.20), (6.28), (8.22):

$$\begin{aligned} \dot{E}_z &= \dot{E}_x^M = \dot{H}_y^M = 0, \\ \dot{H}_z &= \dot{H}_{z101} = \frac{\pi}{a} q \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l}; \\ \dot{E}_y^M &= \dot{E}_{y101}^M = -i\omega \mu_a q \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l}, \\ \dot{H}_x^M &= \dot{H}_{x101}^M = -\frac{\pi}{l} q \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{l}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Силовые линии электрического и магнитного полей в резонаторе можно построить так же, как в случае прямоугольного волновода. Для этого необходимо найти мгновенные значения составляющих векторов поля и изучить их зависимость от координат в фиксированный момент времени. Для H_{101} -колебания, обозначая $q = |q| \exp(i\psi)$, из (8.23) получаем:

$$H_z(x, z, t) = \frac{\pi}{a} |q| \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l} \cos(\omega t + \psi),$$

$$E_y^M(x, z, t) = \omega \mu_a |q| \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l} \cos(\omega t + \psi + 3\pi/2),$$

$$H_x^M(x, z, t) = \frac{\pi}{l} |q| \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{l} \cos(\omega t + \psi + \pi).$$

Таким образом, ЭМ поле имеет *колебательный характер*. Составляющие векторов \dot{E} и \dot{H} сдвинуты между собой по фазе на $3\pi/2$ или на $\pi/2$. Поэтому *все составляющие вектора Пойнтинга имеют чисто реактивный характер*. Зависимости составляющих векторов поля от координат x, y (рис. 8.3, а, б) не отличаются от соответствующих зависимостей для H_{10} -волны в прямоугольном волноводе (рис. 6.3, а, б). Но зависимости от координаты z векторов поля H_{10} -волны в волноводе (рис. 6.3, в) и векторов поля H_{101} -колебания в резонаторе существенно отличаются, так как в резонаторе распределение поля по z имеет характер стоячей волны. Силовые линии полей H_{101} -колебания (рис. 8.3, в) отличаются от силовых линий полей H_{10} -волны (рис. 6.3, з-е) только тем, что экстремумы составляющих $|H_{x101}^M|, |H_{z101}^M|$

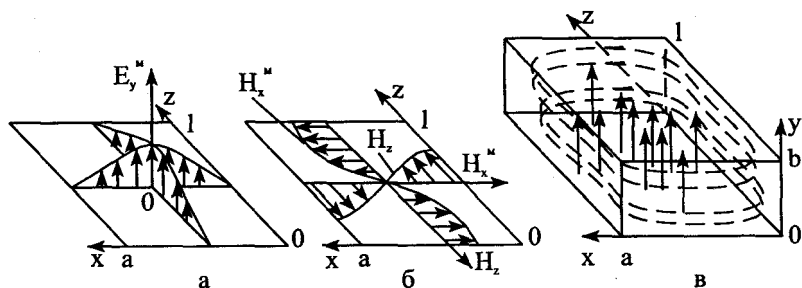


Рис. 8.3. Эпюры составляющих векторов поля H_{101} -колебаний и силовые линии полей

и $|E_{y101}^M|$ по оси z сдвинуты.

На внутренних стенках резонатора протекает поверхностный ток $\dot{\mathbf{J}} = [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}]$. На верхней, нижней и боковых стенках токи не отличаются от токов на стенках прямоугольного волновода (рис. 6.4). На торцевых стенках ток связан с составляющей \dot{H}_{x101} .

8. Пусть резонатор возбуждается элементарным электрическим вибратором, параллельным оси z . Тогда $\dot{\mathbf{j}}^c = \mathbf{1}_z \dot{J}_z^c = \mathbf{1}_z \dot{I}_0 L \times \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$, $\dot{\mathbf{j}}^{m,c} = 0$. Из (8.14), (8.16) и (8.17) имеем $\dot{A}_x = \dot{A}_y = 0$, $\dot{A}^M = 0$. Из (8.16)

$$q_{zmnq} = \frac{4\epsilon_q I_0 L}{V_0(k_{mnq}^2 - k^2)} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \cos \frac{q\pi}{l} z_0.$$

Из (1.124), (1.125) получаем

$$\dot{E}_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \dot{E}_{zmnq}, \quad \dot{H}_z = 0,$$

где

$$\dot{E}_{zmnq} = \frac{k_{\perp mn}^2}{i\omega_{mnq} \tilde{\epsilon}_a} q_{zmnq} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{q\pi}{l} z.$$

Значит, прямолинейный электрический вибратор, параллельный оси z , относительно этой оси возбуждает только поле электрических колебаний (E_{mnq} -колебаний).

«Поперечные» составляющие векторов поля определяем по (6.29). Для E_{110} -колебаний имеем:

$$\dot{E}_{x110} = \dot{E}_{y110} = 0, \quad \dot{E}_{z110} = \frac{k_{\perp 111}}{i\omega_{110} \tilde{\epsilon}_a} q_{z110} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$\dot{H}_{x110}^z = \frac{\pi}{b} q_{z110} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \quad \dot{H}_{y110}^z = -\frac{\pi}{a} q_{z110} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Поле E_{110} -колебания можно получить из поля H_{101} -колебания, если резонатор повернуть так, чтобы вектор $\dot{\mathbf{E}}$ стал параллелен оси z .

9. Собственная добротность резонатора определяется по (8.5).

Для H_{101} -колебания энергия ЭМ поля в резонаторе определяется по значению \dot{E}_{y101}^M . Мощность потерь в металле резонатора складывается из потерь в боковых стенках, верхней и нижней стенках и потерь в торцевых стенках. Мощность P_V^{EM} определяется по (8.6). Вычисляя W_{mnq} и

R_{mnq}^{nm} в общем случае и подставляя результат в (8.5), обозначая $\omega_v = \omega_{mnq}$, $k_v^2 = \omega_v^2 \epsilon_a \mu_a$, $k_{\perp mn} = \pi \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}$, $\theta = 2\mu_a / (\mu_{a1} \delta_1)$; $S_T = ab$, $S_B = al$, $S_6 = bl$ — площади торца, верхней (нижней) и боковой стенок резонатора, получим [37]

$$Q_{H,mnq} = \frac{0,25\theta V_0 k_{\perp mn} k_v^2}{S_B r_{mn} + S_6 r'_{mn} + S_T (\pi q \Gamma_{mn} / l)^2},$$

где $r_{mn} = (q\pi^2 m / S_B)^2 + k_{\perp mn}^4$, $r'_{mn} = (q\pi a^2 / S_6)^2 + k_{\perp mn}^4$.

Формула существенно упрощается при $n = 0$ или $m = 0$:

$$Q_{H,m0q} = \frac{0,5\theta V_0 k_v^2}{S_6 k_v^2 + 2S_6 k_{\perp m0}^2 + 2S_T (\pi q / l)^2}, \quad (8.24)$$

$$Q_{H,0nq} = \frac{0,5\theta V_0 k_v^2}{2S_B k_{\perp 0n}^2 + S_6 k_v^2 + 2S_T (\pi q / l)^2}.$$

В случае E_{mnq} -колебаний при $q \neq 0$

$$Q_{E,mnq} = \frac{0,5\theta V_0 k_{\perp mn}^2}{S_6 (n\pi / b)^2 + S_6 (m\pi / a)^2 + S_T \Gamma_{mn}^2};$$

при $q = 0$ надо S_T в знаменателе формулы заменить на $S_T / 2$.

Для меди при $\mu_a = \mu_{a1} = \mu_0$, $\epsilon_a = \epsilon_0$, $a = b = l$, $\lambda = \lambda_{H,101}$ получаем $Q_{H,101} \approx 10^4$. Реальное значение собственной добротности меньше этой величины и зависит от чистоты обработки стенок, качества контактов, степени окисления поверхностного слоя металла в резонаторе и др. причин.

10. Сопротивление излучения вибратора в резонаторе может быть рассчитано, как и в случае волновода (§ 6.5), с помощью уравнения (1.71), (1.72) баланса мощностей ЭМ поля в резонаторе.

8.4. Собственные колебания цилиндрического резонатора

1. Цилиндрический резонатор представляет собой отрезок круглого волновода, закрытого в поперечных сечениях (на концах) металлическими пластинами, образующими торцы резонатора (рис. 8.4,а). Это позволяет утверждать, что если в волноводе возбуждена E_{mn} -волна, то в резонаторе (относительно оси z) возбуждаются E_{mnq} -колебания. Если же в волноводе возбуждена H_{mn} -волна, то в резонаторе возбужда-

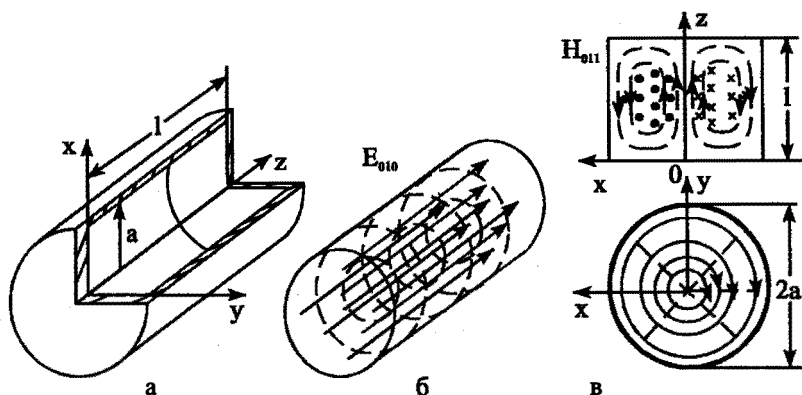


Рис. 8.4. Цилиндрический резонатор и силовые линии полей колебаний E_{010} и H_{011}

ются H_{mnq} -колебания. Числа m и n должны иметь для резонатора тот же смысл, что и для волновода. Число q должно определять число стоячих полуволн поля, укладываемых вдоль длины l резонатора.

2. Рассмотрим задачу о возможности существования E_{mnq} -колебаний. Цилиндрический резонатор заполнен однородным диэлектриком с параметрами $\bar{\epsilon}_a, \mu_a$. Стенки резонатора считаем идеально проводящими ($\sigma_1 \rightarrow \infty$). Введем ЦСК, ось z направим вдоль оси резонатора. Плоскости $z=0$ и $z=l$ совпадают с плоскостями торцов (рис. 8.4,а).

Примем ось z за «продольную». Тогда поле E_{mnq} -колебаний можно возбудить с помощью прямолинейного электрического вибратора. Продольная составляющая вектора \dot{E} вне стороннего источника удовлетворяет однородному уравнению (1.129), т.е.

$$\Delta \dot{E}_z(p) + k^2 \dot{E}_z(p) = 0 \quad \text{или} \quad \Delta_{\perp} \dot{E}_z + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_z = 0, \quad (8.25)$$

и граничному условию $\dot{E}_z = 0$ при $r = a$. Решение граничной задачи о возможности существования E_{mn} -волн в волноводе определено выражением (6.53). В последнем $\dot{E}_z(p_{\perp}, z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ удовлетворяет условию излучения. Но в резонаторе решение уравнения (8.25) должно удовлетворять граничным условиям на торцах (при $z=0; l$), которые получаем из (5.10). Поскольку \dot{E}_r^3 и \dot{E}_{ϕ}^3 касательны торцам, то необхо-

димо, чтобы $\dot{E}_r^3 = 0$ и $\dot{E}_\varphi^3 = 0$ при $z = 0; l$. Эти условия удовлетворяются, если $\partial \dot{E}_z / \partial z = 0$ при $z = 0; l$. Таким образом, задача сводится к решению уравнения Гельмгольца (8.25) при граничных условиях

$$\dot{E}_z = 0 \quad \text{при} \quad r = a \quad \text{и} \quad \partial \dot{E}_z / \partial z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0; l. \quad (8.26)$$

Решением уравнения Гельмгольца (6.46), удовлетворяющим граничному условию при $r = a$, является

$$\dot{E}_{zmn}(p_\perp) = e'_{mn} J_m(k_{\perp mn} r) \cos(m\varphi + \psi_m).$$

Решение уравнения (8.25) представим в виде ряда Фурье по z на интервале от 0 до l :

$$\dot{E}_z(p_\perp, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{\perp mn} r) \cos(m\varphi + \psi_m) \sum_{q=-\infty}^{\infty} e'_{mnq} e^{-iq\pi z/l}. \quad (8.27)$$

Подставим (8.27) в (8.26) при $z = 0$. Так же, как в § 8.3, получаем $e'_{mn(-q)} = e'_{mnq}$. С учетом этого, обозначая $e_{mnq} = \epsilon_q e'_{mnq}$, имеем решение граничной задачи (8.25), (8.26):

$$\dot{E}_z(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \dot{E}_{zmnq}(p), \quad (8.28)$$

где

$$\dot{E}_{zmnq} = e_{mnq} J_m(k_{\perp mn} r) \cos(m\varphi + \psi_m) \cos q\pi z/l. \quad (8.29)$$

Этот результат можно получить методом разделения переменных, представляя $\dot{E}_z(p)$ вместо (6.50) выражением $\dot{E}_z(p) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$. Для функции $Z(z)$ из (8.25) получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка $Z'' + k_q^2 Z = 0$, решение которого, удовлетворяющее граничным условиям $Z'(0) = Z'(l) = 0$, возможно только при дискретных значениях $k_q = q\pi/l$, $q = 0, 1, 2, \dots$.

Выражение (8.28) показывает, что между торцами резонатора устанавливаются стоячие волны поля, q — количество полуволн, укладывающихся на длине резонатора.

Подставим (8.28) в (8.25) и учтем, что $\Delta_\perp \dot{E}_{zmnq} = -k_{\perp mn}^2 \dot{E}_{zmnq}$, $\partial^2 \dot{E}_{zmnq} / \partial z^2 = -(q\pi/l)^2 \dot{E}_{zmnq}$. Получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} [k^2 - k_{\perp mn}^2 - (q\pi/l)^2] \dot{E}_{zmnq} = 0.$$

Возможность существования E_{mnq} -колебаний (при $E_{zmnq} \neq 0$) обеспечивается при условии, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Так как $k^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a$, то значение собственной частоты $\omega_{E,mnq}$ при $\sigma = 0$ определяется выражением

$$\omega_{E,mnq}^2 \epsilon_a \mu_a - k_{\perp mn}^2 - (q\pi/l)^2 = 0, \text{ т.е. } \omega_{E,mnq} = v_\phi \left[(v_{mn}/a)^2 + (q\pi/l)^2 \right]^{1/2}.$$

Наименьшую собственную частоту имеет E_{010} -колебание: $\omega_{E,010} = 2,405 v_\phi / a$. Она не зависит от длины резонатора, поскольку по z ЭМ поле при $q = 0$ однородно.

Поперечные составляющие $\dot{E}_{\perp mnq}^z$, $\dot{H}_{\perp mnq}^z$ определяются по (5.10) или (6.29) и (8.29). Для E_{010} -колебания $\dot{E}_r^z = \dot{E}_\phi^z = \dot{H}_r^z = 0$,

$$\dot{H}_{\phi,010}^z = -i\omega \tilde{\epsilon}_a a v_{01}^{-1} e_{010} J'_0(v_{01} r/a). \quad (8.30)$$

Силовые линии полей E_{010} -колебания изображены на рис. 8.4,б.

Для вычисления собственной добротности $Q_{E,mnq}$ резонатора (8.5) энергия ЭМ поля W_{mnq} определяется по (8.29), мощность тепловых потерь в металлических стенках — по (8.6) и (8.30). При $\sigma = 0$

$$Q_{E,mnq} = \frac{\theta a l}{2(l+2a)}, \quad Q_{E,mr0} = \frac{\theta a l}{2(l+a)}. \quad (8.31)$$

3. Рассмотрим задачу о возможности существования ЭМ поля H_{mnq} -колебаний. В этом случае продольная составляющая должна удовлетворять уравнению

$$\Delta_{\perp} \dot{H}_z(p) + \partial^2 \dot{H}_z / \partial z^2 + k^2 \dot{H}_z = 0 \quad (8.32)$$

и граничным условиям $\partial \dot{H}_z / \partial r = 0$ при $r = a$ и $\dot{H}_z = 0$ при $z = 0; l$.

Для решения поставленной граничной задачи используем результаты, полученные в § 6.6 при решении аналогичной задачи о возможности существования H_{mn} -волн в круглом волноводе.

С учетом (6.54) разложим $\dot{H}_z(p_{\perp}, z)$ в ряд Фурье по z на интервале от 0 до l . Используя граничное условие $\dot{H}_z(p_{\perp}, 0) = 0$, разложение \dot{H}_z по системе бегущих волн приводим к разложению по системе стоячих волн:

$$\dot{H}_z(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \dot{H}_{zmnq}, \quad (8.33)$$

где

$$\dot{H}_{zmnq} = h_{mnq} J_m(v'_{mn} r / a) \cos(m\varphi + \Phi_m) \sin q\pi z / l. \quad (8.34)$$

Чтобы установить связь коэффициентов распространения, подставим (8.33) в (8.32). Возможность существования H_{mnq} -колебаний ($\dot{H}_{zmnq} \neq 0$) получается в том случае, когда $k = k_{mnq}$, т.е. частота ω равна частоте собственных колебаний $\omega_{H,mnq}$. При $\sigma = 0$:

$$\begin{aligned} \omega_{H,mnq}^2 \varepsilon_a \mu_a - (v'_{mn} / a)^2 - (q\pi / l)^2 &= 0, \\ \text{т.е. } \omega_{H,mnq} &= v_\phi \left[(v'_{mn} / a)^2 + (q\pi / l)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Поперечные составляющие $\dot{E}_{\perp mnq}^M$, $\dot{H}_{\perp mnq}^M$ определяются по (5.9) или (6.28) и (8.33). На рис. 8.4,в изображены силовые линии H_{011} -колебания. Отличительным в силовых линиях полей в резонаторах является то, что в пространстве пучностям напряженности электрического поля соответствуют узлы напряженности магнитного поля. Поэтому все составляющие вектора Пойнтинга являются мнимыми (при отсутствии тепловых потерь).

Для вычисления собственной добротности $Q_{H,mnq}$ резонатора по (8.5) энергия ЭМ поля определяется по значению \dot{E}_{mnq}^M , а мощность тепловых потерь — по значению касательной составляющей вектора \dot{H}_{mnq}^M на стенках резонатора. При $\sigma = 0$, $A = q\pi a$, $M = v_{mn}'^2 - m^2$

$$Q_{H,mnq} = \frac{0,5\theta l a M [(v'_{mn})^2 + A^2]}{l [(v_{mn}'^2)^2 + (A m)^2] + A^2 a M}.$$

Для H_{0nq} -колебаний

$$Q_{H,0nq} = \frac{0,5\theta l a [(v'_{0n})^2 + A^2]}{l^3 v_{0n}'^2 + 2aA^2}.$$

Наибольшая добротность получается при азимутально-однородных H_{0nq} -колебаниях. Токи во внутренних стенках резонатора при этом протекают по замкнутым концентрическим окружностям, «продольной» составляющей тока нет (см. § 6.6). Это позволяет применять для подавления паразитных видов колебаний (вырожденных колебаний) радиопоглощающие материалы (с высоким значением $\text{tg } \Delta$), располагая их в зазорах между торцами и цилиндрической частью резонатора. На рис. 8.5 приведены графики зависимости параметра $\nu = Q_{H,0nq} \cdot \delta_1 / \lambda_{0nq}$ от a/l , для некоторых типов H_{0nq} -колебаний.

Резонаторы с H_{01q} -колебаниями

применяют в волномерах высокой точности и как резонансные системы высокостабильных генераторов.

4. Пример. Рассчитать размеры резонатора, обеспечивающего добротность, равную $5 \cdot 10^4$ на длине волны $\lambda = 3$ см при минимальных габаритах.

Рассмотрим медный резонатор ($\sigma_1 = 5,8 \cdot 10^7$ См/м), заполненный воздухом. На частоте $f = 10$ ГГц глубина проникновения $\delta_1 = (2/\omega\mu_0\sigma_1)^{1/2} = 6,61 \cdot 10^{-7}$ м. Параметр $\nu = 5 \cdot 10^4 \cdot \delta_1/\lambda = 1,1$. Из графиков рис. 8.5 следует, что этот параметр может быть реализован H_{014} -колебанием при

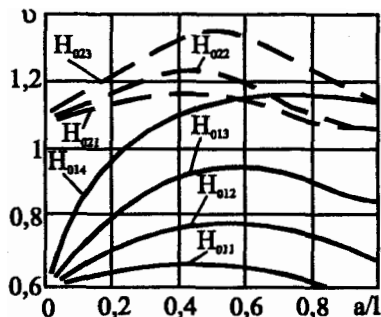


Рис. 8.5. Графики зависимости параметра ν от отношения размеров резонатора

$a/l = 0,33$, т.е. $a = 0,33l$. Подставим это значение a в (8.35). Так как $\nu'_{01} = 3,832$, то имеем $\omega_{H,014} = 2\pi f_{H,014} = 17,1\nu_{\phi}/l$, откуда $l = 17,1\nu_{\phi}/2\pi \cdot 10^{10} = 8,17$ см. Поэтому $a = 0,33l = 2,7$ см.

Для защиты от коррозии рассмотрим вариант серебрения внутренней поверхности резонатора. Для серебра $\sigma_1 = 6,139 \cdot 10^7$ См/м. Поэтому $\delta_1 = 6,43 \cdot 10^{-7}$ м. Параметр $\nu = 5 \cdot 10^4 \times 6,43 \cdot 10^{-7}/3 \cdot 10^{-2} = 1,072$. Из графиков (рис. 8.5) находим, что этот параметр реализуется для H_{014} -колебания при $a/l = 0,29$. Следовательно, $a = 0,29l$. Из (8.35) получаем $l = 18,23\nu_{\phi}/\omega_{H,014} = 8,71$ см. Поэтому $a = 2,53$ см.

8.5. Собственные колебания в коаксиальном резонаторе. Резонаторы на основе отрезков направляющих систем с Т-волной

1. Коаксиальный резонатор рассматриваем как отрезок коаксиальной линии, закрытый на концах (в поперечных сечениях) металлическими пластинами, образующими торцы резонатора (рис. 8.6,а). Задача о возможности существования собственных E_{mnq} - и H_{mnq} -колебаний в коаксиальном резонаторе формулируется так же, как для круглого резонатора: составляющие \dot{E}_z, \dot{H}_z должны удовлетворять однородным уравнениям Гельмгольца (8.24), (8.31) и граничным условиям (6.58), а на торцах, при $z = 0, l$, необходимо, чтобы $\partial \dot{E}_z/\partial z = 0, \dot{H}_z = 0$. Значит, вместо (6.63) имеем

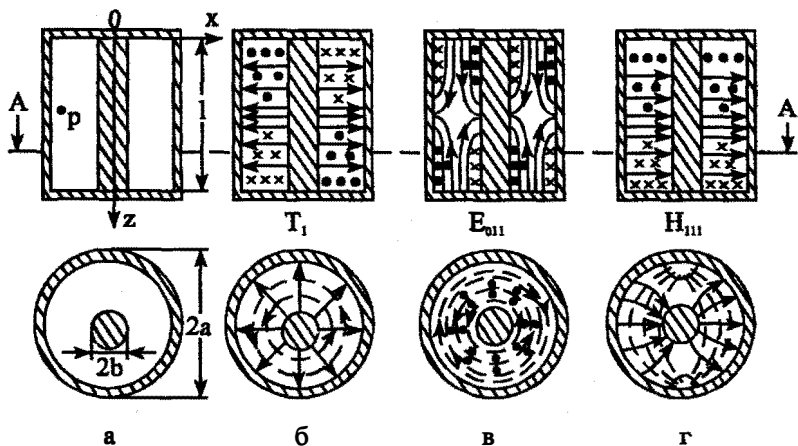


Рис. 8.6. Коаксиальный резонатор и силовые линии полей

$$\dot{E}_z(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \dot{E}_{zmnq}(p_{\perp}) \cos q\pi z/l, \quad (8.36)$$

где \dot{E}_{zmnq} определено в (6.61). Аналогично

$$\dot{H}_z(p) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \dot{H}_{zmnq}(p_{\perp}) \sin q\pi z/l, \quad (8.37)$$

где \dot{H}_{zmnq} определено в (6.64).

Векторы $\dot{E}_{\perp mnq}^{(m)}$, $\dot{H}_{\perp mnq}^{(m)}$ электрических (магнитных) колебаний можно определить по (8.36), (8.37) и (6.28), (6.29).

Собственные частоты $\omega_{E,mnq}$ и $\omega_{H,mnq}$ электрических и магнитных колебаний определяем, подставляя (8.36), (8.37) в (8.25), (8.32). Получаем условие существования колебаний:

$$k^2 - k_{\perp E(H)mn}^2 - (q\pi/l)^2 = 0,$$

откуда $\omega_{E(H),mnq} = v_{\phi} [k_{\perp E(H)mn}^2 + (q\pi/l)^2]^{1/2}$.

2. В случае вырождения E_{mn} -волн в коаксиальной линии в Т-волну E_{mnq} -колебания в резонаторе вырождаются в T_q -колебания. Так как $k_{\perp E00} = 0$, то собственные частоты их $\omega_{T,q} = v_{\phi} q\pi/l$. Если частота генератора $\omega = \omega_{T,q}$, то резонансной длиной резонатора является $l_q = v_{\phi} q\pi/\omega = q\lambda/2$. При изменении частоты генератора возможность

простого изменения длины резонатора позволяет легко настраивать его на резонанс.

В случае T_q -колебаний $\dot{E}_{100q} = 1_r \dot{E}_{r,00q} = 1_r \dot{E}_{rq}$, $\dot{H}_{100q} = 1_\varphi \dot{H}_{\varphi q}$ можно получить из (8.36) и (6.29) путем предельного перехода так же, как для Т-волны в § 6.9. Но проще учесть, что в коаксиальной линии \dot{E}_r и \dot{H}_φ в (6.65) представлены двумя волнами, бегущими по z в противоположных направлениях. Записывая \dot{E}_{rq} в резонаторе в виде суммы этих волн $\dot{E}_{rq} = [\dot{u}_{1q} \exp(ikz) - \dot{u}_{2q} \exp(-ikz)] \cdot r^{-1}$, где $\dot{u}_{1q}, \dot{u}_{2q}$ — амплитуды, и удовлетворяя граничному условию $\dot{E}_{rq} = 0$ при $z = 0$, находим $\dot{u}_{1q} = \dot{u}_{2q} = \dot{u}'_{0q}$. При этом имеем $\dot{E}_{rq} = \dot{u}'_{0q} r^{-1} \sin kz$, где $\dot{u}'_{0q} = 2\dot{u}'_{0q}$.

Значение $\dot{H}_{\varphi q}$ проще всего определить из 2-го уравнения Максвелла: $\dot{H}_{\varphi q} = -iW\dot{u}'_{0q} r^{-1} \cos kz$.

Чтобы удовлетворялось граничное условие $\dot{E}_{rq} = 0$ при $z = l$, необходимо $\sin kl = 0$, т.е. $kl = q\pi$, $q = 1, 2, 3, \dots$. Тогда $k = q\pi/l$. Т-колебания могут существовать только при этих дискретных значениях k .

Силовые линии полей T_1 -колебания изображены на рис. 8.6,б (в плоскости xu — в сечении А-А).

Добротность резонатора при T_1 -колебаниях определяется по (8.5):

$$Q_{T_1} = 2abl \ln(a/b) / \{\delta_1 [l(a+b) + 4ab \ln a/b]\}$$

3. При использовании E_{01q} -колебаний в резонаторе $k_{\perp E_{01}} = \pi/(a-b)$. Поэтому $\omega_{E,01q} = v_\varphi \pi [(a-b)^2 + (q/l)^2]^{1/2}$. При E_{010} -колебаниях $\omega_{E,010} = v_\varphi \pi/(a-b)$. Считается, что при $l > a-b$ основным является T_1 -колебание, при $l < a-b$ основным является E_{010} -колебание.

При H_{11q} -колебаниях $k_{\perp H_{11q}} = 2\pi/(a+b)$, поэтому $\omega_{H,11q} = v_\varphi \pi [(2/(a+b))^2 + (q/l)^2]^{1/2}$.

Силовые линии полей E_{011} - и H_{111} -колебаний изображены на рис. 8.6,в,г (в плоскостях xu — в сечениях А-А).

4. Если отрезок длины l любой направляющей системы, в которой может распространяться Т-волна (например, двухпроводной линии, полосковой линии и др.), на концах закрыт (в поперечных сечениях) металлическими пластинами (короткозамыкателями), то $\dot{E}_{\perp q}$ в силу граничных условий должны на пластинах обращаться в нуль, т.е. $\dot{E}_{\perp q} = 0$ при $z = 0; l$. Поэтому $\dot{E}_{\perp q}$ пропорционально $\sin kz$ и T_q -колебания в таких системах могут существовать только при $\sin kl = 0$, т.е. при $k_{T,q}l = q\pi$, $q = 1, 2, 3, \dots$. Значит, собственные частоты резонаторов с T_q -колебаниями $\omega_{T,q} = v_{\phi} q\pi / l$.

Составляющие вектора $\dot{H}_{\perp q}$ определяются 2-м уравнением Максвелла и пропорциональны $\cos kz$.

8.6. Эквивалентные параметры объемных резонаторов. Резонаторы с укорачивающей емкостью

1. В теории цепей с сосредоточенными параметрами иногда объемный резонатор может быть заменен эквивалентным колебательным контуром. Это можно сделать, если резонансная частота $\omega_{\text{ЭК}}$ контура и его добротность $Q_{\text{ЭК}}$ совпадают с одной из собственных частот ω_v и собственной добротностью Q_v объемного резонатора, амплитуда тока в контуре $i_{\text{ЭК}}$ равна полному току i_v резонатора. Энергия, запасенная в контуре, $W_{\text{ЭК}}$, равна энергии W_v , запасенной в объемном резонаторе (v заменяет индексы m, n, q). Обозначим через $C_{\text{ЭК}}$, $L_{\text{ЭК}}$ и $R_{\text{ЭК}}$ — емкость, индуктивность и сопротивление эквивалентного контура. Тогда перечисленные условия формулируются так: $\omega_{\text{ЭК}} = \omega_v = (L_{\text{ЭК}} \cdot C_{\text{ЭК}})^{-1/2}$, $Q_{\text{ЭК}} = Q_v = (L_{\text{ЭК}} / C_{\text{ЭК}})^{1/2} / R_{\text{ЭК}}$, $i_{\text{ЭК}} = i_v$, $W_{\text{ЭК}} = W_v$.

При вычислении параметров эквивалентного контура предполагается, что электродинамический расчет объемного резонатора выполнен — известны ω_v , Q_v , можно вычислить W_v , i_v . Поэтому из выражения $\omega_v = (L_{\text{ЭК}} \cdot C_{\text{ЭК}})^{-1/2}$ следует, что необходимо иметь способ определения или $C_{\text{ЭК}}$ или $L_{\text{ЭК}}$.

Рассмотрим определение емкости. Энергия электрического поля $W_{\text{ЭК}}$ в конденсаторе определяется по (1.50), откуда получаем

$C_{\text{ЭК}} = |\dot{Q}_x|^2 / 2W_{\text{ЭК}} = |\dot{Q}_x|^2 / 2W_v$, где \dot{Q}_x — заряд пластины конденсатора.

Энергия в объемном резонаторе определена в § 8.2. Таким образом, для вычисления $C_{\text{ЭК}}$ необходимо найти \dot{Q}_x . По значению $C_{\text{ЭК}}$ вычисляется $L_{\text{ЭК}} = 1/\omega_v^2 C_{\text{ЭК}}$. При известных $C_{\text{ЭК}}$, $L_{\text{ЭК}}$ получаем $R_{\text{ЭК}} = 1/\omega_v C_{\text{ЭК}} Q_v$. Резонансное сопротивление контура определяется выражением $Z_{\text{ЭК}} = Q_v / \omega_v C_{\text{ЭК}}$.

2. Пример. Найти параметры колебательного контура, эквивалентного прямоугольному объемному резонатору с H_{101} -колебанием. В соответствии с (8.23) ЭМ поле с вектором $\dot{D}_{101}^M = \epsilon_a \dot{E}_{101}^M = 1_y \epsilon_a \dot{E}_{y101}^M$ индуцирует заряды \dot{Q}_x противоположных знаков на нижней и верхней стенках (при $y = 0; b$). По теореме Гаусса (1.8) весь заряд в резонаторе

$$\oint_S \dot{D}_{101}^M n dS = \int_{S_b} \dot{D}_{y101}^M dx dz - \int_{S_n} \dot{D}_{y101}^M dx dz$$

равен нулю, так как складывается из заряда на верхней стенке, имеющей площадь $S_b = al$, $n = 1_y$, и на нижней стенке ($S_n = al$, $n = -1_y$). Заряд на верхней стенке

$$\dot{Q}_x = -t\omega_v \epsilon_a \mu_a q_v \int_0^a \int_0^b \sin \pi x / a \cdot \sin \pi z / l dx dz = -t\omega_v \epsilon_a \mu_a \frac{4al}{\pi^2} q_v.$$

Энергия, запасенная в резонаторе,

$$\begin{aligned} W_{101} &= \frac{\epsilon_a}{2} \int_{V_0} |\dot{E}_{y101}^M|^2 dV = \frac{\epsilon_a}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^l |\omega_v \mu_a q_v \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi z}{l}| dx dy dz = \\ &= \omega_{101}^2 \epsilon_a \mu_a^2 |q_{101}|^2 abl / 8. \end{aligned}$$

Емкость эквивалентного конденсатора

$$C_{\text{ЭК}} = |\dot{Q}_x|^2 / 2W_{101} = \frac{64}{\pi^4} \epsilon_a \frac{al}{b}.$$

Подставляя значение $\omega_v = \omega_{101}$, имеем

$$L_{\text{ЭК}} = \left(\omega_v^2 C_{\text{ЭК}} \right)^{-1} = \frac{\pi^2}{64} \mu_a \frac{abl}{a^2 + l^2}.$$

Сопротивление и резонансное сопротивление вычисляются по известным ω_{101} ,

$C_{\text{ЭК}}$ и $Q_{H,101}$.

3. В качестве элементов схем генераторов применяют отрезки линий (двухпроводной открытой, полосковой, коаксиальной и др.) с T -волной, имеющие только один закорачивающий металлический торец, например, при $z = 0$ (рис. 8.7,а). Для таких линий возможно применение понятия напряжения и тока. Например, для коаксиальной линии напряжение между внутренним и внешним проводниками и ток (см. § 6.9)

$$\dot{u}(z) = \int_b^a \dot{E}_z(r, z) dr = \dot{u}_{0q} \ln(a/b) \sin kz,$$

$$\dot{i}(z) = \oint_L \dot{H} dl = -iW^{-1} \dot{u}_{0q} \cos kz \int_0^{2\pi} r^{-1} r d\varphi = -i2\pi \dot{u}_{0q} W^{-1} \cos kz.$$

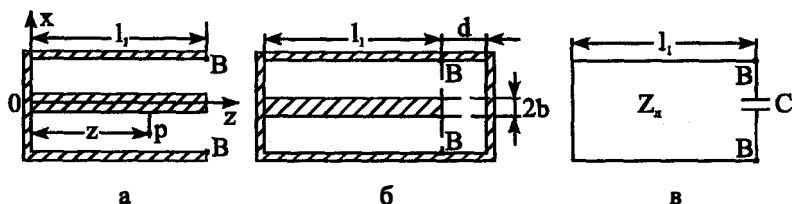


Рис. 8.7. Короткозамкнутый отрезок коаксиальной линии и укорачивающая резонатор емкость

При этом можно определить понятие входного сопротивления закороченного отрезка линии длиной $z = l_1$ (рис. 8.7,а). Если Z_{π} — волновое сопротивление линии, то

$$Z_{\text{вх}}(z) \Big|_{z=l_1} = a(l_1) / i(l_1) = iZ_{\pi} \operatorname{tg} kl_1,$$

которое при $0 < l_1 < \lambda/4$ имеет индуктивный характер, при $\lambda/4 < l_1 < \lambda/2$ — емкостной. При $l_1 \rightarrow (2n+1)\lambda/4$ ($n=0,1,2,\dots$) $Z_{\text{вх}} \rightarrow \pm i\infty$, поэтому такие отрезки линий применяют в качестве резонансных систем.

4. Для уменьшения геометрической длины резонатора, выполненного на основе одноволновой линии передачи, в которой может распространяться только Т-волна, в нем создают область, играющую роль емкости или подключают конденсатор.

В коаксиальном резонаторе емкость образуется между центральным проводником резонатора и торцом резонатора (рис. 8.7,б). Структура силовых линий полей, соответствующих основному типу колебаний в основной части резонатора длины l_1 существенно не отличается от структуры силовых линий полей обычного коаксиального резонатора, только в области емкостного зазора малой длины d ($d \ll \lambda$) имеются существенные отличия. Можно считать, что к отрезку коаксиальной короткозамкнутой линии в сечении ВВ присоединена емкостная нагрузка. Входное сопротивление короткозамкнутой линии в сечении ВВ $Z_{\text{вх}} = iZ_{\pi} \operatorname{tg} kl_1$. Емкость конденсатора $C \approx \epsilon_a \pi b^2 / d$. Сопротивление нагрузки на линию $1/i\omega C$ (рис. 8.7,в). При резонансе $Z_{\text{вх}} + 1/i\omega C = 0$, т.е. $kb^2 \operatorname{tg} kl_1 = 2d / \ln(a/b)$. Из этого трансцендентного уравнения можно определить собственную частоту $\omega_{T,1}$ укороченного резонатора. При заданном $l = l_1 + d$ она меньше $v_{\phi} \pi / l$. При настройке резонатора емкость C может изменяться за счет изменения ширины зазора d . Варианты расчета таких резонаторов приведены в [38].

В полосковых резонаторах в качестве укорачивающей может быть применена сосредоточенная емкость.

8.7. Тороидальный и магнетронный резонаторы

1. Квазистационарные резонаторы являются частью электронных приборов. Как уже отмечалось, в них имеется область, выполняющая роль конденсатора с емкостью C , и область, выполняющая роль индуктивности L , т.е. области выполняют функции квазисосредоточенных параметров. Если вычислить значения C, L , то собственная частота резонатора $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$. Для основного типа колебания линейные размеры резонатора,

имеющего квазисосредоточенные параметры, должны быть значительно меньше длины волны. Последнее определяет условия справедливости квазистационарного подхода.

2. Применим квазистационарный подход к расчету собственной частоты основного типа колебаний тороидального резонатора (рис. 8.8,а). Энергия электрического поля сосредоточена преимущественно в пространстве между пластинами резонатора в пределах зазора ширины d , а энергия магнитного поля — в области тороида (рис. 8.8,б). Через область резонатора, где сосредоточено электрическое поле, в клистроне проходит электронный поток, возбуждающий колебания в резонаторе, которые в свою очередь модулируют по плотности поток электронов, создавая электронные сгустки. Эти сгустки отражаются отражателем и вновь пролетают через сетки резонатора, отдавая ему свою энергию. Для эффективного взаимодействия ЭМ поля с электронным пучком надо, чтобы $d \ll \lambda$. При этом условии $C = \epsilon_a \pi b^2 / d$.

Учтем, что магнитный поток $\dot{\Phi}$ в тороидальной части связан с индуктивностью L и током $\dot{i}_{\text{тр}}$ выражением: $\dot{\Phi} = L \dot{i}_{\text{тр}}$. С другой стороны,

$$\dot{\Phi} = \int_{S_T} \dot{\mathbf{B}} d\mathbf{S} = \mu_a \int_{S_T} \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S}, \quad (8.38)$$

где S_T — площадь поперечного сечения тороида.

Учитывая, что для основного типа колебаний $\dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S} = \dot{H} dS$ и применяя закон полного тока $\dot{H} = \dot{i}_{\text{тр}} / 2\pi r$, получаем

$$\dot{\Phi} = L \dot{i}_{\text{тр}} = \frac{1}{2\pi} \mu_a \dot{i}_{\text{тр}} \int_{S_T} dS / r.$$

Определяя из этого равенства значение L и подставляя его и значение C в формулу $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$, получаем

$$\omega_0 \approx \frac{1}{b} \left(\frac{2d}{\epsilon_a \mu_a} \right)^{1/2} \left(\int_{S_T} dS / r \right)^{-1/2}.$$

3. Магнетронный резонатор является одним из основных элементов магнетрона. Он состоит из системы объемных резонаторов, которые формируют замкнутый кольцевой электронный поток и отбирают от него энергию. Внешний вид его изображен на рис. 8.9,а, а поперечное сечение — на рис. 8.9,б. В сплошном медном блоке высверлено

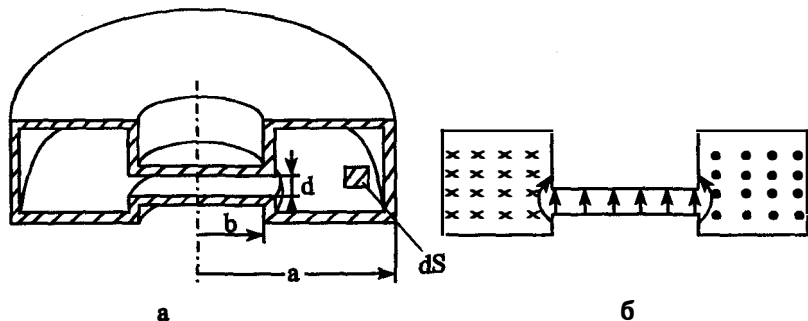


Рис. 8.8. Тороидальный резонатор

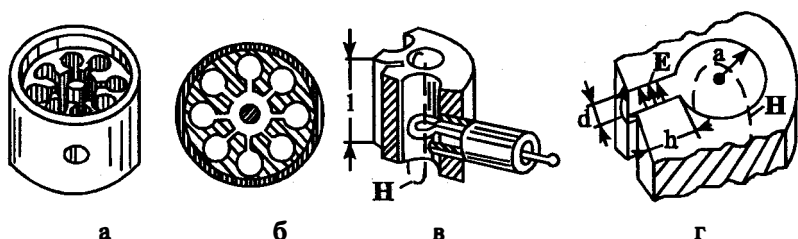


Рис. 8.9. Резонаторный блок магнетрона; Петля связи с резонатором

8 цилиндрических отверстий, сообщающихся между собой через пазы ширины d , длины h и высоты l (рис. 8.9, а, б). В центральной части резонаторного блока помещен катод, создающий электронный поток. Связь последнего с резонаторами осуществляется через пазы. В пазах сосредоточена в основном энергия электрического поля. Резонаторы связаны между собой магнитным полем во внешнем зазоре, а вывод ЭМ энергии в линию передачи осуществляется с помощью окна (отверстия) или петли (рис. 8.9, в).

Магнетронный блок работает как одно целое на частоте, близкой к собственной частоте одного резонатора (ячейки резонатора). В ячейке электрическое поле основного типа колебаний сосредоточено в узком пазу шириной d , магнитное поле — преимущественно — в цилиндрической полости радиуса a . Емкость паза $C = \epsilon_a h / d$. Предполагается, что l так велико, что можно считать магнитное поле в цилиндрической полости приближенно таким же, как в бесконечно длинной полости, вдоль которой направлен вектор \dot{H} . При этом ток проводимости $i_{\text{мг}}$, протекающий по стенкам ячейки (по окружностям) и переходящий в пазах в ток смещения, по закону полного тока $i_{\text{мг}} \approx \dot{H}l$. Магнитный поток $\dot{\Phi}$ определяется по (8.38), где $S_T = \pi a^2$. Предполагая \dot{H} однородным в поперечном сечении полости, получаем из (8.38) $\dot{\Phi} = \mu_a \dot{H} S_T$.

В соответствии с (1.51) индуктивность ячейки $L = \dot{\Phi} / i_{\text{мг}}$. Поэтому собственная частота ячейки $\omega_0 \approx v_{\text{ф}} (d / \pi a^2 h)^{1/2}$.

Строгие электродинамические методы расчета резонаторов и замедляющих систем сложной формы рассмотрены в [39, 40].

8.8. Диэлектрические резонаторы

1. Применение диэлектрических резонаторов в диапазонах УВЧ, СВЧ, КВЧ позволяет улучшить массогабаритные характеристики радиотехнической аппаратуры, решить ряд задач измерения параметров материалов. Диэлектрические резонаторы, как и резонаторы на основе микрополосковых волноводов, просто сочетаются с пассивными и активными элементами гибридных интегральных схем. В ряде случаев диэлектрические резонаторы имеют большие значения собственных добротностей, чем даже полые металлические резонаторы.

Основными параметрами материалов для диэлектрических резонаторов являются относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_1 , тангенс угла электрических потерь $\operatorname{tg} \Delta_1$ и температурные коэффициенты (ТК) ϵ_1 , $\operatorname{tg} \Delta_1$ и линейного расширения. Используются материалы с ϵ_1 от нескольких единиц до нескольких сотен, с $\operatorname{tg} \Delta_1$ от 10^{-3} до 10^{-6} . У термостабильных диэлектриков значение ТК ϵ_1 меньше $(10^{-6})^0 \text{C}^{-1}$. В интервале температур от -60 до $+60^\circ \text{C}$ значения ТК линейного расширения у лучших образцов материалов для диэлектрических резонаторов находится в пределах $((2+10) \times 10^{-6})^0 \text{C}^{-1}$.

2. Диэлектрические резонаторы делят на открытые и металлодиэлектрические. В открытых диэлектрических резонаторах границей раздела является диэлектрик–воздух. Поэтому ЭМ поле существует в объеме диэлектрика и окружающем его пространстве. Примером является отрезок длины l цилиндрического диэлектрического волновода (рис. 7.5): амплитуды полей поверхностных волн в радиальном направлении убывают по экспоненциальным законам; между торцами (границами раздела диэлектрик–воздух) происходит переотражение поверхностных волн и при $\epsilon_1 \rightarrow \infty$ поля между торцами должны почти полностью переотражаться, т.е. в отрезке волновода возникает объемный резонанс.

Различают две разновидности диэлектрических резонаторов: диэлектрические резонаторы, использующие низшие типы колебаний и резонаторы с азимутальными колебаниями высокого порядка.

В состав металлодиэлектрических резонаторов входят два или более металлических и диэлектрических элемента. Примером является отрезок длины l цилиндрического волновода, на концах которого (в поперечных сечениях) расположены металлические пластины. Так же, как в рассмотренных выше резонаторах, ЭМ поле переотражается между пластинами, создается резонанс. В пределе диэлектрическое тело может быть полностью экранировано. Тогда образуется полый металлический резонатор, заполненный диэлектриком, его объем в $\epsilon_1^{3/2}$ раз меньше объема резонатора, заполненного воздухом.

Открытые диэлектрические и металлодиэлектрические резонаторы отличаются разнообразием конструкций.

Отдельную группу составляют волноводно-диэлектрические резонаторы, в которых резонансные явления обусловлены волновыми процессами в волноводе и помещенном в нем диэлектрическом теле.

3. В теории диэлектрических резонаторов различают «запертые» и «незапертые» в объеме резонатора колебания. Колебания являются запертыми, если при фиксированных размере резонатора и длине волны амплитуды векторов поля вне резонатора стре-

мятся к нулю при $\epsilon_1 \rightarrow \infty$. Колебания являются незапертыми, если при $\epsilon_1 \rightarrow \infty$ амплитуды векторов поля вне резонатора не стремятся к нулю. Запертые колебания обладают большей добротностью. Эти приближенные представления используются при построении асимптотических решений.

4. Формулировка граничной задачи о возможности существования гибридных, E_v - и H_v -колебаний в металлодиэлектрическом резонаторе, выполненном на основе отрезка длины l диэлектрического волновода, на концах которого расположены металлические пластины, отличается от формулировки соответствующей задачи для диэлектрического волновода тем, что на торцах ЭМ поле должно удовлетворять граничным условиям $\partial \dot{E}_z / \partial z = 0$, $\dot{H}_z = 0$. Решения задачи для резонатора цилиндрической формы отличаются от решений (7.34), (7.35) тем, что продольные составляющие векторов поля зависят от z по законам $\dot{E}_z = \cos q\pi z / l$, $\dot{H}_z = \sin q\pi z / l$. Поэтому в характеристических уравнениях (7.38), (7.39) продольный коэффициент распространения κ^2 надо заменить на $(q\pi/l)^2$. Для практических целей изучение этой задачи имеет малое значение, так как размеры торцов велики, это не удовлетворяет условию уменьшения объема резонатора. При малом (радиальном) размере торца граничную задачу надо решать методом частичных областей, т.е. применять численные методы исследования.

Если резонатор является открытым, то на торцах должны выполняться граничные условия $\tilde{e}_{a1} \dot{E}_{1z} = \epsilon_0 \dot{E}_{2z}$, $\mu_{a1} \dot{H}_{1z} = \mu_0 \dot{H}_{2z}$. Решение граничной задачи при этих условиях и при условиях (7.33), (7.36) может быть представлено в виде разложения по бесконечному спектру пространственных волн с неизвестными спектральными плотностями (см., например, (7.15)). Для спектральных плотностей из граничных условий получаются интегральные уравнения. Из последних с помощью приближенных представлений можно получить характеристическое уравнение. Последнее решается приближенными методами, при этом можно найти собственные частоты.

Мощность тепловых потерь в открытых резонаторах определяется по (5.25), (7.47). Для определения мощности потерь на излучение необходимо в каждом конкретном случае найти амплитуды пространственных волн (см. (7.21)). При $\text{tg} \Delta_1 < 10^{-4}$ мощность потерь на излучение по (8.5) в основном определяет собственную добротность резонатора.

Теория и применения диэлектрических резонаторов изложены в [41].

8.9. Понятие об открытых (квазиоптических) резонаторах

1. Открытые резонаторы применяются в диапазонах КВЧ, ГВЧ и оптическом. Они являются колебательными системами оптических квантовых генераторов, их используют в качестве антенн, в измерительной технике для измерения частоты, диэлектрической и магнитной проницаемостей, для диагностики плазмы.

2. Закрытые объемные резонаторы широко применяются в диапазоне СВЧ, при этом в резонаторе возбуждается только один тип колебаний чаще всего основной. При переходе в диапазон КВЧ рабочая длина волны уменьшается до 1 мм, линейные размеры таких резонаторов уменьшаются. Необходимая точность изготовления резонатора с малыми линейными размерами увеличивается и при переходе в диапазон

ГВЧ, а затем — в оптический диапазон, не может быть достигнута. Уменьшение размеров резонатора приводит к уменьшению запасаемой в резонаторе энергии и к уменьшению отношения объема резонатора к площади поверхности его стенок. Последнее сказывается на уменьшении собственной добротности резонатора. Чтобы избежать указанных недостатков, можно было бы попытаться применить объемные резонаторы больших линейных размеров (например, a/λ , b/λ , l/λ — велико), в которых возбуждается высший тип колебаний. Однако, спектр резонансных частот объемных резонаторов «густой»: собственные частоты колебаний (8.21), (8.35) с близкими значениями чисел m и n и мощности потерь на этих частотах мало отличаются друг от друга. Число собственных типов колебаний, приходящихся на полосу частот $\Delta\omega$, равно $\Delta N = V_0 \omega^2 \Delta\omega / 2\pi^2 v_{\phi}^3$. Резонансные кривые типов колебаний перекрывают друг друга. Поэтому резонатор теряет избирательные свойства.

Большое число собственных типов колебаний при размерах объемного резонатора, значительно больших длины волны, устранить нельзя. Но возможно создать резонаторы, в которых только небольшое число собственных типов колебаний имеет малые мощности потерь, а остальные имеют большие мощности потерь на излучение, поэтому их добротности очень малы. За счет этого спектр резонансных частот «прореживается». Такие колебательные системы созданы на основе квазиоптических устройств — открытых резонаторов. Открытыми их называют потому, что «прореживание» спектра собственных частот и, значит, избирательные свойства в них достигаются за счет излучения поля в окружающее резонатор пространство, а квазиоптическими — потому, что в них применяются оптические элементы: зеркала, линзы, полупрозрачные пластины и др. Для расчета открытых резонаторов применяют как электродинамические методы, так и методы геометрической и волновой оптики.

Если в объемном резонаторе удалить боковые стенки, то стоячие волны в системе образуются только за счет отражения от торцов. Другие типы колебаний, обусловленные отражением от боковых стенок, за счет излучения поля исчезнут. В результате спектр собственных частот открытой колебательной системы станет более «редким», чем спектр собственных частот закрытого объемного резонатора.

Открытым резонатором называют систему двух параллельных, расположенных друг против друга плоских зеркал (1) или двух зеркал, изогнутых в противоположных направлениях (например, сферических (2)) (рис. 8.10, а, б). Пространство между ними может быть заполнено диэлектриком с малыми потерями.

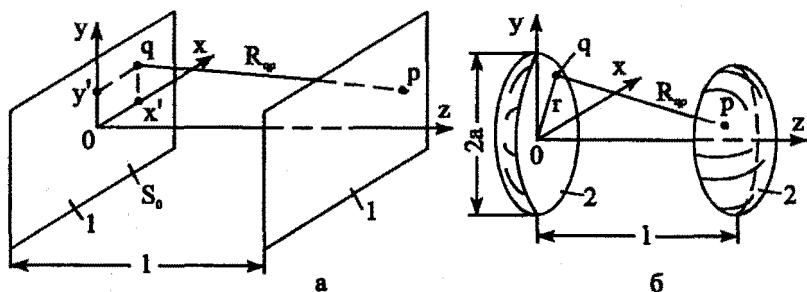


Рис. 8.10. Открытые резонаторы

3. ЭМ поле в открытом резонаторе с плоскими зеркалами (рис. 8.10,а) многократно переотражается между торцами. После q отражений в плоскости $z=0$ образуется поле, любую декартову составляющую векторов \vec{E} и \vec{H} которого обозначим через $\psi_q(x, y, 0)$. Поле распространяется в виде бегущей волны в направлении правого зеркала. Попадая на него при $z=l$, поле отразится в $(q+1)$ -й раз. После многократных отражений распределение поля в плоскости $z=l$ будет повторять распределение поля в плоскости $z=0$ с точностью до постоянного множителя g , т.е. $\psi_{q+1}(x, y, l) = g\psi_q(x, y, 0)$, где $g = |g| \exp(i\Phi)$, $|g| = |\psi_{q+1}|/|\psi_q|$ — ослабление ψ за счет потерь на излучение (дифракцию), а Φ — определяет фазовый набег: $\Phi = -kz + \Delta$, где Δ — дифракционная поправка к оптическому набегу фаз на пути длиной l .

Чтобы приближенно рассчитать функцию распределения составляющей векторов поля по зеркалу $\psi_q(x, y)$, учтем, что l намного больше линейных размеров зеркала. Тогда при $z=l$ и для точки p , находящейся на правом зеркале ($\theta \approx 0$, $\varphi \approx \pi/2$) имеем $R_{qp} = z + \eta$ (см. § 2.10, п.2), где $\eta = [(x-x')^2 + (y-y')^2]/2z$. При этом из (2.67) получаем, полагая $\dot{E}_y(x, y, l) = \dot{\psi}_{q+1}(x, y, l)$:

$$\dot{\psi}_{q+1}(x, y, l) = g\dot{\psi}_q(x, y, 0) = \frac{i}{l\lambda} e^{-ikl} \int_{S_0} \dot{\psi}(x', y', 0) e^{ik\eta} dS'$$

Обозначив здесь $\dot{\psi}_q(x, y, 0) = \dot{\psi}(x, y)$, $K = i \exp\left\{ \frac{-ikl + ik[(x-x')^2 + (y-y')^2]}{2z} \right\}$,

имеем:

$$\int_{S_0} K \dot{\psi}(x', y') dS' = g\dot{\psi}(x, y) \quad (8.39)$$

однородное интегральное уравнение второго рода для функции $\dot{\psi}(x, y)$. Ядро уравнения K непрерывно и симметрично: $K(x, y, x', y') = K(x', y', x, y)$.

Значения g_v , при которых (8.39) имеет нетривиальные решения $\dot{\psi}_v(x, y)$, называются собственными значениями, а функции $\dot{\psi}_v(x, y)$ — собственными функциями (открытого резонатора). Они описывают распределение поля по поверхности зеркала.

При резонансе поле, распространяющееся от левого торца к правому и обратно, должно на пути $2l$ изменять фазу на целое число 2π так же, как в обычных резонаторах, т.е. $2\Phi_v$ должно быть равно $-2\pi q$, $q=1,2,3,\dots$. Поэтому при резонансе $2\Phi_v = -k_v 2l + 2\Delta_v = -2\pi q$. Отсюда получаем резонансную частоту $\omega_v = v_\phi(\Delta_v + q\pi)/l$. Если торцы (зеркала) являются плоскостями (бесконечными), то $\Delta_v = 0$ и $\omega_v = v_\phi q\pi/l$. В резонаторе с конечными размерами зеркал устанавливаются почти поперечные колебания (квазипоперечные).

ЭМ колебания в открытом резонаторе обозначаются (относительно оси z) как T_{mq} -колебания; относительно оси x поле может быть электрического или магнитного типа. Поля, соответствующие разным типам колебаний, обозначаются через $E_{mq}^{(x)}$ или $H_{mq}^{(x)}$ (относительно оси x). Индекс q равен числу полуволн, укладываемых между зеркалами. Он равен большому числу, значение которого обычно не указывается (а индекс q опускается).

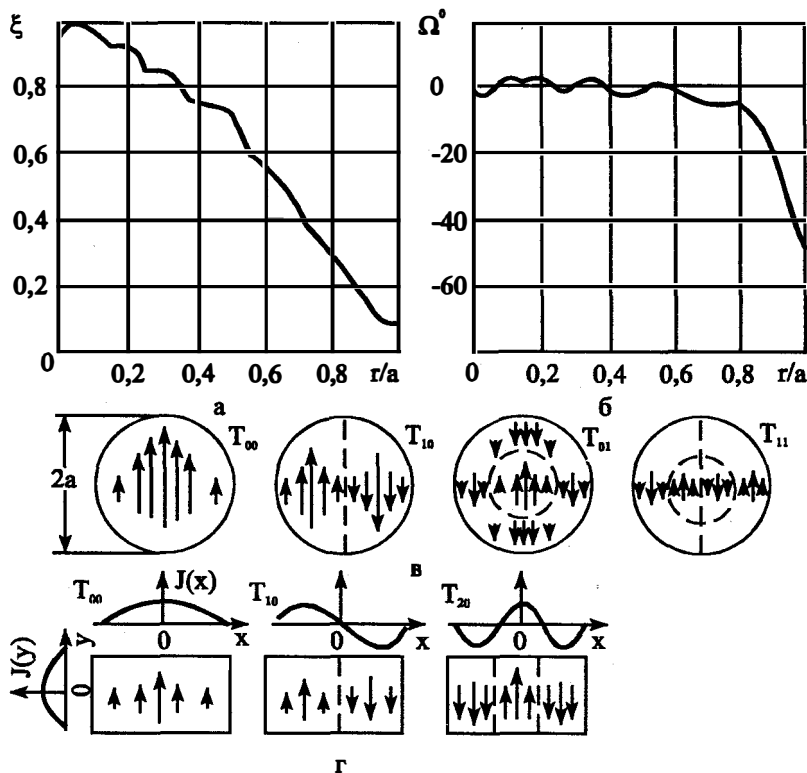


Рис. 8.11. Распределение эквивалентного поверхностного тока по поверхности зеркала

Собственные значения $g_v = g_{mn}$ и собственные функции $\psi_v = \psi_{mn}$ находятся из решения интегрального уравнения для конкретного резонатора. Каждому числу m и n соответствует свое распределение поля по поверхности зеркала (или поверхностного тока $J(x, y)$). Результаты решения интегрального уравнения численным методом при $m = n = 0$ для зеркала плоской формы в виде диска и при параметре $a^2/\lambda l = 10$ приведен на рис. 8.11, а, б, где $\xi = |\psi_{00}(r)|/|\psi_{00\max}|$, $\Omega = \arg \psi_{00}(r)$. Из графика рис. 8.11, а видно, что амплитуда поверхностного тока на зеркале падает к краям, а фазовый сдвиг на краю зеркала резко увеличивается. Значит, фронт поля неплоский. Следовательно, поле не является строго поперечным. При увеличении m и n продольные составляющие векторов поля возрастают.

В отличие от закрытых объемных резонаторов T_{00} -колебания в открытых резонаторах характеризуются неравномерным распределением поля вдоль соответствующих осей. Поэтому числа m и n обозначают большее количество полуволн поля, чем в закрытых резонаторах.

На рис. 8.11, в, г приведены силовые линии поверхностных токов на зеркале для ряда колебаний, длина вектора и густота пропорциональны амплитуде тока.

4. Колебания типа T_{00} называют колебаниями основного типа. Они имеют наименьшие потери. Добротность резонатора зависит от l/λ , коэффициента отражения от зеркала и $|g_{mn}|$. Она может иметь значительную величину. Например, при $\lambda = 10^{-6}$ м, $l = 10^{-1}$ м, коэффициенте отражения от зеркала (по мощности), равном 0,98, получается добротность $Q \approx 3 \cdot 10^7$.

Теория открытых резонаторов подробно изложена в [42, 43].

ЗАДАЧИ

1. Построить силовые линии электрического и магнитного полей H_{011} -колебания в прямоугольном резонаторе.

2. Прямоугольный резонатор имеет размеры $a = 23$ мм, $b = 10$ мм, $l = 23$ мм и заполнен воздухом. Рассчитать и сравнить собственные частоты H_{101} -колебания и H_{011} -колебания. Вычислить собственную добротность медного резонатора для колебания основного типа.

3. Найти составляющие векторов напряженностей поля H_{012} -колебания в цилиндрическом резонаторе, заполненном воздухом. Построить силовые линии электрического и магнитного полей. Вычислить собственную частоту и добротность, если радиус равен 20 мм, длина равна 40 мм.

4. Вычислить собственную частоту и добротность коаксиального резонатора для основного типа колебаний. Резонатор заполнен фторопластом-4 и изготовлен из меди. Размеры резонатора: радиус внешнего проводника $a = 20$ мм, радиус внутреннего проводника $b = 0,1a$, длина $l = 4a$.

5. Вычислить параметры контура, эквивалентного медному прямоугольному резонатору, работающему на частоте, равной 3 ГГц, при колебании основного типа.

6. Определить параметры контура, эквивалентного коаксиальному резонатору, работающему на Т-колебании.

7. Рассчитать длину коаксиального резонатора, заполненного воздухом и имеющего зазор между центральным проводником и торцом, равный 2 мм, если $a = 2b = 20$ мм, $f = 1,5$ ГГц.

8. Рассчитать собственную длину волны магнетронного резонатора, заполненного воздухом, если $a = 4,5$ мм, $h = 5$ мм, $d = 2$ мм.

9. Рассчитать радиус цилиндрической полости ячейки магнетронного резонатора, если ширина и длина паза ячейки равны 1,5 мм и 4 мм, а собственная частота должна быть равной $f_0 = 10$ ГГц.

9. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

9.1. Характеристика задач дифракции

Рассмотрим внешние граничные задачи электродинамики. Считаем, что в области V_n заданы сторонние токи и заряды (рис. 9.1). Имеется объект V , ограниченный поверхностью S . ЭМ поле на S удовлетворяет заданным граничным условиям. Среда, заполняющая объем V_0 , в котором расположена точка наблюдения p , является линейной однородной и изотропной, ее параметры $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$. Область V_n в общем случае может быть расположена на любом расстоянии от объекта V . Случай, когда область V_n расположена в непосредственной близости от поверхности S или на самой поверхности, характерен для антенной техники. Практический интерес при этом представляет знание полного поля, являющегося наложением первичного (падающего) поля и вторичного (отраженного, или рассеянного объектом V) поля. Полное поле порождает вся система, состоящая из стороннего источника и объекта. Целью решения граничной задачи в этом случае может быть, например, вычисление амплитудной и фазовой диаграммы направленности излучающей системы при заданных форме поверхности S объекта, граничном условии на S и положении стороннего источника.

Область V_n может быть расположена на большом расстоянии от объекта V . Этот случай характерен для радиолокации. Линейные размеры объекта V при этом намного меньше расстояния между антенной и объектом; можно считать, что это расстояние стремится к бесконечности. При этом на объект падает локально плоское поле. Целью решения граничной задачи в этом случае может быть, например, вычисление амплитуды поля, рассеянного объектом, в той точке наблюдения, где расположена приемная антенна (зонд), вычисление зависимости

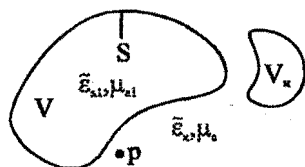


Рис. 9.1. К характеристике задач дифракции

рассеянного поля от азимутального и угломестного углов (характеристики рассеяния - амплитудной и фазовой) при заданных форме объекта, положении стороннего источника (передающей антенны), граничных условиях. Вектор Пойнтинга рассеянного поля в дальней зоне определяет эффективную площадь рассеяния объекта,

которая входит в основное уравнение радиолокации.

Считаем, что векторы напряженностей первичного (или падающего) поля \dot{E}^n, \dot{H}^n , возбуждаемого сторонним источником в неограниченном пространстве в отсутствие объекта V , и соответствующие векторные потенциалы \dot{A}^n, \dot{A}^{mn} известны. Векторы напряженностей вторичного поля и его векторные потенциалы обозначим через \dot{E}^B, \dot{H}^B и \dot{A}^B, \dot{A}^{mB} . Полное поле определяется векторными суммами:

$$\dot{E} = \dot{E}^n + \dot{E}^B, \quad \dot{H} = \dot{H}^n + \dot{H}^B; \quad \dot{A} = \dot{A}^n + \dot{A}^B, \quad \dot{A}^m = \dot{A}^{mn} + \dot{A}^{mB}. \quad (9.1)$$

Для обозначения объекта V употребляются следующие термины: препятствие, переизлучатель, отражатель, рассеиватель, экран, пассивная антенна, поглотитель, радиолокационная цель.

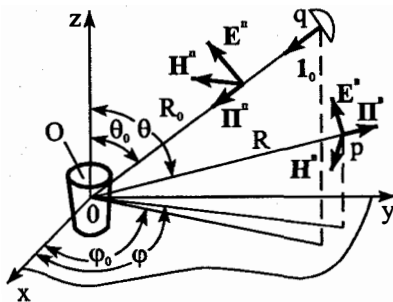
Возбуждаемое сторонним источником ЭМ поле, распространяясь в пространстве, как бы «огibt» встречающееся на пути препятствие. Это явление на раннем этапе развития волновой теории получило название дифракции. В настоящее время под явлением дифракции в широком смысле понимается поведение волн в некоторой области, имеющей границу раздела сред с теми или иными свойствами. Поле дифракции (дифракционным полем) ниже считаем полное поле \dot{E}, \dot{H} . К дифракционным задачам относятся задачи о распространении волн в неоднородных направляющих системах, проникновение волн через отверстие в экранах, «огибание» волнами различного рода препятствий, проникновение волн через различного рода решетки, явления отражения и поглощения волн препятствиями, возбуждение поверхностных волн, распространение волн в неоднородной атмосфере земли и другие задачи.

Первичное поле известно. Поэтому при изучении дифракции определяют амплитуды, фазы и поляризации векторов рассеянного или полного поля как функции формы и параметров $\tilde{\epsilon}_{a1}, \mu_{a1}$ препятствия. Формы и параметры $\tilde{\epsilon}_{a1}, \mu_{a1}$ интересных для практики препятствий могут быть разнообразными, накопление знаний об их рассеивающих свойствах возможно следующими путями: а) получение строгих решений в замкнутой форме или численных решений для математических моделей, достаточно строго соответствующих оригиналам, б) получение аналитических или численных решений для математических моделей, приближенно учитывающих свойства оригинала, в) экспериментальными исследованиями. Результаты решений должны сопоставляться с результатами измерений. Строгие решения в замкнутой форме могут играть роль эталонных решений, с их помощью можно проверять точность приближенных решений.

9.2. Эффективная площадь рассеяния объекта

1. При расчете радиолиний применяют понятие эффективной площади рассеяния (ЭПР) объекта [47]. Пусть имеем излучатель, расположенный в точке q неограниченного пространства (рис. 9.2). Он возбуждает первичное ЭМ поле, вектор Пойнтинга которого $\dot{\Pi}^n$ направлен, в частности, на объект O , расположенный в начале ССК (R, θ, φ) . Мощность излучения обозначим через P_Σ . Если расстояние R_0 между излучателем и объектом так велико, что объект находится в дальней зоне излучателя, то на объект падает Т-волна, у которой $\dot{\Pi}^n = \mathbf{1}_0 \Pi^n$, где $\Pi^n = |\dot{E}^n|^2 / 2W$, \dot{E}^n — вектор линейно поляризованного падающего поля. Если предположить, что излучатель возбуждает одинаковое по всем направлениям (изотропное) поле, то $\Pi^n = P_\Sigma / 4\pi R_0^2$, где $4\pi R_0^2$ — площадь сферы. Но излучатель обладает направленными свойствами. За счет этого он имеет коэффициент усиления ϵ_Σ . Поэтому Π^n у объекта увеличивается в ϵ_Σ раз: $\Pi^n = \epsilon_\Sigma P_\Sigma / 4\pi R_0^2$.

Под воздействием первичного поля на объекте возникают вторичные токи, возбуждающие вторичное поле, вектор Пойнтинга которого направлен, в частности, на точку p , в которой находится приемная антенна. Обозначим через σ_n — эффективную площадь объекта. Она определяет перехватываемую отражателем мощность $P_0 = \sigma_n \Pi^n$. Объект часть P^B перехватываемой мощности излучает, а другую часть P_a поглощает или преобразует в другие виды энергии. За счет мощности



P^B на расстоянии R от объекта возбуждается вторичное поле. В дальней зоне ($R \rightarrow \infty$) вторичное поле в точке p является поперечным: $\Pi^B = |\dot{E}^B|^2 / 2W$, \dot{E}^B — вектор линейно поляризованного вторичного поля. Кроме того, $\Pi^B = P^B / 4\pi R^2$.

Рис. 9.2. К определению ЭПР объекта

Эффективной площадью рассеяния объекта σ_3 называют площадь поперечного сечения такого воображаемого объекта, который излучает вторичное поле равномерно по всем направлениям и при этом создает в точке p такое же поле, как и сам объект. Переизлучаемая мощность $P^B = \sigma_3 \Pi^n$. Поэтому при $R \rightarrow \infty$

$$\sigma_3 = \lim P^B / \Pi^n = \lim 4\pi R^2 \Pi^B / \Pi^n = \lim 4\pi R^2 \left| \dot{E}^B \right|^2 / \left| \dot{E}^n \right|^2. \quad (9.2)$$

Так как \dot{E}^B пропорционально \dot{E}^n и R^{-1} , то σ_3 не зависит от \dot{E}^n и R . Естественно, что \dot{E}^B зависит от направления прихода падающей волны (направления на источник), определяемого углами θ_0, φ_0 , и зависит от углов θ, φ , определяющих направление на точку p (на приемную антенну). Поэтому $\sigma_3 = \sigma_3(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$. Если в частном случае точки p и q в пространстве совмещены (используется одна приемно-передающая антенна — однопозиционная система), то $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ и значение $\sigma_3(\theta_0, \varphi_0)$ определяет эффективную площадь обратного рассеяния. В общем случае $\theta \neq \theta_0$, $\varphi \neq \varphi_0$ и σ_3 определяет двухпозиционную ЭПР объекта.

Объект и среда, в которой распространяется поле, могут выполнять преобразование поляризации на частоте падающего поля. Пусть $\dot{E}_\theta^n, \dot{E}_\varphi^n$ и $\dot{E}_\theta^B, \dot{E}_\varphi^B$ — ортогональные составляющие векторов \dot{E}^n и \dot{E}^B . При этом $\Pi_{R\theta}^{n(s)} = \left| \dot{E}_\theta^{n(s)} \right|^2 / 2W$,

$\Pi_{R\varphi}^{n(s)} = \left| \dot{E}_\varphi^{n(s)} \right|^2 / 2W$. Тогда для ЭПР получаем матрицу

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\varphi} \\ \sigma_{\varphi\theta} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{vmatrix}, \quad (9.3)$$

где элементы $\sigma_{mn} = \lim 4\pi R^2 \Pi_{Rn}^B / \Pi_{Rm}^n, R \rightarrow \infty, m = \theta$ или $\varphi, n = \theta$ или φ .

ЭПР объекта рассчитывается теоретически, а при сложных геометрической форме и граничных условиях измеряется в условиях полигона. Часто предъявляются требования к объекту, связанные с резким уменьшением его ЭПР. Это достигается за счет увеличения части мощности P_a , поглощаемой объектом или преобразуемой в другие виды энергии, или перераспределением излучаемой мощности P^B так, чтобы вторичное поле в направлении приемной антенны не излучалось.

Наоборот, если требуется увеличить ЭПР объекта, то на нем располагаются отражатели, имеющие большое значение σ_3 .

2. Рассмотрим мощность, поступающую на вход приемной антенны. Обозначим через $S_{пр}$ площадь поверхности приемной антенны. Последняя «перехватывает» из рас-

пространяющегося вторичного поля мощность $P_{\text{пр}} = S_{\text{пр}} \Pi^{\text{в}}$. Так как $\Pi^{\text{в}} = P^{\text{в}} / 4\pi R^2 = \sigma_3 \Pi^{\text{п}} / 4\pi R^2$, то, заменяя $\Pi^{\text{п}}$ его значением $\epsilon_{\Sigma} P_{\Sigma} / 4\pi R_0^2$, находим

$$P_{\text{пр}} = P_{\Sigma} \epsilon_{\Sigma} \sigma_3 S_{\text{пр}} (1/4\pi R_0 R)^2. \quad (9.4)$$

Таким образом, мощность на выходе радиоприемной антенны пропорциональна ЭПР объекта. Отметим, что в случае однопозиционной системы ($R = R_0$) $P_{\text{пр}}$ обратно пропорциональна четвертой степени расстояния между объектом и излучателем.

9.3. Рассеяние электромагнитного поля цилиндром

1. Сначала рассмотрим постановку граничной задачи в общем виде. Имеется бесконечный круговой цилиндр радиуса a (рис. 9.3). Параллельно оси цилиндра на расстоянии $r_0 \geq a$ расположена нить стороннего синфазного тока. На поверхности цилиндра удовлетворяются импедансные граничные условия (4.29), поверхностное сопротивление однородно, среда вне цилиндра линейна, однородна и изотропна, ее параметры $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$. Нить тока возбуждает ЭМ поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла, граничным условиям на поверхности цилиндра и условиям излучения.

Необходимо найти векторы напряженностей рассеянного $\mathbf{E}^{\text{в}}$, $\mathbf{H}^{\text{в}}$ и полного полей.

Введем ЦСК (r, φ, z) , ось z направим вдоль оси цилиндра.

Если нить тока расположена на большом расстоянии от цилиндра ($r_0 \gg a$, $|k|r_0 \gg 1$), то на цилиндр падает локально плоская волна. Но при высотах нити над цилиндром $h = r_0 - a$, не превышающих нескольких длин волн, система нить тока–цилиндр составляет единый излучатель (антенну), характеристика направленности которого опреде-

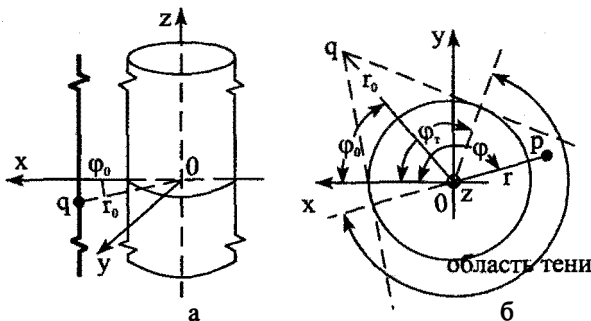


Рис. 9.3. Нить тока над цилиндром

ляется значениями ka , kh и поверхностного сопротивления.

2. Конкретизируем постановку задачи, когда по нити протекает синфазный электрический ток $\dot{\mathbf{j}}^c = 1_z \dot{I}_0 \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) / r$. Векторный потенциал первичного поля $\dot{\mathbf{A}}^n$ определен по (2.53). Из (1.124) получаем $\dot{E}_r^n = \dot{E}_\varphi^n = 0$, $\dot{E}_z^n = -i\omega\mu_a \dot{A}_z^n$. Из второго уравнения Максвелла $\dot{H}_r^n = iW^{-1} \partial \dot{E}_z^n / \partial(kr \partial\varphi)$, $\dot{H}_\varphi^n = -iW^{-1} \partial \dot{E}_z^n / \partial(kr)$, $\dot{H}_z^n = 0$. Значит, $\dot{\mathbf{E}}^B = 1_z \dot{E}_z^B$, $\dot{\mathbf{H}}^B = 1_r \dot{H}_r^B + 1_\varphi \dot{H}_\varphi^B$, \dot{E}_z^B удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (1.129)

$$\Delta \dot{E}_z^B + k^2 \dot{E}_z^B = 0. \quad (9.5)$$

В соответствии с (9.1) $\dot{\mathbf{E}} = 1_z \dot{E}_z$, $\dot{\mathbf{H}} = 1_r \dot{H}_r + 1_\varphi \dot{H}_\varphi$, где $\dot{E}_z = \dot{E}_z^n + \dot{E}_z^B$, $\dot{H}_r = \dot{H}_r^n + \dot{H}_r^B$, $\dot{H}_\varphi = \dot{H}_\varphi^n + \dot{H}_\varphi^B$. С учетом последнего из (4.29), имея в виду, что $\dot{\mathbf{n}} = -1_r$, получаем граничное условие $\dot{E}_z = Z_3 \dot{H}_\varphi$, $r = a$. Для рассеянного поля имеем отсюда

$$\dot{E}_z^B - Z_3 \dot{H}_\varphi^B = -(\dot{E}_z^n - Z_3 \dot{H}_\varphi^n) \text{ при } r = a.$$

Так как из второго уравнения Максвелла $\dot{H}_\varphi^{n(B)} = -iW^{-1} \partial \dot{E}_z^{n(B)} / \partial(kr)$, то получаем граничное условие для \dot{E}_z^B :

$$\dot{E}_z^B + iZ_0 \frac{\partial \dot{E}_z^B}{\partial(kr)} = - \left(\dot{E}_z^n + iZ_0 \frac{\partial \dot{E}_z^n}{\partial(kr)} \right) \text{ при } r = a, \quad (9.6)$$

где $Z_0 = Z_3 / W$ — нормированное поверхностное сопротивление цилиндра.

Таким образом, необходимо найти решение краевой задачи, включающей уравнение (9.5), граничное условие (9.6) и условия излучения. В граничное условие входят сама искомая функция \dot{E}_z^B и ее нормальная производная. Эта краевая задача со смешанными граничными условиями (задача третьего рода). Дифференциальное уравнение однородно, но граничное условие неоднородно — его правая часть задана, так как \dot{E}_z^n — известная функция. Значит, с математической точки зрения источником вторичного поля является первичное поле.

3. Рассмотрим решение граничной задачи (9.5), (9.6). Используя (2.53), имеем при $r \leq r_0$

$$\dot{E}_z^n = -i\omega\mu_a \dot{A}_z^n = -\frac{kWI_0}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi_0)} J_n(kr) H_n^{(2)}(kr_0). \quad (9.7)$$

Вторичное поле определяется в области $r \geq 0$. Точка $r = 0$ исключается из рассмотрения, \dot{E}_z^B должно удовлетворять условию излучения. Поэтому решение (9.5) должно быть подобно верхней строке (2.53):

$$\dot{E}_z^B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in(\varphi - \varphi_0)} \cdot H_n^{(2)}(kr), \quad r \geq a. \quad (9.8)$$

Искомая функция \dot{E}_z^B здесь представлена в виде наложения бесконечного количества парциальных цилиндрических волн (азимутальных гармоник). Амплитуду каждой волны определяем из (9.6). Подставляя в (9.6) выражения (9.7), (9.8), умножая равенство на $\exp(in'\varphi)$ и интегрируя результат по φ от 0 до 2π , находим

$$a_n = \frac{kW\dot{I}_0}{4} H_n^{(2)}(kr_0) c_n; \quad c_n = \frac{J_n(ka) + iZ_0 J_n'(ka)}{H_n^{(2)}(ka) + iZ_0 H_n^{(2)'}(ka)}. \quad (9.9)$$

Выражения для \dot{H}_r^B и \dot{H}_φ^B получаются из второго уравнения Максвелла.

При $|k|r_0 \rightarrow \infty$, используя асимптотику (ПЗ.4), получаем $a_n = i^n \dot{E}_0$, где $\dot{E}_0 = 0,25kW\dot{I}_0(2/\pi kr_0)^{1/2} \exp(-ikr_0 + i\pi/4)$.

С помощью (9.8), (9.9), полагая $|k|r \rightarrow \infty$, можно рассчитать ЭПР σ_3 (погонную) импедансного цилиндра при разных Z_0 и a/λ , распределение вторичных поверхностных токов $\dot{\mathbf{J}} = [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}] = \mathbf{1}_z \dot{j}_z$, $\dot{j}_z = \dot{H}_\varphi$, $\dot{j}^M = [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}] = \mathbf{1}_\varphi \dot{j}_\varphi^M$, $\dot{j}_\varphi^M = \dot{E}_z$ при $r = a$. Поверхностные токи на цилиндре связаны граничным условием (4.29), поэтому $\dot{j}_\varphi^M = Z_0 \dot{j}_z$.

Вычисляя \dot{H}_z^B из второго уравнения Максвелла с помощью (9.8), (9.9), затем суммируя \dot{H}_z^B и \dot{H}_z^A , полагая $r = a$, и используя выражение вронскиана цилиндрических функций [20], получим

$$\dot{j}_z = -\frac{2\dot{E}_0}{W\pi ka} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i^n \exp[-in(\varphi - \varphi_0)]}{H_n^{(2)}(ka) + iZ_0 H_n^{(2)'}(ka)}. \quad (9.10)$$

Пусть среда не имеет джоулевых потерь ($k = \beta$). Поверхностный ток на цилиндре зависит тогда от значения электрического радиуса ka , поверхностного сопротивления цилиндра и направления φ_0 падения волны. При расчетах ряд в (9.10) можно преобразовать и выполнять суммирование по n только от 0 до ∞ .

На рис. 9.4,а изображены графики нормированных значений модулей тока $|j_{z0}(\varphi)| = |j_z(\varphi)| \cdot |j_z(0)|^{-1}$ на металлическом цилиндре ($Z_s = 0$) для разных значений ka при $\varphi_0 = 0$, графики симметричны относительно угла $\varphi = \varphi_0 = 0$. При обсуждении результатов применяют термины из оптики. *Освещенной областью* называют часть поверхности цилиндра, расположенную при углах φ от $2\varphi_0 - \varphi_T$ до φ_T , *теневого области* — часть поверхности, расположенную при углах от φ_T до $2(\pi + \varphi_0) - \varphi_T$ (рис. 9.3,б). Область, примыкающую к углам φ_T и $2(\pi + \varphi_0) - \varphi_T$, называют *областью полутени*. Если сторонний источник расположен на бесконечности, $r_0 \rightarrow \infty$, то $\varphi_T = 90^\circ + \varphi_0$ и область тени находится при углах от $90^\circ + \varphi_0$ до $270^\circ + \varphi_0$. Точка p на рис. 9.3,б находится в области тени.

Из графиков, изображенных на рис. 9.4,а, видно, что распределение модуля поверхностного тока по азимутальному углу зависит от a/λ ; с увеличением ka увеличивается неравномерность тока: при больших значениях ka в области тени ток мал по модулю, при $a < 0,5\lambda$ ток, затекающий в область тени, сравним по амплитуде с током на освещенной части цилиндра. В области полутени значение тока определяется значением a/λ .

Таким образом, если металлический цилиндрический провод находится в ЭМ поле и ориентирован так, что ось провода параллельна \vec{E}^n , то на проводе наводится продольный поверхностный ток. На тонком проводе ($ka \ll 1$) этот ток почти азимутально однороден.

Прорезав азимутальную щель в цилиндре, найдем, что между кромками щели возникает э.д.с. (так же, как в случае щели в стенке вол-

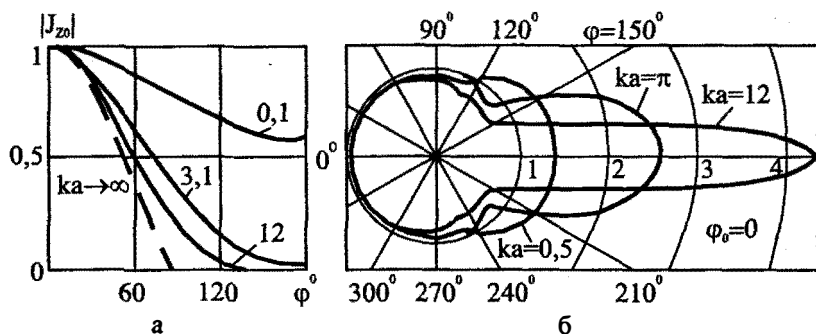


Рис. 9.4. Графики распределения тока и диаграммы рассеяния

новода). Величина э.д.с. должна зависеть от значения ka , от величины $\dot{E}_z^{\text{ст}}$; последняя, в свою очередь, зависит от угла между осью провода и вектором $\dot{E}^{\text{п}}$. Если с помощью э.д.с. извлекается информация о падающем ЭМ поле, то провод можно считать простейшей приемной антенной.

4. В радиолокации информация о свойствах и положении объекта в пространстве извлекается из рассеянного поля в основном, когда объект расположен на больших расстояниях от излучателя. При $r \gg a$ (строго при $|k|r \rightarrow \infty$) из (9.8) получаем, используя асимптотику (ПЗ.4):

$$\dot{E}_z^{\text{в}} \approx \dot{E}_0 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-ikr + i\pi/4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n c_n e^{-in(\varphi - \varphi_0)}. \quad (9.11)$$

Из второго уравнения Максвелла находим $\dot{H}_\varphi^{\text{в}} \approx -W^{-1} \dot{E}_z^{\text{в}}$, $\dot{H}_r^{\text{в}} = \dot{H}_\varphi^{\text{в}} = 0$. Поле рассеяния на больших расстояниях вырождается в цилиндрическую Т-волну.

При вычислениях ряд в выражении (9.11) можно преобразовать, учитывая (ПЗ.6). Выполняя преобразования, находим

$$\dot{E}_z^{\text{в}} \approx \dot{E}_0 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-ikr + i\pi/4} \cdot F_{\text{в}}(\varphi),$$

где функция

$$F_{\text{в}}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n c_n \cos n(\varphi - \varphi_0) \quad (9.12)$$

характеризует зависимость в дальней зоне рассеянного поля от азимутального угла. Ее называют *характеристикой рассеяния*.

Графики нормированных функций $|F_{0\text{в}}| = |F_{\text{в}}(\varphi)| \cdot |F_{0\text{в}}(0)|^{-1}$, т.е. диаграммы рассеяния, для металлического цилиндра при разных значениях ka в полярной системе координат изображены на рис. 9.4,б. Сторонний источник расположен при $\varphi_0 = 0$, $kr_0 \rightarrow \infty$. Из графиков следует, что с увеличением a/λ растет поле в направлении $\varphi = 180^\circ$. Лепесток диаграммы рассеяния, максимум которого ориентирован в направлении $\varphi = 180^\circ$, с ростом ka становится все уже. Если считать, что при $ka \rightarrow \infty$ $\dot{E}_z = \dot{E}_z^{\text{п}} + \dot{E}_z^{\text{в}}$ при $\varphi = 180^\circ$ должно быть равно нулю, так как цилиндр в этом случае затеняет ЭМ поле, то $\dot{E}_z^{\text{в}} \rightarrow -\dot{E}_z^{\text{п}}$ при $\varphi = 180^\circ$.

5. Замена нити электрического тока нитью магнитного тока в условиях задачи приводит к тому, что искомой функцией является

$\dot{H}_z^B(r, \varphi)$. Решение граничной задачи со смешанными граничными условиями для \dot{H}_z^B не отличается от выполненного выше.

9.4. Дифракция электромагнитного поля на цилиндре и шаре

1. Если высота h нити тока над цилиндром не превышает нескольких длин волн и не выполняется условие $r_0 \gg a$, то систему цилиндр–нить тока, как уже отмечалось, считают единым излучателем (антенной). Характеристика направленности определяется по полю дифракции (полному). При этом $r > r_0$.

Рассмотрим нить электрического тока над цилиндром (рис. 9.3). При вычислении \dot{E}_z^n в (2.53) необходимо использовать строку, соответствующую области $r \geq r_0$. Тогда вместо (9.7) получаем

$$\dot{E}_z^n = -\frac{kW\dot{I}_0}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi_0)} J_n(kr_0) H_n^{(2)}(kr). \quad (9.13)$$

Суммируя (9.13) и (9.8), имеем

$$\dot{E}_z = \dot{E}_z^n + \dot{E}_z^B = \frac{kW\dot{I}_0}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in(\varphi-\varphi_0)} H_n^{(2)}(kr), \quad (9.14)$$

где $f_n = c_n H_n^{(2)}(kr_0) - J_n(kr_0)$.

Определим поле в дальней зоне. Считаем, что $r \gg a$, $|k|r \gg 1$. Используя асимптотику (ПЗ.4), получаем

$$\dot{E}_z \approx \frac{kW\dot{I}_0}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-ikr+i\pi/4} \cdot F(\varphi), \quad (9.15)$$

где

$$F(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n f_n e^{-in(\varphi-\varphi_0)} \quad (9.16)$$

— характеристика направленности.

Из второго уравнения Максвелла имеем $\dot{H}_\varphi \approx -W^{-1}\dot{E}_z$, $\dot{H}_r \approx 0$, $\dot{H}_z = 0$.

Таким образом, дифракционное поле имеет характер цилиндрической Т-волны. Характеристика направленности определяется коэффициентами f_n , зависящими от значений a/λ , h/λ . Диаграммы направленности, рассчитанные по (9.16) и нормированные по максимальному значению, для металлического цилиндра при $h = \lambda/4$, $\varphi_0 = 0$

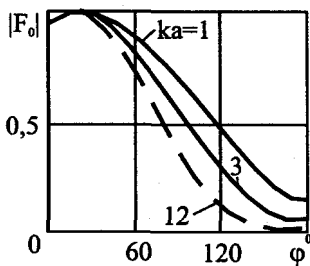


Рис. 9.5. Диаграммы направленности

приведены на рис. 9.5. Они не имеют резких осцилляций. Так как продольные токи слабо затекают в тень, то значение $|\dot{E}_z|$ в области тени быстро уменьшается с ростом φ .

2. Задача определения ЭМ поля нити магнитного тока решается аналогичным образом.

3. Граничная задача дифракции ЭМ волн на шаре формулируется так же, как и в случае цилиндра. Решение задачи можно получить методом, аналогичным

примененному выше. Отличие состоит в том, что необходимо использовать не ЦСК, а ССК и, значит, решения задачи представляются в виде разложений не по цилиндрическим, а по сферическим функциям. Сечение шара по большому кругу и поперечное сечение цилиндра имеют одинаковую геометрию, поэтому естественно ожидать, что распределения поверхностных токов по большому кругу шара и по окружности на цилиндре должны мало отличаться при соответствующих поляризациях падающего поля как в освещенной области, так и в области полутени. Сопоставление количественных результатов подтверждает этот вывод.

Если на конечном расстоянии от шара находится сторонний источник, то излучателем является система, состоящая из шара и стороннего источника. Поскольку сторонний источник конечных размеров возбуждает в однородном неограниченном пространстве сферическую волну, то на большом расстоянии от излучателя и шара полное ЭМ поле имеет характер сферической волны. Характеристика направленности зависит не только от азимутального угла φ , но и от угла θ . Естественно, что характеристика направленности зависит от электрического радиуса шара, положения источника относительно шара, электрической высоты источника над шаром и поверхностного сопротивления шара.

9.5. Дифракция электромагнитного поля на клине и полуплоскости

1. При расчете ЭМ поля в природных условиях Земли часто необходимо учитывать влияние на поле препятствий в виде холмов, гор, различного рода сооружений. В математических моделях препятствия этого типа обычно заменяют клиновидными препятствиями (рис. 9.6, а, б). Подбором угла раскрытия γ клина можно аппроксимировать многие типы препятствий. Например, при $\gamma = 2\pi$ клин вырождает-

ся в полуплоскость (рис. 9.6,в), с помощью которой можно аппроксимировать стену здания, при $\gamma = \pi/2$ — в уголок, при $\gamma = 3\pi/2$ — в прямоугольный объект и т.д.

В граничных условиях особо выделяются (§ 1.11, п.4) случаи, когда поверхность, ограничивающая объект, имеет ребра, кромки (изломы). Поведение ЭМ поля на этого типа неоднородностях изучается на примере граничной задачи для клина.

2. Рассмотрим математическую модель. Имеем бесконечный идеально проводящий клин с внешним углом раствора γ . Клин возбуждается сторонним синфазным электрическим током, вектор \mathbf{j}^c которого параллелен ребру клина (рис. 9.6,а). Пространство, в котором расположены клин и источник, является однородным и изотропным с параметрами $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$. На поверхности граней клина должны удовлетворяться граничные условия и условия на ребре (§ 1.11). Искомое поле должно удовлетворять уравнениям Максвелла и условиям излучения. Необходимо найти поле дифракции.

Граничные условия на гранях клина наиболее просто записываются в ЦСК, которую расположим так, чтобы ось z была совмещена с ребром клина, а плоскость xz совпала с поверхностью одной из граней. Считаем, что сторонний ток однороден по координате z и $\mathbf{j}^c = \mathbf{1}_z j_z^c$, $\mathbf{j}^{m,c} = 0$. Следовательно, $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_z \dot{A}_z$, $\dot{\mathbf{A}}^m = 0$; функция \dot{A}_z удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца. Поскольку сторонний ток и граничные условия однородны по координате z , то \dot{A}_z и

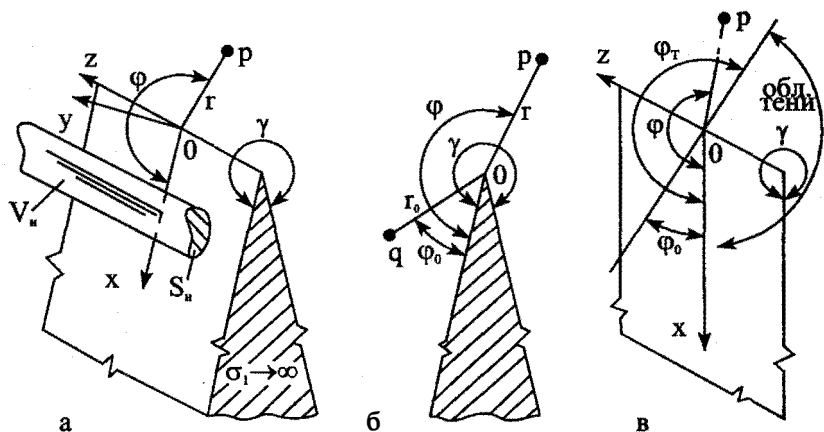


Рис. 9.6. Клин и полуплоскость

векторы напряженностей поля не зависят от z ($\partial \dot{A}_z / \partial z = 0$). Поэтому уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial \varphi^2} + k^2 \dot{A}_z = -j_z^c. \quad (9.17)$$

Из (1.124) получаем $\dot{E}_r = \dot{E}_\varphi = 0$, $\dot{E}_z = -i\omega\mu_a \dot{A}_z$. Граничные условия для \dot{E}_z : $\dot{E}_z = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \gamma$. Поэтому для \dot{A}_z имеем граничные условия:

$$\dot{A}_z = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \varphi = \gamma. \quad (9.18)$$

Уравнение Гельмгольца (9.17), граничные условия (9.18), условия излучения и условия на ребре составляют внешнюю граничную задачу первого рода.

3. Функцию \dot{A}_z необходимо найти в интервале $0 \leq \varphi \leq \gamma$. На концах интервала искомая функция должна быть равна нулю. Аналогичные условия налагаются, например, на функцию \dot{A}_z в интервале $0 \leq x \leq a$ при решении задачи возбуждения прямоугольного волновода. Поэтому, используя результаты § 6.1, разложим \dot{A}_z в ряд Фурье по системе функций $\sin n\tau\varphi$, где $\tau = \pi/\gamma$. Обозначим $v = n\tau$. Получаем

$$\dot{A}_z = \sum_{n=1}^{\infty} c_v(r) \sin v\varphi. \quad (9.19)$$

Это выражение удовлетворяет граничным условиям (9.18).

Коэффициенты c_v найдем, подставив (9.19) в (9.17); умножим результат, на $\sin v'\varphi$, где $v' = n'\tau$, и проинтегрируем его по φ от 0 до γ . Используя свойство ортогональности тригонометрических функций (§ 6.1), получаем, заменив n' на n , а φ — на φ' :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_v}{\partial r} \right) + \left(k^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) c_v = -\frac{2}{\gamma_0} \int_0^\gamma j_z^c(r, \varphi') \sin v\varphi' d\varphi'.$$

Представим $c_v(r)$ в виде интеграла Фурье-Бесселя [18, 20]:

$$c_v(r) = \int_0^\infty a_v(\kappa) J_v(\kappa r) d\kappa$$

и подставим c_v в предыдущее выражение. Учитывая, что в соответствии с уравнением Бесселя (§ 6.6, п.2)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial J_v(\kappa r)}{\partial r} \right) = - \left(\kappa^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) J_v(\kappa r),$$

имеем

$$\int_0^{\infty} a_{\nu}(k^2 - \kappa^2) J_{\nu}(\kappa r) \kappa d\kappa = -\frac{2}{\gamma} \int_0^{\gamma} j_z^c(r, \varphi') \sin \nu \varphi' d\varphi'.$$

Умножим это равенство на $r J_{\nu}(\kappa' r)$ и проинтегрируем по r от 0 до ∞ . Учтем при этом, что

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(\kappa r) J_{\nu}(\kappa' r) r dr = \frac{\delta(\kappa - \kappa')}{\sqrt{\kappa \kappa'}}$$

и применим основное свойство δ -функции. Получаем

$$a_{\nu}(\kappa) = -\frac{2}{\gamma} \int_{S_n} j_z^c(r', \varphi') \frac{J_{\nu}(\kappa r')}{k^2 - \kappa'^2} \sin \nu \varphi' r' d\varphi' dr'.$$

Подставим это выражение в разложение $c_{\nu}(r)$, а затем — в (9.19). Имеем

$$\dot{A}_z = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \nu \varphi \int_{S_n} j_z^c(q) \sin \nu \varphi' dS' \int_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(\kappa r) J_{\nu}(\kappa r')}{\kappa^2 - k^2} \kappa d\kappa,$$

где $dS' = r' d\varphi' dr'$. Интегрируя по переменной κ так же, как в § П4.2, получаем

$$\dot{A}_z = -i\tau \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n} j_z^c(q) \sin \nu \varphi \sin \nu \varphi' dS' \begin{cases} J_{\nu}(kr') H_{\nu}^{(2)}(kr), & r \geq r'; \\ J_{\nu}(kr) H_{\nu}^{(2)}(kr'), & r \leq r'. \end{cases} \quad (9.20)$$

Если сторонний источник представляет собой нить тока (рис. 9.6, б), т.е. $j_z^c = \dot{I}_0 \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) / r$, то

$$\dot{A}_z = -i\tau \dot{I}_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \nu \varphi_0 \sin \nu \varphi \begin{cases} J_{\nu}(kr_0) H_{\nu}^{(2)}(kr), & r \geq r_0; \\ J_{\nu}(kr) H_{\nu}^{(2)}(kr_0), & r \leq r_0. \end{cases} \quad (9.21)$$

Из (1.124), (1.125) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= \dot{E}_{\varphi} = \dot{H}_z = 0; \\ \dot{E}_z &= \frac{k^2}{i\omega \epsilon_a} \dot{A}_z, \quad \dot{H}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial \varphi}, \quad \dot{H}_{\varphi} = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

4. Рассмотрим поведение ЭМ поля вблизи ребра. Пусть сторонние источники находятся на конечном расстоянии от ребра. Тогда \dot{A}_z определяется строкой при $r < r_0$.

Если $|k|r \rightarrow 0$, то по (П3.5) $J_{\nu}(kr) \approx (kr)^{\nu} / (\nu! 2^{\nu})$. Основной вклад в сумму (9.20) вносит первый член ряда (при $n=1$). Пренебрегая вторым и последующими членами ряда, находим $\dot{A}_z \approx A_0 \cdot (kr)^{\tau}$, где A_0 не зависит от r . Из (9.22) получаем при $|k|r \rightarrow 0$

$$\dot{E}_z \approx \frac{k^2}{i\omega \epsilon_a} A_0 (kr)^{\tau}, \quad \dot{H}_r \approx k \frac{\partial A_0}{\partial \varphi} (kr)^{\tau-1}, \quad \dot{H}_{\varphi} \approx -A_0 k \tau (kr)^{\tau-1},$$

откуда видно, что при $\gamma > \pi$, т.е. для острого клина $|\dot{E}_z| \rightarrow 0$, $|\dot{H}_r| \rightarrow \infty$ и $|\dot{H}_\phi| \rightarrow \infty$.

Поскольку $|\dot{H}_r| \rightarrow \infty$, то плотность продольного поверхностного электрического тока $|j_z|$ на гранях стремится к бесконечности на ребре.

Средние значения плотностей энергий электрического и магнитного полей вычисляем по (1.68).

$$w^3 = \frac{1}{4} \epsilon_a \dot{E} \dot{E}^* = \frac{1}{4} \epsilon_a |\dot{E}_z|^2; \quad w^m = \frac{1}{4} \mu_a \dot{H} \dot{H}^* = \frac{1}{4} \mu_a \left[\left| k \frac{\partial A_0}{\partial \phi} \right|^2 + \tau^2 |k A_0|^2 \right] (kr)^{2(\tau-1)}. \quad (9.23)$$

При $|k|r \rightarrow 0$ имеем $w^3 \rightarrow 0$, а $w^m \rightarrow \infty$, если $\gamma > \pi$.

Найдем средние значения энергии электрического поля и энергии магнитного поля в объеме ΔV конечной величины, включающем ребро. Из (1.70) получаем, что W^3 есть конечная величина, так как $w^3 \rightarrow 0$, при $r \rightarrow 0$;

$$\begin{aligned} W^m &= \int_{\Delta V} w^m dV = \frac{1}{4} \mu_a \int_{\Delta S} \left[\left| k \frac{\partial A_0}{\partial \phi} \right|^2 + \tau^2 |k A_0|^2 \right] d\phi dz \int_0^{\Delta r} (kr)^{2(\tau-1)} r dr = \\ &= \frac{\mu_a (k \Delta r)^{2\tau}}{8\tau k} \int_{\Delta S} \left[\left| k \frac{\partial A_0}{\partial \phi} \right|^2 + \tau^2 |k A_0|^2 \right] d\phi dz. \end{aligned}$$

Интеграл в правой части равенства здесь не зависит от r и является конечной величиной. Значит, W^m имеет в объеме ΔV конечное значение. Таким образом, ЭМ энергия, запасенная в объеме ΔV , является конечной. Значит, решение задачи (9.20)–(9.22) удовлетворяет условиям на ребре.

Используя асимптотическое поведение функций Ганкеля при $|k|r \rightarrow \infty$, можно убедиться, что выражения (9.22) удовлетворяют условиям излучения. Таким образом, решение задачи удовлетворяет условиям теоремы единственности.

5. С помощью выражений (9.20)–(9.22) можно исследовать ряд важных для практики случаев. Рассмотрим дифракцию волны на полуплоскости (рис. 9.6,б). Пусть нить электрического тока так удалена от полуплоскости, что можно считать $|k|r_0 \rightarrow \infty$. На полуплоскость под углом ϕ_0 падает Т-волна. Поле дифракции определяется по (9.21), (9.22), при этом надо использовать асимптотическое представление (П3.4) функции Ганкеля при $|k|r_0 \rightarrow \infty$.

Из (9.21), (9.22) находим

$$\dot{E}_z = 2\dot{E}_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^{n/2} \sin \frac{n\phi_0}{2} \sin \frac{n\phi}{2} J_{n/2}(kr), \quad (9.24)$$

где $\dot{E}_0 = -\frac{j_0 k W}{4} \left(\frac{2}{\pi k r_0} \right)^{1/2} \exp(-ikr_0 + i\pi/4)$. Значение \dot{E}_0 определяет на ребре напряженность первичного электрического поля нити тока.

При вычислении \dot{E}_z необходимо в (9.24) суммировать количество членов ряда, большее значения $|k|r$. Поэтому при малых $|k|r$ (9.24) легко использовать для вычисления дифракционного поля. При больших значениях $|k|r$ (и особенно при $|k|r \rightarrow \infty$) поль-

зваться выражением (9.24) из-за медленной сходимости ряда нельзя (так как количество членов ряда, которые надо суммировать, стремится к бесконечности). Поэтому применяются [10] методы асимптотических оценок.

Для асимптотической оценки (9.24) при больших значениях $|k|r$ учтем, что $\sin(n\varphi_0/2) \cdot \sin(n\varphi/2) = 0,5[\cos[n(\varphi - \varphi_0)/2] - \cos[n(\varphi + \varphi_0)/2]]$ и при $n=0$ слагаемое в (9.24) равно нулю. Тогда

$$\dot{E}_z = \dot{E}_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^{n/2} \left[\cos n \frac{\varphi - \varphi_0}{2} - \cos n \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right] J_{n/2}(kr). \quad (9.25)$$

Если $\epsilon_n = 1$ при $n=0$ и $\epsilon_n = 2$ при $n > 0$, то

$$\dot{E}_z = \frac{1}{2} \dot{E}_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^{n/2} \cos n \frac{\varphi - \varphi_0}{2} J_{n/2}(kr) - \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^{n/2} \cos n \frac{\varphi + \varphi_0}{2} J_{n/2}(kr) \right].$$

Используем табличный интеграл [20, с. 987]

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^{n/2} \cos \frac{n\varphi}{2} J_{n/2}(kr) = \sqrt{\frac{i}{\pi}} e^{ikr \cos \Phi} \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr \cos(\Phi/2)}} e^{-t^2} dt = u(\Phi). \quad (9.26)$$

При этом имеем

$$\dot{E}_z = \dot{E}_0 [u(\varphi - \varphi_0) - u(\varphi + \varphi_0)]. \quad (9.27)$$

Рассмотрим *первый случай*, когда $\cos(\Phi/2) > 0$. Обозначим

$\sqrt{2kr \cos(\Phi/2)} = a > 0$ и преобразуем интеграл в (9.26):

$$\int_{-\infty}^a e^{-i\theta^2} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta^2} d\theta - \int_a^{\infty} e^{-i\theta^2} d\theta = (-i\pi)^{1/2} + \int_a^{\infty} e^{-i\theta^2} d\theta, \quad (9.28)$$

так как интеграл от $\exp(-i\theta^2)$ с бесконечными пределами равен $(-i\pi)^{1/2}$ [20].

В последнем интеграле в (9.28) выполним замену переменной по правилу $\theta^2 = \theta_1$, $d\theta = d\theta_1 / (2\sqrt{\theta_1})$, а затем проинтегрируем результат по частям. Получаем

$$\int_a^{\infty} e^{-i\theta^2} d\theta = \frac{1}{2} \int_a^{\infty} e^{-i\theta_1} \frac{d\theta_1}{\sqrt{\theta_1}} = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{a} e^{-ia^2} + \frac{1}{2} \int_a^{\infty} e^{-i\theta_1} \frac{d\theta_1}{\theta_1 \sqrt{\theta_1}} \right] \quad (9.29)$$

Если $|k|r \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow \infty$), то, интегрируя по частям во втором слагаемом справа, убеждаемся, что интегралом справа можно пренебречь. Подставим значения (9.29), (9.28) в (9.26) и учтем, что в экспоненте $\cos^2(\Phi/2) = 0,5(1 + \cos \Phi)$. При этом

$$u(\Phi) \approx e^{ikr \cos \Phi} + \frac{\exp(-ikr + i3\pi/4)}{2\sqrt{2\pi kr \cos(\Phi/2)}}, \quad |k|r \rightarrow \infty, \quad \cos(\Phi/2) > 0. \quad (9.30)$$

Рассмотрим *второй случай*. Пусть $\cos(\Phi/2) < 0$. Обозначим $[-\sqrt{2kr |\cos(\Phi/2)|}] = -b$ и преобразуем интеграл в (9.26), выполнив замену переменной:

$$\int_{-\infty}^{-b} e^{-i\theta^2} d\theta = \int_b^{\infty} e^{-i\theta^2} d\theta = \frac{1}{2} \int_b^{\infty} e^{-i\theta_1} \frac{d\theta_1}{\sqrt{\theta_1}}.$$

Интегрируя здесь по частям при $|k|r \rightarrow \infty$, учитывая, что $\cos(\Phi/2) = -|\cos(\Phi/2)|$ и пренебрегая слагаемыми, пропорциональными $(kr)^{-3/2}$, $(kr)^{-5/2}$, ... получаем

$$\int_{-\infty}^{\sqrt{2kr} \cos(\Phi/2)} e^{-i\theta^2} d\theta = \frac{i \exp(-i2kr \cos^2(\Phi/2))}{2\sqrt{2kr} \cos(\Phi/2)}.$$

Подставляя это выражение в (9.26), находим

$$u(\Phi) \approx \frac{\exp(-ikr + i3\pi/4)}{2\sqrt{2\pi kr} \cos(\Phi/2)}, \quad |k|r \rightarrow \infty, \quad \cos(\Phi/2) < 0.$$

Это выражение и (9.30) можно объединить следующим образом:

$$u(\Phi) \approx e^{ikr \cos \Phi} \eta(\Phi) + \frac{\exp(-ikr + i3\pi/4)}{2\sqrt{2\pi kr} \cos(\Phi/2)},$$

где $\eta(\Phi) = 1$ при $\cos(\Phi/2) > 0$ и $\eta(\Phi) = 0$ при $\cos(\Phi/2) < 0$.

Используя последнее выражение в (9.27), находим асимптотическое значение составляющей \dot{E}_z при $|k|r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \dot{E}_z \approx \dot{E}_0 \left[e^{ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \eta(\varphi - \varphi_0) - e^{ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \eta(\varphi + \varphi_0) + \right. \\ \left. + e^{-ikr + i3\pi/4} \frac{1}{2\sqrt{2\pi kr}} \left(\frac{1}{\cos[(\varphi - \varphi_0)/2]} - \frac{1}{\cos[(\varphi + \varphi_0)/2]} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.31)$$

В этом выражении первое слагаемое, умноженное на \dot{E}_0 , равно $\dot{E}_z^{\text{п}}$, т.е. определяет вектор напряженности электрического поля падающей волны, приходящей с направления, заданного углом φ_0 (угол падения в § 4.1 равен $\pi/2 - \varphi_0$); фронт этой волны является плоскостью, так как сторонний источник находится на бесконечности. Так как $\eta(\varphi + \varphi_0) = 0$ при $[(\varphi + \varphi_0)/2] < 0$, т.е. при $2\pi > \varphi > \varphi_1 = \pi - \varphi_0$, то зеркально отраженное поле (в направлении $\varphi = \varphi_1$) в области углов $2\pi \geq \varphi > \varphi_1$ отсутствует.

Отсутствие падающего поля в области тени и зеркально отраженного поля в области, где $2\pi \geq \varphi > \varphi_1$, соответствует физическим представлениям об отражении поля от поверхности раздела сред, изложенным в § 4.1.

Последнее слагаемое в (9.31) описывает цилиндрическую волну, рассеянную ребром и расходящуюся от ребра; при этом ребро полуплоскости можно считать вторичным источником — нитью вторичного электрического тока. Это слагаемое существенно зависит от угла φ_0 и угла наблюдения φ .

Если $\varphi = \pi + \varphi_0 = \varphi_T$, т.е. точка наблюдения поля находится на границе освещенной и теневой областей, то $\cos[(\varphi - \varphi_0)/2] = 0$ и верхний предел интеграла в (9.26) или в (9.28) равен нулю. То же происходит при $\varphi = \varphi_1$. В этих случаях формула (9.31) несправедлива, так как она получена при условии $\cos(\Phi/2) \neq 0$. Но при условии $\cos(\Phi/2) = 0$ интеграл в (9.26) вычисляется точно.

В области тени $\varphi > \pi + \varphi_0$. Значит, $\varphi > \varphi_T > \varphi_1$. Поэтому $\cos(\Phi/2) < 0$ и, следовательно, $\eta(\Phi) = 0$. При этом из (9.31) получаем в области тени:

$$\dot{E}_z \approx \dot{E}_0 e^{-ikr + i3\pi/4} \frac{1}{2\sqrt{2\pi kr}} \left(\frac{1}{\cos[(\varphi - \varphi_0)/2]} - \frac{1}{\cos[(\varphi + \varphi_0)/2]} \right) \quad (9.32)$$

Нормированные диаграммы рассеяния $|F_T| = \left| \dot{E}_z(\varphi) / \left| \dot{E}_z(\varphi_0 + 10^0) \right| \right|$ в области тени при $\varphi_0 = 30^0$ ($\varphi_T = 210^0$), $\varphi_0 = 60^0$ ($\varphi_T = 240^0$) и $\varphi_0 = 90^0$ ($\varphi_T = 270^0$) изображе-

ны на рис. 9.7,а (сплошные кривые). При $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = 2\pi$ из (9.32) следует, что $\dot{E}_z = 0$ для всех углов φ . В этом случае нить электрического тока расположена на полуплоскости и ее поле компенсируется во всем пространстве полем зеркального источника, амплитуду электрического тока в котором можно считать (при $|k|r_0 \rightarrow \infty$) равной амплитуде тока истинного источника, а фазу — сдвинутой на π .

В области тени с увеличением угла φ , как следует из графиков, $|\dot{E}_z|$ резко уменьшается, при углах φ , близких к φ_T , $|\dot{E}_z|$ имеет значительную величину, при $\varphi = 2\pi$ выполняется граничное условие $|\dot{E}_z| = 0$. При углах φ , близких к 2π , для всех значений $0^0 < \varphi_0 \leq 90^0$ $|\dot{E}_z|$ мало.

6. Рассмотрим ЭМ поле при другой поляризации. Заменим в условиях задачи п.2 вектор стороннего электрического тока вектором стороннего магнитного тока $\dot{j}^{m,c} = 1_z \dot{j}_z^{m,c}$, однородного по координате z . При этом $\dot{j}^c = 0$ и, значит, $\dot{A} = 0$, $\dot{A}^m = 1_z \dot{A}_z^m$. Функция \dot{A}_z^m должна удовлетворять уравнению (9.17). На гранях клина должно выполняться условие $\dot{E}_r = 0$ при $\varphi = 0, \varphi = \gamma$. Поскольку $\dot{E}_r = -\partial \dot{A}_z^m / r \partial \varphi$, то граничными условиями для \dot{A}_z^m являются

$$\partial \dot{A}_z^m / \partial \varphi = 0 \text{ при } \varphi = 0, \varphi = \gamma. \quad (9.33)$$

Искомое поле должно удовлетворять условиям излучения и условиям на ребре

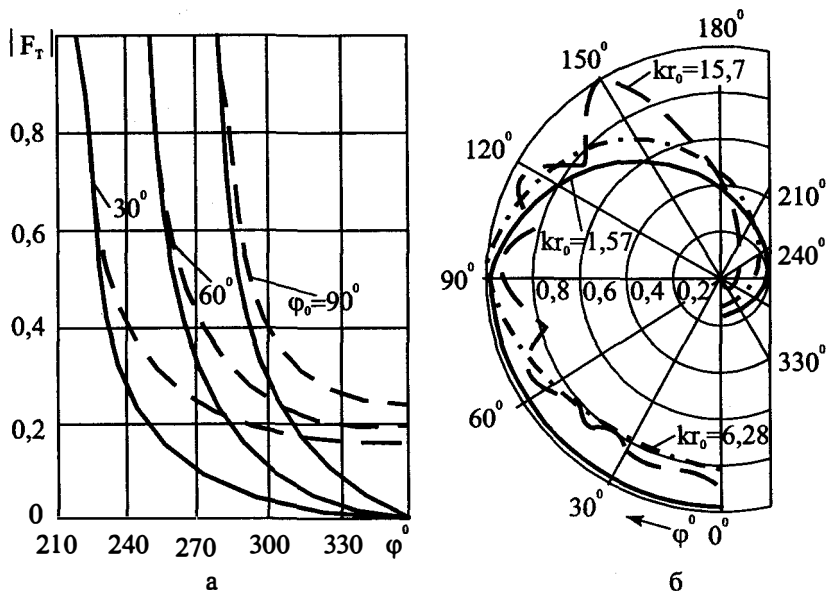


Рис. 9.7. Диаграммы направленности поля дифракции на полуплоскости

клина. Уравнение Гельмгольца для \dot{A}_z^M , граничные условия (9.33), условия излучения и условия на ребре составляют внешнюю граничную задачу второго рода.

7. На интервале $0 \leq \varphi \leq \gamma$ функцию \dot{A}_z^M разлагаем в ряд Фурье по системе функций $\cos v\varphi$, удовлетворяющих граничному условию (9.33):

$$\dot{A}_z^M = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(r) \cos v\varphi.$$

Коэффициенты разложения d_n определяем тем же путем, который использован выше. Подставляя их в последнее выражение и выполняя интегрирование по κ , находим

$$\dot{A}_z^M = \frac{\tau}{i2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \int_{S_n}^{j_z^{m,c}} \cos v\varphi' \cos v\varphi dS' \begin{cases} J_v(kr') H_v^{(2)}(kr), & r \geq r'; \\ J_v(kr) H_v^{(2)}(kr'), & r \leq r'. \end{cases} \quad (9.34)$$

В случае нити синфазного магнитного тока ($j_z^{m,c} = j_0^m \delta(r-r_0) \delta(\varphi-\varphi_0) / r$) получаем

$$\dot{A}_z^M = \frac{\tau j_0^m}{i2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos v\varphi_0 \cos v\varphi \begin{cases} J_v(kr_0) H_v^{(2)}(kr), & r \geq r_0; \\ J_v(kr) H_v^{(2)}(kr_0), & r \leq r_0. \end{cases} \quad (9.35)$$

Составляющие векторов \dot{E} и \dot{H} определяем по (1.124), (1.125):

$$\dot{E}_z = \dot{H}_r = \dot{H}_\varphi = 0, \quad \dot{E}_r = -\partial \dot{A}_z^M / r \partial \varphi, \quad \dot{E}_\varphi = \partial \dot{A}_z^M / \partial r, \quad \dot{H}_z = -i\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{A}_z^M. \quad (9.36)$$

С помощью асимптотики функции $J_v(kr)$ устанавливаем, что при $|k|r \rightarrow 0$ особенности в выражениях (9.36) могут появиться из-за члена ряда, соответствующего $n=1$. При этом $\dot{A}_z^M \approx A_0^M \cdot (kr)^\tau$, где A_0^M не зависит от r ,

$$\dot{E}_r = -k(\partial A_0^M / \partial \varphi) \cdot (kr)^{\tau-1}, \quad \dot{E}_\varphi \approx k A_0^M (kr)^{\tau-1}, \quad \dot{H}_z = -i\omega \tilde{\varepsilon}_a A_0^M (kr)^\tau.$$

Значит, $|\dot{E}_r|$ и $|\dot{E}_\varphi| \rightarrow \infty$, $|\dot{H}_z| \rightarrow 0$ при $|k|r \rightarrow 0$, $\gamma > \pi$. Поэтому $|\dot{J}_r| \rightarrow 0$, $w^3 \rightarrow \infty$, $w^M \rightarrow 0$ при $|k|r \rightarrow 0$. Однако, энергия ЭМ поля, запасенная в объеме ΔV конечной величины, включающем ребро, конечна.

Таким образом, решение задачи удовлетворяет всем условиям теоремы единственности.

8. Пусть нить магнитного тока удалена на такое большое расстояние от плоскости (рис. 9.6,е), что можно считать $|k|r_0 \rightarrow \infty$. При этом из (9.35), (9.36) получаем

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^{n/2} \varepsilon_n \cos \frac{n\varphi_0}{2} \cos \frac{n\varphi}{2} J_{n/2}(kr), \quad (9.37)$$

где $\dot{H}_0 \approx -j_0^m k(2/\pi k r_0)^{1/2} (4W)^{-1} \exp(-ikr_0 + i\pi/4)$ — значение составляющей вектора напряженности магнитного поля, возбуждаемого в начале координат нитью синфазного магнитного тока.

Асимптотическая оценка суммы в (9.37) при больших значениях $|k|r$ выполняется так же, как в п.5. В результате имеем

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 [u(\varphi - \varphi_0) + u(\varphi + \varphi_0)].$$

При $|k|r \rightarrow \infty$ получаем

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 \left[e^{ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \eta(\varphi - \varphi_0) + e^{ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \eta(\varphi + \varphi_0) + \frac{\exp(-ikr + i3\pi/4)}{2\sqrt{2\pi kr}} \left(\frac{1}{\cos[(\varphi - \varphi_0)/2]} + \frac{1}{\cos[(\varphi + \varphi_0)/2]} \right) \right] \quad (9.38)$$

Таким образом, поле дифракции представляет собой сумму поля падающей под углом φ_0 плоской волны, приходящей от излучателя, поля зеркально отраженной от освещенной грани полуплоскости волны и цилиндрической волны, расходящейся от кромки (ребра) полуплоскости.

В области тени $\eta(\varphi) = 0$, значит, падающее и зеркально отраженное поля отсутствуют. При этом из (9.38) получаем

$$\dot{H}_z \approx \dot{H}_0 e^{-ikr + i3\pi/4} \frac{1}{2\sqrt{2\pi kr}} \left(\frac{1}{\cos[(\varphi - \varphi_0)/2]} + \frac{1}{\cos[(\varphi + \varphi_0)/2]} \right) \quad (9.39)$$

Нормированные диаграммы направленности дифрагировавшего поля $|F_T| = \left| \dot{H}_z(\varphi) / \left| \dot{H}_z(\varphi_T + 10^0) \right| \right|$ в области тени при $\varphi_0 = 30^0$, 60^0 и 90^0 изображены на рис. 9.7.а (штриховые кривые). Из графиков следует, что $|\dot{H}_z|$ убывает с увеличением φ в области тени медленнее, чем $|\dot{E}_z|$. Значение $|\dot{H}_z|$ при $\varphi = \gamma$ зависит от φ_0 . Это значит, что в случае поляризации падающего поля с вектором \dot{E} , параллельным ребру, интенсивность рассеянного поля в тени меньше, чем в случае поляризации падающего поля с вектором \dot{E} , перпендикулярным ребру.

Если $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = 2\pi$, то нить стороннего магнитного тока расположена на металлической полуплоскости; при $|k|r_0 \rightarrow \infty$ можно считать, что ток в зеркальном изображении совпадает по амплитуде и по фазе с магнитным током в истинном источнике и поэтому \dot{H}_z должно удваиваться. Выражения (9.38), (9.39) соответствуют этим физическим представлениям: при $\varphi_0 = 0$, например,

$$\dot{H}_z = 2\dot{H}_0 \left[e^{ikr \cos \varphi} \eta(\varphi) + e^{-ikr + i3\pi/4} \frac{1}{2\sqrt{2\pi kr} \cos(\varphi/2)} \right],$$

т.е. можно считать, что амплитуда тока стороннего источника увеличилась в два раза.

9. Если объем V_n расположен на конечном расстоянии от ребра клина, то система сторонний источник-клин является излучателем (антенной). Для примера изучим поле нити магнитного тока, расположенной у полуплоскости. Рассмотрим поле в дальней зоне ($|k|r \rightarrow \infty$). Нить расположена на грани при $\varphi_0 = 0$, при конечных r_0/λ .

Полагая в (9.35) $|k|r \rightarrow \infty$, $\gamma = 2\pi$, $\varphi_0 = 0$ из выражения (9.36) находим

$$\dot{H}_z \approx \dot{H}_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^{n/2} \epsilon_n \cos \frac{n\varphi}{2} J_{n/2}(kr_0),$$

$$\text{где } \dot{H}'_0 \approx -\frac{iI_0^M k}{4W} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-ikr + i\pi/4}.$$

Нормированные по максимальному значению $|\dot{H}_z|$ диаграммы направленности $|F(\varphi)| = |\dot{H}_z(\varphi)| / |\dot{H}_z|_{\text{макс}}$ при значениях $|k|r_0 = 1,57$; $6,28$ и $15,7$ изображены на рис. 9.7,б. Из графиков видно, что чем дальше от ребра находится нить тока (или щель), тем меньшее по амплитуде поле она возбуждает в области тени (при $\pi \leq \varphi < 2\pi$): при $|k|r_0 = 15,7$ ($r_0 = 2,5\lambda$) $|\dot{H}_z|$ в области тени очень мало. Диаграммы направленности зависят от расстояния от нити тока (щели) до ребра. В направлении «от ребра» (при $\varphi = 180^\circ$) $|\dot{H}_z|$ увеличивается с ростом r_0/λ . Наличие экстремумов в диаграмме направленности при $r_0 = 2,5\lambda$ объясняется влиянием на поле двух волн вторичного поверхностного тока \mathbf{J} на полуплоскости. Прямая волна тока распространяется от щели к кромке, обратная волна (отраженная от кромки) распространяется в обратном направлении; при $r_0 = 2,5\lambda$ между щелью и кромкой имеется нечетное число участков тока, фазы в которых сдвинуты на π ; отраженная от кромки волна вторичного тока при этом значении r_0 еще велика по интенсивности. При $|k|r_0 \rightarrow \infty$ диаграмма направленности стремится к полукругности.

9.6. Дифракция Френеля. Область пространства, существенная при распространении радиоволн

1. В реальных условиях между излучателем в точке Q и точкой p могут располагаться паразитные объекты (отражатели), влияющие на ЭМ поле в точке p (рис. 9.8,а). Если объект можно заменить (аппроксимировать) клином (полуплоскостью), то расчеты можно выполнить, основываясь на результатах изучения строгой математической модели, приведенных в § 9.5. Однако, на ЭМ поле в точке p влияет не только величина зазора b/λ , но и расстояния z_0/λ , R_{Qp}/λ . Поэтому рассмотрим следующую математическую модель: между излучателем в точке Q и точкой p расположена идеальной проводимости плоскость (экран), имеющая окно (отверстие, диафрагму). Надо установить влияние размеров окна и его положения между точками Q и p на поле

в точке p . Это дает возможность выявить те условия, при которых при расчетах можно пренебрегать присутствием паразитных объектов.

2. Считаем, что параметры сред справа и слева от окна одинаковы и однородны, характеристические сопротивления сред равны W , тепловые потери в средах отсутствуют. Введем ДСК (рис. 9.8,б). Электрический момент элементарного электрического вибратора в точке $Q(0, 0, z_0)$ ориентирован вдоль оси y . Расстояние $z_0 \gg a, b+d$. Поэтому расстояние от точки Q до точки $q(x', y', 0)$ на окне

$$R_{Qq} = [(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (z_0 - z')^2]^{1/2} = \\ = (x'^2 + y'^2 + z_0^2)^{1/2} \approx |z_0| + \rho'^2 / 2|z_0|,$$

где $\rho' = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$.

Вибратор в точке q на окне S_0 возбуждает первичное Т-поле с напряженностями \dot{E}^n, \dot{H}^n . Если пренебречь изменением амплитуды \dot{E}^n по y за счет направленных свойств вибратора, то

$$\dot{E}^n = 1_y \dot{E}_y^n, \quad \dot{E}_y^n \approx -\frac{iWl_0 L}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-ikR_{Qq}}}{R_{Qq}}.$$

Подставим сюда значение R_{Qq} . Расстояние z_0 считаем таким, что значением фазы $kr'^2/2z_0$ в показателе экспоненты пренебрегать нельзя, но $1/R_{Qq} \approx 1/z_0$. При этом

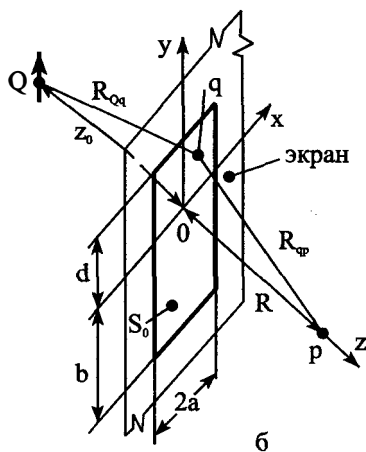
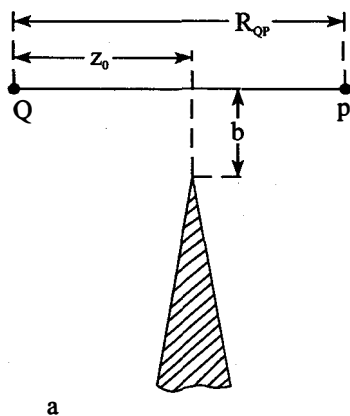


Рис. 9.8. К постановке задачи

$$\dot{E}_y^n \approx -\frac{iI_0 LW}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-ikz_0}}{z_0} e^{-ik(x'^2 + y'^2)/2z_0}. \quad (9.40)$$

Для вычисления поля в некоторой точке наблюдения p можно использовать (2.67), (2.68), где $\dot{E}_y^c = \dot{E}_y^n$. Предположим для упрощения анализа, что точка p расположена на оси z , т.е. $\theta = \varphi = 0$. При этом $R_{qp} \approx R - \eta(x', y')$, где $\eta = -\rho^2/2R = -(x'^2 + y'^2)/2R$ (см. § 2.10). Из (2.67), подставляя в него (9.40) и значение η , получаем $\dot{E}_\theta = 0$,

$$\dot{E}_\varphi \approx \frac{iI_0 LW}{2\lambda^2} \cdot \frac{e^{-ikR_{Qp}}}{z_0 R} \int_{x'=-a}^a \int_{y'=-b}^b e^{-i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{R}\right)x'^2 - i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{R}\right)y'^2} dx' dy',$$

где $R_{Qp} = z_0 + R$ — расстояние между точками Q и p . Это выражение определяет полное (дифрагированное) поле в точке p по эквивалентным поверхностным токам. При этом считается, что расстояния R и z_0 таковы, что фазовыми набегами $kr^2/2R$ и $kr^2/2z_0$ пренебрегать нельзя, но $1/R_{qp} \approx 1/R$ и $1/R_{Qq} \approx 1/z_0$. ЭМ явления на этих расстояниях характеризуют дифракцию Френеля. ЭМ явления в дальней зоне, рассмотренные в § 2.10, характеризуют дифракцию Фраунгофера.

3. Выполним в последнем выражении замену переменных, положив

$$\frac{k}{2}\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{R}\right)x'^2 = \frac{\pi}{2}u^2, \quad \frac{k}{2}\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{R}\right)y'^2 = \frac{\pi}{2}v^2.$$

При этом

$$\dot{E}_\varphi(p) \approx \frac{i}{2} \dot{E}_0 \int_{u_1}^{u_2} e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} du \int_{v_1}^{v_2} e^{-i\frac{\pi}{2}v^2} dv, \quad (9.41)$$

где $u_1 = -ag$, $u_2 = ag$, $v_1 = -bg$, $v_2 = dg$, $g = (2R_{Qp}/\lambda R z_0)^{1/2}$; $\dot{E}_0 = (-iI_0 LW/2\lambda R_{Qp}) \cdot \exp(-ikR_{Qp})$ определяет поле вибратора в неограниченном пространстве. Таким образом,

$$\dot{E}_\varphi \approx \dot{E}_0 \Phi(a, b, d, \lambda), \quad \Phi = \frac{i}{2} \int_{u_1}^{u_2} e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} du \int_{v_1}^{v_2} e^{-i\frac{\pi}{2}v^2} dv. \quad (9.42)$$

Функция Φ характеризует влияние экрана с окном на дифрагированное поле. Если $\Phi = 1$, то экран с отверстием не влияет на это поле. Интегралы в выражениях (9.42) в замкнутой форме не берутся. Обычно обозначают

$$F(\tau) = \int_0^{\tau} e^{-i\pi t^2/2} dt = \int_0^{\tau} \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt - i \int_0^{\tau} \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt = C(\tau) - iS(\tau).$$

Функции $C(\tau) = \int_0^{\tau} \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt$, $S(\tau) = \int_0^{\tau} \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt$ называют интегралами

Френеля. Для них составлены таблицы [18]. Очевидно, что $C(-\tau) = -C(\tau)$, $S(-\tau) = -S(\tau)$, $C(0) = S(0) = 0$; $\lim C(\tau) = \lim S(\tau) = 0,5$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Если по оси абсцисс откладывать значения $C(\tau)$, а по оси ординат — значения $S(\tau)$ при разных действительных параметрах τ , то кривая $C = C(\tau)$, $S = S(\tau)$ представляет собой *спираль Корню*, изображенную на рис. 9.9, где длина дуги от точки $(0,0)$, соответствующей $\tau = 0$, до точки, соответствующей данному значению параметра τ , равна τ .

Обозначим $f(\tau) = F(\tau)(i/2)^{1/2}$. Тогда

$$\Phi = [f(u_2) - f(u_1)] \times [f(v_2) - f(v_1)]. \quad (9.43)$$

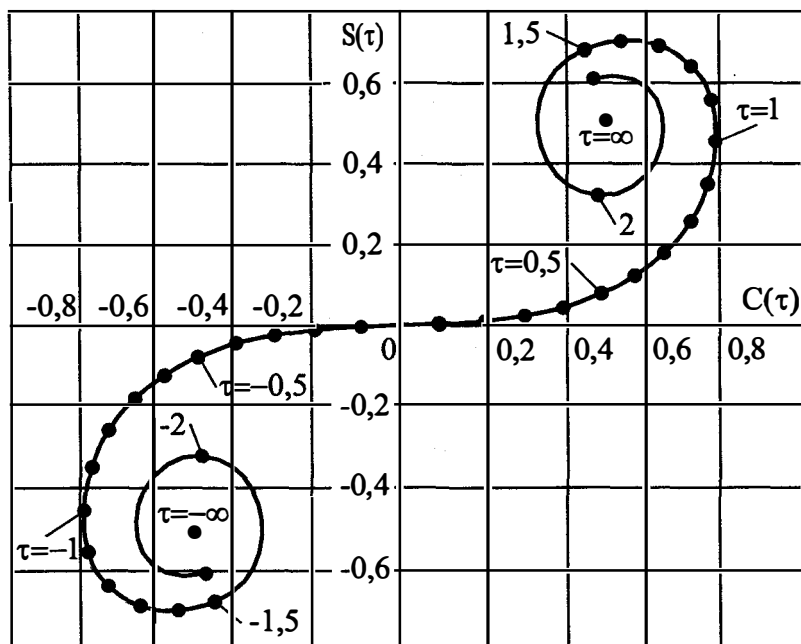


Рис. 9.9. Спираль Корню

Функцию Φ можно вычислить при заданных ka , kb , kd и установить влияние электрических размеров отверстия и положения экрана относительно точек Q и p на поле в точке p . Рассмотрим крайние случаи. Пусть $a \rightarrow \infty$. При этом в экране прорезана бесконечная вдоль оси x щель. Тогда $u_1 \rightarrow -\infty$, $u_2 \rightarrow \infty$. Используя спираль Корню, получаем $f(u_1) = (-1/2 + i/2)(i/2)^{1/2} = -1/2$, $f(u_2) = (1-i)(i/2)^{1/2}/2 = 1/2$. Значит, $f(u_2) - f(u_1) = 1$. Поэтому, из (9.42), (9.43) находим $\dot{E}_\varphi = \dot{E}_0 [f(v_2) - f(v_1)]$.

Если $b \rightarrow \infty$, $d \rightarrow \infty$, то $v_1 \rightarrow -\infty$, $v_2 \rightarrow \infty$ и аналогичным образом, используя спираль Корню, получаем $f(v_2) - f(v_1) = 1$. Таким образом, $\dot{E}_\varphi = \dot{E}_0$, т.е. поле в точке наблюдения равно полю в неограниченном пространстве.

Предположим, что $a \rightarrow 0$. Тогда $|u_1| \rightarrow 0$, $|u_2| \rightarrow 0$. С помощью спирали Корню устанавливаем, что $f(u_1)$ и $f(u_2) \rightarrow 0$, поэтому $\Phi \rightarrow 0$. Значит, $\dot{E}_\varphi \rightarrow 0$. Это соответствует физическим представлениям: если окна в экране нет, то последний полностью экранирует ЭМ поле. Аналогичные явления происходят, когда b и $d \rightarrow 0$.

Пусть $f(v_2) - f(v_1) = 1$. При малых значениях a с помощью спирали Корню устанавливаем, что разность $|f(u_2) - f(u_1)|$ является малой величиной. Поэтому дифрагированное поле $|\dot{E}_\varphi|$ незначительно. С увеличением a , как нетрудно установить, используя спираль Корню, значение $|f(u_2) - f(u_1)|$ колеблется около значения, равного единице, т.е. мало отличается от $f(\infty) - f(-\infty) = 1$. Это происходит при $u_2, |u_1| \geq \sqrt{2}$, т.е. при $a \geq (\lambda R z_0 / R_{Qp})^{1/2}$.

Если a оставить постоянным, а увеличить размеры b и d от значений, равных нулю, то происходят аналогичные явления. При $v_2, |v_1| \geq \sqrt{2}$, т.е. при $b = d \geq (\lambda R z_0 / R_{Qp})^{1/2}$ значение $|f(v_2) - f(v_1)|$ близко к единице.

Таким образом, начиная с некоторых значений, дальнейшее увеличение размеров отверстия почти не сказывается на значении $\dot{E}_\varphi(p)$, последнее остается равным \dot{E}_0 , т.е. экран с окном фактически не влияет на распространяющееся поле. Если экран с окном располагать на разных расстояниях z_0 от вибратора вдоль линии, соединяющей

точки Q и p , то, вычисляя размеры a , b , d , при которых $\dot{E}_\varphi(p)$ почти равно \dot{E}_0 , можно определить таким путем область пространства, существенную для распространения ЭМ волн между точками Q и p . При разных расстояниях z_0 и R наименьшие значения $a = b = d = (\lambda R z_0 / R_{Qp})^{1/2}$. Эта область охватывает пространство вблизи отрезка, соединяющего точки Q и p . Поле в этой области переносит основную часть ЭМ энергии.

4. Интерпретация полученных выше результатов дается с помощью принципа Гюйгенса–Френеля (см. § 3.4). Каждый элемент фронта (поверхности) распространяющейся волны (элемент Гюйгенса, см. § 2.11) является источником вторичной волны. Максимум диаграммы направленности элемента Гюйгенса ориентирован в направлении распространения волны. Полное поле в точке наблюдения определяется суммированием (интерференцией) полей этих элементов. Построение Френеля позволяет наглядно истолковать этот принцип.

Применим построение Френеля к задаче о дифракции поля на окне в экране. На поверхности S_0 имеем фронт распространяющейся волны, возбуждаемой вибратором. Значит, можно считать, что на S_0 распределены вторичные элементарные поверхностные источники.

Пусть S_0 имеет форму круга. Разделим площадь S_0 на зоны так, что границы зон представляют собой концентрические окружности (рис. 9.10). Радиусы окружностей определим из условия, чтобы электрическая длина пути от точки Q до границы зоны номера $n+1$ и от последней до точки p была больше на π электрической длины пути от точки Q до границы зоны номера n и от последней до точки p . При этом поля, приходящие в точку p от элементов Гюйгенса, расположенных на границах соседних зон, находятся в противофазе. А поля от элементов Гюйгенса, находящиеся в центральной зоне, ограниченной радиусом r_1 , и в зоне, ограниченной радиу-

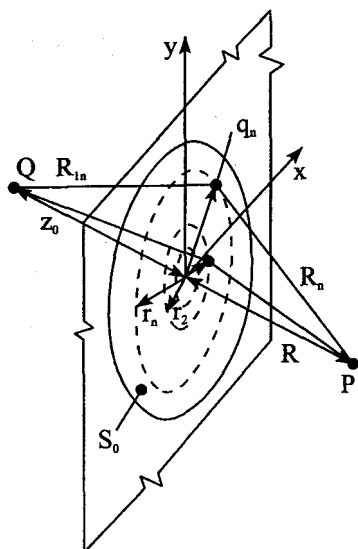


Рис. 9.10. К построению зон Френеля

сами r_n и r_{n+1} , отличаются по фазе на $n\pi$. Таким образом,

$$\beta(R_{1n} + R_n) - \beta(z_0 + R) = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (9.44)$$

Поскольку радиус отверстия много меньше z_0 и R , то

$$R_{1n} = (z_0^2 + r_n^2)^{1/2} \approx z_0 + r_n^2 / 2z_0, \quad R_n = (R^2 + r_n^2)^{1/2} \approx R + r_n^2 / 2R.$$

Используя эти приближенные выражения в предыдущем условии, получаем

$$r_n \approx \left(n\lambda R z_0 / R_{Qp} \right)^{1/2}. \quad (9.45)$$

Радиус первой ($n=1$) зоны Френеля $r_1 \approx (\lambda R z_0 / R_{Qp})^{1/2}$ совпадает с размером отверстия, существенным для процесса распространения волны между точками Q и p . Площади всех зон одинаковы и равны $\pi(r_{n+1}^2 - r_n^2) = \pi\lambda R z_0 / R_{Qp}$.

Элементы Гюйгенса двух соседних зон с большими значениями n и $n+1$ в точке p создают одинаковые по амплитуде, но противофазные поля. Поэтому поля этих зон взаимно компенсируются.

Если радиус окна намного больше радиуса первой зоны Френеля, то в окне укладывается много зон Френеля. Поля зон высших номеров при этом в точке p за счет интерференции волн взаимно компенсируются. Дальнейшее увеличение радиуса окна не изменяет поля дифракции в точке p . Поэтому влияния экрана при этом нет. На поле в точке p , таким образом, влияют только элементы Гюйгенса, расположенные в зонах Френеля с малыми значениями n .

При расположении окна на разных расстояниях z_0 справедливо равенство (9.44), являющееся уравнением эллипса с полюсами в точках Q и p . Следовательно, в пространстве первая зона Френеля представляет собой эллипсоид вращения, а зоны Френеля высших номеров — пространства между двумя соответствующими эллипсоидами вращения. Можно считать, что существенной при распространении волн между точками Q и p является область пространства, ограниченная зонами Френеля нескольких начальных номеров. Часто для упрощения расчетов за эту область принимают область, ограниченную эллипсоидом с поперечным сечением, равным площади первой зоны Френеля.

Из (9.45) видно, что при $\lambda \rightarrow 0$ имеем $r_n \rightarrow 0$. Значит, площади поперечных сечений эллипсоидов уменьшаются и в пределе ($\lambda \rightarrow 0$) эллипсоиды превращаются в отрезок Qp , называемый *лучом*. Поэтому при малых λ (например, в диапазоне световых длин волн) можно счи-

тять, что волна распространяется по лучу от точки Q к точке p . Введение понятия луча упрощает приближенное решение ряда электродинамических задач.

5. Выражение (9.42) позволяет, в частности, найти приближенные значения поля, дифрагированного на идеально проводящей полуплоскости, когда источником первичного поля является элементарный электрический вибратор.

Если $a \rightarrow \infty$, то отверстие в экране превращается в бесконечную по оси x щель. При $d \rightarrow \infty$ «верхняя» часть экрана (рис. 9.8,б) отодвигается на бесконечность. В результате получаем идеально проводящую полуплоскость, расположенную в неограниченном пространстве. Это частный случай задачи дифракции поля на полуплоскости (рис. 9.6,е).

При $a/\lambda \rightarrow \infty$ параметры $u_2 \rightarrow \infty$, $u_1 \rightarrow -\infty$. Поэтому $f(u_2) - f(u_1) = 1$. При $d/\lambda \rightarrow \infty$ параметр $v_2 \rightarrow \infty$, значит $f(v_2) = 1/2$. Из (9.43), (9.42) получаем при этом $\dot{E}_\varphi = \dot{E}_0[1/2 - f(v_1)]$, т.е. значение поля зависит от величины $v_1 = -b(2R_{Qp}/\lambda Rz_0)^{1/2}$.

Если $b > 0$, то точка p находится в освещенной области. Это случай *открытой трассы* при распространении волны; в этом случае $v_1 < 0$. При больших b/λ $|v_1|$ велико и, как следует из спирали Корню, $f(v_1) \approx -1/2$. Поэтому $\dot{E}_\varphi \approx \dot{E}_0$, т.е. полуплоскость почти не влияет на поле в точке p . С уменьшением b/λ изменение величины $|f(v_1)|$ носит осциллирующий характер, и $|\dot{E}_\varphi|$ близко к $|\dot{E}_0|$. При $b/\lambda = 0$ получаем $f(v_1) = 0$ и $\dot{E}_\varphi = \dot{E}_0/2$, т.е. $|\dot{E}_\varphi(p)|$ равна половине напряженности поля в свободном пространстве. Это явление можно объяснить тем, что половина площади, существенной при распространении поля между точками Q и p , перекрыта полуплоскостью.

Если $b/\lambda < 0$, то точка наблюдения находится в области тени. Это случай *закрытой трассы*; в этом случае $v_1 > 0$. При $b/\lambda \rightarrow -\infty$ параметр $v_1 \rightarrow \infty$ и $f(v_1) \rightarrow 1/2$, значит, $\dot{E}_\varphi \rightarrow 0$ (полуплоскость превращается в плоскость и полностью экранирует поле источника в точке p). При $0 > b/\lambda > -\infty$ функция $f(v_1)$ имеет такие значения, что $|\dot{E}_\varphi|$ мало.

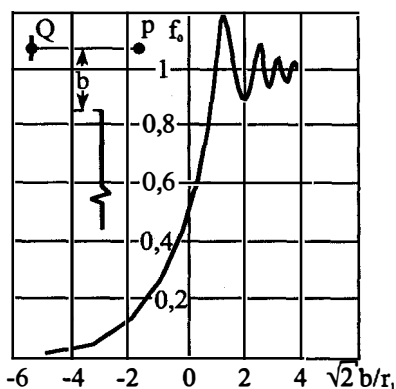


Рис. 9.11. Зависимость дифрагированного поля от величины зазора b

График зависимости $f_0 = |\dot{E}_\varphi|/|\dot{E}_0|$ от значений b/r_1 (r_1 — радиус первой зоны Френеля) соответствует изложенным выше представлениям (рис. 9.11). Отметим, что значение $\dot{E}_\varphi(p)$, полученное здесь на основе приближенных представлений, удовлетворительно соответствует значениям напряженности поля в точке p , полученным на основе строгого решения задачи дифракции поля на клине.

9.7. Рассеяние поля плоской периодической решеткой

1. Решетки используются в качестве высокочастотных экранов, антенных устройств, голографических устройств и т.д.

Пусть имеем решетку из $2N+1$ одинаковых металлических полосок ширины a и толщины 2Δ , отстоящих друг от друга на расстоянии d (рис. 9.12). Параллельно полоскам расположена нить стороннего синфазного электрического тока с плотностью \dot{I}_0 . Решетка и нить находятся в свободном пространстве. Надо найти ЭМ поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла, граничным условиям на полосках и условию излучения.

Направим ось z ДСК параллельно полоскам, а начало координат

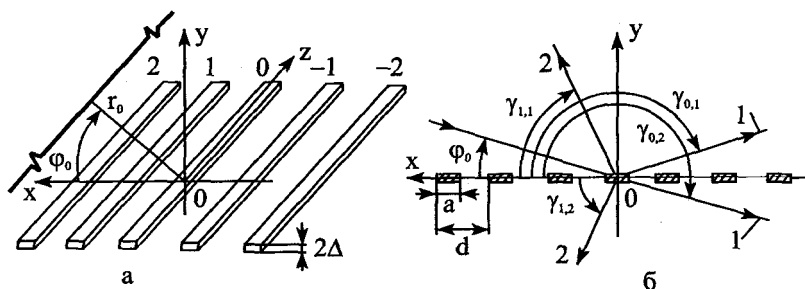


Рис. 9.12. Решетка и направления лучей

нат совместим с серединой полоски номер ноль. В ЦСК положение нити тока определяется координатами r_0, φ_0 . При построении математической модели считаем, что полоски по z бесконечны и однородны. Проводимость металла считаем идеальной.

Нить электрического тока, параллельная оси z , возбуждает первичное ЭМ поле, электрический векторный потенциал которого по (2.53) $\dot{\mathbf{A}}^n = \mathbf{1}_z \dot{A}_z^n$. Векторы напряженностей поля $\dot{\mathbf{E}}^n = \mathbf{1}_z \dot{E}_z^n$, $\dot{\mathbf{H}}^n = \mathbf{1}_x \dot{H}_x^n + \mathbf{1}_y \dot{H}_y^n$. Поэтому $\dot{\mathbf{E}}^B = \mathbf{1}_z \dot{E}_z^B$, $\dot{\mathbf{H}}^B = \mathbf{1}_x \dot{H}_x^B + \mathbf{1}_y \dot{H}_y^B$. Наводимые на полосках поверхностные токи $\dot{\mathbf{J}} = [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}] = \mathbf{1}_z \dot{J}_z(x)$. На каждой полоске должно удовлетворяться граничное условие

$$\dot{E}_z = \dot{E}_z^n + \dot{E}_z^B = 0 \quad \text{на полосках.} \quad (9.46)$$

Считаем, что нить удалена от решетки так, что $kr_0 \rightarrow \infty$. Тогда из (9.7), используя асимптотику (ПЗ.4) функции Ганкеля, имеем

$$\dot{E}_z^n = \dot{E}_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in(\varphi-\varphi_0)} J_n(kr) = \dot{E}_0 e^{ikr \cos(\varphi-\varphi_0)},$$

где \dot{E}_0 определено в (9.9), (9.10) и применена формула суммирования (ПЗ.9). Но поскольку $r \cos(\varphi-\varphi_0) = r \cos\varphi \cos\varphi_0 + r \sin\varphi \sin\varphi_0 = x \cos\varphi_0 + y \sin\varphi_0$, то получаем

$$\dot{E}_z^n = \dot{E}_0 e^{ikx \cos\varphi_0 + iky \sin\varphi_0}. \quad (9.47)$$

На решетку падает плоская волна. Из (9.46) видно, что \dot{E}_z^n на полосках (при $y=0$) имеет постоянную амплитуду и линейно изменяющуюся (по x) фазу. Поэтому \dot{E}_z^B на полосках, согласно (9.46), также должно иметь постоянную амплитуду и линейно изменяющуюся (по x) фазу. Однако, полоски решетки находятся в разных условиях: те из них, которые расположены у краев решетки, подвержены другому взаимному влиянию, чем те, которые расположены ближе к центральной части решетки. Поэтому наводимый ток $J_z(x)$ является сложной функцией x в такой решетке (по причине влияния краевых эффектов).

Число полосок в решетке может быть большим и поставленная задача решается проще, если в математической модели $N \rightarrow \infty$. При этом решетка становится периодической структурой (продольно-периодической, см. § 7.10, п.5). Краевых эффектов в ней нет. Свойства ЭМ поля меняются вдоль x по периодическому закону с периодом d . Поля в двух точках p , находящихся на расстоянии d друг от друга на прямой, параллельной оси x , отличаются лишь фазовым множителем

$\exp(i\beta d \cos\varphi_0)$. Математически это утверждение можно записать так: если $\psi(x)$ — любая составляющая векторов напряженностей вторичных полей в точках $p(x, y_1)$, где $y_1 = \text{const}$, то $\psi(x+d, y_1) = \psi(x, y_1)\exp(-i\beta d \cos\varphi_0)$. Поэтому для вычисления составляющих векторов ЭМ поля в любой точке p надо найти составляющие векторов этого поля только в интервале по x , равном одному периоду, например, при $-d/2 \leq x \leq d/2$. Это существенно упрощает задачу.

Так как структура периодическая по x , то векторы вторичного поля можно представить в виде разложения по пространственным гармоникам (гармоникам Флоке).

Плотность поверхностного тока на полосках равна $\mathbf{J} = -\mathbf{1}_z \dot{H}_x$, т.е. $\dot{J}_z(x) = -(\dot{H}_x^n + \dot{H}_x^B)$ при $y = 0$. Определяя \dot{H}_x^n через \dot{E}_z^n из второго уравнения Максвелла, получаем $\dot{H}_x^n = -W_0^{-1} \sin\varphi_0 \dot{E}_0 \exp(i\beta x \cos\varphi_0)$ при $y = 0$. Таким образом, периодическую функцию $\dot{J}_z(x)$ можно представить в форме $\dot{J}_z(x) = \dot{J}(x)\exp(i\beta x \cos\varphi_0)$, где $\dot{J}(x)$ — плотность тока на любом периоде. Функцию $\dot{J}(x)$ разложим в ряд Фурье:

$$\dot{J}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m \exp(-im \frac{2\pi}{d} x), \quad (9.48)$$

где

$$J_m = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \dot{J}(x) \exp\left(im \frac{2\pi}{d} x\right) dx. \quad (9.49)$$

2. Предположим, что толщина полоски $2\Delta = 0$. Вторичный ток $\dot{J}_z(x)$ возбуждает вторичное ЭМ поле. Векторы \dot{E}^B, \dot{H}^B этого поля можно найти, зная векторные потенциалы. Так как вторичный поверхностный магнитный ток отсутствует, то $\dot{A}^{M,B} = 0$. Значение \dot{A}^B определяется по общей формуле (П4.4), в которой функцию Грина используем в виде разложения (П4.5). Учитывая, что $\dot{\mathbf{j}}^B(x, y) = \mathbf{1}_z \dot{J}_z(x) \delta(y-0)$, т.е.

$$\dot{\mathbf{j}}^B(x, y) = \mathbf{1}_z \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m \exp\left[i\left(\beta \cos\varphi_0 - \frac{m2\pi}{d}\right)x\right] \delta(y-0),$$

получаем $\dot{A}^B = \mathbf{1}_z \dot{A}_z^B$, где

$$\begin{aligned} \dot{A}_z^B = & \frac{1}{8\pi^2} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{y'=-\infty}^{\infty} \int_{z'=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} j_m e^{i(\beta \cos \varphi_0 - \frac{m2\pi}{d})x'} \delta(y'-0) \times \\ & \times \int_{\kappa_1=-\infty}^{\infty} \int_{\kappa_3=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\kappa_1(x-x') - i\kappa_3(z-z') \pm \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_3^2 - \beta^2}(y-y')}}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_3^2 - \beta^2}} d\kappa_1 d\kappa_3 dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

Используя здесь основное свойство (П2.2) дельта-функции при интегрировании по y' , меняя порядок интегрирования по пространственным координатам и по κ_1, κ_3 и учитывая, что по (П2.5)

$$\begin{aligned} \int_{z'=-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa_3 z'} dz' &= 2\pi \delta(\kappa_3 - 0), \\ \int_{x'=-\infty}^{\infty} e^{-i\left[\frac{m2\pi}{d} - \beta \cos \varphi_0 - \kappa_1\right]x'} dx' &= 2\pi \delta\left(\frac{m2\pi}{d} - \beta \cos \varphi_0 - \kappa_1\right), \end{aligned}$$

получаем

$$\dot{A}_z^B = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\beta_{ym}} j_m e^{-i\beta_{xm}x \pm i\beta_{ym}y}, \quad (9.50)$$

где $\beta_{xm} = m2\pi/d - \beta \cos \varphi_0$, $\beta_{ym} = \sqrt{\beta^2 - \beta_{xm}^2}$, верхний знак соответствует $y < 0$, а нижний $y \geq 0$.

По (1.124), (1.125) находим

$$\begin{aligned} \dot{E}_z^B &= -i\omega\mu_0 \dot{A}_z^B = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{E}_{zm}^B; \\ \dot{H}_x^B &= \frac{\partial \dot{A}_z^B}{\partial y} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{H}_{xm}^B; \quad \dot{H}_y^B = -\frac{\partial \dot{A}_z^B}{\partial x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{H}_{ym}^B, \end{aligned} \quad (9.51)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{E}_{zm}^B &= -\frac{\beta W_0}{2\beta_{ym}} j_m e^{-i\beta_{xm}x \pm i\beta_{ym}y}; \\ \dot{H}_{xm}^B &= \pm \frac{1}{2} j_m e^{-i\beta_{xm}x \pm i\beta_{ym}y}; \quad \dot{H}_{ym}^B = \frac{\beta_{xm}}{2\beta_{ym}} j_m e^{-i\beta_{xm}x \pm i\beta_{ym}y}. \end{aligned} \quad (9.52)$$

Таким образом, рассеянное поле определяется суммой полей бесконечного количества пространственных гармоник с векторами напряженностей поля $\dot{\mathbf{E}}_m^B = \mathbf{1}_z \dot{E}_{zm}^B$, $\dot{\mathbf{H}}_m^B = \mathbf{1}_x \dot{H}_{xm}^B + \mathbf{1}_y \dot{H}_{ym}^B$. Вектор Пойнтинга пространственной гармоники

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_m^B = 0,5[\dot{\mathbf{E}}_m^B, \dot{\mathbf{H}}_m^{B*}] = \mathbf{1}_x \dot{\Pi}_{xm}^B + \mathbf{1}_y \dot{\Pi}_{ym}^B,$$

где

$$\dot{\Pi}_{xm}^B = -0,5\dot{E}_{zm}^B \dot{H}_{ym}^{B*}, \quad \dot{\Pi}_{ym}^B = 0,5\dot{E}_{zm}^B \dot{H}_{xm}^{B*}. \quad (9.53)$$

3. Выполним общий анализ рассеянного поля. Коэффициент фазы β_{xm} пространственной гармоники зависит от ее номера m , периода d , длины волны λ (от $\beta = 2\pi/\lambda$) и угла скольжения φ_0 . Если номер m такой, что $\beta_{xm}^2 > \beta^2$, то $\beta_{ym} = \sqrt{\beta^2 - \beta_{xm}^2} = -iv_m$, где $v_m = \sqrt{\beta_{xm}^2 - \beta^2} > 0$, v_m — действительная величина. Тогда $\exp(\pm i\beta_{ym}y) = \exp(\pm v_m y)$. Амплитуды составляющих векторов поля таких гармоник экспоненциально убывают с удалением точки p от решетки вдоль $|y|$ (с ростом $|y|$). ЭМ поле такой гармоники представляет собой поверхностную волну. Для ее существования необходимо, чтобы $(m2\pi/d - \beta \cos \varphi_0)^2 > \beta^2$. Разделив это выражение на β^2 , получаем $(m\lambda/d - \cos \varphi)^2 > 1$, откуда находим: номера гармоник, описывающих поверхностные волны, должны удовлетворять условию $(\pm m) > (1 \pm \cos \varphi_0)d/\lambda$.

Для гармоник отрицательных номеров коэффициент фазы β_{xm} становится отрицательным. Такие пространственные гармоники описывают *обратные поверхностные* волны, распространяющиеся в направлении уменьшающихся значений x . У всех пространственных гармоник, описывающих поверхностные волны, коэффициент фазы $|\beta_{xm}| > \beta$. Все они являются медленными, так как их фазовые скорости $v_{\varphi x} = \omega/|\beta_{xm}| < c$. Составляющая вектора Пойнтинга $\dot{\Pi}_{xm}^B$ в (9.53) у них чисто действительная, а составляющая $\dot{\Pi}_{ym}^B$ — чисто мнимая. Значение $\dot{\Pi}_{xm}^B$ положительно для прямых бегущих волн ($\beta_{xm} > 0$) и отрицательно — для обратных бегущих волн ($\beta_{xm} < 0$).

4. Если номер пространственной гармоники такой, что $\beta^2 > \beta_{xm}^2$, то $\beta_{ym} < \beta$. Поэтому фазовые скорости $v_{\varphi x}$ и $v_{\varphi y}$ таких пространственных гармоник больше скорости света. Пространственные гармоники при этом являются быстрыми. Экспонента $\exp(\pm i\beta_{ym}y)$ описывает бегущие волны, распространяющиеся вдоль возрастающих значений $|y|$, а экспонента $\exp(-i\beta_{xm}x)$ описывает при $\beta_{xm} > 0$ — бегущие вдоль возрастающих значений x волны, тогда как при $\beta_{xm} < 0$ она описывает обратные волны.

Введем угол γ_m с помощью выражения $\beta_{xm} = \beta \cos \gamma_m$. При этом $\beta_{ym} = \sqrt{\beta^2 - \beta^2 \cos^2 \gamma_m} = \beta \sin \gamma_m$. Тогда $\exp(-i\beta_{xm}x \pm i\beta_{ym}y) = \exp[-i\beta r \cos(\varphi \pm \gamma_m)]$, где учтено, что $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Значит, экспонента описывает плоские волны, распространяющиеся в направлениях, определяемых углами γ_m .

Углы γ_m определяются выражением $\cos \gamma_m = \beta_{xm} / \beta = m\lambda / d - \cos \varphi_0$. Это показывает, что число пространственных гармоник, описывающих бегущие плоские волны ограничено условием $|\cos \gamma_m| < 1$, т.е. $|m\lambda / d - \cos \varphi_0| < 1$. Для нулевой гармоники ($m = 0$) условие ее ускоренности соблюдается при любых значениях d / λ ; при этом $\cos \gamma_0 = -\cos \varphi_0$. Из этого выражения получаем два угла $\gamma_{0,1} = \pi - \varphi_0$ и $\gamma_{0,2} = \pi + \varphi_0$ (рис. 9.12, б). Следовательно, пространственная гармоника, соответствующая $m = 0$, распространяется под углами $\gamma_{0,1}$ и $\gamma_{0,2}$ в виде двух плоских волн (отраженной от решетки и прошедшей через решетку). Углы $\gamma_{0,1}$ и $\gamma_{0,2}$ определяют направления *основных лучей* (1).

Число пространственных гармоник, распространяющихся в виде плоских (отраженных и прошедших через решетку) волн, ограничено значением d / λ . Если $d / \lambda < 0,5$, то ни при каких значениях $|m| > 0$ условие существования ускоренных гармоник не выполняется. Поэтому только нулевая гармоника описывает плоские волны, остальные гармоники описывают поверхностные волны.

При значениях $d / \lambda > 0,5$ (при $0 < \varphi_0 < 90^\circ$) условие существования ускоренных гармоник прежде всего может выполняться для гармоники с номером $m = 1$ (кроме $m = 0$); при этом два угла, определяющие направления распространения двух плоских волн, находятся из выражения: $\cos \gamma_1 = \lambda / d - \cos \varphi_0$.

5. Пример. Пусть $d / \lambda = 0,75$. Тогда при $\varphi_0 = 20^\circ$ имеем $\gamma_{0,1} = 160^\circ$, $\gamma_{0,2} = 200^\circ$, $\gamma_{1,1} = 66,8^\circ$, $\gamma_{1,2} = -66,8^\circ$. Таким образом, кроме основных лучей имеются еще *дифракционные лучи* (2) при $\gamma_{1,1}$, $\gamma_{1,2}$ (рис. 9.12, б).

ЗАДАЧИ

1. Круговой однородный импедансный цилиндр расположен в воздухе и возбуждается параллельной его оси нитью магнитного тока. Найти вторичное поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла, граничному условию и условию излучения.
2. Прямолинейная нить электрического тока параллельна оси бесконечного идеально проводящего цилиндра. Вдоль нити распространяется бегущая волна тока. Цилиндр и нить расположены в однородной изотропной среде. Найти возбуждаемое ЭМ поле.
3. Вывести выражение погонной ЭПР цилиндра для математической модели, рассматривающей цилиндрическую волну.
4. Вычислить максимальный квадратичный набег фазы в зоне Френеля для окна прямоугольной формы, имеющего площадь $5\lambda \times 3\lambda$, если $R = 30\lambda$, $z_0 = 50\lambda$.
5. В плоской бесконечной периодической решетке $d/\lambda = 1$, вычислить направления основных лучей, если $\varphi_0 = 45^\circ$.
6. В плоской бесконечной периодической решетке $d/\lambda = 1,2$. Вычислить количество и направления дифракционных лучей, если $\varphi_0 = 30^\circ$.

10. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ. НЕЛИНЕЙНЫЕ СРЕДЫ

10.1. Анизотропные среды

1. *Намагниченные ферриты* широко применяются в волноводных устройствах диапазона СВЧ. На их основе созданы волноводные элементы, не удовлетворяющие принципу взаимности, т.е. ведущие себя по-разному для волн, распространяющихся через них в противоположных направлениях. Ферриты применяются также в электрически управляемых устройствах. Зависимость параметров феррита от напряженности внешнего (подмагничивающего) магнитного поля h позволяет создавать устройства, свойствами которых можно управлять с помощью изменения значения h . Такими устройствами являются быстродействующие модуляторы, переключатели, перестраиваемые по частоте фильтры, системы для автоматической перестройки частоты генератора и др. [84].

Принцип действия ферритовых устройств в диапазоне СВЧ основан на взаимодействии распространяющегося ЭМ поля с магнитными моментами атомов среды. Для существования такого взаимодействия надо, чтобы ЭМ поле проникало в среду. Глубина проникновения поля в металлы в диапазоне СВЧ очень мала. Поэтому применяют специальную технологию для спекания окиси ферромагнитного металла (обычно железа) с другими элементами.

Свойства ферритов зависят от их кристаллической структуры. Различают монокристаллические ферриты, представляющие собой единый кристалл и поликристаллические ферриты, в которых каждый кристаллит ведет себя как монокристалл, изолированный от соседних кристаллитов небольшими воздушными порами. Состав ферритов со структурой шпинели описывается формулой $Me^{II}Fe_2O_3$, где Me^{II} — ион двухвалентного металла типа $Ni, Co, Fe, Mn, Mg, Cu, Zn, Cd$. Иттриевые ферриты со структурой граната имеют формулу $Y_3Fe_2(FeO_4)_3$.

Феррит обладает магнитными свойствами ферромагнетика и электрическими свойствами диэлектрика. В диапазоне СВЧ он имеет $\sigma = 10^{-7} + 10^{-11}$ См/м, $\epsilon = 5 + 20$, $tg \Delta \approx 10^{-4}$.

Явления ферромагнетизма имеют квантовую природу. С помощью классической электродинамики можно выполнить только приближенный анализ ЭМ явлений в феррите. Для анализа последних необходимо найти значение магнитной проницаемости.

2. *Плазмой* называют электрически нейтральный, частично или полностью ионизированный газ. Подмагничивающее внешнее магнитное поле превращает плазму в анизотропную среду. Верхние слои земной атмосферы под воздействием ЭМ поля Солнца ионизируются. Образующиеся слои ионизированного газа находятся в постоянном магнитном (подмагничивающем) поле Земли, напряженность которого равна 40 А/м. Слои подмагниченной плазмы влияют на распространение радиоволн.

Анализ ЭМ явлений в плазме может основываться на представлениях классической физики. Для анализа ЭМ явлений в плазме необходимо найти значение диэлектрической проницаемости.

3. В линейных анизотропных средах материальные уравнения (см. § 1.2) для комплексных амплитуд в ДСК имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{D}_x &= \varepsilon_{axx} \dot{E}_x + \varepsilon_{axy} \dot{E}_y + \varepsilon_{axz} \dot{E}_z, & \dot{B}_x &= \mu_{axx} \dot{H}_x + \mu_{axy} \dot{H}_y + \mu_{axz} \dot{H}_z, \\ \dot{D}_y &= \varepsilon_{ayx} \dot{E}_x + \varepsilon_{ayy} \dot{E}_y + \varepsilon_{ayz} \dot{E}_z, & \dot{B}_y &= \mu_{ayx} \dot{H}_x + \mu_{ayy} \dot{H}_y + \mu_{ayz} \dot{H}_z, \\ \dot{D}_z &= \varepsilon_{azx} \dot{E}_x + \varepsilon_{azy} \dot{E}_y + \varepsilon_{azz} \dot{E}_z, & \dot{B}_z &= \mu_{azx} \dot{H}_x + \mu_{azy} \dot{H}_y + \mu_{azz} \dot{H}_z, \end{aligned} \quad (10.1)$$

где ε_{anm} и μ_{anm} — компоненты тензоров комплексных диэлектрической $\hat{\varepsilon}_a$ и магнитной $\hat{\mu}_a$ проницаемостей ($n, m = x, y$ или z).

При изучении ЭМ явлений в анизотропной среде необходимо решать уравнения Максвелла совместно с (10.1). Однако, в природе не обнаружено веществ, у которых и $\hat{\varepsilon}_a$ и $\hat{\mu}_a$ одновременно являются тензорами. Поэтому рассматриваем среды, имеющие только *магнитную анизотропию*, когда $\dot{D} = \varepsilon_a \dot{E}$, $\dot{B} = \hat{\mu}_a \dot{H}$, и среды, имеющие только *диэлектрическую анизотропию*, в которых $\dot{D} = \hat{\varepsilon}_a \dot{E}$, $\dot{B} = \mu_a \dot{H}$.

Отметим, что проводимость может быть тензорной величиной. Тогда в законе Ома $\hat{\sigma}$ — тензор.

10.2. Свойства феррита

1. Рассмотрим уравнение движения вектора магнитной поляризации феррита. Отрицательно заряженный электрон вращается по орбите вокруг положительно заряженного ядра и одновременно вращается вокруг собственной оси. Движение заряженной частицы по замкнутой траектории образует элементарную рамку тока. Ток рамки порождает в пространстве постоянное магнитное поле, вектор напряженности ко-

того перпендикулярен плоскости рамки. Этому полю соответствует орбитальный магнитный момент электрона M_{op} . За счет вращения электрона вокруг своей оси образуются спиновые (внутренние) магнитный момент \mathbf{m} и механический момент количества движения \mathbf{L} . Эти моменты направлены в противоположные стороны и связаны между собой выражением

$$\mathbf{m} = -\chi\mathbf{L}, \quad (10.2)$$

где $\chi = |e_3|/m_3$; e_3 , m_3 — заряд и масса электрона.

Полный магнитный и механический моменты атома являются геометрической суммой соответственно магнитных и механических спиновых и орбитальных моментов всех электронов в атоме. Полный магнитный и механический моменты молекулы вещества есть геометрическая сумма моментов отдельных атомов в молекуле. Магнитный момент ядра примерно в 10^3 раз меньше магнитного момента электрона. Поэтому влиянием магнитного момента ядра пренебрегают.

Произвольная физическая система находится в устойчивом во времени состоянии, если она обладает минимумом полной энергии. Это происходит у большинства атомов при антипараллельной ориентации спиновых моментов, когда суммарный магнитный момент их близок к нулю. Исключение составляют металлы переходных групп (железо, палладий, платина и др.), у которых минимуму полной энергии соответствует параллельная ориентация спиновых магнитных и механических моментов части электронов. У атома железа, например, на предпоследней оболочке находятся четыре электрона с параллельными спинами, у атома кобальта — три и т.д. Атомы этих металлов в постоянном магнитном поле ведут себя подобно магнитной стрелке компаса — магнитные моменты их ориентируются параллельно приложенному полю.

Измерения показывают, что в ферритах вклад орбитальных магнитных моментов в общий момент мал или пренебрежимо мал.

Предположим, что электрон с магнитным моментом \mathbf{m} помещен в постоянное магнитное поле с напряженностью \mathbf{h} , направления векторов \mathbf{m} и \mathbf{h} не совпадают (рис. 10.1,а). В магнитном поле \mathbf{h} на электрон действует вращательный момент $\boldsymbol{\tau} = \mu_0[\mathbf{m}, \mathbf{h}]$, стремящийся повернуть его так, чтобы векторы \mathbf{m} и \mathbf{h} были параллельны. Но механический момент \mathbf{L} делает электрон подобным волчку, ось которого под влиянием действующих сил прецессирует (вращается). Концы векторов \mathbf{m} и \mathbf{L} прецессируют вокруг вектора \mathbf{h} , описывая концами окружность. Направление вращения \mathbf{m} образует с \mathbf{h} правовинтовую систему. Действительно, поскольку у электрона, как и у волчка имеется механический момент \mathbf{L} , то по законам механики вращающий момент

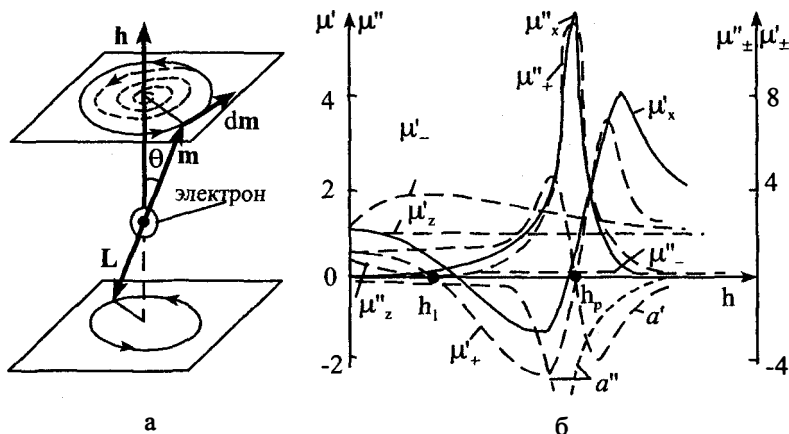


Рис. 10.1. К объяснению свойств феррита

τ вызывает изменение механического момента \mathbf{L} : $\tau = d\mathbf{L}/dt$. Используя (10.2) и обозначая $\psi = \mu_0 \chi$ ($\psi = 7\pi \cdot 10^4$ м/Кл), имеем $d\mathbf{m}/dt = \psi[\mathbf{h}, \mathbf{m}]$, т.е. $d\mathbf{m}$ перпендикулярен плоскости расположения векторов \mathbf{h} и \mathbf{m} , конец вектора \mathbf{m} вращается по часовой стрелке, если смотреть вдоль \mathbf{h} (рис. 10.1,а). Поэтому линейная скорость конца вектора \mathbf{m} равна $v = |d\mathbf{m}/dt| = \psi h m \sin \theta$. Так как радиус R окружности, по которой движется конец вектора \mathbf{m} , $R = m \sin \theta$, длина окружности есть $2\pi R$, то $2\pi R = v / f_m = 2\pi v / \omega_m$, где ω_m — частота свободной прецессии. Значит, $\omega_m = v / R = \psi h$. Эту частоту называют частотой ферромагнитного резонанса.

Феррит имеет тепловые потери. Поэтому конец вектора \mathbf{m} движется по свертывающейся спирали (рис. 10.1,а). Время затухания прецессии, равное около 10^{-8} с, определяет время намагничивания феррита.

Намагниченная ферритовая среда представляет совокупность параллельных друг другу и вектору \mathbf{h} некомпенсированных магнитных моментов. Если умножить уравнение движения магнитного момента электрона $d\mathbf{m}/dt = \psi[\mathbf{h}, \mathbf{m}]$ на число N упорядоченных магнитных моментов в единице объема феррита, и учесть, что магнитный момент единицы объема $\mathbf{m}' = N\mathbf{m}$, то получим уравнение движения суммарного магнитного момента (вектора магнитной поляризации единицы объема подмагниченного феррита):

$$d\mathbf{m}'/dt = \psi[\mathbf{h}, \mathbf{m}']. \quad (10.3)$$

2. Найдем тензор магнитной проницаемости. Направим ось z ДСК вдоль вектора $\mathbf{h} (\mathbf{h} = \mathbf{1}_z h)$. Пусть в феррите распространяется ЭМ поле, вектор напряженности магнитного поля которого обозначим через $\dot{\mathbf{H}}(p, \omega)$. Тогда на магнитные моменты воздействует суммарная напряженность поля $\mathbf{H}_\Sigma(p, t) = \mathbf{h}(p, 0) + |\dot{\mathbf{H}}(p, \omega)| \cos(\omega t + \Phi)$, где $\Phi(p, \omega)$ — фаза $\dot{\mathbf{H}}$. Длина и ориентация вектора \mathbf{H}_Σ меняются во времени, что вызывает прецессию магнитных моментов. Последняя уже не является затухающей, поскольку нет постоянного направления, параллельно которому могли бы установиться магнитные моменты. Эту прецессию называют *вынужденной*. Ее частота совпадает с частотой распространяющегося ЭМ поля.

Обозначим через $\dot{\mathbf{M}}(p, \omega)$ — магнитный момент, появляющийся за счет вектора $\dot{\mathbf{H}}(p, \omega)$. Тогда суммарный магнитный момент $\mathbf{M}_\Sigma(p, t) \rightarrow \mathbf{m}'(p, 0) + \dot{\mathbf{M}}(p, \omega) \exp(i\omega t)$. Уравнение движения (10.3) суммарного магнитного момента имеет вид $d\mathbf{M}_\Sigma/dt = \psi[\mathbf{H}_\Sigma, \mathbf{M}_\Sigma]$, или для комплексных амплитуд: $i\omega \dot{\mathbf{M}} = \psi[\mathbf{1}_z h + \dot{\mathbf{H}}, \mathbf{m}' + \dot{\mathbf{M}}]$. Предположим, что феррит намагничен до насыщения, при котором $\mathbf{m}' = \mathbf{1}_z m'$. Если в феррите распространяется слабое монохроматическое поле ($|\dot{\mathbf{H}}| \ll h$) частоты ω , то оно вызывает появление слабой составляющей вектора намагниченности $\dot{\mathbf{M}}$ ($|\dot{\mathbf{M}}| \ll m'$). Перемножив при этом правую часть уравнения движения и учитывая, что $[\mathbf{1}_z, \mathbf{m}'] = 0$, $[\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{M}}] \approx 0$, получим, сохраняя знак равенства, $i\omega \dot{\mathbf{M}} = \psi\{[\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{m}'] + h[\mathbf{1}_z, \dot{\mathbf{M}}]\}$. В ДСК ($\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{1}_x \dot{M}_x + \mathbf{1}_y \dot{M}_y + \mathbf{1}_z \dot{M}_z$, $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_x \dot{H}_x + \mathbf{1}_y \dot{H}_y + \mathbf{1}_z \dot{H}_z$), выполнив перемножение в правой части равенства, обозначая $\omega_0 = \psi m'$ и учитывая, что $\psi h = \omega_m$, находим $i\omega \dot{M}_z = 0$, $i\omega \dot{M}_x = \omega_0 \dot{H}_y - \omega_m \dot{M}_y$, $i\omega \dot{M}_y = -\omega_0 \dot{H}_x + \omega_m \dot{M}_x$. Решая эту систему уравнений относительно \dot{M}_x , \dot{M}_y и обозначая $\omega_0 / (\omega^2 - \omega_m^2) = \kappa$, получаем

$$\dot{M}_x = -\omega_m \kappa \dot{H}_x - i\omega \kappa \dot{H}_y, \quad \dot{M}_y = i\omega \kappa \dot{H}_x - \omega_m \kappa \dot{H}_y.$$

В соответствии с (1.13) $\dot{\mathbf{B}} = \mu_0(\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{M}})$. Подставляя сюда значения $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{M}}$, имеем $\dot{B}_z = \mu_0 \dot{H}_z$,

$$\dot{B}_x = \mu_0(1 - \omega_m \kappa) \dot{H}_x - i\omega \mu_0 \kappa \dot{H}_y; \quad \dot{B}_y = i\omega \mu_0 \kappa \dot{H}_x + \mu_0(1 - \omega_m \kappa) \dot{H}_y. \quad (10.4)$$

Сравнивая последние выражения с (10.1), находим компоненты тензора $\hat{\mu} = \hat{\mu}_a / \mu_0$ относительной магнитной проницаемости подмагниченного феррита

$$\begin{aligned} \mu_{xx} = \mu_{yy} = 1 - \omega_m \kappa = \mu_x, \quad \mu_{xy} = -\mu_{yx} = -ia, \\ \mu_{xz} = \mu_{yz} = \mu_{zx} = \mu_{zy} = 0, \quad \mu_{zz} = 1 = \mu_z, \quad a = \omega \cdot \kappa, \end{aligned} \quad (10.5)$$

являющиеся функцией h (кроме μ_z , зависящего от марки феррита). При изменении направления \mathbf{h} на обратное μ_{xy} и μ_{yx} меняют знаки на обратные.

Если учитывать в уравнении движения магнитного момента наличие джоулевых потерь, то компоненты $\hat{\mu}$ окажутся комплексными. Например, $\mu_x = \mu'_x - i\mu''_x$, $a = a' - ia''$, $\mu_z = \mu'_z - i\mu''_z$ (см. § 1.8, п.5). Графики зависимостей μ'_x , μ''_x , a' , a'' , μ'_z , μ''_z от h приведены на рис. 10.1,б. Значению $h = h_p = \omega / \psi$, при котором $\omega = \omega_m$, соответствуют экстремальные значения величин μ''_x , a'' .

Феррит является линейной средой (для слабого ЭМ поля) — его параметры не зависят от $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$.

Отметим, что в феррите на магнитный момент электрона действует, кроме внешнего поля $\mathbf{h} + \mathbf{H}$ эффективное поле \mathbf{h}_3 , обусловленное внутренними размагничивающими полями. Слагаемое \mathbf{h}_3 в общем поле $\mathbf{h} + \mathbf{H} + \mathbf{h}_3$ объясняет происхождение естественного ферромагнитного резонанса, наблюдаемого на частотах 500÷3000 МГц.

3. В подмагниченном феррите возможно явление ферромагнитного резонанса. Пусть в направлении вектора \mathbf{h} распространяются две Т-волны. Каждая волна имеет круговую вращающуюся поляризацию. Плоскость поляризации первой волны вращается по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора \mathbf{h} , второй волны — против часовой стрелки. Направление $\mathbf{h} = \mathbf{1}_z h$ определяет продольное направление. Обозначим первую волну знаком "+" (условно-положительная поляризация), а вторую — знаком "-" (отрицательная поляризация). Векторы $\dot{\mathbf{H}}^+ = \mathbf{1}_x \dot{H}_x^+ + \mathbf{1}_y \dot{H}_y^+$ и $\dot{\mathbf{H}}^- = \mathbf{1}_x \dot{H}_x^- + \mathbf{1}_y \dot{H}_y^-$ обеих волн находятся в поперечной плоскости. Для вращения $\dot{\mathbf{H}}^+$ с частотой ω по часовой стрелке необходимо (см. § 2.13), чтобы $\dot{H}_y^+ = -i\dot{H}_x^+$, а для вращения против часовой стрелки — $\dot{H}_y^- = i\dot{H}_x^-$.

Для Т-волны с положительной поляризацией подставим значение $\dot{H}_y^+ = -i\dot{H}_x^+$ в выражение \dot{B}_x^+ и $\dot{H}_x^+ = i\dot{H}_y^+$ — в выражение \dot{B}_y^+ (10.4). Так как $\dot{B}^+ = 1_x \dot{B}_x^+ + 1_y \dot{B}_y^+$, то имеем $\dot{B}^+ = \mu_0 \mu_+ \dot{H}^+$, где $\mu_+ = 1 - \omega_0 / (\omega - \omega_m)$ — относительная магнитная проницаемость для волны положительной поляризации.

Для Т-волны с отрицательной поляризацией тем же путем получаем $\dot{B}^- = \mu_0 \mu_- \dot{H}^-$, где $\mu_- = 1 + \omega_0 / (\omega + \omega_m)$ — относительная магнитная проницаемость.

Таким образом, во-первых, при круговых поляризациях ЭМ полей, распространяющихся в продольном направлении, магнитные проницаемости — скалярные величины (так как $\dot{B}^\pm = \mu_0 \mu_\pm \dot{H}^\pm$). Поэтому для этих полей намагниченный феррит представляет собой *изотропную линейную среду, параметры которой зависят от подмагничивающего поля*. Во-вторых, $\mu_+ \neq \mu_-$, т.е. условия распространения Т-волн с положительной и отрицательной круговыми поляризациями разные: при $\omega_m \rightarrow \omega$ получаем, что $|\mu_+| \rightarrow \infty$, а μ_- — остается конечной величиной. При учете тепловых потерь магнитная проницаемость становится комплексной $\mu_\pm = \mu'_\pm - i\mu''_\pm$. Графики зависимостей μ'_\pm , μ''_\pm от значения h приведены на рис. 10.1,б. Из графиков видно, что при положительной поляризации при h , близких к h_p , резко возрастает $|\mu_+|$. Значит, резко возрастают джоулевы потери распространяющегося поля. Объясняется это тем, что для существования незатухающей прецессии надо на частоте ω_m передать электронам энергию, равную теряемой. Роль источника, компенсирующего потери, играет распространяющееся на частоте $\omega = \omega_m$ ЭМ поле положительной круговой поляризации, у которого совпадают направление вращения вектора \dot{H}^+ и направление прецессии. При этом угол θ со временем увеличивается, что сопровождается ростом тепловых потерь в феррите (рис. 10.1,а). В результате θ устанавливается такой величины, что энергия потерь в феррите и энергия, отдаваемая ЭМ полем, становятся равными.

Явление наиболее эффективного взаимодействия на частоте $\omega = \omega_m$ положительно поляризованного ЭМ поля с намагниченным ферритом, сопровождаемое интенсивным поглощением ферритом ЭМ энергии этого поля, называют *ферромагнитным резонансом*. Если $h \neq h_p$ (т.е. $\omega \neq \omega_m$), то поглощение ферритом ЭМ энергии распространяющегося поля уменьшается, μ''_+ , как видно из графика рис. 10.1,б,

может быть очень малой величиной, при этом затухание амплитуд векторов $\dot{\mathbf{E}}^+$, $\dot{\mathbf{H}}^+$ мало.

По-другому взаимодействует феррит с ЭМ полем, имеющим отрицательную поляризацию вектора $\dot{\mathbf{H}}^-$. Направления прецессии и вращения $\dot{\mathbf{H}}^-$ при этом противоположны. Поэтому $\dot{\mathbf{H}}^-$ почти не влияет на $\dot{\mathbf{M}}$, μ'_- и μ''_- мало зависят от h и $\mu''_- \approx 0$. При этом феррит представляет среду с малыми джоулевыми потерями.

Различие значений магнитных проницаемостей для ЭМ полей с положительным и отрицательным направлениями вращения используется при создании невзаимных устройств СВЧ.

10.3. Свойства плазмы

1. Рассмотрим *математическую модель подмагниченной плазмы*. Обозначим через N и N^+ , N^- — количество (плотности) соответственно электронов и положительно и отрицательно заряженных ионов в единице объема плазмы, заполняющей неограниченное пространство. Пусть \mathbf{h} — напряженность постоянного (во времени) подмагничивающего поля. В пространстве распространяется ЭМ поле с напряженностями $\mathbf{E}(p, t)$, $\mathbf{H}(p, t)$, причем $|\mathbf{H}| \ll h$. В электрическом поле на свободный электрон воздействует сила $\mathbf{F} = -e_3 \mathbf{E}$, параллельная \mathbf{E} . Поэтому электрон приобретает скорость $\mathbf{u} = d\mathbf{l} / dt$, где \mathbf{l} — смещение электрона относительно исходного положения. На движущийся электрон в магнитном поле \mathbf{h} воздействует сила Лоренца $\mathbf{F}_л = -\mu_0 e_3 [\mathbf{u}, \mathbf{h}]$, зависящая угла между векторами \mathbf{h} и \mathbf{u} . Поэтому траектория движения электрона в пространстве имеет сложный вид. Действительно, пусть электрон при $t = t_0$ приобрел скорость $\mathbf{u}_0 \parallel \mathbf{E}$. При $t = t_1$ предположим, что $\mathbf{E}(p, t_1) = 0$. Если $\mathbf{E} \parallel \mathbf{h}$, то $\mathbf{u}_0 \parallel \mathbf{h}$ и поэтому $\mathbf{F}_л = 0$. Электрон движется вдоль силовой линии \mathbf{h} , не «замечая» подмагничивающего поля. Но если $\mathbf{E} \perp \mathbf{h}$, то $\mathbf{u}_0 \perp \mathbf{h}$ и сила $\mathbf{F}_л$ имеет максимальное значение $F_л = e_3 u_0 \mu_0 h$, а ее направление перпендикулярно плоскости расположения векторов \mathbf{u}_0 и \mathbf{h} . Такая сила не производит работы, она изменяет только направление скорости, не изменяя ее абсолютного значения. Поэтому электрон движется по окружности, плоскость которой перпендикулярна \mathbf{h} . Радиус окружности ρ определяется условием равенства центробежной силы и силы Лоренца, т.е. $m_3 u_0^2 / \rho = e_3 u_0 \mu_0 h$. Значит, $\rho = m_3 u_0 / e_3 \mu_0 h$. Очевидно, что $2\pi\rho = u_0 T_m$, где T_m — период обращения

ния электрона по окружности. Поэтому угловая скорость вращения электрона (*частота гиромагнитного резонанса* или гироскопическая частота) $\omega_m = 2\pi/T_m = \psi h$, где как n в случае феррита, $\psi = \mu_0 e_3 / m_3$.

Считаем, что \mathbf{E} составляет с \mathbf{h} некоторый угол. Тогда \mathbf{u}_0 имеет две составляющие: $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$, где $\mathbf{u}_{\parallel} \parallel \mathbf{h}$, $\mathbf{u}_{\perp} \perp \mathbf{h}$. Скорость скольжения вдоль силовых линий \mathbf{h} определяется значением \mathbf{u}_{\parallel} , а радиус вращения — значением \mathbf{u}_{\perp} . Траектория электрона имеет вид винтовой линии, ось которой параллельна \mathbf{h} . В общем случае угол может быть произвольным, \mathbf{E} , и следовательно, \mathbf{u} зависят от времени. Поэтому траектории электронов, имея элементы поступательного и вращательного движений, являются сложными кривыми. Вектор электрической поляризации \mathbf{P} , равный плотности заряда, умноженной на его смещение \mathbf{l} , т.е. $\mathbf{P} = -e_3 \mathbf{l}$, не параллелен вектору \mathbf{E} . Поэтому диэлектрическая проницаемость не является скалярной величиной.

Уравнение движения электрона определяется вторым законом механики. Силой, действующей на электрон, является сумма «кулоновской» силы — $(-e_3 \mathbf{E})$ и силы Лоренца. В плазме содержатся ионы и нейтральные молекулы, находящиеся в тепловом движении. Электроны сталкиваются с ними и передают им энергию, полученную от ЭМ поля. Эта энергия переходит в энергию теплового движения тяжелых частиц. Происходит поглощение энергии распространяющегося в плазме ЭМ поля.

Предположим, что при каждом столкновении электрон передает тяжелой частице все накопленное количество движения $m_3 \mathbf{u}$. Пусть в секунду происходит ν столкновений. Тогда за секунду количество движения уменьшается на величину $\nu m_3 \mathbf{u}$. Таким образом, по второму закону механики имеем

$$m_3 d^2 \mathbf{l} / dt^2 + \nu m_3 d \mathbf{l} / dt = -e_3 \mathbf{E} - e_3 \mu_0 [d \mathbf{l} / dt, \mathbf{h}]. \quad (10.6)$$

2. Найдем тензор диэлектрической проницаемости. Поскольку $\mathbf{E}(p, t)$ меняется во времени по гармоническому закону с частотой ω , то применяя метод комплексных амплитуд, имеем $\mathbf{l} \rightarrow \dot{\mathbf{l}}(p) \exp(i\omega t)$, $d \mathbf{l} / dt \rightarrow i\omega \dot{\mathbf{l}}$, $d^2 \mathbf{l} / dt^2 \rightarrow -\omega^2 \dot{\mathbf{l}}$. Используя эти выражения в (10.6) и обозначая $\tilde{\omega} = \omega - i\nu$, получаем

$$\omega \tilde{\omega} m_3 \dot{\mathbf{l}} = e_3 \mathbf{E} + i\omega e_3 \mu_0 [\dot{\mathbf{l}}, \mathbf{h}].$$

Разделим этот результат на $\omega\tilde{\omega}m_3$ и умножим на плотность заряда $(-e_3N)$ плазмы за счет электронов. Учтем, что $-e_3N\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{P}}$, $\omega_m = \psi h$. Направим ось z ДСК вдоль вектора \mathbf{h} , тогда $\mathbf{h} = \mathbf{1}_z h$. Имеем

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\omega_0^2}{\omega\tilde{\omega}}\epsilon_0\dot{\mathbf{E}} + i\frac{\omega_m}{\tilde{\omega}}\left[\dot{\mathbf{P}}, \mathbf{1}_z\right]$$

где $\omega_0^2 = e_3^2 N / \epsilon_0 m_3$ [f_0^2 (кГц) = $81 \cdot N$ (эл/см³)].

Раскроем здесь векторное произведение и приравняем составляющие векторов левой и правой частей равенства. Получаем $\dot{P}_z = -\omega_0^2 \epsilon_0 \dot{E}_z / \omega\tilde{\omega}$,

$$\dot{P}_x = -\frac{\omega_0^2}{\omega\tilde{\omega}}\epsilon_0\dot{E}_x + i\frac{\omega_m}{\tilde{\omega}}\dot{P}_y; \quad \dot{P}_y = -\frac{\omega_0^2}{\omega\tilde{\omega}}\epsilon_0\dot{E}_y - i\frac{\omega_m}{\tilde{\omega}}\dot{P}_x.$$

Решая эту систему двух уравнений относительно \dot{P}_x , \dot{P}_y , найдем

$$\dot{P}_x = -\frac{\tilde{\omega}\omega_0}{\omega}\tilde{\kappa}\epsilon_0\dot{E}_x - i\frac{\omega_m\omega_0}{\omega}\tilde{\kappa}\epsilon_0\dot{E}_y; \quad \dot{P}_y = i\frac{\omega_m\omega_0}{\omega}\tilde{\kappa}\epsilon_0\dot{E}_x - \frac{\tilde{\omega}\omega_0}{\omega}\tilde{\kappa}\epsilon_0\dot{E}_y, \quad (10.7)$$

где $\tilde{\kappa} = \omega_0 / (\tilde{\omega}^2 - \omega_m^2)$. Подставляя (10.7) и значение \dot{P}_z в материальные уравнения $\dot{\mathbf{D}} = \epsilon_0\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}}$, и сравнивая результат с (10.1), получаем компоненты $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_a / \epsilon_0$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} &= 1 - \frac{\tilde{\omega}\omega_0}{\omega}\tilde{\kappa} = \epsilon_x, & \epsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\tilde{\omega}\omega} = \epsilon_z, \\ \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} &= -i\frac{\omega_m\omega_0}{\omega}\tilde{\kappa} = -ib, & b &= \omega_m\omega_0\tilde{\kappa}/\omega, \\ \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} &= 0. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Таким образом, при учете потерь на нагревание плазмы компоненты тензора являются комплексными. Компоненты $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$, $\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx}$, кроме того, зависят от величины подмагничивающего поля, так как $\omega_m = \psi h$.

3. Влияние отрицательно и положительно заряженных ионов на параметры плазмы учитывается аналогичным образом. Но смещение иона обратно пропорционально его массе. Масса же иона по крайней мере в 1840 раз (для водорода) больше массы электрона. Поэтому смещением иона обычно пренебрегают. Наличие ионов учитывают только при условии, что N^+ , $N^- \gg N$.

4. Рассмотрим случай неподмагниченной плазмы ($h=0$). Тогда $\omega_m=0$ и $\tilde{\kappa}=\omega_0/\tilde{\omega}^2$. Из (10.8) имеем $\epsilon_{xx}=\epsilon_{yy}=\epsilon_{zz}=1-\omega_0^2/\tilde{\omega}\omega$, $\epsilon_{xy}=-\epsilon_{yx}=0$. Поэтому комплексная диэлектрическая проницаемость есть скалярная величина, $\tilde{\epsilon}_a=\epsilon_0\epsilon_{xx}$. Значит, плазма без подмагничивания является изотропной средой. Подставляя значение $\tilde{\omega}=\omega-iv$ в выражение для $\tilde{\epsilon}_a$, имеем

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + v^2} - i \frac{\omega_0^2 v}{\omega(\omega^2 + v^2)} \right) \quad (10.9)$$

Сравнивая это выражение со значением $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - i\sigma/\omega$ в случае изотропной проводящей среды, получаем диэлектрическую проницаемость и проводимость плазмы

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \left(1 - \omega_0^2 / (\omega^2 + v^2) \right), \quad \sigma = \epsilon_0 v \omega_0^2 / (\omega^2 + v^2).$$

Относительная диэлектрическая проницаемость неподмагниченной плазмы всегда меньше единицы. Причиной этого является отставание на π фазы тока, создаваемого движением зарядов в плазме, от фазы плотности тока смещения. При $\omega^2 = \omega_0^2 - v^2$ имеем $\epsilon_a = 0$. Если пренебречь соударениями электронов, положив $v=0$, то $\epsilon_a=0$ при $\omega=\omega_0$. Поэтому частоту ω_0 называют *собственной частотой плазмы*. Коэффициент распространения $k = \omega(\tilde{\epsilon}_a \mu_0)^{1/2} = \beta - i\alpha$. Коэффициенты фазы и затухания резко зависят от частоты. Для высоких частот, если $\omega^2 \gg v^2$, то $\omega^2 + v^2 \approx \omega^2$. Тогда $\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0 \approx 1 - \omega_0^2 / \omega^2$, $\sigma \approx \epsilon_0 v \omega_0^2 / \omega^2$, т.е. ϵ и σ зависят от частоты. При $\omega^2 \ll v^2$ имеем $\omega^2 + v^2 \approx v^2$. Тогда $\epsilon \approx 1 - \omega_0^2 / v^2$, $\sigma \approx \epsilon_0 \omega_0^2 / v$, т.е. параметры плазмы, как в твердом теле, не зависят от частоты.

Графики зависимостей параметров $1-\epsilon$, σ от ω при различном числе столкновений v и при $N=10^6$ эл/см³ (максимальной электронной плотности ионосферы) изображены на рис. 10.2, а, б. При изменении N характер графиков не меняется, по оси ординат изменяется только масштаб. Отметим, что на частотах, где $\epsilon < 0$, коэффициент затухания α имеет большую величину. Поэтому глубина проникновения в такую среду очень мала. На рис. 10.2, в приведен график зависимости α от частоты при $N=10^5$ эл/см³, $v=10^5$ 1/с. Как видно из графика, при $\omega \approx v$ функция $\alpha(\omega)$ имеет максимум — наблюдается резонансное поглощение ЭМ поля. В ионосфере $v=10^3 + 10^7$ с⁻¹. При

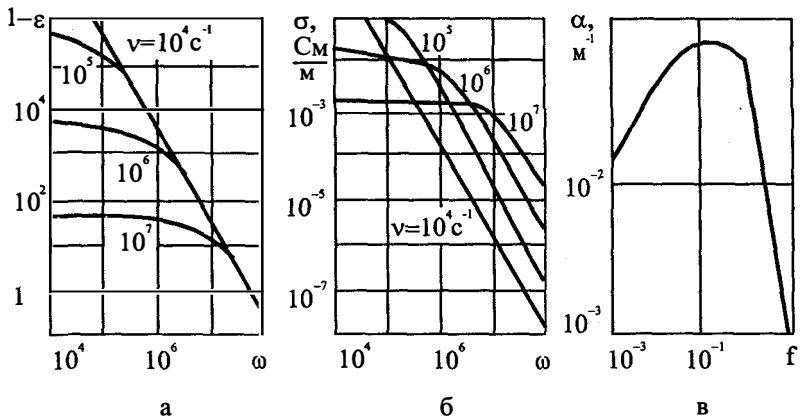


Рис. 10.2. Графики зависимостей параметров неподмагниченной плазмы от частоты

$\nu = 10^7 \text{ c}^{-1}$ резонансное поглощение происходит на частоте $f \approx 1,5 \text{ МГц}$, поэтому в диапазоне КВ происходит уменьшение α с ростом f , а в диапазоне СВ α увеличивается с повышением частоты.

Объясняется такая зависимость $\alpha(\omega)$ тем, что при $\omega < \nu$ время t_c свободного пробега электрона меньше периода T колебаний ЭМ поля. За время $t_c < T$ электрон приобретает малую часть энергии ЭМ поля, и эта энергия отдается тяжелым частицам малыми порциями. При $\omega > \nu$ и $t_c > T$ электрон несколько раз переизлучает энергию, не отдавая ее тяжелым частицам. Поэтому α уменьшается.

5. В подмагниченной плазме возможно явление гиромангнитного резонанса. Рассмотрим распространение в направлении вектора \mathbf{h} двух Т-волн круговой поляризации. Положительно поляризованная волна имеет $\dot{\mathbf{E}}^+ = 1_x \dot{E}_x^+ + 1_y \dot{E}_y^+$, $\dot{E}_y^+ = -i\dot{E}_x^+$, отрицательно поляризованная волна — $\dot{\mathbf{E}}^- = 1_x \dot{E}_x^- + 1_y \dot{E}_y^-$, $\dot{E}_y^- = i\dot{E}_x^-$. Для положительно поляризованной волны заменим $\dot{E}_y^+ = -i\dot{E}_x^+$ в (10.7) для \dot{P}_x^+ и $\dot{E}_x^+ = i\dot{E}_y^+$ — для \dot{P}_y^+ . Затем учтем, что $\dot{D}_x^+ = \epsilon_0 \dot{E}_x^+ + \dot{P}_x^+$, $\dot{D}_y^+ = \epsilon_0 \dot{E}_y^+ + \dot{P}_y^+$, $\dot{D}_z^+ = \epsilon_0 \dot{E}_z^+ + \dot{P}_z^+ = 0$. При этом материальное уравнение имеет вид $\dot{\mathbf{D}}^+ = \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}^+ + \dot{\mathbf{P}}^+ = \epsilon_{a+} \dot{\mathbf{E}}^+$, где $\epsilon_{a+} = \epsilon_0 \epsilon_+ + \epsilon_+ = 1 - \omega_0 \tilde{\kappa}(\tilde{\omega} + \omega_m) / \omega$ — комплексные диэлектрическая и относительная диэлектрическая проницаемости положительно поляризованной по кругу волны.

Для отрицательно поляризованной волны тем же путем получаем $\dot{\mathbf{D}} = \epsilon_{a-} \dot{\mathbf{E}}^-$, где $\epsilon_{a-} = \epsilon_0 \epsilon_-$ и $\epsilon_- = 1 - \omega_0 \tilde{\omega} (\tilde{\omega} - \omega_m) / \omega$ — комплексные диэлектрическая и относительная диэлектрическая проницаемости отрицательно поляризованной по кругу волны.

Таким образом, во-первых, диэлектрическая проницаемость для поляризованной по кругу ЭМ волны, распространяющейся в продольном направлении, является скалярной величиной. Поэтому для этого поля подмагниченная плазма представляет собой изотропную линейную среду, параметры которой зависят от подмагничивающего поля. Во-вторых, $\epsilon_+ \neq \epsilon_-$, т.е. условия распространения Т-волн с положительной и отрицательной круговыми поляризациями разные. Если подставить в выражения $\epsilon_{\pm} = \epsilon'_{\pm} - i\epsilon''_{\pm}$ значения $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}$, то получим

$$\epsilon'_{\pm} = 1 - \frac{\omega_0^2 (\omega \mp \omega_m)}{\omega [(\omega \mp \omega_m)^2 + \nu^2]}, \quad \epsilon''_{\pm} = \frac{\nu \omega_0^2}{\omega [(\omega \mp \omega_m)^2 + \nu^2]}. \quad (10.10)$$

Коэффициенты распространения волн в плазме $k_{\pm}^2 = (\beta_{\pm} - i\alpha_{\pm})^2 = \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_{\pm} \mu_0 = \beta_0 \epsilon_{\pm}$, где $\beta_0 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$. Подставляя сюда значения ϵ_{\pm} , возводя в квадрат левую часть, приравнивая действительные и мнимые части равенств, получаем систему двух алгебраических уравнений для α_{\pm} и β_{\pm} , которая приводится к двум биквадратным уравнениям. Из четырех корней выбираются удовлетворяющие условиям излучения. Таким образом,

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{\pm} \\ \beta_{\pm} \end{array} \right\} = \beta_0 \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\epsilon'^2_{\pm} + \epsilon''^2_{\pm}} \mp \epsilon'_{\pm} \right) \right]^{1/2}. \quad (10.11)$$

При $\omega \rightarrow \omega_m$ значение ϵ''_+ по (10.10) является максимальным, которому по (10.11) соответствует повышенное значение коэффициента затухания α_+ . ЭМ энергия положительно поляризованной волны при $\omega = \omega_m$ переходит в кинетическую энергию электронов, вращающихся вокруг силовых линий \mathbf{h} . Наступает продольный гиромагнитный резонанс. Он сопровождается повышенным затуханием амплитуд векторов положительно поляризованного ЭМ поля.

При $\omega \rightarrow \omega_m$ значение ϵ''_- не является максимальным, при этом $\alpha_- < \alpha_+$. Резонансное поглощение отрицательно поляризованной волны отсутствует.

6. С целью упрощения анализа результатов п.5 считаем, что $\nu = 0$. При этом $\epsilon''_{\pm} = 0$ и $\epsilon'_{\pm} = 1 - \omega_0^2 / (\omega(\omega \mp \omega_m))$. В зависимости от ω значения ϵ'_{\pm} могут быть положительными, нулевыми и отрицательными

ми. При $\epsilon'_\pm = 0$ волнового процесса в плазме нет, так как по (10.11) $\beta_\pm = 0$. Если $\epsilon'_\pm > 0$, то $\beta_\pm = \omega\sqrt{\epsilon'_\pm}/c$, $\alpha_\pm = 0$ и волны обеих круговых поляризацій распространяются вдоль \mathbf{h} без затухания. Но если $\epsilon'_\pm < 0$, то $\beta_\pm = 0$, $\alpha_\pm = \omega\sqrt{|\epsilon'_\pm|}/c$ и волновой процесс в плазме отсутствует, амплитуды векторов поля убывают вдоль z по экспоненциальному закону. Продольное распространение ЭМ поля круговой поляризации в такой среде становится невозможным. Это явление не связано с тепловыми потерями в плазме, оно аналогично явлению в запредельном волноводе. Если плазма имеет ограниченные размеры в поперечной плоскости, то волна из нее вытесняется и распространяется вне плазмы. Это явление называют *эффектом смещения поля*. Аналогичный эффект проявляется в намагниченном феррите при положительной поляризации, когда $\mu'_+ < 0$, а $\mu'_+ \approx 0$.

7. Рассмотрим *ограничения по частотам ЭМ полей*. Считаем, что $\nu = 0$. Волны положительной и отрицательной поляризацій распространяются вдоль \mathbf{h} при $\epsilon'_\pm > 0$. Для выполнения условия $\epsilon'_+ > 0$ необходимо, чтобы $\omega_0^2/\omega(\omega - \omega_m) < 1$. Условие $\epsilon'_- > 0$ выполняется при $\omega_0^2/\omega(\omega + \omega_m) < 1$. Поэтому для существования волнового процесса положительно поляризованной волны частота ω_+ должна удовлетворять условию $\omega_+^2 - \omega_m\omega_+ - \omega_0^2 > 0$. Волновой процесс отрицательно поляризованной волны существует при частотах ω_- , удовлетворяющих условию $\omega_-^2 + \omega_m\omega_- - \omega_0^2 > 0$. Решая эти неравенства, получаем $\omega_+ > \omega_m/2 + [(\omega_m/2)^2 + \omega_0^2]^{1/2}$, $\omega_- > -\omega_m/2 + [(\omega_m/2)^2 + \omega_0^2]^{1/2}$. Таким образом, *условие возможности продольного распространения положительно поляризованной волны является более жестким. При одних и тех же значениях ω_0 и ω_m (плотности N и h) в плазме может распространяться отрицательно поляризованная волна более низкой частоты*. Так, например, отрицательно поляризованная волна может проникать через слой ионосферы при $\omega < \omega_0$. Это условие может выполняться даже в диапазоне ОНЧ.

Для ионосферы, находящейся в постоянном магнитном поле Земли, $h = 40$ А/м. Поэтому $\omega_m = \psi h = 7\pi \cdot 10^4 \cdot 40 = 28\pi \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, т.е. частота $f_m = 14 \cdot 10^5$ Гц = 1,4 МГц.

10.4. Перестановочная двойственность

Считаем, что точка наблюдения векторов ЭМ поля в подмагниченных феррите или плазме расположена вне сторонних источников. При этом уравнения Максвелла являются однородными. Для намагниченного феррита $\dot{\mathbf{D}} = \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{B}} = \hat{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}$, поэтому

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -i\omega \hat{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}; \quad (10.12)$$

для подмагниченной плазмы $\dot{\mathbf{D}} = \hat{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{B}} = \mu_a \dot{\mathbf{H}}$, поэтому

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = i\omega \hat{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (10.13)$$

Если $\mathbf{h} = \mathbf{1}_z h$, то (10.12) и (10.13) переходят друг в друга при замене $\dot{\mathbf{E}} \leftrightarrow \pm \dot{\mathbf{H}}$, $\epsilon_a \leftrightarrow \mu_a$, $\mu_a \leftrightarrow \epsilon_a$. Последнее соотношение предполагает замену компонент тензоров (10.5) и (10.8) по правилу $\epsilon_{anj} \leftrightarrow \mu_{anj}$.

Если изучены ЭМ явления для модели подмагниченного феррита, заполняющего неограниченное пространство, то ЭМ явления в такой же модели подмагниченной плазмы можно получить путем перестановок векторов напряженностей поля и параметров сред. Этот принцип называют *принципом перестановочной двойственности для анизотропных сред*.

Таким образом, при распространении ЭМ волны в подмагниченном феррите происходящие с векторами $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ ЭМ явления соответствуют в подмагниченной плазме ЭМ явлениям, происходящим с векторами $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. Это следствие уравнений Максвелла (10.12), (10.13) и одинаковой структуры тензоров $\hat{\mu}_a$ и $\hat{\epsilon}_a$. Примером является поведение полярно и отрицательно поляризованных по кругу волн, распространяющихся в продольном направлении в феррите и плазме, явления ферромагнитного и гиромагнитного резонансов, эффекты смещения полей.

10.5. Эффект Фарадея

1. Рассмотрим постановки задачи о возможности существования в феррите продольно распространяющегося ЭМ поля. Для упрощения задачи считаем, что феррит заполняет неограниченное пространство, подмагничивающее поле $\mathbf{h} = \mathbf{1}_z h$ и параметры $\hat{\epsilon}_a$, $\hat{\mu}_a$ однородны по x, y . Поэтому $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$. С учетом (10.5) при этом из (10.12) имеем $\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_x, & \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= i\omega \mu_0 (\mu_x \dot{H}_x - ia \dot{H}_y), \\
\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} &= i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_y, & \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} &= -i\omega \mu_0 (\mu_x \dot{H}_y + ia \dot{H}_x).
\end{aligned}
\tag{10.14}$$

Необходимо найти ЭМ поле, векторы напряженностей которого $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ удовлетворяют уравнениям (10.14) и условиям излучения при $z \rightarrow \pm\infty$.

В систему уравнений (10.14) входят только составляющие \dot{H}_x, \dot{E}_y и \dot{H}_y, \dot{E}_x . Они являются поперечными относительно продольного направления, определяемого ортом $\mathbf{1}_z$. Это значит, что в рассматриваемой модели феррита могут существовать только бегущие Т-волны, распространяющиеся вдоль возрастающих ($z \rightarrow \infty$) и вдоль убывающих ($z \rightarrow -\infty$) значений z . Поэтому решение задачи надо искать в виде бегущей вдоль возрастающих значений z однородной по x, y плоской волны, удовлетворяющей условию излучения при $z \rightarrow \infty$ (см. § 3.2, п.7):

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{i}_x \dot{H}_x + \mathbf{i}_y \dot{H}_y, \quad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{i}_x \dot{E}_x + \mathbf{i}_y \dot{E}_y,$$

где

$$\dot{H}_x = \dot{H}_{0x} e^{-ikz}, \quad \dot{E}_y = -W_y \dot{H}_x; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_{0y} e^{-ikz}, \quad \dot{E}_x = W_x \dot{H}_y, \tag{10.15}$$

$\dot{H}_{0x}, \dot{H}_{0y}$ — амплитуды. Значения k, W_x, W_y — коэффициента распространения и характеристических сопротивлений, а также связь между \dot{H}_{0x} и \dot{H}_{0y} надо определить с помощью (10.14). Это *прямые волны*, их вектор Пойнтинга $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{1}_z \dot{P}_z$ (см. формулу (5.1)). *Обратные волны* имеют $\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{1}_z \dot{P}_z$. Для них (второе) решение системы (10.14) надо искать в виде тоже линейно поляризованных бегущих вдоль уменьшающихся значений z однородных по x, y плоских волн, удовлетворяющих условию излучения при $z \rightarrow -\infty$:

$$\dot{H}_x = H_{0x} e^{ikz}, \quad \dot{E}_y = W_y \dot{H}_x; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_{0y} e^{ikz}, \quad \dot{E}_x = -W_x \dot{H}_y. \tag{10.16}$$

2. Решение задачи, прямые волны. Подставим для этого (10.15) в (10.14). Из первых двух уравнений получаем, сокращая общие множители, $k = \omega \tilde{\epsilon}_a W_x, k = \omega \tilde{\epsilon}_a W_y$, т.е. $W_x = W_y = W = k / \omega \tilde{\epsilon}_a$. Из двух последних уравнений имеем систему

$$\begin{aligned}
(k^2 - \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_0 \mu_x) \dot{H}_{0x} &= -i\omega^2 a \tilde{\epsilon}_a \mu_0 \dot{H}_{0y}; \\
(k^2 - \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_0 \mu_x) \dot{H}_{0y} &= i\omega^2 a \tilde{\epsilon}_a \mu_0 \dot{H}_{0x}.
\end{aligned}
\tag{10.17}$$

Исключая из нее $\dot{H}_{0x}, \dot{H}_{0y}$, получаем $(k^2 - \omega^2 \epsilon_a \mu_0 \mu_x)^2 = (\omega^2 a \epsilon_a \mu_0)^2$, откуда имеем корни $k_{1,2}^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_0 (\mu_x \pm a)$. Таким образом, находим четыре корня $k_{1,2,3,4} = \pm \omega [\tilde{\epsilon}_a \mu_0 (\mu_x \pm a)]^{1/2}$. Подставляя вместо μ_x и a их значения из (10.5), получаем $k_{1,2,3,4} = \pm \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_0 \mu_{\mp}}$. В соответствии с условием излучения корни $k_{1,2} = k_{\mp} = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_0 \mu_{\mp}}$ соответствуют двум волнам, бегущим вдоль увеличивающихся значений z . Подставим $k_1 = k_-$ в (10.17). Для первой волны получаем связь ортогонально поляризованных составляющих вектора \dot{H}^- : $\dot{H}_{0y}^- = i\dot{H}_{0x}^-$. При этом из (10.15) имеем $\dot{E}_y^- = i\dot{E}_x^-$, $W = W_- = k_- / \omega \tilde{\epsilon}_a$. Эта волна имеет круговую отрицательную поляризацию (см. § 10.2).

Для второй волны, подставляя $k_2 = k_+$ в (10.17), получаем $\dot{H}_{0y}^+ = -i\dot{H}_{0x}^+$. При этом из (10.15) имеем $\dot{E}_y^+ = -i\dot{E}_x^+$, $W = W_+ = k_+ / \omega \tilde{\epsilon}_a$. Эта волна имеет положительную круговую вращающуюся поляризацию.

Таким образом, в намагниченном однородном по x, y феррите прямая волна (10.15), распространяющаяся в продольном направлении (в направлении $\mathbf{h} = \mathbf{1}_z h$), может существовать только в виде суммы двух поляризованных по кругу плоских волн с противоположными направлениями вращения плоскостей поляризации: $\dot{H}_x = \dot{H}_x^+ + \dot{H}_x^-$, $\dot{H}_y = \dot{H}_y^+ + \dot{H}_y^-$.

3. *Обратные волны.* Коэффициенты распространения $k_{3,4} = -\omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a \mu_{\mp}}$ по (10.15) определяют обратные волны. Для последних с помощью (10.17) находим $\dot{H}_{0y}^{\mp} = \pm i\dot{H}_{0x}^{\mp}$. Ортогональные в пространстве составляющие векторов \dot{H}^- и \dot{H}^+ сдвинуты по фазе на $\pi/2$ и равны по амплитуде. Первая волна имеет отрицательную круговую поляризацию, вторая волна имеет положительную круговую поляризацию. Таким образом, обратная волна, распространяющаяся в продольном направлении (в направлении вектора $(-\mathbf{h})$), может существовать только в виде суммы двух поляризованных по кругу плоских волн с противоположными направлениями вращения плоскостей поляризации.

Эти же результаты получаются при подстановке (10.16) в (10.14). Но тогда (10.16) удовлетворяют условиям излучения при $k_{1,2} = k_{\mp}$.

4. *Поляризации ЭМ поля и эффект Фарадея.* При учете потерь $\mu_{\pm} = \mu'_{\pm} - i\mu''_{\pm}$. Поэтому для α_{\pm} и β_{\pm} из выражения

$k_{\pm}^2 = (\beta_{\pm} - i\alpha_{\pm})^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_0 (\mu'_{\pm} - i\mu''_{\pm})$ получаем при $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$ тем же путем, который использован при выводе (10.11):

$$\left. \begin{matrix} \alpha_{\pm} \\ \beta_{\pm} \end{matrix} \right\} = \omega \left[\frac{\epsilon_a \mu_0}{2} \left(\sqrt{\mu'^2_{\pm} + \mu''^2_{\pm}} \mp \mu'_{\pm} \right) \right]^{1/2}. \quad (10.18)$$

Если $h < h_1$, то как следует из графиков рис. 10.1,б, $\mu'_+ < \mu'_-$, $\mu''_{\pm} \approx 0$. При этом из (10.18) имеем $\alpha_{\pm} \approx 0$. Поэтому обе волны круговых поляризаций распространяются с минимальным затуханием. Найдем ортогональные составляющие \dot{H}_x и \dot{H}_y вектора \dot{H} результирующего поля прямой волны. Имеем

$$\dot{H}_x = \dot{H}_x^+ + \dot{H}_x^- = \dot{H}_{0x}^+ \exp(-ik_+z) + \dot{H}_{0x}^- \exp(-ik_-z).$$

Если $\dot{H}_{0x}^+ \exp(-\alpha_+z) \approx \dot{H}_{0x}^- \exp(-\alpha_-z) \approx \dot{H}_0 \exp(-\alpha z)$, где $\dot{H}_0 \approx \dot{H}_{0x}^+ \approx \dot{H}_{0x}^-$, $\alpha \approx \alpha_+ \approx \alpha_-$, то $\dot{H}_x \approx \dot{H}_0 \exp(-\alpha z) \times [\exp(-i\beta_+z) + \exp(-i\beta_-z)]$. Вынесем из квадратных скобок множитель $\exp[-i(\beta_- + \beta_+)z/2]$ и к результату применим формулу Эйлера. Получим

$$\dot{H}_x \approx 2\dot{H}_0 e^{-\alpha z} \cdot e^{-i(\beta_- + \beta_+)z/2} \cdot \cos[(\beta_- - \beta_+)z/2]$$

Для результирующего поля имеем

$$\dot{H}_y = \dot{H}_y^+ + \dot{H}_y^- = -i\dot{H}_{0x}^+ \exp(-ik_+z) + i\dot{H}_{0x}^- \exp(-ik_-z).$$

Аналогичным образом преобразуя это выражение, имеем

$$\dot{H}_y \approx 2\dot{H}_0 e^{-\alpha z} \cdot e^{-i(\beta_- + \beta_+)z/2} \cdot \sin[(\beta_- - \beta_+)z/2]$$

Обозначая $\gamma = (\beta_- - \beta_+)z/2$, получаем вектор результирующего поля

$$\dot{H} = \mathbf{1}_x \dot{H}_x + \mathbf{1}_y \dot{H}_y \approx 2\dot{H}_0 e^{-\alpha z} \cdot e^{-i(\beta_- + \beta_+)z/2} \cdot (\mathbf{1}_x \cos \gamma + \mathbf{1}_y \sin \gamma) \quad (10.19)$$

Таким образом, ортогональные составляющие вектора \dot{H} синфазны или противофазны, поэтому он линейно поляризован, фаза его линейно меняется по z , коэффициент фазы равен средней величине $(\beta_- + \beta_+)/2$, значит, фазовая скорость равна средней между фазовыми скоростями положительно и отрицательно поляризованных волн. Но угол наклона вектора \dot{H} к оси x $\gamma = \gamma(z) = (\beta_- - \beta_+)z/2$ с ростом z увеличивается. Конец вектора \dot{H} по мере распространения волны (с ростом z) описывает винтовую линию (рис. 10.3,а). На длине пути $z = l$ вектор \dot{H} поворачивается по часовой стрелке на угол $\gamma_1 = 0,5(\beta_- - \beta_+)l$.

Вектор $\dot{\mathbf{E}} \approx \mathbf{1}_x(\dot{E}_x^+ + \dot{E}_x^-) + \mathbf{1}_y(\dot{E}_y^+ + \dot{E}_y^-)$ суммарного поля не является линейно поляризованным, так как характеристические сопротивления положительно и отрицательно поляризованных волн неодинаковы ($W_+ \neq W_-$). Поэтому $W_+ \dot{H}_0 \neq W_- \dot{H}_0$. Сложение векторов напряженностей полей двух круговых поляризаций при разных амплитудах напряженностей полей приводит к полю эллиптической поляризации. Большая ось эллипса поляризации вектора $\dot{\mathbf{E}}$ поворачивается так же, как поворачивается вектор $\dot{\mathbf{H}}$.

При более точном учете потерь в феррите оказывается, что $\alpha_+ \neq \alpha_-$. Поэтому $\dot{H}_{0x}^+ \exp(-\alpha_+ z) \neq \dot{H}_{0x}^- \exp(-\alpha_- z)$ результирующие векторы $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ оказываются эллиптически поляризованными в поперечной плоскости. Но большие оси эллипсов поляризации поворачиваются с ростом z на угол $\gamma = 0,5(\beta_- - \beta_+)z$.

Описанное явление называют *эффектом Фарадея*. Параметр $\gamma_0 = (\beta_- - \beta_+)/2$ — *постоянная Фарадея*. Она зависит от частоты, величины подмагничивающего поля и свойств феррита. Среды, в которых существует эффект Фарадея, называют *гиротропными* (вращающими).

5. Вектор $\dot{\mathbf{H}}$ обратной волны в модели, в которой отсутствуют потери, тоже имеет линейную поляризацию. Поворот его происходит тоже по часовой стрелке (если смотреть вдоль вектора \mathbf{h}) и определяется постоянной Фарадея (рис. 10.3,б).

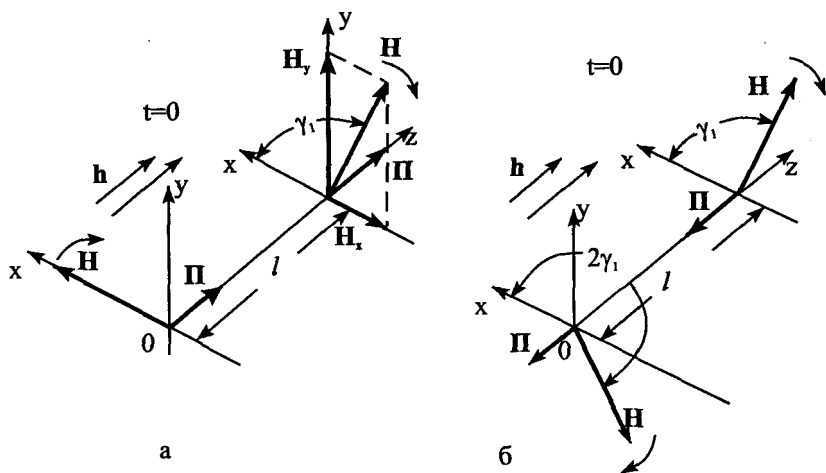


Рис. 10.3. Поворот вектора \mathbf{H} прямой (а) и обратной (б) волн

На пути длиной $z = l$ вектор $\dot{\mathbf{H}}$ прямой волны получает поворот плоскости поляризации на угол $\gamma_1 = 0,5(\beta_- - \beta_+)l$ (рис. 10.3,а). Если вектор $\dot{\mathbf{H}}$ обратной волны на расстоянии $z = l$ находится под углом γ_1 к оси x (рис. 10.3,б), то на пути $z = l$, поворачиваясь по часовой стрелке, он приобретает дополнительный угол γ_1 . В начале координат он находится под углом $2\gamma_1$ к оси x . Таким образом, вектор $\dot{\mathbf{H}}$ в исходное состояние (рис. 10.3,а) прямой волны в начале координат не приходит. Это значит, что поле в гиротропной среде не подчиняется принципу взаимности.

6. *Возможность существования в плазме продольно распространяющегося ЭМ поля* изучим с помощью математической модели, рассмотренной в § 10.3. При этом считаем, что подмагничивающее поле $\mathbf{h} = \mathbf{1}_z h$ и параметры $\hat{\epsilon}_a$, μ_a однородны по x, y . Поэтому $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$. Не решая уравнений (10.13), используем принцип перестановочной двойственности.

Применяя его к (10.15), (10.16), определяем следующее. В направлении подмагничивающего поля в плазме могут распространяться две прямые волны с коэффициентами распространения k_{\mp} и две обратные волны с такими же коэффициентами распространения. Значения α_{\mp} и β_{\mp} определяются по (10.11). Ортогональные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}^{\mp}$ связаны так: $\dot{E}_{0y}^{\mp} = \pm i \dot{E}_{0x}^{\mp}$. Это значит, что две прямые волны поляризованы по кругу и имеют противоположные направления вращения плоскостей поляризации. Для существования линейно поляризованных векторов $\dot{\mathbf{E}}$ прямой и обратной волн надо, чтобы $\alpha_+ = \alpha_-$. При этом вектор $\dot{\mathbf{E}}$ прямой результирующей волны получаем из (10.19):

$$\dot{\mathbf{E}} \approx 2\dot{E}_0 e^{-\alpha z} \exp[-i(\beta_+ + \beta_-)z/2] (\mathbf{1}_x \cos \gamma + \mathbf{1}_y \sin \gamma).$$

С ростом z его угол наклона к оси x увеличивается. (На рис. 10.3,а вектор $\dot{\mathbf{H}}$ надо заменить на вектор $\dot{\mathbf{E}}$). В плазме при продольном распространении поля (вдоль вектора \mathbf{h}) наблюдается эффект Фарадея. Вектор $\dot{\mathbf{H}}$ эллиптически поляризован в поперечной плоскости, большая ось эллипса поляризации его поворачивается так же, как поворачивается вектор $\dot{\mathbf{E}}$.

7. При расчетах параметров плазмы применяется понятие коэффициентов преломления волн, поляризованных по кругу: $n_{\pm} = \beta_{\pm} / \beta_0$,

$\beta_0 = \omega/c$. Если не учитываются потери, то $\beta_{\pm} = \beta_0 \sqrt{\epsilon'_{\pm}}$ (см. § 10.3, п.6).

Тогда $n_{\pm} = \sqrt{\epsilon'_{\pm}} = [1 - \omega_0^2 / \omega(\omega \mp \omega_m)]^{1/2}$. При этом постоянная Фарадея $\gamma_0 = \beta_0(n_- - n_+)/2$.

10.6. Волны в поперечно намагниченных феррите и плазме

1. Рассмотрим постановку задачи о возможности существования в подмагниченном феррите поперечно распространяющегося ЭМ поля. Пусть направление распространения ЭМ поля перпендикулярно направлению подмагничивающего поля. В математической модели феррит заполняет неограниченное пространство, подмагничивающее поле ($\mathbf{h} = 1_z h$) и параметры феррита однородны по y и z . Направление распространения поля определяется ортом 1_x . При этом $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ и из (10.12) получаем

$$\begin{aligned} 0 &= i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_x, & 0 &= -i\omega \mu_0 (\mu_x \dot{H}_x - ia \dot{H}_y), \\ -\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_y, & \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= i\omega \mu_0 (ia \dot{H}_x + \mu_x \dot{H}_y), \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} &= i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_z, & \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} &= -i\omega \mu_0 \mu_z \dot{H}_z. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Необходимо найти ЭМ поле, векторы напряженностей $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{H}}$ которого удовлетворяют уравнениям (10.21) и условиям излучения при $x \rightarrow \pm\infty$.

2. Решение системы уравнений (10.21) ищем в виде линейно поляризованных бегущих вдоль возрастающих значений x (прямые волны) плоских волн, удовлетворяющих условию излучения при $x \rightarrow \infty$. Продольная составляющая $\dot{E}_x = 0$. Поперечные составляющие \dot{E}_y и \dot{H}_z векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$, как видно из (10.21), связаны только вторым и шестым уравнениями системы. Поэтому последние определяют T -волну. Составляющие \dot{E}_z , \dot{H}_x , \dot{H}_y связаны третьим, четвертым и пятым уравнениями, так как $\dot{H}_x \neq 0$, то они определяют H -волну относительно продольного направления (оси x). Решение ищем в виде, аналогичном (10.15):

$$\begin{aligned} \dot{H}_z &= \dot{H}_{0z} e^{-ikx}, \quad \dot{E}_y = W_y \dot{H}_z; \\ \dot{H}_x &= \dot{H}_{0x} e^{-ikx}, \quad \dot{H}_y = \dot{H}_{0y} e^{-ikx}, \quad \dot{E}_z = -W_z \dot{H}_y, \end{aligned} \quad (10.22)$$

где амплитуды \dot{H}_{0z} , \dot{H}_{0x} , \dot{H}_{0y} , характеристические сопротивления и коэффициент распространения надо определить из (10.21). Вектор Пойнтинга Т-волны направлен вдоль оси x ; вектор Пойнтинга Н-волны имеет составляющие \dot{H}_x , \dot{H}_y .

Рассмотрим Т-волну. Подставим \dot{H}_z , \dot{E}_y в (10.21). Получаем $W_y = k / \omega \tilde{\epsilon}_a$, $k^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_0 \mu_z$ и корнями являются $k_{1,2} = \pm \omega (\tilde{\epsilon}_a \mu_0)^{1/2}$. Условию излучения для прямой волны удовлетворяет корень $k_1 = k_{\parallel} = \omega (\tilde{\epsilon}_a \mu_0)^{1/2}$. Поэтому $W_y = W_{\parallel} = k_{\parallel} / \omega \tilde{\epsilon}_a = (\mu_0 / \tilde{\epsilon}_a)^{1/2}$. Таким образом, решение $\dot{H}_z = \dot{H}_{0z} \exp(-ik_{\parallel} x)$, $\dot{E}_y = W_{\parallel} \dot{H}_z$ определяет обыкновенную плоскую линейно поляризованную однородную Т-волну, распространяющуюся с фазовой скоростью $v_{\parallel} = \omega / \beta_{\parallel}$. Если не учитываются потери, то $\beta_{\parallel} = \omega (\epsilon_a \mu_0)^{1/2}$. Вектор $\dot{H} = \mathbf{1}_z \dot{H}_z \parallel \mathbf{h}$, поэтому \dot{H} не влияет на прецессию магнитного момента электрона. Вектор $\dot{E} \perp \mathbf{h}$. Эта волна не «замечает» подмагничивающего поля.

3. *Необыкновенно ведет себя Н-волна.* Подставляя \dot{H}_x , \dot{H}_y и \dot{E}_z в (10.21), имеем:

$$k = \omega \tilde{\epsilon}_a W_z; \quad \mu_x \dot{H}_{0x} = ia \dot{H}_{0y}; \quad kW_z \dot{H}_{0y} = \omega \mu_0 (ia \dot{H}_{0x} + \mu_x \dot{H}_{0y}) \quad (10.23)$$

Таким образом, $W_z = k / \omega \tilde{\epsilon}_a$, $\dot{H}_{0y} = -i \mu_x \dot{H}_{0x} / a$, т.е. ортогональные составляющие \dot{H}_x и \dot{H}_y сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Поэтому вектор \dot{H} этой волны имеет эллиптическую поляризацию в плоскости xy . Вектор $\dot{E} = \mathbf{1}_z \dot{E}_z$ имеет линейную поляризацию. Исключая \dot{H}_{0x} и \dot{H}_{0y} из (10.23), получаем $k^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_0 (\mu_x^2 - a^2) / \mu_x$, т.е. решениями являются два корня $k_{1,2} = \pm \omega [\tilde{\epsilon}_a \mu_0 (\mu_x^2 - a^2) / \mu_x]^{1/2}$. Условию излучения удовлетворяет корень $k_1 = k_{\perp} = \omega [\tilde{\epsilon}_a \mu_0 (\mu_x^2 - a^2) / \mu_x]^{1/2}$. Тогда $W_z = W_{\perp} = k_{\perp} / \omega \tilde{\epsilon}_a$.

Если обозначить через $\mu_{\perp} = (\mu_x^2 - a^2) / \mu_x$ — относительную магнитную проницаемость феррита для этой волны, то

$k_{\perp} = \omega(\tilde{\epsilon}_a \mu_0 \mu_{\perp})^{1/2}$. Подставляя вместо μ_x и a их значения из (10.5) и учитывая выражения для μ_{\pm} (§ 10.2, п.3), имеем $\mu_{\perp} = (\mu_x - a)(\mu_x + a)/\mu_x = 2\mu_+ \mu_- / (\mu_+ + \mu_-) = \mu'_{\perp} - i\mu''_{\perp}$.

Если предположить, что $\mu''_{\perp} \approx 0$, то $\mu_{\perp} \approx \mu'_{\perp}$. Значение $\mu_{\perp} \approx 1$ (рис. 10.1,б). При этом $\mu_{\perp} \approx 2\mu'_+ / (1 + \mu'_+)$. При некотором значении $h = h_{\perp}$ имеем $\mu'_+ = -1$ (рис. 10.1,б) и знаменатель обращается в нуль. Тогда μ_{\perp} неограниченно возрастает. Так как $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - i\epsilon''_a$, то $k_{\perp} = \beta_{\perp} - i\alpha_{\perp} \approx \omega(\tilde{\epsilon}_a \mu_0 \mu'_{\perp})^{1/2} = \omega(\mu_0 \mu'_{\perp})^{1/2} (\epsilon'_a - i\epsilon''_a)^{1/2}$. Значит, α_{\perp} при $\mu'_{\perp} \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, а фазовая скорость волны $v_{\perp} = \omega/\beta_{\perp} \rightarrow 0$. При этом наступает *поперечный ферромагнитный резонанс*. Если $\mu''_{\perp} \neq 0$, то α_{\perp} и β_{\perp} определяются по (10.18), в которых μ'_{\pm} и μ''_{\pm} заменяются на μ'_{\perp} , μ''_{\perp} . При этом α_{\perp} резко возрастает при $h = h_{\perp} < h_p$, где h_p — напряженность подмагничивающего поля продольного резонанса (рис. 10.1,б). Полагая $1 + \mu_+ = 0$ и подставляя значение μ_+ , получаем, что при поперечном ферромагнитном резонансе $\omega^2 - \omega_m^2 - \omega_0 \omega_m = 0$. Отсюда находим частоту ω_{\perp} поперечного ферромагнитного резонанса: $\omega_{\perp} = [\omega_m (\omega_m + \omega_0)]^{1/2}$.

Если $\mu'_{\perp} < 0$, то в этой области значений h проявляется эффект смещения поля необыкновенной волны.

4. Рассмотрим поляризацию результирующего ЭМ поля. Распространяющееся в поперечном направлении ЭМ поле по (10.22) может существовать только в виде наложения полей обыкновенной и необыкновенной волн. При этом $\dot{E} = \dot{E}_y + \dot{E}_z$ и $\dot{E}_y / \dot{E}_z = (W_{\parallel} \dot{H}_{0z} / W_{\perp} \dot{H}_{0y}) \cdot \exp[i(k_{\perp} - k_{\parallel})x]$. Предположим, что фазы $W_{\parallel} \dot{H}_{0z}$ и $W_{\perp} \dot{H}_{0y}$ равны. Тогда значение $\psi = (\beta_{\perp} - \beta_{\parallel})$ определяет разность фаз ортогональных составляющих вектора \dot{E} . Если $\psi = (\beta_{\perp} - \beta_{\parallel})x_n = n\pi$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, то в точках x_n по оси x вектор \dot{E} линейно поляризован. В остальных точках этой оси ψ отличается от $n\pi$ и \dot{E} имеет в общем случае эллиптическую поляризацию. В тех точках оси x , где $|\dot{E}_y| = |\dot{E}_z|$ и $\psi = (2n + 1)\pi/2$ результирующий вектор \dot{E} имеет круговую поляризацию.

Аналогичным образом ведет себя и вектор $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_y \dot{H}_y + \mathbf{1}_z \dot{H}_z$, находящийся в поперечной плоскости (yz).

5. Решением задачи, удовлетворяющим (10.21) и условию излучения при $x \rightarrow -\infty$, для обратной обыкновенной волны (\dot{H}_z, \dot{E}_y) является (10.22) и при $k = k_2 = -\omega(\tilde{\epsilon}_d \mu_0)^{1/2}$, а для обратной необыкновенной волны ($\dot{H}_x, \dot{H}_y, \dot{E}_z$) — (10.22) при $k = k_2 = k_{\perp h} = -\omega[\tilde{\epsilon}_d \mu_0 (\mu_x^2 - a^2) / \mu_x]^{1/2}$. Распространение обратных волн сопровождается теми же эффектами, что и распространение прямых волн.

6. При поперечном распространении поля в *однородной модели плазмы*, заполняющей неограниченное пространство, происходят те же ЭМ явления, что и в подмагниченном феррите. Используя принцип перестановочной двойственности для обыкновенной прямой Т-волны из (10.22) имеем:

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{0z} \exp(-ik_{\parallel} x), \quad \dot{H}_y = -W_{\parallel}^{-1} \dot{E}_z,$$

где $k_{\parallel} = \omega(\epsilon_0 \epsilon_z \mu_0)^{1/2}$, $W_{\parallel} = (\mu_0 / \epsilon_0 \epsilon_z)^{1/2}$, $v_{\parallel} = \omega / \beta_{\parallel}$.

Намагниченная плазма для этой волны является линейной изотропной средой, ϵ_z не зависит от h .

Необыкновенная прямая волна является Е-волной, так как она имеет продольную составляющую. Из (10.22) имеем:

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{0x} \exp(-ik_{\perp} x), \quad \dot{E}_y = \dot{E}_{0y} \exp(-ik_{\perp} x), \quad \dot{H}_z = W_{\perp}^{-1} \dot{E}_y,$$

где

$$k_{\perp} = \beta_{\perp} - i\alpha_{\perp} = \omega(\epsilon_0 \epsilon_{\perp} \mu_0)^{1/2}, \quad \epsilon_{\perp} = (\epsilon_x^2 - b^2) / \epsilon_x = 2\epsilon_+ \epsilon_- / (\epsilon_+ + \epsilon_-),$$

$$W_{\perp} = (\mu_0 / \epsilon_0 \epsilon_{\perp})^{1/2}, \quad \dot{E}_{0y} = -i\epsilon_x \dot{E}_{0x} / b.$$

Ортогональные составляющие вектора $\dot{\mathbf{E}}$ сдвинуты по фазе на $\pi/2$, поэтому $\dot{\mathbf{E}}$ эллиптически поляризован в плоскости распространения (в плоскости xy).

Поперечно распространяющееся в плазме ЭМ поле может существовать только в виде наложения обыкновенной Т-волны, у которой $\dot{\mathbf{E}} \parallel \mathbf{h}$, и необыкновенной Е-волны, у которой $\dot{\mathbf{E}} \perp \mathbf{h}$. Векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ результирующего поля эллиптически поляризованы в плоскости yz . Если на частоте ω имеем $|\epsilon_+ + \epsilon_-| \rightarrow 0$, то резко возрастает значение коэффициента затухания α_{\perp} , а фазовая скорость $v_{\perp} \rightarrow 0$; возникает *поперечный гиромагнитный резонанс*.

Для обыкновенной волны условие $\epsilon_z = 0$ выполняется при $\omega = \omega_0$ ($\nu = 0$), для необыкновенной волны условию $\epsilon_{\perp} = 0$ соответствуют две возможности: или $\epsilon_+ = 0$ или $\epsilon_- = 0$, которым соответствуют две предельные частоты $\omega_{1,2} = [(\omega_m/2)^2 + \omega_0^2]^{1/2} \mp \omega_m/2$. Если $\omega > \omega_{1,2}$, то в плазме может существовать волновой процесс необыкновенной волны (см. § 10.3, п.7).

Коэффициент преломления (при $\nu = 0$) обыкновенной волны $n_{об} = \beta_{\parallel} / \beta_0 = (1 - \omega_0^2 / \omega^2)^{1/2}$, необыкновенной волны — $n_{но} = \beta_{\perp} / \beta_0 = [(\epsilon_x^2 - b^2) / \epsilon_x]^{1/2} = [2\epsilon_+ \epsilon_- / (\epsilon_+ + \epsilon_-)]^{1/2}$.

7. Пусть верхнее полупространство ($y < 0$) заполнено однородной изотропной линейной средой. Нижнее полупространство ($y > 0$) — подмагниченная плазма или феррит. Граница раздела сред — плоскость $y = 0$. Из верхнего полупространства на границу раздела падает в направлении, перпендикулярном подмагничивающему полю \mathbf{h} , однородная плоская линейно поляризованная Т-волна (1 — на рис. 10.4). При этом преломленное поле является суперпозицией полей обыкновенной и необыкновенной волн. Явление раздвоения преломленных волн называют *двойным лучепреломлением*.

При решении задачи об отражении и преломлении ЭМ поля вектор $\dot{\mathbf{E}}^n$ разлагают на сумму двух векторов: $\dot{\mathbf{E}}^n = \dot{\mathbf{E}}_r^n + \dot{\mathbf{E}}_b^n$, где $\dot{\mathbf{E}}_r^n$ — перпендикулярный, а $\dot{\mathbf{E}}_b^n$ — параллельный плоскости падения векторы.

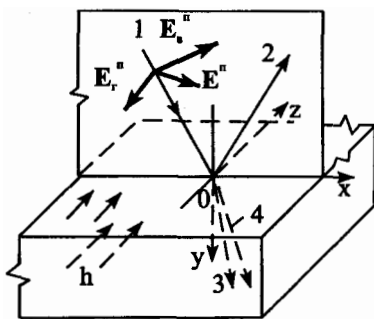


Рис. 10.4. Двойное лучепреломление

При этом $\dot{\mathbf{E}}_r^n \parallel \mathbf{h}$, $\dot{\mathbf{E}}_r^n$ вызывает появление в нижнем полупространстве, заполненном плазмой, обыкновенной волны (3). Вектор $\dot{\mathbf{E}}_b^n \perp \mathbf{h}$, он вызывает появление в нижнем полупространстве (в плазме) необыкновенной волны (4). Поскольку диэлектрическая (в случае плазмы) или магнитная (в случае феррита) проницаемости для этих волн различны, то различны направления распространения (углы преломления) обыкновенной и необыкновенной волн.

В верхнем полупространстве существует отраженное поле (2).

Законы отражения от границ раздела сред с гиротропными свойствами изложены в [84]. Преобразование линейной поляризации в

эллиптическую в поперечно намагниченной среде называют *эффектом Коттона–Мутона или эффектом Фохта*.

10.7. Понятие об ЭМ явлениях в нелинейных средах

1. При большом значении напряженности электрического поля $|\dot{\mathbf{E}}| = E$ волны, распространяющейся в плазме, проявляются нелинейные свойства последней. Например, ЭМ поле как бы само себя модулирует. Упрощенно процесс можно объяснить так. Скорость движения электрона $u = |d\mathbf{l}/dt$ связана со средней длиной пути L , пройденного электроном между двумя столкновениями, выражением $v = u/L$. Но $u = u_T + u_E$, где u_T — скорость теплового движения электрона, $u_E = e_3 E / \omega m_e$ — скорость, приобретаемая электроном под действием распространяющегося поля. Обычно $u_T \gg u_E$, поэтому $u = (u_T^2 + u_E^2)^{1/2} \approx u_T (1 + u_E^2 / 2u_T^2)$. При этом $u \approx u_T (1 + aE^2 / \omega^2)$, где $a = e_3^2 / 2m_e^2 u_T^2$. На частотах диапазонов ОНЧ и НЧ u_T и u_E соизмеримы уже при $E = 0,1 + 2$ мВ/м, на частотах диапазона СЧ — при $E = 2 + 20$ мВ/м. Если напряженность поля превышает эти значения, то v меняется пропорционально E . Следовательно, значения σ в (10.9) и в (10.10) зависят от E . Поэтому коэффициенты затухания α_{\pm} в (10.11) меняются с изменением E . Возникают *нелинейные явления*.

При амплитудной модуляции векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} распространяющегося поля имеем, например, для составляющей E_m вектора \mathbf{E} : $E_m = (1 - M \cos \Omega t)E$, где M , Ω — коэффициент и частота модуляции, E — амплитуда напряженности электрического поля. Тогда $u \approx u_T \left[1 + aE^2 (1 - M \cos \Omega t)^2 / \omega^2 \right]$, т.е. v , а следовательно, и α_{\pm} меняются с изменением частоты модуляции, α_{\pm} зависят от напряженности электрического поля. Происходит демодуляция. В диапазонах ОНЧ и НЧ глубина проникновения ЭМ поля в ионосферу мала. Поэтому этот тип нелинейности проявляется главным образом в диапазоне СЧ.

В нелинейной среде распространяющееся поле воздействует само на себя. Оно изменяет свойства среды, а среда изменяет структуру ЭМ поля. Это *проявление самовоздействия волны*.

Возможен случай распространения в ионосфере двух ЭМ полей, первое из которых имеет большое значение напряженности электрического поля, а второе — малое. При этом первое поле модулирует значе-

ние ν со своей частотой модуляции. Второе поле распространяется в среде, параметры которой модулированы. Поэтому второе поле воспринимает модуляцию первого. Эту кросс-модуляцию называют *люксембург-горьковским эффектом*.

2. Компоненты тензора магнитной проницаемости феррита (10.5) получены в предположении «малости напряженности магнитного поля». В общем случае вектор магнитной поляризации единицы объема феррита и напряженность магнитного поля связаны нелинейным соотношением, так как само уравнение движения суммарного магнитного момента является нелинейным.

ЭМ явления в нелинейных средах используются в радиотехнике и радиофизике для преобразования частоты ЭМ поля, генерирования и усиления ЭМ колебаний.

3. Электродинамику, основанную на уравнениях Максвелла (1.73) с учетом нелинейных материальных уравнений (см. § 1.2, п.9) называют *нелинейной макроскопической электродинамикой*. Если нахождение конкретного вида материальных уравнений среды невозможно отделить от исследования уравнений Максвелла, то нелинейные задачи называют *самосогласованными*. Если материальные уравнения установлены опытным или теоретическим путем и введены в уравнения Максвелла, то нелинейные задачи называют *феноменологическими*.

Для многих полупроводников, сегнетоэлектриков статические характеристики представляются в виде $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$, для ферромагнетиков — в виде $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$. Динамические характеристики соответствуют быстроменяющимся ЭМ полям. Динамическую характеристику конкретной диэлектрической среды представляют в виде

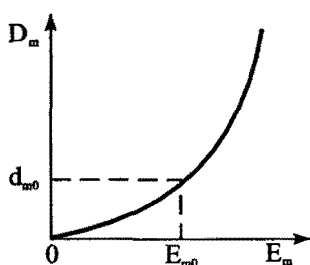


Рис. 10.5. Нелинейная характеристика $D_m(E_m)$

некоторой функциональной связи между \mathbf{D} и \mathbf{E} и их временными и пространственными производными. Динамическую характеристику конкретной ферромагнитной среды представляют в виде функциональной связи между \mathbf{B} и \mathbf{H} и их временными и пространственными производными. Аналогичным образом представляется динамическая характеристика тока проводимости.

4. Рассмотрим модель нелинейной изотропной среды, на которую воздействует гармонический во времени сторонний источник. Введем определения. Пусть $\mathbf{D}_m = \mathbf{D}_m(E_m)$, $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$ или $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$,

$B_m = B_m(H_m)$. Разложение функций $D_m(E_m)$ и $B_m = B_m(H_m)$ в окрестности точек E_{0m} и H_{0m} в ряды Тейлора дано в § 1.2. Частный случай зависимости $D_m = D_m(E_m)$ изображен на графике рис. 10.5. Значения E_{0m} , H_{0m} — напряженностей «полей смещения» — не зависят от времени.

Расписывая ряд Тейлора для $D_m(E_m)$, имеем

$$D_m(E_m) = d_{0m} + d_{m1}(E_m - E_{0m}) + d_{m2}(E_m - E_{0m})^2 + \dots,$$

где $d_{0m} = D_m(E_{0m})$, $d_{m1} = \partial D_m(E_{0m}) / \partial E_m$, $d_{m2} = 0,5 \partial^2 D_m(E_{0m}) / \partial E_m^2$.

Обозначим $\Delta E_m = E_m - E_{0m}$, тогда $D_m(E_m) - D_m(E_{0m}) = \Delta D_m$.

Если в окрестности точки $E_m = E_{0m}$ нелинейная характеристика линеаризируется, то всеми членами ряда, за исключением первых двух, надо пренебречь. Тогда $\Delta D_m / \Delta E_m = \partial D_m(E_{0m}) / \partial E_m = d_{m1} = \epsilon_0 \epsilon_g$. Величину $\epsilon_g = d_{m1} / \epsilon_0$ называют *относительной дифференциальной диэлектрической проницаемостью*.

Аналогично, *относительной дифференциальной магнитной проницаемостью среды* называют величину $\mu_g = b_{m1} / \mu_0 = \mu_0^{-1} \partial B_m(H_{0m}) / \partial H_m$. Удельная дифференциальная проводимость среды определена в (1.16).

Рассмотрим сначала среду, в которой функция $D_m(E_m)$ нелинейна, а $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$, что характерно для диэлектриков, полупроводников. Подставим ряд Тейлора функции $D_m(E_m)$ в первое уравнение Максвелла (1.73), а $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$ — во второе и спроектируем их на оси x , y или z . Для сокращения записи положим $\mathbf{j}^{mc} = 0$. Получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_m \mathbf{H} &= \sum_{s=0}^{\infty} d_{ms} \frac{\partial}{\partial t} (E_m - E_{0m})^s + \sigma E_m + \mathbf{j}_m^c, \\ \operatorname{rot}_m \mathbf{E} &= -\mu_a \frac{\partial H_m}{\partial t}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Пусть сторонний ток меняется во времени по гармоническому закону:

$$\mathbf{j}_m^c(p, t) = \left| \mathbf{j}_m^c(p) \right| \cos(\omega t + \psi) = 0,5 \left[\mathbf{j}_m^c(p) \exp(i\omega t) + \mathbf{j}_m^{*c}(p) \exp(-i\omega t) \right].$$

Если предположить, что $E_m(p, t)$ тоже меняется по гармоническому закону:

$$E_m(p, t) = \left| \dot{E}_m(p) \right| \cos(\omega t + \Phi) = 0,5 \left[\dot{E}_m(p) \exp(i\omega t) + \dot{E}_m^*(p) \exp(-i\omega t) \right],$$

то возводя $E_m - E_{0m}$ в степень s , находим, что правая часть первого уравнения состоит из суммы временных гармоник кратных частот $n\omega$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Поэтому левая часть уравнения (вектор \mathbf{H}) должна состоять из наложения бесконечного количества гармоник кратных частот. Из второго уравнения следует, что и вектор \mathbf{E} состоит из наложения бесконечного количества временных гармоник. Таким образом, все векторы ЭМ поля можно разложить в ряды Фурье:

$$\mathbf{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{E}}_n e^{in\omega t}, \quad \mathbf{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{H}}_n e^{in\omega t}, \quad \dot{\mathbf{j}}^c = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{j}}_n^c e^{in\omega t}, \quad (10.25)$$

где $\dot{\mathbf{E}}_n = \dot{\mathbf{E}}_n(p, n\omega)$, $\dot{\mathbf{H}}_n = \dot{\mathbf{H}}_n(p, n\omega)$ — комплексные амплитуды векторов напряженностей поля на частотах $n\omega$ (временных гармоник), $\dot{\mathbf{j}}_n^c = 0,5[\dot{\mathbf{j}}^c(p)\delta_n^1 + \dot{\mathbf{j}}^{*c}(p)\delta_n^{-1}]$, δ_n^q — символ Кронекера: $\delta_n^q = 1$ при $q = n$ и $\delta_n^q = 0$ при $q \neq n$.

Подставим (10.25) в (10.24). Учтем, что при $s = 0$ производная по t равна нулю. Для сокращения записи положим, что $E_{0m} = 0$. Последнее условие не имеет принципиального значения. Выделим член ряда Тейлора, соответствующий $s = 1$, и объединим подобные. Получаем

$$\begin{aligned} \text{rot}_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{H}}_n e^{in\omega t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\omega \tilde{\epsilon}_{an} \dot{\mathbf{E}}_{mn} e^{in\omega t} + \\ &+ \sum_{s=2}^{\infty} d_{ms} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{E}}_{mn} e^{in\omega t} \right]^s + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{j}}_{mn}^c e^{in\omega t}; \end{aligned} \quad (10.26)$$

$$\text{rot} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{E}}_n e^{in\omega t} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_n e^{in\omega t},$$

где $\tilde{\epsilon}_{an} = d_{m1} - i\sigma/n\omega$. Пользуясь правилами перемножения рядов [85], возведем в степень s ряд Фурье в первом уравнении. Получаем

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{E}}_{mn} e^{in\omega t} \right]^s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_{mn} e^{in\omega t}, \quad (10.27)$$

где

$$\tilde{\mathbf{E}}_{mn}(s, p) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_{mq}(s-1, p) \dot{\mathbf{E}}_{m, n-q}(p). \quad (10.28)$$

$\tilde{\mathbf{E}}_{mn}(s-1, p)$ определяется тем же правилом (10.28).

Подставим (10.27) в (10.26). Выполним дифференцирование по t и приравняем члены разложений рядов Фурье в правой и левой частях равенств. Имеем

$$\operatorname{rot}_m \dot{\mathbf{H}}_n = in\omega \tilde{\epsilon}_{an} \dot{E}_{mn} + \dot{j}_{mn}^c + in\omega \sum_{s=2}^{\infty} d_{ms} \tilde{E}_{mn}(s, p), \quad (10.29)$$

$$\operatorname{rot} \dot{E}_n = -in\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_n.$$

Если характеристики $D_m = D_m(E_m)$ линейны, то $d_{ms} = 0$ при $s \geq 2$. Тогда (10.29) есть обычные уравнения Максвелла в комплексной форме. Временные гармоники $\dot{E}_n, \dot{\mathbf{H}}_n$ на данной частоте $n\omega$ не зависят от временных гармоник $\dot{E}_q, \dot{\mathbf{H}}_q$ всех других частот $q\omega$. Только на частоте ω (при $n=1$) имеется сторонний источник, порождающий в среде ЭМ поле на этой же частоте. На других частотах $n\omega$ ($n \neq 1$) уравнения (10.29) однородны.

Но если характеристики $D_m = D_m(E_m)$ нелинейны, то хотя бы один из коэффициентов $d_{ms} \neq 0$ при $s \geq 2$. Тогда все гармоники кратных частот связаны системой уравнений (10.29). Последняя является нелинейной, так как в нее входят бесконечные суммы (10.28) произведений гармоник поля. Например, при $s \geq 2$ имеем

$$\tilde{E}_{mn}(2, p) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \dot{E}_{mq}(p) \dot{E}_{m, n-q}(p).$$

Сторонний источник порождает ЭМ поле только на частоте ω .

Но локально (в каждой точке) и во всем объеме нелинейной среды происходит преобразование спектра ЭМ поля. Гармоники взаимодействуют между собой и порождают друг друга. Спектральные составляющие векторов поля имеют кратные частоты и связаны нелинейной системой уравнений Максвелла.

При расчетах нелинейная характеристика $D_m = D_m(E_m)$ аппроксимируется конечным числом Q членов ряда Тейлора. Тогда в (10.29) ряд по s ограничен количеством членов от $s=2$ до Q . При приближенных вычислениях систему (10.29) «укорачивают» («обрезают», редуцируют), пренебрегая влиянием высших гармоник. Так можно вычислить приближенное значение первой гармоники, затем, пренебрегая влиянием высших гармоник, — вторую и т.д.

Вспомогательное соотношение, аналогичное лемме Лоренца в интегральной форме для $\dot{E}_n, \dot{\mathbf{H}}_n$, кроме поверхностных интегралов, включает объемные интегралы от произведений гармоник векторов поля и векторов вспомогательного поля. Это затрудняет выполнение расчетов.

4. В случае среды, имеющей нелинейную характеристику $B_m = B_m(H_m)$ и линейное материальное уравнение $D = \varepsilon_a E$ (ферромагнетики) из (1.73) аналогичным образом можно получить нелинейную систему уравнений Максвелла для \dot{E}_n, \dot{H}_n . Отличие ее от (10.29) состоит в том, что сумма по s с коэффициентами b_{ms} (см. § 1.2), определяющая взаимодействие временных гармоник поля частот $n\omega$, входит не в первое, а во второе уравнение Максвелла.

5. Рассмотрим модель нелинейной изотропной среды, на которую воздействует сторонний источник, ток которого имеет две спектральные составляющие на частотах ω и Ω . Тогда

$$\mathbf{j}^c(p, t) = |\dot{\mathbf{j}}_1(p)| \cos(\omega t + \psi_1) + |\dot{\mathbf{j}}_2(p)| \cos(\Omega t + \psi_2).$$

На среду воздействует бигармонический источник. Считаем, что $D_m = D_m(E_m)$ — нелинейная характеристика, $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$ — линейно.

Предположив сначала, что $E_m(p, t)$ тоже имеет только две спектральных составляющих на частотах ω и Ω и подставив при этом E_m в (10.24), получим, возводя $(E_m - E_{0m})$ в степень s , что правая часть первого уравнения (10.24) состоит из суммы спектральных составляющих всех разностных частот $\omega_{nq} = n\omega + q\Omega$, где $n, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Поэтому левая часть уравнения (вектор \mathbf{H}) состоит из наложения бесконечного количества спектральных составляющих на частотах ω_{nq} . Из второго уравнения (10.24) следует, что \mathbf{E} представляет собой наложение бесконечного количества спектральных составляющих, имеющих частоты ω_{nq} . Таким образом, векторы ЭМ поля можно разложить в двойные ряды Фурье:

$$\mathbf{E} = \sum_{n,q} \dot{E}_{nq} e^{i\omega_{nq}t}, \quad \mathbf{H} = \sum_{n,q} \dot{H}_{nq} e^{i\omega_{nq}t}, \quad \mathbf{j}^c = \sum_{n,q} \dot{\mathbf{j}}_{nq} e^{i\omega_{nq}t}, \quad (10.30)$$

где $n, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\dot{E}_{nq} = \dot{E}(p, \omega_{nq})$, $\dot{H}_{nq} = \dot{H}(p, \omega_{nq})$ — комплексные амплитуды векторов напряженностей полей на частотах ω_{nq} ,

$$\dot{\mathbf{j}}_{nq}^c = 0.5 \left[\dot{\mathbf{j}}_1^c \delta_{nq}^{10} + \dot{\mathbf{j}}_1^{*c} \delta_{nq}^{-10} + \dot{\mathbf{j}}_2^c \delta_{nq}^{01} + \dot{\mathbf{j}}_2^{*c} \delta_{nq}^{0-1} \right] \delta_{nq}^{\nu*} = \delta_n^{\nu*} \delta_q^{\nu*}.$$

Подставим (10.30) в (10.24) и положим $E_{0m} = 0$. Выделим член ряда Тейлора, соответствующий $s = 1$, и объединим подобные. Используем правило перемножения двойных рядов [85]. Выполним дифференцирование по времени и приравняв члены разложений рядов Фурье в правой и левой частях равенств, получаем

$$\operatorname{rot}_m \dot{\mathbf{H}}_{nq} = i\omega \tilde{\epsilon}_{anq} \dot{\mathbf{E}}_{m,nq} + \dot{j}_{m,nq}^c + i\omega_{nq} \sum_{s=2}^{\infty} d_{ms} \dot{\mathbf{E}}_{m,nq}(s, p), \quad (10.31)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_{nq} = -i\omega_{nq} \mu_a \dot{\mathbf{H}}_{nq}, \quad n, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $\tilde{\epsilon}_{anq} = d_{m1} - i\sigma / \omega_{nq}$,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{m,nq}(s, p) = \sum_{xy} \tilde{\mathbf{E}}_{m,xy}(s-1, p) \dot{\mathbf{E}}_{m,n-x, q-y}(p), \quad (10.32)$$

а $\tilde{\mathbf{E}}_{m,xy}(s-1, p)$ вычисляется по тому же правилу (10.32).

В радиотехнике частоты ω_{nq} называют *комбинационными*, а значения $\dot{\mathbf{E}}_{nq}, \dot{\mathbf{H}}_{nq}$ — *комбинационными составляющими векторов поля*. Из (10.31), (10.32) следует, что если нелинейная среда испытывает бигармоническое воздействие стороннего источника, то в ней порождаются комбинационные гармоники векторов поля. Последние, взаимодействуя между собой, порождают друг друга. Происходит *преобразование спектра частот ЭМ поля*. Возможно порождение постоянных составляющих векторов поля $\dot{\mathbf{E}}_{00}, \dot{\mathbf{H}}_{00}$, соответствующих частоте $\omega_{nq} = 0$ и высших комбинационных составляющих, отсутствующих в спектре тока (поля) стороннего источника. Комбинационные составляющие связаны системой нелинейных уравнений (10.31).

6. В радиотехнике и радиофизике применяются нелинейные элементы, сосредоточенные в малых объемах пространства в разрезах между проводниками. В этом случае в окружающем пространстве материальные уравнения являются линейными. На поверхности нелинейного элемента можно задать *нелинейные граничные условия* типа импедансных [87] и на их основе с помощью выражений типа (3.18) привести решение граничной задачи определения комбинационных составляющих к решению систем нелинейных алгебраических уравнений.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить компоненты тензора относительной магнитной проницаемости феррита на частотах $f = 0,9f_m$ и $f = 1,1f_m$, если $\omega_0 = \psi M_0$, $h = 2,9 \cdot 10^5$ А/м и для данной марки феррита намагниченность феррита $M_0 = 1,13 \cdot 10^5$ А/м.

2. Вычислить относительные магнитные проницаемости положительно и отрицательно поляризованных волн на частотах $f = 0,9f_m$ и $f = 1,1f_m$ при условиях предыдущей задачи.

3. Рассчитать коэффициенты затухания и фазовые скорости положительно и отрицательно поляризованных волн в ионосфере на частоте 1 МГц, если плотность электронов равна 10^5 эл/см³, $\nu = 10^4$ с⁻¹, $h = 40$ А/м.

4. Линейно поляризованная волна распространяется в ионосфере Земли вдоль подмагничивающего поля. Вычислить длину пути, на которой плоскость поляризации поворачивается на 90^0 на частоте 5 МГц, если электронная плотность равна 10^5 эл/см³, $\nu = 0$.

5. Для среды, имеющей линейное $D = \epsilon_a E$ и нелинейное $B_m = B_m(H_m)$ материальные уравнения, в случае монохроматического воздействия стороннего источника на среду записать нелинейную систему уравнений Максвелла для гармоник векторов поля кратных частот. Сделать выводы.

6. Для среды, имеющей линейное $D = \epsilon_a E$ и нелинейное $B_m = B_m(H_m)$ материальные уравнения, в случае бигармонического воздействия на среду стороннего источника записать нелинейную систему уравнений Максвелла для комбинационных составляющих векторов поля. Сделать выводы.

11. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ. ПОНЯТИЯ О ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

11.1. Общие сведения

1. Явления, возникающие при распространении ЭМ поля в неоднородных средах, имеют большое прикладное значение. Например, непосредственный практический интерес имеют задачи, связанные с распространением ЭМ волн в неоднородных атмосферах Земли и других планет, в неоднородной неподмагниченной плазме, в солнечной короне, в земной коре, в направляющих системах с неоднородным заполнением, а также технические задачи, решающие вопросы уменьшения или увеличения коэффициентов отражения и прохождения ЭМ поля через слой неоднородной среды.

В *однородной среде*, в которой распространяется ЭМ поле, могут быть расположены *локальные неоднородности*, характеризующиеся электрическим размером βa (или a/λ). Например, неоднородностью может быть тело типа кругового цилиндра радиуса a , типа клина и др.

В математической модели неограниченного пространства, заполненного неоднородной средой, роль параметра a/λ имеет скорость изменения диэлектрической и магнитной проницаемостей по координатам.

Методы решения задач электродинамики делят на аналитические и численные. Аналитическим методом решение задачи получается в замкнутой форме, оно выражается через известные функции в виде формул. Такое решение дает возможность выполнить анализ ЭМ явлений, в простом случае даже не осуществляя расчетов. Но класс задач, допускающих получение решений в замкнутой форме, существенно ограничен. Если граница тела не совпадает с координатной поверхностью одной из ортогональных систем координат или когда совпадает, но граничные условия являются сложными, получить аналитическое решение граничной задачи невозможно. Часто решение непригодно для проведения расчетов из-за плохой сходимости рядов. Например, если электрический радиус цилиндра велик $\beta a \rightarrow \infty$, то поскольку количество (N) учитываемых членов ряда должно быть больше βa , то $N \rightarrow \infty$ и выполнить расчеты с помощью рядов невозможно. Поэтому строятся асимптотические решения. Другой пример. При вычислении полного поля в задаче дифракции волн на полуплоскости необходимо суммировать количество N членов ряда, большее значения βr . При $\beta r \rightarrow \infty$ получаем, что $N \rightarrow \infty$. Использовать для вычислений полученное решение нельзя. Но на основе последнего строится асимптотическое решение.

2. Подход к построению аналитического (строгого или приближенного) решения задачи зависит от значения a/λ . Различают три характерные области: а) *квазистатическую* (релеевскую) *область*, когда $a/\lambda \ll 1$, б) *резонансную область*, когда $a/\lambda \approx 1$, в) *квазиоптическую область*, когда $\lambda/a \ll 1$.

Если $a/\lambda \ll 1$ (λ велико, ω мало), то решение уравнения Гельмгольца или уравнений Максвелла представляется в виде разложения в ряд по степеням малого пара-

метра a/λ (или βa). Если ограничиться нулевым приближением, т.е. в разложении пренебречь всеми членами, имеющими порядок малости a/λ , то уравнения Гельмгольца для скалярного и векторного потенциалов перейдут приближенно в уравнения Пуассона, так как при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\beta^2|\phi| \rightarrow 0$, и $\beta^2|A| \rightarrow 0$. При этом приближенное решение электродинамической задачи называют *квазистатическим* или решением в *длинноволновом приближении*. Решения уравнений Пуассона и Лапласа проще решения уравнения Гельмгольца. Но не всегда удается аналитически решить и граничную задачу для уравнений Пуассона или Лапласа. Учет в разложениях в ряд членов, имеющих порядок малости a/λ , $(a/\lambda)^2$ и т.д., приводит к необходимости последовательного решения статических и стационарных задач.

В *резонансной области* параметр a/λ или λ/a не является малым. Поэтому приближенные методы решения задач электродинамики применять трудно. В этой области требуются строгие решения граничных задач. Для построения строгих решений применяются метод интегральных преобразований и методы собственных функций, или метод разделения переменных. Применение методов основано на том, что при решении граничной задачи подбирается такая система координат, чтобы граничная поверхность тела совпала с одной из координатных поверхностей. Затем находят решения однородного уравнения Гельмгольца при однородном граничном условии. Эти решения при определенных условиях образуют полную ортогональную систему функций. Решение неоднородного уравнения Гельмгольца при однородных граничных условиях или решение однородного уравнения Гельмгольца при неоднородных граничных условиях ищется в виде разложения в ряды (метод собственных функций [50, 51]) или интегралы (метод интегральных преобразований [51, 52]) по этой системе функций. Методы применимы, как уже отмечалось, лишь при простых граничных условиях и простой форме граничной поверхности.

Когда $\lambda/a \ll 1$ (λ мало, ω велико), то представив решение уравнений Максвелла или Гельмгольца в виде разложения в ряд по степеням малого параметра λ/a (или по степеням малого параметра $(\beta a)^{-1}$) и ограничившись нулевым приближением, получим, как показано ниже, уравнения геометрической оптики. Приближенные решения задачи называют при этом *квазиоптическими*, или решениями в *коротковолновом приближении*.

Большинство электродинамических задач в резонансной и квазистатической областях решается численными (точнее: гибридными) методами. Основу их составляют метод интегральных уравнений и вариационные методы [28, 31, 51, 53-56]. Интегральное уравнение, включающее и граничное условие задачи, можно составить для тела практически любой формы. Методы решения интегральных уравнений хорошо разработаны. На их основе строятся алгоритмы численного решения задач на ЭВМ.

Вариационные методы являются численными [55, 56]. Существует ряд модификаций этих методов.

3. Квазиоптические методы решения граничных задач электродинамики делят на две группы: на асимптотические методы исследования аналитических решений и эвристические методы, основанные на привлечении различных физических идей. К эвристическим методам относятся лучевые и волновые. Лучевыми называются метод геометрической оптики и его уточнения: геометрическая теория дифракции, распространяющая методы геометрической оптики на задачи дифракции, комплексная геометрическая оптика и метод параболического уравнения [48, 49]. К волновым методам относят метод физической оптики и уточняющие его методы, например, метод краевых волн, позволяющий найти поправку к полю рассеяния, связанную с возможным наличием изломов (ребер) на граничной поверхности.

В методе геометрической оптики пренебрегают конечностью длин волн, что соответствует длине волны λ_0 (соответствующей свободному пространству), стремящейся

к нулю. В этом приближении законы распространения ЭМ поля можно сформулировать на языке дифференциальной геометрии. При этом считается, что ЭМ поле распространяется вдоль определенных кривых — лучей, с каждым лучом можно связать направления векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в каждой точке пространства и, следовательно, изучить изменение поляризации поля вдоль луча. Общий характер ЭМ поля получается такой же, как в случае (локально) плоской волны, а законы преломления и отражения в приближении геометрической оптики справедливы при более общих условиях, чем те которые рассмотрены в §§ 4.1, 4.3.

Важное значение приобретает метод геометрической оптики при изучении распространения ЭМ волны в неоднородной среде.

11.2. Дифференциальные уравнения для векторов напряженностей полей

1. Диэлектрические проницаемости тропосферы и ионосферы Земли зависят от положения точки p , т.е. эти среды для распространяющегося ЭМ поля являются неоднородными.

В случае падения ЭМ поля на границу раздела двух сред с резко различными значениями коэффициентов распространения k_1 и k_2 модули коэффициентов отражения $|R|$ и прохождения $|T|$ имеют соответственно большое и малое значения. Для увеличения $|T|$ применяют *согласующие слои*. Для уменьшения значения $|R|$ могут применяться *неоднородные согласующие (поглощающие) слои* с поглощением энергии ЭМ поля за счет тепловых потерь в слое. Слои располагаются между средами, имеющими значения k_1 и k_2 . Случай, когда $k_1 = k_2$, соответствует применению диэлектрических обтекателей антенн, при этом необходимо иметь максимальное значение $|T|$. Диэлектрическая и магнитная проницаемости слоя могут быть функциями координат. Согласующий (поглощающий) слой может состоять и из набора более тонких слоев, в пределах каждого из которых k_n остается постоянным; при этом среда является *слоистой*.

Ниже рассматриваются условия распространения ЭМ волн в немагнитных средах ($\mu_a = \mu_0$), в которых *только диэлектрические проницаемости зависят от координат*. Это также соответствует применению результатов к расчетам ЭМ поля, распространяющегося в неподмагниченной ионосфере и тропосфере Земли.

2. Среду считаем линейной и изотропной, пространственная дисперсия отсутствует. При этом материальные уравнения среды для монохроматического поля имеют вид $\dot{\mathbf{D}} = \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{B}} = \mu_0 \dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{j}} = \sigma \dot{\mathbf{E}}$. Счи-

таем, что сторонних источников в неоднородной среде нет, а первичное (падающее) поле возбуждается вне неоднородной среды. Поле в неоднородной среде является вторичным. С учетом этого имеем уравнения Максвелла для неоднородной среды:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega \mathbf{\epsilon}_a(\omega, p)\mathbf{E}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H}. \quad (11.1)$$

Решением этих уравнений необходимо найти векторы $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$, удовлетворяющие условиям излучения и граничным условиям, если задана поверхность раздела, на которой среда изменяет свои параметры.

Выразим вектор $\dot{\mathbf{H}}$ из второго уравнения и подставим его значение в первое из уравнений (11.1). Получим

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{\epsilon}(\omega, p)\mathbf{E} = 0, \quad (11.2)$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$ — коэффициент распространения, а λ_0 — длина волны, соответствующие свободному пространству, $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(\omega, p)$ — относительная диэлектрическая проницаемость ($\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_a(\omega, p)/\epsilon_0$).

Выразим вектор $\dot{\mathbf{E}}$ из первого уравнения и подставим его значение во второе из уравнений (11.1). Получаем

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \frac{1}{\mathbf{\epsilon}(\omega, p)} [\operatorname{grad} \mathbf{\epsilon}(\omega, p), \operatorname{rot} \mathbf{H}] + k_0^2 \mathbf{\epsilon}(\omega, p)\mathbf{H} = 0. \quad (11.3)$$

Решать необходимо одно из уравнений (11.2) или (11.3), так как по известному вектору $\dot{\mathbf{E}}$ (или $\dot{\mathbf{H}}$) можно найти другой вектор $\dot{\mathbf{H}}$ (или $\dot{\mathbf{E}}$) из второго (первого) уравнения Максвелла. В зависимости от типа задачи может оказаться удобным решение уравнения (11.2) или (11.3).

Функции $\tilde{\epsilon}(\omega, p)$ могут быть разнообразными, поэтому ЭМ явления, сопутствующие распространению волн в неоднородных средах, отличаются исключительным разнообразием. При решении уравнений (11.2) или (11.3) ограничиваются случаем плоскостной или сферически слоистой среды.

Пусть имеем среду, у которой диэлектрическая проницаемость имеет постоянное значение, $\tilde{\epsilon}_{a1} = \epsilon_0\epsilon_1$, а затем, начиная с некоторой плоской границы, плавно изменяется от значения $\tilde{\epsilon}_{a1}$. Плоскость xu ДСК совместим с плоскостью, где $\tilde{\epsilon}_{a1}$ начинает меняться (т.е. $\operatorname{grad} \mathbf{\epsilon}_a$ становится отличающимся от нуля) (рис. 11.1,а). Тогда вне слоя, в «нижнем» полупространстве при $z < 0$, имеем постоянное значение $\tilde{\epsilon}_{a1}$. В слое, в «верхнем» полупространстве, при $z \geq 0$,

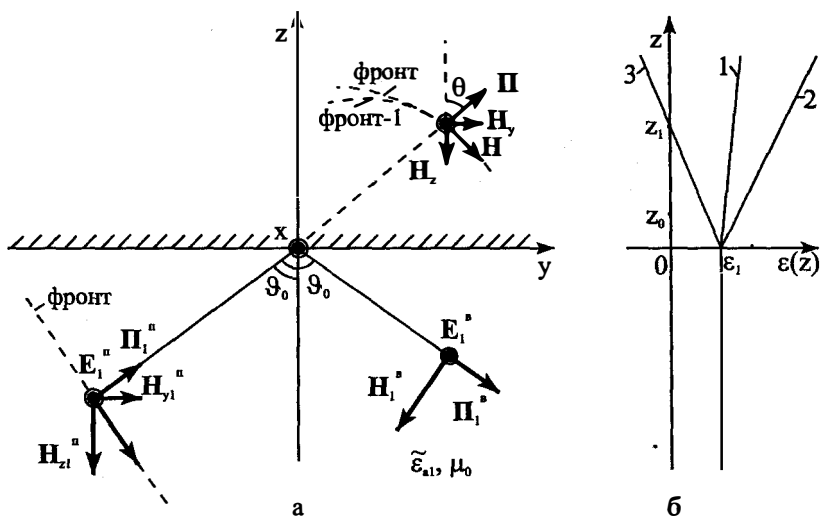


Рис. 11.1. К постановке задачи

$\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(\omega, z) = \tilde{\epsilon}(z)$. Из «нижнего» полупространства на слой падает первичная ЭМ волна. Векторы $\dot{\mathbf{E}}_1^n$ и $\dot{\mathbf{H}}_1^n$ первичного поля удовлетворяют уравнения Максвелла и условиям излучения при $y \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$. Вектор $\dot{\mathbf{E}}_1^n$ известен (см. § 4.1):

$$\dot{\mathbf{E}}_1^n = \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-ik_1(y \sin \vartheta_0 + z \cos \vartheta_0)} = \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-ik_1 \mathbf{r}}, \quad (11.4)$$

где ϑ_0 — угол падения волны, $0 \leq \vartheta_0 < \pi/2$, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{1}_x k_{1x} + \mathbf{1}_y k_{1y} + \mathbf{1}_z k_{1z}$ — вектор коэффициента распространения (волновой вектор), в котором $k_{1x} = 0, k_{1y} = k_1 \sin \vartheta_0, k_{1z} = k_1 \cos \vartheta_0$, $\mathbf{r} = \mathbf{1}_x x + \mathbf{1}_y y + \mathbf{1}_z z$ — радиус-вектор точки p .

Вектор $\dot{\mathbf{H}}_1^n$ определяется из второго уравнения Максвелла.

Так же, как в случае падения плоской волны на плоскую границу раздела двух сред, можно считать, что ЭМ поле в неоднородной среде распространяется в виде бегущих по y и z волн, но частично или полностью в толще слоя отражается за счет его неоднородности (рис. 11.1).

Если в верхнем полупространстве при некотором значении $\tilde{\epsilon}(z')$ могут сложиться условия, аналогичные условию полного внутреннего отражения, то при $z \rightarrow \infty$ амплитуды векторов напряженностей

прошедшего ЭМ поля должны экспоненциально убывать. Значение коэффициента отражения должно зависеть от z . Поэтому его обычно определяют при $z = 0$.

На поверхности $z = 0$ нет разрыва непрерывности диэлектрических проницаемостей, так как $\tilde{\epsilon}_{a1} = \tilde{\epsilon}_a$, но имеется разрыв непрерывности градиентов ($\text{grad } \tilde{\epsilon}_{a1} \neq \text{grad } \tilde{\epsilon}_a(z)$). На этой поверхности справедливы обычные граничные условия: касательные составляющие векторов напряженностей ЭМ поля полных полей нижнего полупространства должны быть равны касательным составляющим векторов \dot{E} , \dot{H} вторичных полей верхнего полупространства. Если в неоднородном слое на некоторой поверхности $z = z_0$ имеется скачок значений $\epsilon(z)$ или $\text{grad}\epsilon(z)$, то на этой поверхности должны быть поставлены аналогичные граничные условия для ЭМ полей, определенных при $z < z_0$ и при $z > z_0$.

3. Поскольку первичное поле не зависит от x , то «преломленное» поле в неоднородной среде, параметры которой не зависят от x , тоже не зависит от x . Значит, в (11.2) производные по x равны нулю. Поэтому из (11.2) получаем:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + k_0^2 \tilde{\epsilon}(z) \dot{E}_x = 0, \quad (11.5)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y \partial z} + k_0^2 \tilde{\epsilon}(z) \dot{E}_y = 0; \quad \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z \partial y} + k_0^2 \tilde{\epsilon}(z) \dot{E}_z = 0. \quad (11.6)$$

Уравнение (11.5) здесь определяет только составляющую \dot{E}_x , не связанную с составляющими \dot{E}_y и \dot{E}_z . Уравнения (11.6) являются системой уравнений для \dot{E}_y и \dot{E}_z .

При нормальной поляризации первичного поля (см. § 4.1), когда в (11.4)

$$\dot{E}_1^n = \mathbf{1}_x \dot{E}_{x1}^n, \quad \dot{E}_{x1}^n = \dot{E}_0^n e^{-ik_1 r} = \dot{E}_0^n e^{-ik_1(y \sin \vartheta_0 + z \cos \vartheta_0)} \quad (11.7)$$

составляющие $\dot{E}_y = \dot{E}_z = 0$. Поэтому необходимо найти решение уравнения Гельмгольца (11.5) с переменным по z коэффициентом. Это решение должно удовлетворять определенным граничным условиям.

4. При нормальном падении волны ($\vartheta_0 = 0$) первичное поле не зависит от y . Поэтому вторичное поле в неоднородной среде и отраженное поле в нижнем полупространстве тоже не должны зависеть

от y . Значит, производные по y в (11.5) равны нулю. При этом при $\tilde{\epsilon}(z) \neq 0$ из второго уравнения (11.6) получаем $\dot{E}_z = 0$, т.е. поле, распространяющееся вдоль z , должно быть Т-волной, а его составляющие \dot{E}_x , \dot{E}_y вектора \dot{E} определяются уравнениями

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x(z)}{\partial z^2} + k_0^2 \tilde{\epsilon}(z) \dot{E}_x(z) = 0; \quad \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + k_0^2 \tilde{\epsilon}(z) \dot{E}_y = 0. \quad (11.8)$$

Решение этих обыкновенных дифференциальных уравнений может быть получено только для некоторых конкретных функций $\tilde{\epsilon}(z)$.

11.3. Волны в полупространстве с линейно нарастающей диэлектрической проницаемостью

1. Для объяснения явлений электромагнетизма, возникающих при распространении волн в тропосфере и ионосфере Земли, и при расчете ЭМ полей в этих условиях большое значение имеют строгие решения уравнения (11.5), известные [57-59] для ряда законов изменения $\tilde{\epsilon}_a(z)$. Одним из таких законов является закон с линейно увеличивающейся или уменьшающейся диэлектрической проницаемостью.

2. Рассмотрим постановку задачи. Пусть значение диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}(\omega, z)$ верхнего полупространства увеличивается с увеличением z по линейному закону от некоторого постоянного значения $\tilde{\epsilon}_a(\omega, 0) = \tilde{\epsilon}_{a1}$, где $\tilde{\epsilon}_{a1}$ — диэлектрическая проницаемость нижнего полупространства (рис. 11.1, б). Обозначим для сокращения записи относительные диэлектрические проницаемости верхнего и нижнего полупространств через $\tilde{\epsilon}(\omega, z) = \tilde{\epsilon}(z)$ и $\tilde{\epsilon}_1(\omega) = \tilde{\epsilon}_1$. Если $\tilde{\epsilon}(z) = \tilde{\epsilon}_1 f(z)$, то при $z = +0$ необходимо, чтобы $\tilde{\epsilon}(0) = \tilde{\epsilon}_1 f(0)$. При линейно увеличивающейся с ростом z функции $f(z) = 1 + Bz$ ($B > 0$, $[B] = 1/m$) эти условия выполняются.

Рассмотрим волновые процессы в модели идеальных диэлектриков. При этом тепловые потери в диэлектриках отсутствуют и $\tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_1$, $\tilde{\epsilon}(z) = \epsilon_1 f(z)$, B — чисто действительная величина.

На плоскость xy из нижнего полупространства падает нормально поляризованное ЭМ поле (рис. 11.1, а), имеющее вектор $\dot{E}_1^n = \mathbf{1}_x \dot{E}_{x1}^n$, определяемый по (11.7), и вектор $\dot{H}_1^n = \mathbf{1}_y \dot{H}_{y1}^n + \mathbf{1}_z \dot{H}_{z1}^n$,

$$\dot{H}_{y1}^n = W_1^{-1} \dot{E}_{x1}^n \cos \vartheta_0, \quad \dot{H}_{z1}^n = -W_1^{-1} \dot{E}_{x1}^n \sin \vartheta_0, \quad (11.9)$$

где $W_1 = \sqrt{\mu_0 / \tilde{\epsilon}_{a1}} = W_0 / \sqrt{\epsilon_1}$, W_0 — характеристическое сопротивление свободного пространства.

Векторы \dot{E}_1^n, \dot{H}_1^n лежат на плоском фронте падающей волны, $\dot{\Pi}_1^n = \mathbf{1}_l \dot{\Pi}_1^n$, где $\mathbf{1}_l$ — орт нормали к фронту, т.е. вектор Пойнтинга перпендикулярен к этому фронту; $[\mathbf{1}_l \dot{E}_1^n] = W_1 \dot{H}_1^n$.

Составляющая \dot{E}_x вектора \dot{E} должна удовлетворять уравнению (11.5). Так как $\epsilon(z) = \epsilon_1 f(z)$, то в (11.5) $k_0^2 \tilde{\epsilon}(z) = k_0^2 \epsilon_1 f(z) = k_1^2 f(z)$, где $k_1 = k_0 \sqrt{\epsilon_1}$. Поэтому из (11.5) имеем уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + k_1^2 f(z) \dot{E}_x = 0. \quad (11.10)$$

Векторы отраженного верхним полупространством ЭМ поля (вторичного) при $z \leq 0$ обозначим через \dot{E}_1^B, \dot{H}_1^B . При $z \leq 0$ векторы напряженностей полного поля $\dot{E}_1 = \dot{E}_1^n + \dot{E}_1^B$, $\dot{H}_1 = \dot{H}_1^n + \dot{H}_1^B$.

На плоскости $z = 0$ имеется разрыв непрерывности $\text{grad } \epsilon(z)$ и $\text{grad } \epsilon_1$, поэтому касательные составляющие векторов напряженностей ЭМ полей должны удовлетворять граничным условиям (должны быть согласованы):

$$\dot{E}_{x1}^n + \dot{E}_{x1}^B = \dot{E}_x, \quad \dot{H}_{y1}^n + \dot{H}_{y1}^B = \dot{H}_y \quad \text{при } z = 0. \quad (11.11)$$

Величина $\epsilon(z)$ не обращается в нуль и не принимает отрицательных значений при $z > 0$. Поэтому k — чисто действительная величина при $z > 0$. Значит, решение уравнения (11.10) во всей верхней полуплоскости можно выразить через бегущие волны, удовлетворяющие условию излучения при $z \rightarrow \infty$.

Векторы \dot{E} и \dot{E}_1^B имеют только составляющие \dot{E}_x и \dot{E}_{x1}^B , поскольку при этом удовлетворяются условия (11.11), а вектор \dot{E} удовлетворяет уравнению (11.2).

Отраженное поле существует только при $z \leq 0$. Векторы \dot{E}_1^B, \dot{H}_1^B должны удовлетворять уравнениям Максвелла, условиям (11.11) и условию излучения при $z \rightarrow -\infty$. Значит, их необходимо (см. § 4.1) искать в виде

$$\begin{aligned} \dot{E}_1^B &= \mathbf{1}_x \dot{E}_{x1}^B, \quad \dot{E}_{x1}^B = \dot{E}_1^B e^{-ik_1(y \sin \vartheta_0 - z \cos \vartheta_0)}, \\ \dot{H}_1^B &= \mathbf{1}_y \dot{H}_{y1}^B + \mathbf{1}_z \dot{H}_{z1}^B, \quad \dot{H}_{y1}^B = -W_1^{-1} \dot{E}_{x1}^B \cos \vartheta_0, \quad \dot{H}_{z1}^B = -W_1^{-1} \dot{E}_{x1}^B \sin \vartheta_0, \end{aligned} \quad (11.12)$$

где \dot{E}_1^b определяется решением задачи. При $z=0$ имеем $\dot{E}_{x1}^b / \dot{E}_{x1}^n = \dot{E}_1^b / \dot{E}_0^n = R_{\perp}$ — коэффициент отражения при нормальной поляризации.

Таким образом, необходимо найти решение уравнения (11.10), удовлетворяющее граничным условиям (11.11) и условию излучения при $z \rightarrow \infty$.

3. Решение задачи ищем методом разделения переменных. Представим искомую функцию \dot{E}_x в виде $\dot{E}_x = Y(y)Z(z)$ и подставим ее в (11.10). Получаем, разделив результат на YZ ,

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = - \left(\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_1^2 f(z) \right) = -q^2,$$

где q — постоянная разделения.

Из последнего выражения имеем

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + q Y = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + [k_1^2 f(z) - q^2] Z = 0. \quad (11.13)$$

Так как составляющая \dot{E}_x как функция y должна удовлетворять граничным условиям (11.11), то решение дифференциального уравнения для $Y(y)$ ищем в виде

$$Y(y) = C_1 e^{+iqy} + C_2 e^{-iqy},$$

где C_1, C_2 — постоянные, $q = k_1 \sin \vartheta_0$. При $y \rightarrow \infty$ должны удовлетворяться условия излучения. Первое слагаемое здесь определяет бегущую (обратную) волну, распространяющуюся при $y \rightarrow -\infty$. Оно не удовлетворяет условию излучения. Поэтому полагаем $C_1 = 0$. Второе слагаемое определяет уходящую (бегущую, прямую) волну, распространяющуюся при $y \rightarrow +\infty$. Оно удовлетворяет условию излучения. Поэтому $C_2 \neq 0$.

Подставим значение q в (11.13) для $Z(z)$. Учтем, что

$$k_1^2 f(z) - q^2 = k_1^2 (1 + Bz) - k_1^2 \sin^2 \vartheta_0 = k_1^2 (Bz + \cos^2 \vartheta_0).$$

Имеем

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k_1^2 (Bz + \cos^2 \vartheta_0) Z(z) = 0. \quad (11.14)$$

Введем здесь новую переменную $\eta = Bz + \cos^2 \vartheta_0$. Тогда $d\eta = Bdz$, $dz^2 = B^{-2} d\eta^2$. Поэтому получаем

$$\frac{d^2 Z(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{k_1}{B}\right)^2 \eta Z(\eta) = 0.$$

Если в этом уравнении заменить переменную по правилу $\eta = (B/k_1)^{+2/3} \zeta$, то получим

$$\frac{d^2 Z(\zeta)}{d\zeta^2} + \zeta Z(\zeta) = 0, \quad (11.15)$$

где

$$\zeta = (k_1/B)^{2/3} (Bz + \cos^2 \vartheta_0). \quad (11.16)$$

Двумя линейно независимыми решениями обыкновенного дифференциального уравнения (11.15) являются две функции Эйри [57, 59], выражающиеся через функции Ганкеля порядка $1/3$ первого и второго рода, аргумента $\xi = (2/3)\zeta^{3/2} = (2k_1/3B)(Bz + \cos^2 \vartheta_0)^{3/2}$:

$$Z(\xi) = \xi^{1/3} [C_3 H_{1/3}^{(1)}(\xi) + C_4 H_{1/3}^{(2)}(\xi)], \quad (11.17)$$

где C_3, C_4 — постоянные.

При $z \rightarrow \infty$ имеем $\xi \rightarrow \infty$. Так как асимптотическое поведение функций Ганкеля с дробным индексом при $x \gg 1$ ($|x| \gg |p|$) определяется [20] выражением

$$H_p^{(2)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{+i(x - \frac{\pi}{2}p - \frac{\pi}{4})} \left[1 \mp \frac{\Gamma(p+3/2)}{\Gamma(p-1/2)} \frac{1}{2ix} \pm \dots \right], \quad (11.18)$$

где $\Gamma(p)$ — гамма-функция, то первое слагаемое в (11.17) выражает сходящуюся (обратную) волну и не удовлетворяет условию излучения. Поэтому необходимо положить $C_3 = 0$. Второе слагаемое в (11.17) выражает уходящую (расходящуюся, прямую) волну, оно удовлетворяет условию излучения. Поэтому $C_4 \neq 0$.

Подставляя значения $Y(y)$ и $Z(z)$ в выражение для $\dot{E}_x(y, z)$ и обозначая $C_2 \cdot C_4 = \dot{E}_0$, имеем:

$$\dot{E}_x = \dot{E}_0 e^{-ik_1 y \sin \vartheta_0} \cdot \xi^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi). \quad (11.19)$$

Амплитуду \dot{E}_0 необходимо определить из условий (11.11).

Найдем составляющие вектора \dot{H} из второго уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}
\dot{H}_y &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \\
&= -\frac{E_0 e^{-ik_1 y \sin \theta_0}}{i\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi) \right] \frac{\partial \xi}{\partial z}; \\
\dot{H}_z &= \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -\frac{k_1 \sin \theta_0}{\omega\mu_0} \dot{E}_x = \\
&= -W_1^{-1} \dot{E}_x \sin \theta_0; \quad \dot{H}_x = 0.
\end{aligned} \tag{11.20}$$

Так как [18] для цилиндрических функций

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^p H_p^{(2)}(\xi) \right) = \xi^p H_{p-1}^{(2)}(\xi), \tag{11.21}$$

а $d\xi/dz = k_1 (Bz + \cos^2 \theta_0)^{1/2}$, то

$$\dot{H}_y = iW_1^{-1} E_0 \cdot e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \cdot (Bz + \cos^2 \theta_0)^{1/2} \xi^{1/3} H_{-2/3}^{(2)}(\xi). \tag{11.22}$$

Для того, чтобы найти амплитуды \dot{E}_0 и \dot{E}_1 , используем граничные условия. Подставим касательные составляющие $\dot{E}_{x1}^n, \dot{E}_{x1}^s, \dot{E}_x$ и $\dot{H}_{y1}^n, \dot{H}_{y1}^s$ и \dot{H}_y из (11.7), (11.9), (11.19) и (11.22) в условия (11.11). Сокращая общие множители, получаем:

$$\dot{E}_0^n + \dot{E}_1^s = \dot{E}_0 \xi_0^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi_0); \quad \dot{E}_0^n - \dot{E}_1^s = \dot{E}_0 i \xi_0^{1/3} H_{-2/3}^{(2)}(\xi_0),$$

где $\xi(z) = \xi_0$ при $z = 0$, т.е. $\xi_0 = (2k_1/3B) \cos^3 \theta_0$.

Решая эту систему уравнений относительно \dot{E}_1^s и \dot{E}_0 , получаем

$$\begin{aligned}
\dot{E}_1^s &= \dot{E}_0^n \frac{H_{1/3}^{(2)}(\xi_0) - iH_{-2/3}^{(2)}(\xi_0)}{H_{1/3}^{(2)}(\xi_0) + iH_{-2/3}^{(2)}(\xi_0)}; \\
\dot{E}_0 &= \frac{2\dot{E}_0^n}{\xi_0^{1/3} [H_{1/3}^{(2)}(\xi_0) + iH_{-2/3}^{(2)}(\xi_0)]}.
\end{aligned} \tag{11.23}$$

Решение (11.19) — (11.22) удовлетворяет уравнению Гельмгольца, граничным условиям задачи и условию излучения. Поэтому оно единственно.

Коэффициент отражения определяем по (11.23):

$$R_{\perp} = \frac{\dot{E}_1^s}{\dot{E}_0^n} = \frac{H_{1/3}^{(2)}(\xi_0) - iH_{-2/3}^{(2)}(\xi_0)}{H_{1/3}^{(2)}(\xi_0) + iH_{-2/3}^{(2)}(\xi_0)}. \tag{11.24}$$

4. Выполним анализ решения задачи. Рассмотрим ЭМ поле при больших значениях Bz , таких, что $\xi \gg 1$. Можно считать при этом, что $Bz + \cos^2 \theta_0 \cong Bz$, поэтому $\xi \cong (Bz)^{3/2} 2k_1/3B \gg 1$ и применима асим-

птотика (11.18). Пренебрегая в ней слагаемым, пропорциональным $1/\xi$, получаем из (11.19), (11.22):

$$\dot{E}_x \cong \dot{E}_0 e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\xi + i5\pi/12} \cdot \xi^{-1/6}, \quad (11.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_y &\cong W_1^{-1} \dot{E}_0 e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \cdot (Bz + \cos^2 \theta_0)^{1/2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\xi + i5\pi/12} \cdot \xi^{-1/6}, \\ \dot{H}_z &= -W_1^{-1} \dot{E}_x \sin \theta_0. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Из этих выражений видно, что \dot{E}_x , \dot{H}_y , \dot{H}_z синфазны между собой. С ростом Bz $|\dot{E}_x|$ и $|\dot{H}_z|$ уменьшаются как $(Bz)^{-1/4}$, а $|\dot{H}_y|$ растет как $(Bz)^{1/4}$. Вектор Пойнтинга волны $\dot{\Pi} = 0,5[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] = \dot{\mathbf{i}}_y \dot{\Pi}_y + \dot{\mathbf{i}}_z \dot{\Pi}_z$ имеет чисто действительные составляющие

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_y &= -\frac{1}{2} \dot{E}_x \dot{H}_z^* = \Pi_y \cong \frac{|\dot{E}_0|^2 \sin \theta_0}{\pi W_1 \xi^{1/3}}, \\ \dot{\Pi}_z &= \frac{1}{2} \dot{E}_x \dot{H}_y^* = \Pi_z \cong \frac{|\dot{E}_0|^2 (Bz + \cos^2 \theta_0)^{1/2}}{\pi W_1 \xi^{1/3}}, \end{aligned}$$

причем по мере распространения волны (с ростом Bz) составляющая Π_y убывает как $(Bz)^{-1/2}$, а составляющая Π_z не зависит от (Bz) .

Если $\Pi = \mathbf{1}_l \Pi$, где $\mathbf{1}_l$ — орт нормали к фронту волны, а

$$\Pi = (\Pi_y^2 + \Pi_z^2)^{1/2} \cong \frac{|\dot{E}_0|^2}{\pi W_1 \xi^{1/3}} (Bz)^{1/2} \cong \frac{|\dot{E}_0|^2}{\pi W_1} \left(\frac{3B}{2k_1} \right)^{1/3},$$

то Π не зависит от (Bz) . Это показывает, что плотность поверхностной мощности на фронте распространяющейся волны остается постоянной. Но уменьшение составляющей Π_y как $(Bz)^{-1/2}$ при $z \rightarrow \infty$ и неизменной составляющей Π_z показывает, что фронт распространяющейся волны деформируется. Если θ — угол между векторами Π и Π_z (см. рис. 11.1,а), то $\text{tg } \theta \cong (Bz + \cos^2 \theta_0)^{-1/2}$, и угол θ уменьшается при растущем z . Это показывает, что нормаль к фронту волны при увеличивающемся Bz постепенно поворачивается в сторону направления, определяемого величиной $\text{grad } \varepsilon(z) = \mathbf{1}_z B$. *Направление распространения волны, определяемое ортом $\mathbf{1}_l$, меняется, оно постепенно приближается к направлению $\text{grad } \varepsilon(z)$.*

Волновая функция в соответствии с (11.20), (11.25), (11.26) определяется выражением

$$\cos(\omega t - k_1 y \sin \vartheta_0 - \xi) = \cos\left[\omega t - k_1 y \sin \vartheta_0 - \frac{2k_1}{3B} (Bz + \cos^2 \vartheta_0)^{3/2}\right],$$

поэтому поверхность $\Phi(y, z, t)$ равных фаз (фронт волны в момент t)

есть $\Phi = \omega t - k_1 y \sin \vartheta_0 - \frac{2k_1}{3B} (Bz + \cos^2 \vartheta_0)^{3/2}$. Так как $\partial\Phi/\partial t = \omega dt$,

$\partial\Phi/\partial y = -k_1 \sin \vartheta_0 dy$, $\partial\Phi/\partial z = -k_1 (Bz + \cos^2 \vartheta_0)^{1/2}$, то полный дифференциал фазы

$$d\Phi = \omega dt - k_1 \sin \vartheta_0 dy - k_1 (Bz + \cos^2 \vartheta_0)^{1/2} dz.$$

Приравняв его к нулю, получаем

$$\sin \vartheta_0 \frac{dy}{dt} + (Bz + \cos^2 \vartheta_0)^{1/2} \frac{dz}{dt} = v_1,$$

где $v_1 = \omega/k_1$ — фазовая скорость волны в нижнем полупространстве.

Если $dy/dt = v_{\varphi y}$, $dz/dt = v_{\varphi z}$ — фазовые скорости вдоль осей y и z , то

$$v_{\varphi y} = v_1 / \sin \vartheta_0, \quad v_{\varphi z} = v_1 (Bz + \cos^2 \vartheta_0)^{-1/2} = v_1 [\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta_0]^{-1/2}.$$

При $\vartheta_0 \rightarrow 0$ имеем $v_{\varphi y} \rightarrow \infty$, $v_{\varphi z} = v_1 \cdot \varepsilon^{-1/2}(z) = v_1 n^{-1}(z)$, т.е. фазовая скорость $v_{\varphi z}$ волны уменьшается с ростом Bz так же, как растет коэффициент преломления среды. Это приводит к тому, что фронт отстает от плоского фронта в направлениях, близких к направлению $\text{grad} \varepsilon(z)$ (см. фронт-1 на рис. 11.1,а).

5. При анализе коэффициента отражения рассмотрим два крайних случая: $\xi_0 \gg 1$ и $\xi_0 \ll 1$. В первом случае имеем $\xi_0 = (2k_1 \cos^3 \vartheta_0) / 3B \gg 1$, т.е. $k_1 \gg B$, поэтому $\varepsilon(z)$ медленно меняется (график-1 на рис. 11.1,б). При этом можно воспользоваться асимптотикой (11.18), откуда имеем

$$H_{1/3}^{(2)}(\xi_0) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi \xi_0}} e^{-i(\xi_0 - 5\pi/12)} \left(1 - \frac{5}{72i\xi_0}\right),$$

$$H_{-2/3}^{(2)}(\xi_0) = e^{-i2\pi/3} H_{2/3}^{(2)}(\xi_0) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi \xi_0}} e^{-i(\xi_0 + \pi/12)} \left(1 + \frac{7}{72i\xi_0}\right). \quad (11.27)$$

Подставляя эти выражения в (11.24) и сокращая общие множители, имеем

$$R_{\perp} \cong -\frac{1}{i12\xi_0} \frac{1}{1-1/72i\xi_0} \approx -\frac{1}{i12\xi_0} \left(1 + \frac{1}{i72\xi_0}\right) \approx \frac{i}{12\xi_0} = \frac{iB}{8k_1 \cos^3 \vartheta_0}.$$

Коэффициент отражения зависит от значения $d\varepsilon/dz = B$, $|R_{\perp}| \ll 1$, причем $|R_{\perp}|$ резко увеличивается с ростом угла падения, в рассмотренном приближении R_{\perp} имеет мнимую величину.

В случае, когда $\xi_0 \ll 1$, имеем $2k_1 \cos^3 \vartheta_0 \ll 3B$. При этом или $B \gg k_1$, т.е. $\varepsilon(z)$ быстро меняется и $d\varepsilon(z)/dz = B$ — большая величина (график-2 на рис. 11.1,б), или $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$, т.е. имеем «скользящее» падение.

Асимптотика функций Ганкеля при $|x| \ll 1$ имеет [18, 20] вид:

$$H_p^{(2)}(x) \cong \frac{\mp i(2/x)^p}{\Gamma(1-p) \sin p\pi}, \quad H_{-p}^{(2)}(x) = e^{\pm i p \pi} H_p^{(2)}(x),$$

$p > 0, p \neq \text{целому.}$ (11.28)

Вынося в числителе и знаменателе (11.24) значение $iH_{-2/3}^{(2)}(\xi_0)$, сокращая этот множитель и учитывая, что

$$\kappa = H_{1/3}^{(2)}(\xi_0) / H_{-2/3}^{(2)}(\xi_0) \cong \gamma(\xi_0/2)^{1/3} \exp(i2\pi/3),$$

где $\gamma = \Gamma(1/3) / \Gamma(2/3) = 1,978$, получаем при $|\kappa|^2 \ll 1$

$$R_{\perp} \cong -\frac{1+i\kappa}{1-i\kappa} = -\frac{(1+i\kappa)^2}{1+\kappa^2} \approx (1+i\kappa)^2 (1-\kappa^2) \approx 1-2\kappa^2 + 2i\kappa.$$

Подставляя в это выражение значение κ , находим

$$R_{\perp} \approx -\left\{ -\gamma(\xi_0/2)^{1/3} \left[\sqrt{3} + \gamma(\xi_0/2)^{1/3} \right] - i\gamma(\xi_0/2)^{1/3} \left[1 - \sqrt{3}\gamma(\xi_0/2)^{1/3} \right] \right\}.$$

Так как $(\xi_0/2)^{1/3} = (k_1/3B)^{1/3} \cos \vartheta_0$, то с ростом угла падения ϑ_0 значение R_{\perp} приближается к (-1) . При увеличении коэффициента B значение ξ_0 уменьшается, величина $|R_{\perp}|$ растёт, что объясняется увеличением неоднородности слоя (значение $d\varepsilon(z)/dz$ увеличивается).

Таким образом, коэффициент отражения R_{\perp} при наличии излома производной $d\varepsilon/dz$ при $z=0$ всегда отличается от нуля.

11.4. Волны в полупространстве с линейно убывающей диэлектрической проницаемостью

1. *Постановка граничной задачи* в этом случае отличается от соответствующей постановки в § 11.3 тем, что $f(z) = 1 - Bz$, где $B \geq 0$, $B = |B|$. При этом диэлектрическая проницаемость уменьшается с ростом Bz и равна нулю при $z = z_1$, т.е. $f(z_1) = 1 - Bz_1 = 0$, где $z_1 = 1/B$. При $z < z_1$ получаем $\epsilon_a(z) > 0$, а при $z > z_1$ имеем $\epsilon_a(z) < 0$ (график-3 на рис. 11.1, б). Поэтому при $z < z_1$ в (11.10) $k_1 \sqrt{f(z)} = |k_1 \sqrt{f(z)}|$. При $z > z_1$ имеем $k_1 \sqrt{f(z)} = -ik_1 \sqrt{|f(z)|}$. Это значит, что при переходе z через значение z_1 , где $\epsilon_a(z)$ меняет знак, коэффициент $k_1 \sqrt{f(z)}$ в (11.10) имеет особенность.

Примером среды, в которой $\epsilon(z)$ меняется по линейному закону, может быть неподмагниченная плазма (см. § 10.3). Если в ней пренебречь соударениями электронов, то $\epsilon = 1 - \omega_0^2 / \omega^2$, где собственная частота плазмы $\omega_0 = e_s(N / \epsilon_0 m_s)^{1/2}$. При плотности электронов, меняющейся по закону $N(z) = bz$, $B = e_s^2 b / \epsilon_0 m_s \omega^2$, поэтому $z_1 = \epsilon_0 m_s \omega^2 / e_s^2 b$. При $z = z_1$ диэлектрическая проницаемость обращается в нуль, а при $z > z_1$ — остается отрицательной; коэффициент распространения волны в этой области плазмы является чисто мнимым (см. § 10.3, п. 4).

2. Для решения задачи используем так же, как в § 11.3, метод разделения переменных. Получаем $q = k_1 \sin \vartheta_0$, $Y(y) = c_2 \exp(-iqy)$ и вместо (11.4) — дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k_1^2 (\cos^2 \vartheta_0 - Bz) Z(z) = 0. \quad (11.29)$$

В этом уравнении коэффициент $k_1 (\cos^2 \vartheta_0 - Bz)^{1/2}$ при $0 \leq z \leq z_0$, где $z_0 = (\cos^2 \vartheta_0) / B$, имеет положительную величину.

Если по аналогии с однородной средой предположить, что $k_1 (\cos^2 \vartheta_0 - Bz)^{1/2}$ есть переменный по z коэффициент распространения волны, то коэффициент фазы β является положительной величиной, а коэффициент затухания равен нулю. Это указывает на то, что в области $0 \leq z \leq z_0$ имеется волновой процесс.

При $z_0 \leq z \leq \infty$ имеем $k_1(\cos^2 \vartheta_0 - Bz)^{1/2} = -ik_1(Bz - \cos^2 \vartheta_0)^{1/2}$, что указывает на то, что в этой области коэффициент фазы равен нулю, а коэффициент затухания α является положительной величиной. Значит, в области $z_0 \leq z \leq \infty$ волновой процесс должен отсутствовать. Таким образом, плоскость xz_0y делит верхнее полупространство на две области.

Введем в (11.29) замену переменной по правилу

$$\zeta = (k_1 / B)^{2/3} (\cos^2 \vartheta_0 - Bz).$$

Получаем уравнение (11.15). Двумя линейно независимыми решениями дифференциального уравнения второго порядка (11.15) в области $0 \leq z \leq z_0$ являются две функции Эйри [57-59], т.е. выражение (11.17), в котором

$$\xi = \frac{2}{3} \zeta^{3/2} = \frac{2k_1}{3B} (\cos^2 \vartheta_0 - Bz)^{3/2} \quad (11.30)$$

действительный аргумент. В области $z_0 \leq z \leq \infty$ двумя линейно независимыми решениями уравнения (11.15) являются две функции Эйри мнимого аргумента

$$\xi = -i \frac{2k_1}{3B} (Bz - \cos^2 \vartheta_0)^{3/2}, \quad (11.31)$$

выражающиеся через функции Ганкеля первого и второго рода:

$$Z(\xi) = \xi^{1/3} [C_5 H_{1/3}^{(1)}(\xi) + C_6 H_{1/3}^{(2)}(\xi)]. \quad (11.32)$$

На плоскости xz_0y должны выполняться условия (11.11), выражающие непрерывность касательных составляющих векторов напряженностей полей в разных областях. На плоскости xz_0y касательные составляющие векторов напряженностей полей \dot{E}, \dot{H} в области $0 \leq z \leq z_0$ и \dot{E}^-, \dot{H}^- в области $z_0 \leq z \leq \infty$ также должны быть непрерывны, т.е.

$$\dot{E}_x = \dot{E}_x^-, \quad \dot{H}_y = \dot{H}_y^- \quad \text{при } z = z_0. \quad (11.33)$$

ЭМ поле в области $z_0 \leq z \leq \infty$ должно удовлетворять условиям излучения, если в этой области имеется волновой процесс. Но если последний отсутствует, то необходимо, чтобы составляющие векторов \dot{E}^-, \dot{H}^- не увеличивались при $z \rightarrow \infty$, поскольку источники поля на бесконечности отсутствуют. В связи с этим учтем, что по (11.31) при $z \rightarrow \infty$

$$\xi \cong -i \frac{2k_1}{3} B^{1/2} \cdot z^{3/2}. \quad (11.34)$$

Поэтому из (11.18) получаем

$$H_{1/3}^{(2)}(\xi) \stackrel{(1)}{\cong} \sqrt{2/\pi\xi} \exp\left[\pm \frac{2k_1}{3} B^{1/2} \cdot z^{3/2}\right] \exp(\mp i5\pi/12).$$

Следовательно, первое слагаемое в (11.32) выражает часть амплитуды составляющей \dot{E}_x^- , экспоненциально увеличивающуюся до бесконечности при $z \rightarrow \infty$. Значит, необходимо положить $C_5 = 0$. Второе слагаемое в (11.32) выражает часть амплитуды составляющей \dot{E}_x^- , уменьшающуюся при росте z быстрее, чем по экспоненциальному закону. Поэтому $C_6 \neq 0$.

Таким образом, учитывая, что $\dot{E}_x = Y(y)Z(z)$, и используя (11.17) и (11.32), находим

$$\dot{E}_x = e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \xi^{1/3} \left[C_3 H_{1/3}^{(1)}(\xi) + C_4 H_{1/3}^{(2)}(\xi) \right],$$

$$\xi = \frac{2k_1}{3B} (\cos^2 \theta_0 - Bz)^{3/2}, \quad 0 \leq z \leq z_0,$$

$$\dot{E}_x^- = e^{-ik_1 y \sin \theta_0} C_6 \xi^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi), \quad \xi = -i \frac{2k_1}{3B} (Bz - \cos^2 \theta_0)^{3/2}, \quad z_0 \leq z \leq \infty. \quad (11.35)$$

Составляющие векторов $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{H}}^-$ так же, как в (11.20), определяем из второго уравнения Максвелла. При этом учтем, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \begin{cases} -k_1 (\cos^2 \theta_0 - Bz)^{1/2} & \text{при } 0 \leq z \leq z_0, \\ -ik_1 (Bz - \cos^2 \theta_0)^{1/2} & \text{при } z_0 \leq z \leq \infty. \end{cases} \quad (11.36)$$

С помощью (11.21) находим

$$\dot{H}_y = -\frac{e^{-ik_1 y \sin \theta_0}}{i\omega\mu_0} \left[C_3 \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(\xi)) + C_4 \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi)) \right] \frac{\partial \xi}{\partial z} =$$

$$= -iW_1^{-1} e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \xi^{1/3} \left[C_3 H_{-2/3}^{(1)}(\xi) + C_4 H_{-2/3}^{(2)}(\xi) \right] (\cos^2 \theta_0 - Bz)^{1/2},$$

$$\dot{H}_z = -W_1^{-1} \dot{E}_x \sin \theta_0, \quad (11.38)$$

$$H_y^- = -\frac{e^{-ik_1 y \sin \theta_0}}{i\omega\mu_0} C_6 \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi)) \frac{\partial \xi}{\partial z} = W_1^{-1} e^{-ik_1 y \sin \theta_0} C_6 \times$$

$$\times \xi^{1/3} H_{-2/3}^{(2)}(\xi) (Bz - \cos^2 \theta_0)^{1/2},$$

$$H_z^- = -W_1^{-1} \dot{E}_x^- \sin \theta_0. \quad (11.40)$$

3. Установим связь между коэффициентами C_3, C_4 и C_6 с помощью двух условий (11.33). Для этого учтем, что аргументы у составляющих векторов в (11.35), (11.37) – (11.40) разные. Поэтому при

$z \rightarrow \infty$ в (11.33) обозначим в области $0 \leq z \leq z_0$ значение переменной $z = z_0 - \Delta z$, а в области $z_0 \leq z \leq \infty$ — как $z = z_0 + \Delta z$ и положим $\Delta z \rightarrow 0$.

Тогда из (11.30), (11.31) и (11.36) имеем

$$\xi(\Delta z) = \begin{cases} \chi_0, & \frac{\partial \xi(\Delta z)}{\partial z} = \begin{cases} -k_1(B\Delta z)^{1/2}, & 0 \leq z \leq z_0 \\ -ik_1(B\Delta z)^{1/2}, & z_0 \leq z \leq \infty \end{cases} \end{cases}$$

где $\chi_0 = (2k_1/3B) \cdot (B\Delta z)^{3/2}$.

Подставим значения аргумента в (11.33). Получаем, сокращая в первом выражении множители $\chi_0^{1/3}$, во втором — множители $W_1^{-1}\chi_0^{1/3}(B\Delta z)^{1/2}$ и учитывая, что $(-i)^{1/3} = \exp(-i\pi/6)$:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} [C_3 H_{1/3}^{(1)}(\chi_0) + C_4 H_{1/3}^{(2)}(\chi_0)] = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} C_6 e^{-i\pi/6} H_{1/3}^{(2)}(-i\chi_0),$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} [C_3 H_{-2/3}^{(1)}(\chi_0) + C_4 H_{-2/3}^{(2)}(\chi_0)] = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} C_6 e^{i\pi/3} H_{-2/3}^{(2)}(-i\chi_0).$$

Так как при $\Delta z \rightarrow 0$ аргументы функций Ганкеля здесь стремятся к нулю, то можно применить асимптотику (11.28). Подставляя из (11.28) выражения функций Ганкеля и сокращая общие множители, имеем

$$-C_3 + C_4 = C_6; \quad -C_3 e^{i2\pi/3} + C_4 e^{-i2\pi/3} = C_6.$$

Решая эту систему двух линейных уравнений относительно коэффициентов C_4 и C_6 , находим

$$C_4 = -C_3 e^{i2\pi/3}, \quad C_6 = -C_3 e^{i\pi/3}.$$

Таким образом, составляющие векторов поля имеют вид: при $0 \leq z \leq z_0$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= C_3 e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \xi^{1/3} [H_{1/3}^{(1)}(\xi) - e^{i2\pi/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi)] \\ H_y &= -iC_3 W_1^{-1} e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \cdot \left(\frac{2k_1}{3B}\right)^{-1/3} \cdot \xi^{2/3} \cdot [H_{-2/3}^{(1)}(\xi) - e^{i2\pi/3} H_{-2/3}^{(2)}(\xi)] \\ H_z &= -W_1^{-1} E_x \sin \theta_0; \end{aligned} \right\} \quad (11.41)$$

при $z_0 \leq z \leq \infty$

$$\left. \begin{aligned} E_x^- &= -C_3 e^{i\pi/3} e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \xi^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi), \\ H_y^- &= -C_3 e^{i\pi/3} W_1^{-1} e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \cdot \xi^{1/3} H_{-2/3}^{(2)}(\xi) (Bz - \cos^2 \theta_0)^{1/2}, \\ H_z^- &= -W_1^{-1} E_x^- \sin \theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (11.42)$$

Коэффициент C_3 и коэффициент отражения $R_{\perp} = \dot{E}_1^{\text{B}} / \dot{E}_0^{\text{H}}$ должны быть найдены с помощью граничных условий (11.11). Подстав-

ля в последние значения составляющих векторов поля из (11.7), (11.9) и (11.41), получаем

$$\dot{E}_0^n + \dot{E}_1^n = C_3 \xi_0^{1/3} \left[H_{1/3}^{(1)}(\xi_0) - e^{i2\pi/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi_0) \right] \quad (11.43)$$

$$\dot{E}_0^n - \dot{E}_1^n = -i \xi_0^{1/3} C_3 \left[H_{-2/3}^{(1)}(\xi_0) - e^{i2\pi/3} H_{-2/3}^{(2)}(\xi_0) \right] \quad (11.44)$$

где $\xi_0 = (2k_1/3B) \cos^3 \theta_0$. Разделив первое из выражений на второе, имеем:

$$\frac{1+R_\perp}{1-R_\perp} = i \frac{H_{1/3}^{(1)}(\xi_0) - e^{i2\pi/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi_0)}{H_{-2/3}^{(1)}(\xi_0) - e^{i2\pi/3} H_{-2/3}^{(2)}(\xi_0)}.$$

Определяя из этого выражения R_\perp , учитывая (11.28) и выражения

$$H_p^{(2)}(x) = J_p(x) \pm iN_p(x), \quad (11.45)$$

находим

$$R_\perp = - \frac{\sqrt{3}J_{2/3}(\xi_0) + N_{2/3}(\xi_0) + i[\sqrt{3}J_{1/3}(\xi_0) - N_{1/3}(\xi_0)]}{\sqrt{3}J_{2/3}(\xi_0) + N_{2/3}(\xi_0) - i[\sqrt{3}J_{1/3}(\xi_0) - N_{1/3}(\xi_0)]}. \quad (11.46)$$

Из этого выражения видно, что $|R_\perp| = 1$, а фаза коэффициента отражения определяется параметром $(2k_1/3B) \cos^3 \theta_0$.

Коэффициент C_3 , играющий роль «коэффициента прохождения» ЭМ поля в слой, определяем из (11.43), (11.44), используя (11.28), (11.45) и учитывая, что $1 + \exp(i2\pi/3) = (1 + i\sqrt{3})/2$, $[1 - \exp(i2\pi/3)] \cdot [1 + \exp(i2\pi/3)]^{-1} = -i\sqrt{3}$:

$$C_3 = \dot{E}_0 \cdot \xi_0^{-1/3} [U + iV]^{-1}, \quad (11.47)$$

где

$$U = 3J_{1/3}(\xi_0) + \sqrt{3}J_{2/3}(\xi_0) + N_{2/3}(\xi_0) - \sqrt{3}N_{1/3}(\xi_0),$$

$$V = 3J_{2/3}(\xi_0) - \sqrt{3}J_{1/3}(\xi_0) + N_{1/3}(\xi_0) + \sqrt{3}N_{2/3}(\xi_0).$$

Значение «коэффициента прохождения» тоже определяется параметром $(2k_1/3B) \cos^3 \theta_0$.

Найденные составляющие векторов напряженностей ЭМ полей (11.41), (11.42) удовлетворяют уравнениям Максвелла, условиям непрерывности касательных составляющих векторов напряженностей полей в средах и условию отсутствия источников ЭМ поля на бесконечности. Следовательно, решение граничной задачи является единственным.

4. Выполним анализ ЭМ поля. В нижнем полупространстве для полного поля из (11.7), (11.12) и (11.9), (11.12) с учетом того, что $R_{\perp} = \exp(-i\Phi_{\perp})$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_{x1} &= \dot{E}_{x1}^n + \dot{E}_{x1}^b = \dot{E}_0^n e^{-ik_1 y \sin \vartheta_0} \left(e^{-ik_1 z \cos \vartheta_0} + R_{\perp} e^{ik_1 z \cos \vartheta_0} \right) = \\ &= \dot{E}_0^n e^{-ik_1 y \sin \vartheta_0 - i\Phi_{\perp}/2} \left[e^{-i(k_1 z \cos \vartheta_0 - \Phi_{\perp}/2)} + e^{i(k_1 z \cos \vartheta_0 - \Phi_{\perp}/2)} \right] = \\ &= 2\dot{E}_0^n e^{-ik_1 y \sin \vartheta_0} \cos(k_1 z \cos \vartheta_0 - \Phi_{\perp}/2), \end{aligned} \quad (11.48)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{y1} &= \dot{H}_{y1}^n + \dot{H}_{y1}^b = W_1^{-1} \dot{E}_{x1}^n \cos \vartheta_0 - W_1^{-1} \dot{E}_{x1}^b \cos \vartheta_0 = -i2\dot{E}_0^n W_1^{-1} \times \\ &\times e^{-ik_1 y \sin \vartheta_0} \cos \vartheta_0 \sin(k_1 z \cos \vartheta_0 - \Phi_{\perp}/2), \end{aligned} \quad (11.49)$$

$$\dot{H}_{z1} = \dot{H}_{z1}^n + \dot{H}_{z1}^b = -W_1^{-1} \dot{E}_{x1}^n \sin \vartheta_0 - W_1^{-1} \dot{E}_{x1}^b \sin \vartheta_0 = -\dot{E}_{x1} W_1^{-1} \sin \vartheta_0. \quad (11.50)$$

Таким образом, полное поле по координате z распределено по закону стоячей волны. При $z=0$ (на плоскости xy)

$$\dot{E}_{x1} = 2\dot{E}_0^n \exp(-ik_1 y \sin \vartheta_0) \cos(\Phi_{\perp}/2), \quad \dot{H}_{y1} = i2E_0^n W_1^{-1} \cos \vartheta_0 \sin(\Phi_{\perp}/2).$$

На плоскости xy эквивалентное поверхностное сопротивление $Z_1 = \dot{E}_{x1} / \dot{H}_{y1}$ (при $z=0$) определяется значениями фазы коэффициента отражения и угла падения: $Z_1 = -iW_1(\cos^{-1} \vartheta_0) \operatorname{ctg}(\Phi_{\perp}/2)$. По координате y существует волновой процесс, поэтому составляющая вектора Пойнтинга $\dot{\Pi}_{y1} = \Pi_{y1}$ — чисто действительная величина. Составляющая вектора Пойнтинга $\dot{\Pi}_{z1}$ — чисто мнимая величина — поле вдоль орта 1_z ЭМ энергию не переносит.

5. В области $0 \leq z \leq z_0$ при $\xi \gg 1$, применяя асимптотику (11.18), получаем

$$\xi^{1/3} \left[H_{1/3}^{(1)}(\xi) - e^{i2\pi/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi) \right] \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\pi/6} \cdot \xi^{-1/6} 2 \cos(\xi - \pi/4),$$

$$\xi^{2/3} \left[H_{-2/3}^{(1)}(\xi) - e^{i2\pi/3} H_{-2/3}^{(2)}(\xi) \right] \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\pi/3} \cdot \xi^{-1/6} 2i \sin(\xi - \pi/4).$$

Из (11.41) с учетом этого имеем

$$E_x \cong 2C_3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi^{-1/6} \exp(-i\pi/6) \cdot \cos(\xi - \pi/4) \cdot \exp(-ik_1 y \sin \vartheta_0),$$

$$H_y \cong 2C_3 W_1^{-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi^{-1/6} \exp(i\pi/3) \left(\frac{2k_1}{3B} \right)^{-1/3} \sin(\xi - \pi/4) \cdot \exp(-ik_1 y \sin \vartheta_0), \quad (11.51)$$

$$H_z \cong -W_1^{-1} E_x \sin \vartheta_0.$$

Составляющие векторов \dot{E}_x и \dot{H}_y распределены по координате z по сложным законам $\cos\left[\frac{2k_1}{3B}(\cos^2 \vartheta_0 - Bz)^{3/2} - \pi/4\right]$ и $\sin\left[\frac{2k_1}{3B}(\cos^2 \vartheta_0 - Bz)^{3/2} - \pi/4\right]$ и сдвинуты между собой по фазе на $\pi/2$. Волнового движения вдоль направления, определяемого ортом $(\pm \mathbf{1}_z)$, нет. Составляющие вектора Пойнтинга

$$\Pi_z = \frac{1}{2} E_x \dot{H}_y^* = i |C_3|^2 W_1^{-1} (2/\pi) (2k_1/3B)^{-1/3} \xi^{-1/3} \cos 2\xi, \quad (11.52)$$

$$\Pi_y = -\frac{1}{2} E_x \dot{H}_z^* = 2 |C_3|^2 W_1^{-1} (2/\pi) \sin \vartheta_0 \cdot \xi^{-1/3} \cos^2(\xi - \pi/4) = \Pi_y$$

показывают, что ЭМ поле в этой области пространства энергию не переносит вдоль направления, определяемого ортом $(\pm \mathbf{1}_z)$, и наоборот, вдоль направления, определяемого ортом $\mathbf{1}_y$, оно переносит энергию.

Если $\operatorname{tg} \theta = |\Pi_z|/|\Pi_y|$, то $\operatorname{tg} \theta = (2k_1/3B)^{-1/3} \sin^{-1} \vartheta_0 \operatorname{tg}(\xi - \pi/4)$. С ростом z значение ξ уменьшается, поэтому угол θ уменьшается. Таким образом, можно считать, что вектор Пойнтинга ЭМ поля в области $0 \leq z \leq z_0$, там, где $\xi \gg 1$, постепенно «отворачивается» от первоначального направления, определяемого ортом $\mathbf{1}_z$, в сторону направления орта $\mathbf{1}_y$, т.е. волна изменяет направление своего распространения так, что орт нормали к ее фронту поворачивается в сторону возрастания $\varepsilon(z)$.

Подставляя значения $\dot{E}_{x1}, \dot{H}_{y1}$ из (11.48), (11.49) и \dot{E}_x, \dot{H}_y — из (11.51) в условия (11.11), можно определить асимптотическое значение фазы Φ_{\perp} и коэффициента C_3 . Например, разделив второе из полученных уравнений на первое, находим

$$\Phi_{\perp} \cong 2 \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{2k_1}{3B} \cos^3 \vartheta_0 \right)^{-1/3} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{2k_1}{3B} \cos^3 \vartheta_0 \right) \right]. \quad (11.53)$$

Это выражение показывает, что фаза коэффициента отражения определяется только отношением k_1/B и величиной угла падения. Выражение (11.53) можно получить, определив по (11.51) поверхностный импеданс и приравняв его к Z .

Слагаемые в (11.41) по аналогии с полем в слое диэлектрика можно рассматривать как *парциальные волны*, переотражающиеся меж-

ду плоскостями xy и xz_0y (см. § 7.2, § 7.3). Волновая функция первой («прямой») волны, распространяющейся вдоль возрастающих значений z и определяемая вторым слагаемым, равна $\cos(\omega t - k_1 y \sin \vartheta_0 - \xi + 13\pi/12)$. Волновая функция второй («обратной») волны, определяемая первым слагаемым (функцией $H_{1/3}^{(1)}(\xi)$), равна $\cos(\omega t - k_1 y \sin \vartheta_0 + \xi - 5\pi/12)$. Приравнивая полные дифференциалы фаз к нулю, получаем

$$\omega dt - k_1 \sin \vartheta_0 dy + k_1 (\cos^2 \vartheta_0 - Bz)^{1/2} dz = 0,$$

$$\omega dt - k_1 \sin \vartheta_0 dy - k_1 (\cos^2 \vartheta_0 - Bz)^{1/2} dz = 0.$$

Фазовые скорости волн вдоль оси y одинаковы: $v_{\phi y} = v_1 / \sin \vartheta_0$. Фазовая скорость вдоль оси z «прямой» волны $v'_{\phi z} = v_{\phi} (\cos^2 \vartheta_0 - Bz)^{-1/2}$ увеличивается при z , возрастающем. Поэтому орт нормали к фронту этой волны «поворачивается» в сторону орта $\mathbf{1}_y$. Фазовая скорость вдоль оси z «обратной» волны $v''_{\phi z} = v'_{\phi z}$, направлена она в противоположную сторону относительно $v'_{\phi z}$ и с уменьшением z уменьшается, поэтому орт нормали к ее фронту тоже «поворачивается» при уменьшении z в сторону орта $\mathbf{1}_z$. Фронты парциальных волн искажаются. У плоскости $z=0$ сумма этих волн дает вторичную волну в нижнем полупространстве, имеющую плоский фронт.

В области $0 \leq z \leq z_0$ парциальные волны в полном смысле прямой и обратной волнами считать нельзя, так как отражение поля происходит локально (в каждой точке) по причине неоднородности среды ($\text{grad} \epsilon(z) \neq 0$).

6. В области $0 \leq z \leq z_0$ при $\xi \ll 1$ значение z близко z_0 , применяя асимптотику (11.28), получаем

$$\xi^{1/3} [H_{1/3}^{(1)}(\xi) - e^{i2\pi/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi)] \cong -i \frac{2 \cdot 2^{1/3}}{\sqrt{3}\Gamma(2/3)} e^{i\pi/3},$$

$$\xi^{2/3} [H_{-2/3}^{(1)}(\xi) - e^{i2\pi/3} H_{-2/3}^{(2)}(\xi)] \cong -i \frac{2 \cdot 2^{2/3}}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)} e^{i\pi/3}.$$

Из (11.41) с учетом этого имеем

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &\equiv -iC_3 \frac{2 \cdot 2^{1/3}}{\sqrt{3}\Gamma(2/3)} \cdot e^{-ik_y \sin \theta_0 + i\pi/3}, \\ \dot{H}_y &\equiv -C_3 W_1^{-1} \left(\frac{2k_1}{3B} \right)^{-1/3} \frac{2 \cdot 2^{2/3}}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)} \cdot e^{-ik_y \sin \theta_0 + i\pi/3}, \\ \dot{H}_z &\equiv -W_1^{-1} \dot{E}_x \sin \theta_0. \end{aligned}$$

Таким образом, в окрестности $z \approx z_0$ все составляющие векторов поля не зависят от z , но \dot{E}_x и \dot{H}_y сдвинуты по фазе на $\pi/2$, поэтому \dot{P}_z — чисто мнимая величина.

Волнового процесса по оси z вблизи плоскости xz_0y нет. Это показывает, что явление «полного внутреннего отражения» волны происходит не от плоскостей xz_0y или xz_1y (где $\epsilon(z_1) = 0$), а в некоторой области, в которой $z < z_0$.

Так как \dot{E}_x и \dot{H}_z сдвинуты по фазе на π , то \dot{P}_y — чисто действительная величина. Вдоль плоскости xz_0y ЭМ поле переносит энергию.

7. В области $z_0 \leq z < \infty$ ЭМ поле с составляющими векторов $\dot{E}_x^-, \dot{H}_y^-, H_z^-$ по (11.42) имеет характер поверхностной волны, распространяющейся вдоль направления, определяемого ортом 1_y . Эта волна аналогична поверхностным волнам, возникающим при распространении поля в слое диэлектрика (см. §§ 7.2 и 7.3) или диэлектрическом волноводе (§ 7.4).

8. Из изложенного следуют основные выводы: ЭМ поле, падающее на среду, в которой $\epsilon(z)$ уменьшается по линейному закону с ростом z и обращается в нуль при некотором значении z_1 , полностью отражается от такой среды; внутри слоя, образованного плоскостями xu и xz_0y , поле существует в виде суммы двух парциальных волн, переотражающихся между плоскостями xu и xz_0y ; наложение этих волн друг на друга приводит к распределению поля по координате z , близкому к стоячей волне; по координате y поле имеет характер бегущих волн во всех областях; за плоскостью xz_0y (при $z > z_0$) поле имеет характер поверхностной волны; в нижнем полупространстве ЭМ поле является стоячей волной по координате z .

9. Пример. Пусть неподмагниченная плазма граничит с нейтросферой, имеющей $\epsilon_1 = 1$. Плотность N электронов плазмы линейно убывает с увеличением высоты.

Если плоскость xz совместить с границей плазмы и нейтросферы, то $N(z) = bz$. На высоте $z' = 20$ км над границей $N(z') = 1,5 \cdot 10^5$ эл/см³ = $1,5 \cdot 10^{11}$ эл/м³. Определить положение плоскости xz_0y , фазу Φ_{\perp} коэффициента отражения на частоте $f = 3$ МГц, если угол падения волны $\theta_0 = 60^\circ$.

Определяем (см. § 10.3) собственную частоту плазмы $\omega_0 = (\epsilon_0^2 \epsilon_0 m_3)^{1/2} \cdot N^{1/2} = (3,177 \cdot 10^3)^{1/2} N^{1/2} = 21,828 \cdot 10^6$ Гц, т.е. $f_0 = 3,476$ МГц. Имеем $f < f_0$. Находим коэффициент $b = N(z')/z' = 0,75 \cdot 10^7$ 1/м⁴. Тогда высота z_1 , на которой $\epsilon(z_1)$ обращается в нуль: $z_1 = (\epsilon_0 m_3 / e_3^2) \cdot \omega^2 / b = 14,9$ км. Поэтому $B = 1/z_1 = 6,71 \cdot 10^{-5}$ 1/м. Значит, $z_0 = (\cos^2 \theta_0) / B = z_1 \cos^2 \theta_0 = 3,725$ км.

Таким образом, парциальные волны преломляются в слое, имеющем толщину 3,725 км.

Так как $\lambda = 100$ м, то $k_1 = \beta_1 = 2\pi/\lambda = 6,28 \cdot 10^{-2}$ 1/м. Поэтому $\xi_0 = (2k_1 \cos^3 \theta_0) / 3B = 78 \gg 1$ и можно применить асимптотическую формулу (11.53). Получаем

$$\Phi_{\perp} \cong 2 \arctg[(78)^{-1/3} \cdot \text{tg}(78)] = 1,86\pi.$$

В нижнем полупространстве имеем стоячую волну, определяемую выражениями (11.48) — (11.50), в которых все параметры известны.

10. Строгие решения уравнения (11.10) при других конкретных законах изменения $\epsilon(z)$ изложены в [31, 58-60].

11.5. Уравнения геометрической оптики. Локально плоская волна

1. Во многих электродинамических задачах уравнения геометрической оптики дают единственную возможность получить приближенные аналитические решения, так как они проще уравнения Гельмгольца, поскольку являются уравнениями в частных производных первого порядка и их решение сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. При изучении волновых процессов в неоднородных средах они являются основными и дают методическую основу для получения приближенных дифракционных решений [49, 61, 62].

2. Пусть неограниченное пространство заполнено изотропной, линейной средой с неоднородной диэлектрической проницаемостью $\tilde{\epsilon}_a(\omega, p)$. В среде распространяется ЭМ поле частоты ω . Комплексные амплитуды его векторов напряженностей обозначим через $\tilde{E}(p, \omega)$, $\tilde{H}(p, \omega)$. Вне стороннего источника векторы \tilde{E} , \tilde{H} удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \tilde{H} = i\omega \epsilon_a \tilde{E}, \quad \text{rot } \tilde{E} = -i\omega \mu_a \tilde{H}. \quad (11.54)$$

Считаем, что $\omega \rightarrow \infty$, (но ω остается конечной). Тогда $k_0 = \omega(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2} \rightarrow \infty$. Введем вектор $\dot{\tilde{\mathbf{E}}} = W_0^{-1} \dot{\mathbf{E}}$, где W_0 — характеристическое сопротивление свободного пространства. При этом векторы $\dot{\tilde{\mathbf{E}}}$ и $\dot{\tilde{\mathbf{H}}}$ имеют одинаковую размерность, а из (11.54) имеем [48, 60] уравнения Максвелла

$$\text{rot } \dot{\tilde{\mathbf{H}}} = ik_0 \tilde{\epsilon} \dot{\tilde{\mathbf{E}}}, \quad \text{rot } \dot{\tilde{\mathbf{E}}} = -ik_0 \mu \dot{\tilde{\mathbf{H}}}. \quad (11.55)$$

Основой для построения приближений геометрической оптики являются решения уравнений (11.54) для однородной среды. При этом *вдали от сторонних источников* векторы $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ имеют вид бегущих прямой и обратной волн:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(p, \omega) &= \dot{\mathbf{E}}^0(x, y, z; \omega) e^{\pm i \mathbf{k} r} = \dot{\mathbf{E}}^0(p, \omega) e^{\pm i n k_0 r}; \\ \dot{\mathbf{H}}(p, \omega) &= \dot{\mathbf{H}}^0(p, \omega) e^{\pm i n k_0 r}, \end{aligned} \quad (11.56)$$

где амплитуды $\dot{\mathbf{E}}^0, \dot{\mathbf{H}}^0$ в среде без потерь в случае плоской волны не зависят от $p(x, y, z)$, а в случаях сферической или цилиндрической волн медленно изменяются с изменением r . Фаза $\Psi(x, y, z; \omega) = \mathbf{k} r$ линейно увеличивается с ростом расстояния r от начала координат, $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{n}$, $k_0 = 1_l k_0$, 1_l — орт нормали к фронту волны, $n = \sqrt{\tilde{\epsilon} \mu}$ — коэффициент преломления среды.

В малой области пространства фронт волны можно аппроксимировать плоскостью. Тогда волну называют *локально плоской*.

Если в *неоднородной среде* на расстоянии, равном длине волны, $\tilde{\epsilon}$ и μ меняются мало, то в малой области пространства законы распространения ЭМ поля должны незначительно отличаться от законов распространения в однородной среде с $\tilde{\epsilon}$ и μ , близким к значениям этих параметров соответствующего участка неоднородной среды. Действительно, анализ строгих решений (11.19) — (11.22) и (11.41) задач о распространении ЭМ поля в среде с линейно изменяющейся диэлектрической проницаемостью показывает, что амплитуды векторов поля при медленно меняющейся ϵ есть медленно меняющиеся функции расстояния, а фазы — быстро меняющиеся функции. Поэтому решения уравнений (11.55) естественно искать в виде локально плоской волны с медленно меняющимися амплитудами векторов $\dot{\tilde{\mathbf{E}}}$ и $\dot{\tilde{\mathbf{H}}}$. Рассматриваем прямую волну. Обозначим через $\dot{\mathbf{U}}(x, y, z; \omega), \dot{\mathbf{V}}(x, y, z; \omega)$ имеющие одинаковые размерности амплитуды векторов $\dot{\tilde{\mathbf{E}}}$ и $\dot{\tilde{\mathbf{H}}}$. Тогда

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}} = \dot{\mathbf{U}}(p, \omega) e^{-i k_0 L(p, \omega)}, \quad \dot{\tilde{\mathbf{H}}} = \dot{\mathbf{V}}(p, \omega) e^{-i k_0 L(p, \omega)} \quad (11.57)$$

где функция $L(x, y, z; \omega)$, называемая *эйконалом* (от греческого слова $\epsilon\iota\kappa\acute{\omicron}\nu$ — изображение), определяет фазу векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. При $L(x, y, z; \omega) = \text{const}$ имеем поверхность равных фаз, и $\text{grad} L(p, \omega)$ определяет направление распространения волны.

Найдем уравнение, определяющее эйконал. Для этого подставим (11.57) в (11.55). Учтем, что, если \mathbf{a} — вектор, а b — скаляр, то

$$\text{rot}(b\mathbf{a}) = b \text{rot} \mathbf{a} + [\text{grad} b, \mathbf{a}],$$

$$\text{grad}(\exp(-ik_0 L)) = -ik_0 \exp(-ik_0 L) \text{grad} L.$$

Сокращая общий экспоненциальный множитель, имеем:

$$\text{rot} \mathbf{V} - ik_0 [\text{grad} L, \mathbf{V}] = ik_0 \mathfrak{E} \mathbf{U},$$

$$\text{rot} \mathbf{U} - ik_0 [\text{grad} L, \mathbf{U}] = -ik_0 \mu \mathbf{V}. \quad (11.58)$$

Векторные функции $\dot{\mathbf{U}}$ и $\dot{\mathbf{V}}$ разлагаем в ряды по малому параметру $(ik_0)^{-1}$:

$$\dot{\mathbf{U}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\dot{\mathbf{U}}_q}{(ik_0)^q}, \quad \dot{\mathbf{V}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\dot{\mathbf{V}}_q}{(ik_0)^q}. \quad (11.59)$$

Геометрической оптике соответствуют первые члены этих разложений.

Подставляя (11.59) в (11.58) и приравнивая слагаемые при одинаковых степенях параметра $(ik_0)^{-q}$ в левых и правых частях равенств (11.58), получаем для $q = 0$

$$[\text{grad} L, \mathbf{V}_0] + \mathfrak{E} \mathbf{U}_0 = 0, \quad (11.60)$$

$$[\text{grad} L, \mathbf{U}_0] - \mu \mathbf{V}_0 = 0. \quad (11.61)$$

При $q > 0$ имеем рекуррентную систему уравнений

$$[\text{grad} L, \dot{\mathbf{V}}_q] + \mathfrak{E} \dot{\mathbf{U}}_q = -\text{rot} \dot{\mathbf{V}}_{q-1},$$

$$[\text{grad} L, \dot{\mathbf{U}}_q] - \mu \dot{\mathbf{V}}_q = \text{rot} \dot{\mathbf{U}}_{q-1}. \quad (11.62)$$

Если умножить скалярно (11.60) на $\text{grad} L$, то, учитывая коллинеарность векторов в смешанном их произведении, получаем $\dot{\mathbf{U}}_0 \cdot \text{grad} L = 0$.

Умножая скалярно (11.61) на $\text{grad} L$, аналогично получим $\dot{\mathbf{V}}_0 \cdot \text{grad} L = 0$.

Если умножить скалярно (11.60) на $\dot{\mathbf{V}}_0$, а (11.61) — на $\dot{\mathbf{U}}_0$, то найдем, что $\dot{\mathbf{V}}_0 \cdot \dot{\mathbf{U}}_0 = 0$. Таким образом, векторы $\dot{\mathbf{U}}_0$ и $\dot{\mathbf{V}}_0$ ортогональны друг другу.

Условие существования нетривиального решения однородной системы уравнений (11.60), (11.61) находится подстановкой значения $\dot{\mathbf{U}}_0$, определенного из (11.60), в (11.61). Имеем:

$$[\text{grad}L[\text{grad}L, \dot{V}_0]] = -\tilde{\epsilon}\mu\dot{V}_0 = -n^2\dot{V}_0.$$

Раскрывая двойное векторное произведение, учитывая, что $\dot{V}_0 \cdot \text{grad}L = 0$, и сокращая множитель \dot{V}_0 , находим уравнение, определяющее эйконал:

$$(\text{grad}L)^2 = n^2. \quad (11.63)$$

В ДСК из (11.63) получаем

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z). \quad (11.64)$$

Последние два равенства являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка. В частных случаях задания функции $n(p)$ их удастся решить методом разделения переменных. Граничным условием при этом служит задание фазы векторов поля $\Psi(p, \omega)$ на некоторой поверхности: $\Psi(p_1, \omega) = \Psi(x_1, y_1, z_1, \omega) = k_0 L(p_1, \omega) = \text{const}$. Этой поверхностью может быть, например, граница раздела однородной и неоднородной сред или поверхность S_u , ограничивающая область V_u , занятую сторонним источником. Поверхности $L(p, \omega) = \text{const}$ называют *геометрическими волновыми фронтами* или *геометрическими волновыми поверхностями* (ниже волновыми фронтами).

3. Вектор Пойнтинга в геометрооптическом приближении $\dot{\Pi} = 0,5[\dot{E}, \dot{H}^*] = 0,5W_0[\dot{E}, \dot{H}^*] = 0,5W_0[\dot{U}_0, \dot{V}_0^*]$. Поскольку на основании уравнения эйконала вектор

$$\mathbf{1}_l = \frac{\text{grad}L}{n} = \frac{\text{grad}L}{|\text{grad}L|} \quad (11.65)$$

является единичным (ортом), то подставляя значение $\text{grad}L = n\mathbf{1}_l$ в (11.60), (11.61), получаем

$$\dot{U}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}}}[\dot{V}_0, \mathbf{1}_l]; \quad \dot{V}_0 = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}}{\mu}}[\mathbf{1}_l, \dot{U}_0]. \quad (11.66)$$

Поэтому $\dot{E}^0 = W[\dot{H}^0, \mathbf{1}_l]$, где $W = (\mu/\tilde{\epsilon})^{1/2}W_0$ — характеристическое сопротивление среды в точке p .

При этом

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2}W_0\sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}}}[[\dot{V}_0, \mathbf{1}_l]\dot{V}_0^*] = \frac{1}{2}W_0\sqrt{\left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\mu}\right)^*}[\dot{U}_0[\mathbf{1}_l, \dot{U}_0^*]].$$

Раскрывая здесь двойные векторные произведения, учитывая, что $\mathbf{1}_l \dot{\mathbf{V}}_0 = \mathbf{1}_l \dot{\mathbf{U}}_0 = 0$, находим

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\Pi}_l \mathbf{1}_l, \text{ где } \dot{\Pi}_l = \frac{1}{2} W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |\dot{\mathbf{V}}_0|^2 = \frac{1}{2} W_0 \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^*} |\dot{\mathbf{U}}_0|^2. \quad (11.67)$$

Заменяя здесь $\dot{\mathbf{U}}_0$ и $\dot{\mathbf{V}}_0$ по (11.57) с учетом (11.59), получаем

$$\dot{\Pi}_l = \frac{1}{2} W |\dot{\mathbf{H}}_0|^2 = \frac{1}{2W^*} |\dot{\mathbf{E}}|^2, \quad (11.68)$$

т.е. отношение поперечных составляющих векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в геометрическом приближении так же, как при строгих решениях в неограниченном однородном пространстве, определяется характеристическим сопротивлением среды. Но последнее зависит от положения точки p .

Таким образом, вектор Пойнтинга направлен вдоль нормали к волновому фронту, продольное направление определяется ортом $\mathbf{1}_l$, векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ ортогональны между собой и ортогональны вектору $\dot{\mathbf{H}}$. Значит, волна является T -волной. Поэтому уравнения (11.60), (11.61) и (11.63) определяют локально плоскую волну.

4. Геометрическими световыми лучами называют траектории (семейство линий), ортогональные к волновым фронтам $k_0 L(p, \omega) = \text{const}$. Этим линиям приписывается направление, совпадающее в каждой точке p с направлением вектора Пойнтинга. Векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ ортогональны лучу. Пусть l — длина дуги луча, отсчитываемая от определенной точки p_1 до точки p . Обозначим через $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$ радиус-вектор точки p , расположенной на луче (рис. 11.2, а). Тогда $d\mathbf{r}/dl = \mathbf{1}_l$ — орт, касательный лучу [63, стр.83]. Поэтому уравнением луча в соответствии с (11.65) является

$$n \frac{d\mathbf{r}(l)}{dl} = \text{grad}L, \quad (11.69)$$

т.е. в каждой точке p $\text{grad}L$ направлен по касательной к лучу. Поскольку $d\mathbf{r}/dl = \mathbf{1}_l$, а $\text{grad}L = \mathbf{1}_l \partial L / \partial l$, то из (11.69) имеем

$$dL/dl = n, \quad (11.70)$$

т.е. если dl — расстояние между точками пересечения нормали с волновыми фронтами L_1 и $L_1 + dL$, то $dl = dL/n = |\mathbf{v}_\phi(l) \cdot dL|/c$ (c — скорость света в свободном пространстве). Интеграл $\int n dl$ вдоль кривой G называется *оптической длиной этой кривой*.

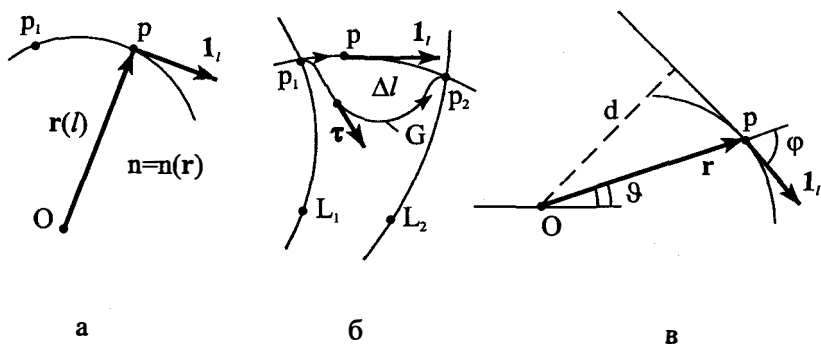


Рис. 11.2. Орт $\mathbf{1}_l$ и оптическая длина луча

Если $[p_1, p_2]$ — оптическая длина луча, соединяющего точки p_1 и p_2 , то

$$[p_1, p_2] = \int_{p_1}^{p_2} n dl = \int_{p_1}^{p_2} dL = L(p_2) - L(p_1). \quad (11.71)$$

Так как $n = c / v_\phi$, то $n dl = c dl / v_\phi(l) = c dt$, где dt — время прохождения пути dl вдоль луча. Следовательно,

$$[p_1, p_2] = c \int_{p_1}^{p_2} dt, \quad (11.72)$$

т.е. оптическая длина $[p_1, p_2]$ равна произведению c на время, необходимое для распространения света от точки p_1 до точки p_2 .

5. Чтобы определить изменение вдоль луча амплитуд векторов поля, рассмотрим узкую трубку, образованную световыми лучами, выходящими из элемента dS_1 волнового фронта $L(\mathbf{r}) = L_1$, где L_1 — постоянная, и пусть dS_2 — элемент, который пересекают эти лучи на волновом фронте $L(\mathbf{r}) = L_2$. Мощности, переносимые через площадки $dS_1 = \mathbf{1}_l dS_1$ и $dS_2 = \mathbf{1}_l dS_2$ в соответствии с (11.67)

$$d\dot{P}_1 = \dot{\Pi}_1 dS_1 = \dot{\Pi}_{11} dS_1, \quad d\dot{P}_2 = \dot{\Pi}_2 dS_2 = \dot{\Pi}_{12} dS_2,$$

где $\dot{\Pi}_{11}$, $\dot{\Pi}_{12}$ — нормальные к L_1 и L_2 составляющие векторов Пойнтинга на соответствующих поверхностях волнового фронта.

В геометрической оптике предполагается, что выполняется гипотеза о сохранении энергии вдоль лучевой трубки (обмена энергией между лучевыми трубками, в том числе и соседними, не происходит). Для этого необходимо, чтобы $d\dot{P}_1 = d\dot{P}_2$, т.е. величина $\dot{\Pi} dS$ остается

постоянной вдоль трубки лучей. Это соотношение выражает закон интенсивности в геометрической оптике.

6. Уравнения (11.60), (11.62) называют уравнениями переноса нулевого, первого и т.д. приближений. Они дают возможность определить изменения амплитуд векторов поля и поляризации ЭМ поля при его распространении вдоль луча. Пусть \mathbf{v} — орт, направленный по главной нормали в сторону вогнутой кривой [63, стр.84]. Тогда вектор кривизны \mathbf{K} кривой $\mathbf{K} = d^2\mathbf{r}(l)/dl^2 = d\mathbf{l}_1/dl = \mathbf{v}/R$, где R — радиус кривизны кривой ($1/R^2 = (d^2\mathbf{r}/dl^2) \cdot (d^2\mathbf{r}/dl^2)$). Плоскость, проходящая через точку p и параллельная векторам \mathbf{l}_1 и \mathbf{v} , называется соприкасающейся плоскостью. Орт бинормали $\mathbf{b} = [\mathbf{l}_1, \mathbf{v}]$ ортогонален соприкасающейся плоскости, вектор $d\mathbf{b}/dl$ направлен вдоль орта \mathbf{v} , его модуль описывает скорость поворота соприкасающейся плоскости с увеличением l и называется кручением $1/T$, которое определяется выражением $d\mathbf{b}/dl = \mathbf{v}/T$. Орты \mathbf{b} , \mathbf{l}_1 и \mathbf{v} образуют трехгранник Френе [63], при этом $\frac{d\mathbf{v}}{dl} = -\left(\frac{\mathbf{l}_1}{R} + \frac{\mathbf{b}}{T}\right)$.

Если разложить векторы $\dot{\mathbf{U}}_0$ и $\dot{\mathbf{V}}_0$ (или $\dot{\mathbf{E}}^0$ и $\dot{\mathbf{H}}^0$) по ортам \mathbf{v} и \mathbf{b} , касательным поверхности волнового фронта в точке p : $\dot{\mathbf{U}}_0 = \Phi_1\mathbf{v} + \Phi_2\mathbf{b}$, $\dot{\mathbf{V}}_0 = \Phi_3\mathbf{v} + \Phi_4\mathbf{b}$, где Φ_{1-4} — коэффициенты, подлежащие определению, и подставить эти разложения в (11.60), (11.61), то с учетом возможности существования электромагнитного поля ($\Phi_{1-4} \neq 0$) получаем $(\partial L/\partial l)^2 = n^2$, и $\Phi_3 = -(\bar{\epsilon}/\mu)^{1/2}\Phi_2$, $\Phi_4 = (\bar{\epsilon}/\mu)^{1/2}\Phi_1$. Зависимости $\Phi_1 = \Phi_1(l)$ и $\Phi_2 = \Phi_2(l)$ определяют поворот вектора $\dot{\mathbf{E}}^0$ (плоскости поляризации) при движении вдоль луча l . Для изучения этих зависимостей используют уравнения переноса (11.62) при $q=1$. Применяя условия совместности относительно $\dot{\mathbf{U}}_1$ и $\dot{\mathbf{V}}_1$ полученной системы двух уравнений, можно найти дифференциальные уравнения для $\Phi_1(l)$ и $\Phi_2(l)$. Если $\Phi(l) = (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^{1/2}$, а γ — угол между векторами $\dot{\mathbf{E}}^0$ и \mathbf{v} , то $\Phi_1 = \Phi \cos \gamma$, $\Phi_2 = \Phi \sin \gamma$. Решение дифференциальных уравнений относительно γ дает [64, 65, стр.131] скорость изменения γ вдоль луча $d\gamma/dl = 1/T$. Таким образом, плоскость поляризации поворачивается со скоростью, равной кручению луча. Кручение $1/T$ является мерой отклонения кривой от плоской кривой. Если кривая плоская, то бинормаль не меняет своего направления. Поэтому для плоской кривой кручение равно нулю (радиус кручения $T \rightarrow \infty$). Значит, для лучей, лежащих в плоскости, $d\gamma/dl \equiv 0$, т.е. поляризация ЭМ поля не меняется вдоль каждого луча.

7. Пределы применимости уравнений геометрической оптики можно установить путем сравнения уравнений эйконала (11.60) с (11.58). Видно, что уравнения (11.60) справедливы, если выполняются условия $|\text{rot}\dot{\mathbf{V}}| \ll |ik_0[\text{grad} L, \dot{\mathbf{V}}]|$, $|\text{rot}\dot{\mathbf{U}}| \ll |ik_0[\text{grad} L, \dot{\mathbf{U}}]|$. При этом $\dot{\mathbf{U}} \approx \dot{\mathbf{U}}_0$, $\dot{\mathbf{V}} \approx \dot{\mathbf{V}}_0$. Заменяя здесь $\dot{\mathbf{U}}$ и $\dot{\mathbf{V}}$ по (11.57) векторами напряженностей $\dot{\mathbf{E}}^0$, $\dot{\mathbf{H}}^0$ и учитывая, что $|\dot{\mathbf{E}}^0| = W|\dot{\mathbf{H}}^0|$, $\lambda = \lambda_0/n$, получаем

$$\frac{|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}^0|}{|\dot{\mathbf{E}}^0|} \frac{\lambda}{2\pi} \ll 1, \quad \frac{|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^0|}{|\dot{\mathbf{H}}^0|} \frac{\lambda}{2\pi} \ll 1.$$

Здесь $(|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}^0|/|\dot{\mathbf{E}}^0|) \cdot \lambda$ и $(|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^0|/|\dot{\mathbf{H}}^0|) \cdot \lambda$ — относительные приращения векторов $\dot{\mathbf{E}}^0$ и $\dot{\mathbf{H}}^0$ на расстоянии, равном длине волны λ . Поэтому уравнения геометрической оптики справедливы до тех пор, пока относительные изменения амплитуд векторов поля на расстоянии, равном длине волны в среде, можно считать малыми по сравнению с 2π .

11.6. Общие свойства лучей

1. Дифференциальное уравнение, характеризующее лучи непосредственно показателем преломления, можно получить из (11.69). Дифференцируя последнее по направлению орта $\mathbf{1}_l$ [63, стр. 124], имеем

$$\frac{d}{dl} n \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{d}{dl} \operatorname{grad} L = (\mathbf{1}_l \cdot \nabla) \cdot \operatorname{grad} L,$$

где ∇ — оператор набла. Так как $\mathbf{1}_l = d\mathbf{r}/dl = n^{-1} \cdot \operatorname{grad} L$, то

$$\frac{d}{dl} n \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{1}{n} (\operatorname{grad} L \cdot \nabla) \cdot \operatorname{grad} L = \frac{1}{2n} \operatorname{grad}(\operatorname{grad} L)^2.$$

С помощью уравнения эйконала (11.63) отсюда получаем векторную форму дифференциального уравнения лучей

$$\frac{d}{dl} n \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{1}{2n} \operatorname{grad} n^2 = \operatorname{grad} n. \quad (11.73)$$

Вектор $n\mathbf{1}_l = nd\mathbf{r}/dl$ называют *лучевым вектором*.

2. В однородной среде $\operatorname{grad} n = 0$. Поэтому из (11.73) имеем уравнение $d^2\mathbf{r}/dl^2 = 0$, решением которого является векторное уравнение прямой линии $\mathbf{r} = \mathbf{g}l + \mathbf{q}_1$, проходящей через точку $\mathbf{r} = \mathbf{q}_1$ и направленной по вектору \mathbf{g} (\mathbf{g} и \mathbf{q}_1 — постоянные векторы). Значит, в однородной среде лучи являются прямыми линиями.

3. Рассмотрим лучи в среде, в которой $n = n(r)$, т.е., например, диэлектрическая проницаемость зависит только от расстояния до некоторой фиксированной точки (в среде имеется центральная симметрия). Это условие приближенно выполняется в атмосфере Земли, если учитывается кривизна последней.

Образуем векторное произведение $[\mathbf{r}, (1, n)]$. Тогда

$$\frac{d}{dl}[\mathbf{r}, (\mathbf{1}_l n)] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dl}, (\mathbf{1}_l n) \right] + \left[\mathbf{r}, \frac{d}{dl}(\mathbf{1}_l n) \right].$$

Так как $d\mathbf{r}/dl = \mathbf{1}_l$, то первое слагаемое здесь равно нулю. Во втором — учитываем (11.73). Поэтому

$$\frac{d}{dl}[\mathbf{r}, (\mathbf{1}_l n)] = \left[\mathbf{r}, \frac{d}{dl} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dl} n \right) \right] = [\mathbf{r}, \text{grad } n]. \quad (11.74)$$

Поскольку здесь $\text{grad } n(r) = \mathbf{1}_r dn/dr$, где $\mathbf{1}_r = \mathbf{r}/r$, то правая часть в (11.74) равна нулю. Поэтому

$$[\mathbf{r}, \mathbf{1}_l n] = \text{const},$$

т.е. все лучи являются плоскими кривыми, лежащими в плоскости, проходящей через начало координат. Вдоль каждого луча выполняется условие

$$nr \sin \varphi = nd = A = \text{const}, \quad (11.75)$$

где φ — угол между \mathbf{r} и касательной в точке p , $d = r \sin \varphi$ (рис. 11.2, в).

Угол φ определяется [66, стр.406] выражением

$$\sin \varphi = \left[r^2(\theta) + (dr/d\theta)^2 \right]^{-1/2} \cdot r(\theta),$$

из которого имеем $(dr/d\theta) \cdot (n \sin \varphi) = [(nr)^2 - A^2]^{1/2}$. Учитывая, что $n \sin \varphi = A/r$, получаем

$$dr/d\theta = A/r \sqrt{(nr)^2 - A^2}.$$

Общим интегралом этого дифференциального уравнения 1-го порядка является

$$\theta = A \int dr / r \sqrt{(nr)^2 - A^2} + C,$$

где C — произвольная постоянная. Это есть уравнение лучей в сферически симметричной среде.

4. Вектор кривизны луча, как отмечалось в § 11.5.6, определяется выражением

$$\mathbf{K} = d\mathbf{1}_l / dl = \mathbf{v} / R, \quad (11.76)$$

где R — радиус кривизны луча, \mathbf{v} — орт главной нормали в точке p .

Умножим (11.76) на n и учтем, что из (11.73), выполняя дифференцирование по l , имеем:

$$n \frac{d\mathbf{1}_l}{dl} + \mathbf{1}_l \frac{dn}{dl} = \text{grad } n, \text{ т.е. } n \frac{d\mathbf{1}_l}{dl} = \text{grad } n - \mathbf{1}_l \frac{dn}{dl}.$$

Поэтому

$$n\mathbf{K} = n\mathbf{v} / R = nd\mathbf{l}_1 / dl = \text{grad } n - \mathbf{l}_1 \frac{dn}{dl}. \quad (11.77)$$

Это выражение показывает, что $\text{grad } n$ лежит в соприкасающейся плоскости луча.

Умножим (11.77) скалярно на \mathbf{K} и учтем, что $\mathbf{l}_1 \mathbf{v} = 0$. Получаем

$$\frac{1}{R} = \mathbf{v} \frac{1}{n} \text{grad } n = \mathbf{v} \text{grad } \ln n. \quad (11.78)$$

Так как величина R всегда положительна, то отсюда следует, что искривление происходит так, что лучи заходят («загибаются») в область с большим показателем преломления (на рис. 11.3,а $n' > n''$). Соответствующим образом деформируется волновой фронт.

Искривление лучей в неоднородных средах называют рефракцией.

5. Искривление луча в неоднородной среде можно рассмотреть, разделив последнюю на M плоских слоев таких толщин Δz_m ($m = 1, 2, 3, \dots, M$), что в пределах каждого слоя коэффициент преломления n_m можно считать постоянным (рис. 11.3,б). Для определения углов преломления ϑ_{m+1} на границах раздела сред можно применить второй закон Снеллиуса (4.7). Если джоулевы потери отсутствуют, то $\sin \vartheta_{m+1} = (n_m \sin \vartheta_m) / n_{m+1}$. При уменьшающемся с ростом m показателе преломления угол $\vartheta_{m+1} \rightarrow \pi/2$ (рис. 11.3,б, «луч»-1). При увеличивающемся n_m с ростом m угол ϑ_m уменьшается ($\vartheta_{m+1} \rightarrow 0$) («луч»-2 на рис. 11.3,б). Если M увеличивать (Δz_m уменьшать), то ломанные линии 1 и 2 на рис. 11.3,б переходят в лучи, имеющие радиусы кривизны, определяемые по (11.78).

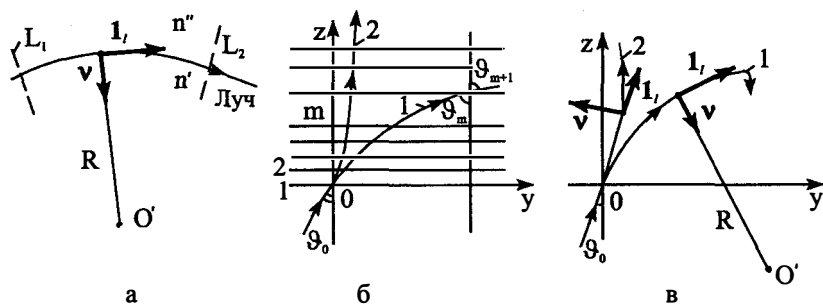


Рис. 11.3. Лучи в неоднородных средах

6. Определим радиус R кривизны луча при диэлектрической проницаемости среды, увеличивающейся или уменьшающейся с ростом z по линейному закону (рис. 11.1). При этом $n = [\epsilon_1(1 \pm Bz)]^{1/2}$ (см. §§ 11.3 и 11.4). Имеем

$$\frac{1}{n} \cdot \text{grad } n = \mathbf{1}_z \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} = \pm \mathbf{1}_z \frac{B}{2(1 \pm Bz)}.$$

Из (11.78) получаем

$$R = \pm \frac{2}{B} \frac{1 \pm Bz}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{1}_z)}. \quad (11.79)$$

При $z \approx 0$ $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{1}_z) = -\sin \theta_0$, поэтому $R(z=0) = \mp 2/(B \sin \theta_0)$. Знак «минус» показывает, что при увеличении n с ростом z орт главной нормали \mathbf{v} имеет направление, обратное, показанному на рис. 11.3, в. С увеличением z направление \mathbf{v} меняется. При некотором значении z имеем $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{1}_z) = 0$, поэтому $R \rightarrow \infty$ и кривизна луча равна нулю. При $(1 - Bz) \rightarrow 0$ имеем $R \rightarrow 0$, т.е. кривизна луча становится бесконечной. Но в этой области пространства уравнения геометрической оптики неприменимы, так как на расстоянии (по z), равном λ_0 , происходит резкое изменение свойств ЭМ поля. В этой области пространства физические явления изучаются на основе строгих решений электродинамических задач (§ 11.4).

7. Чтобы установить законы преломления и отражения лучей, рассмотрим лучи, пересекающие поверхность S , разделяющую две однородные среды с различными показателями преломления n_1 и n_2 . При этом применяются рассуждения, аналогичные тем, которые использованы при выводе граничных условий в § 1.11.

Пусть лучи в среде-1 имеют такие направления, что пересекают поверхность раздела S двух сред (рис. 11.4, а). Обозначим через \mathbf{n}_{12} орт нормали к поверхности S , направленный из среды-1 в среду-2. Выделим так же, как на рис. 1.18, в, плоский элемент площадью $\Delta S' = \Delta h \cdot \Delta l$, ограниченный контуром $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ (контур L), стороны которого $Q_1 Q_2 = \Delta l$ и $Q_3 Q_4 = \Delta l$ параллельны орту \mathbf{a}_1 , а стороны $Q_2 Q_3 = \Delta h$ и $Q_3 Q_4 = \Delta h$ перпендикулярны этому орту. Обозначим через \mathbf{v}_1 орт нормали к площадке $\Delta S'$.

Заменим мысленно поверхность раздела сред S тонким переходным слоем, в котором в направлении \mathbf{n}_{12} показатели преломления меняются быстро, но непрерывно от своего значения n_1 около S с

одной стороны поверхности до своего значения n_2 — с другой ее стороны.

Применим операцию rot к (11.69) и учтем, что $\text{rot grad } L = 0$. Получаем $\text{rot}(n\mathbf{l}_l) = 0$. Умножим это выражение скалярно на \mathbf{v}_1 и проинтегрируем результат по площади $\Delta S'$. Применяя теорему Стокса, получим

$$\int_{\Delta S'} \text{rot}(n\mathbf{l}_l)(\mathbf{v}_1 dS') = \oint_L n\mathbf{l}_l d\mathbf{r} = 0. \quad (11.80)$$

Обозначая через $n_1\mathbf{l}_{l1}$, $n_2\mathbf{l}_{l2}$ лучевые векторы в среде-1 и среде-2 и переходя к пределу, когда $\Delta h \rightarrow 0$ так же, как в § 1.11, получаем

$$[\mathbf{n}_{12}(n_2\mathbf{l}_{l2} - n_1\mathbf{l}_{l1})] = 0. \quad (11.81)$$

Это выражение показывает, что касательная к поверхности раздела сред составляющая лучевого вектора $n\mathbf{l}_l$ непрерывна при переходе через эту поверхность.

Пусть ϑ_{01} и ϑ_{02} — углы, которые образуют падающий и преломленный лучи с ортом \mathbf{n}_{12} (рис. 11.4,б). Тогда из (11.81) имеем

$$n_2[n_{12}\mathbf{l}_{l2}] = n_1[n_{12}\mathbf{l}_{l1}],$$

или

$$n_2 \sin \vartheta_{02} = n_1 \sin \vartheta_{01}. \quad (11.82)$$

Таким образом, во-первых, по (11.81) преломленный луч лежит в плоскости падения, т.е. в плоскости, образованной падающим лучом и ортом \mathbf{n}_{12} и, во-вторых, по (11.82) отношение синусов углов преломления и падения равно отношению n_1/n_2 .

Эти два результата выражают закон преломления лучей (закон Снеллиуса).

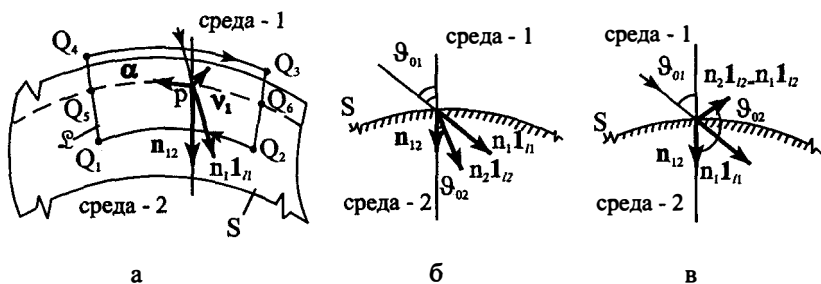


Рис. 11.4. К обоснованию законов отражения и преломления

Как и в случае, рассмотренном в § 4.1, следует ожидать, что в среде-1 появится отраженная волна. Полагая в (11.81), (11.82) $n_2 = n_1$, получим, что *отраженный луч лежит в плоскости падения* и $\sin \vartheta_{02} = \sin \vartheta_{01}$, поэтому

$$\vartheta_{02} = \pi - \vartheta_{01}. \quad (11.83)$$

Эти два результата выражают *закон отражения*. Считается, что *отражение соседних лучей происходит независимо друг от друга*.

Законы преломления и отражения были получены в § 4.1 для частного случая падения плоской волны на плоскую поверхность раздела сред при произвольном значении λ_0 . Но законы (11.81) — (11.83) справедливы для поверхностей раздела сред более общей формы при условии, что λ_0 достаточно мала. Последнее означает, что *радиусы кривизны волнового фронта падающей «локально плоской волны» и поверхности раздела сред должны быть велики по сравнению с λ_0* . Коэффициенты Френеля при этом определяются так же, как в § 4.1.

8. *Принцип Ферма (или принцип наименьшего пути) утверждает, что оптическая длина реального луча между любыми двумя точками p_1 и p_2 короче оптической длины любой другой кривой, соединяющей эти точки и лежащей в области, где проходит только один луч.*

Чтобы доказать это утверждение, сначала предположим, что $n(p)$ есть непрерывная функция. Пусть \mathcal{L} — любой замкнутый контур. Тогда выполняется (11.80). Выражение (11.80) справедливо и в том случае, когда контур \mathcal{L} пересекает поверхность S раздела сред, т.е. $n(p)$ имеет разрыв на S (рис. 11.4,а). При этом \mathcal{L} состоит из двух контуров \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 . Часть \mathcal{L}_1 проходит в среде-1 по границе от точки Q_5 до точки Q_6 , а часть \mathcal{L}_2 проходит в среде-2, по границе в обратном направлении (от Q_6 до Q_5). С учетом граничного условия (11.81) вклады от интегралов по этим частям контуров \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 взаимно компенсируются.

Рассмотрим контур \mathcal{L} , состоящий из луча $p_1 p_2$ и любой кривой $p_2 G p_1$ (рис. 11.2,б). При этом из (11.80) получаем

$$\int_{p_1}^{p_2} n \mathbf{1}_l dr + \int_{p_2 G p_1} n \mathbf{1}_l dr = 0. \quad (11.84)$$

На луче $p_1 p_2$ имеем $\mathbf{1}_l dr = \mathbf{1}_l \cdot \mathbf{1}_l dl = dl$. Если направление обхода кривой поменять на обратное ($p_1 G p_2$ — соответствует рис. 11.2,б), то на

кривой $p_1 G p_2$ получаем $\mathbf{l}_1 dr = \mathbf{l}_1 \tau dr = \cos(\mathbf{l}_1 \hat{\cdot} \tau) dr$. Поэтому из (11.84) находим

$$\int_{p_1}^{p_2} n dl = \int_{p_1 G p_2} n \cos(\mathbf{l}_1 \hat{\cdot} \tau) dr \leq \int_{p_1 G p_2} n dl, \quad (11.85)$$

так как $\cos(\mathbf{l}_1 \hat{\cdot} \tau) \leq 1$. Знак равенства здесь соответствует только случаю, когда направления \mathbf{l}_1 и τ совпадают в каждой точке кривой $p_1 G p_2$, т.е. когда $p_1 G p_2$ является реальным лучом. Однако, этот случай исключается тем условием, что через каждую точку проходит только один луч. Следовательно, принцип Ферма доказан.

Из (11.85) с учетом (11.72) следует, что ЭМ поле между p_1 и p_2 распространяется по тому пути, который требует наименьшего времени.

Условие, что через каждую точку рассматриваемой области проходит только один луч, во многих случаях не выполняется. Например, при отражении ЭМ поля, возбуждаемого нитью тока, параллельной плоской поверхности раздела сред (рис. 4.5), через любую точку проходят два луча. Чтобы охватить подобные случаи принцип Ферма можно сформулировать в более слабой форме, но применимой в более широкой области: реальный луч отличается от остальных кривых, соединяющих точки p_1 и p_2 тем, что соответствующая ему оптическая длина имеет стационарное значение, т.е. малое изменение траектории (например, точки падения на S , рис. 4.5) не приводит в первом порядке к изменению оптической длины. Эта форма принципа Ферма достаточна для практических приложений, так как для нахождения луча можно ограничиться сравнением оптических длин для воображаемых путей, которые проходят бесконечно близко от действительного.

Точку q' называют действительным фокусом геометрического схождения лучей, если пучок лучей, выходящих из точки q , после искривлений в неоднородной среде, отражений и преломлений на поверхностях раздела сред сходится в точке q' . Точку q' рассматривают как оптическое изображение точки q . Изображение называют мнимым, если в q' пересекаются не сами лучи, а их продолжения, проведенные в направлении, противоположном направлению распространения ЭМ поля (см. § 4.5).

9. Отметим, что, в отличие от определения, данного в § 9.1, под дифракцией волн в широком смысле понимаются любые отклонения волновых движений от законов геометрической оптики. Вследствие

дифракции поля могут возникать необъясняемые геометрической оптикой направления распространения волн.

11.7. Волны в неоднородных средах в приближении геометрической оптики

1. Применим полученные выше законы метода геометрической оптики для построения *волновой картины* ЭМ поля в неоднородной среде. Пусть плоская E -поляризованная волна из однородного нижнего полупространства падает на границу раздела однородной среды и неоднородной среды, заполняющей верхнее полупространство (рис. 11.1,а). Используем обозначения, введенные в § 11.2 — § 11.4. Считаем, что диэлектрики идеальные.

Из выражения (11.4) $\{\dot{E}_x^n = \dot{E}_0^n \exp[-ik_0 \sqrt{\epsilon_1} (y \sin \vartheta_0 + z \cos \vartheta_0)]\}$

видно, что эйконал падающего поля $L^n = L^n(y, z) = L_y^n(y) + L_z^n(z)$, где $L_y = \sqrt{\epsilon_1} y \sin \vartheta_0$, $L_z = \sqrt{\epsilon_1} z \cos \vartheta_0$. Поэтому для выполнения закона преломления (11.82) на граничной поверхности ($z=0$) необходимо, чтобы эйконал L' поля в верхнем полупространстве также зависел от координат y и z , т.е. $L' = L'(y, z)$.

На поверхности при $z=0$ имеем из (11.82): $n_1 \sin \vartheta_0 = n(z) \cdot \sin \vartheta(z)$, откуда следует, что в верхнем полупространстве векторы \dot{E} и \dot{H} должны зависеть от y как $\exp(-ik_1 y \sin \vartheta_0) = \exp(-ik_0 \sqrt{\epsilon_1} y \sin \vartheta_0)$. Таким образом, $L'(y, z) = L_y(y) + L_z(z)$, где $L_z(z)$ необходимо определить. Для этого рассмотрим (11.64). Поскольку $\partial L' / \partial x = 0$, то имеем

$$\left(\frac{\partial L'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L'}{\partial z}\right)^2 = n^2.$$

Так как здесь $\partial L' / \partial y = \partial L_y / \partial y = \sqrt{\epsilon_1} \sin \vartheta_0$, то получаем

$$\frac{\partial L_z}{\partial z} = \left[n^2 - \left(\frac{\partial L_y}{\partial y}\right)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{n^2(z) - \epsilon_1 \sin^2 \vartheta_0},$$

т.е. $L_z = \int_0^z \sqrt{n^2(z) - \epsilon_1 \sin^2 \vartheta_0} dz = \sqrt{\epsilon_1} \int_0^z [f(z) - \sin^2 \vartheta_0]^{1/2} dz$.

Таким образом, значение эйконала в верхнем полупространстве

$$L' = L_y(y) + L_z(z) = \sqrt{\epsilon_1} y \sin \vartheta_0 + \sqrt{\epsilon_1} \int_0^z [f(z) - \sin^2 \vartheta_0]^{1/2} dz.$$

Поскольку L_y не зависит от $n(z)$, то можно считать, что составляющие векторов поля в верхнем полупространстве содержат множитель $\exp(-ik_0 L_y(y)) = \exp(-ik_1 y \sin \vartheta_0)$. Тогда эйконал верхнего полупространства является одномерной функцией: $L = L_z(z)$.

2. Используя закон интенсивности, найдем зависимость от z амплитуд векторов поля в верхнем полупространстве. Обозначим через $ds_{0\perp}$ площадь поперечного сечения лучевой трубки при $z=0$, а через $ds_{l\perp}$ — площадь поперечного сечения лучевой трубки, находящейся на расстоянии dl по длине дуги луча. Пусть $\dot{\Pi}_0$ — значение вектора Пойнтинга при $z=0$. Тогда $\dot{\Pi}_0 ds_{0\perp} = \dot{\Pi}_l ds_{l\perp}$. Поэтому $\dot{\Pi}_0 \mathbf{1}_{l0} ds_{0\perp} = \dot{\Pi}_l \mathbf{1}_{l0} ds_{l\perp}$. Значит, $\dot{\Pi}_l = \dot{\Pi}_0 ds_{0\perp} / ds_{l\perp}$. Так как в одномерных задачах $ds_{0\perp} / ds_{l\perp} = \text{const}$, то $\dot{\Pi}_l = \dot{\Pi}_0 = \text{const}$. Но в соответствии с (11.68) $|\dot{\Pi}_l| = 0,5W|\dot{\mathbf{H}}|^2 = 0,5W^{-1}|\dot{\mathbf{E}}|^2 = |\dot{\Pi}_0|$. Значит, $|\dot{\mathbf{E}}| = (2W|\dot{\Pi}_0|)^{1/2} = (2W_0 \sqrt{\mu} |\dot{\Pi}_0|)^{1/2} \cdot [\epsilon(z)]^{-1/4}$. Это означает, что амплитуда \dot{E}_x от z должна изменяться как $E_x \sim [\epsilon(z)]^{-1/4}$.

Отметим, что при некоторых значениях z возможно $ds_{l\perp} \rightarrow 0$. При этом $|\dot{\Pi}_l| \rightarrow \infty$ и амплитуды векторов поля имеют особенности. В этих областях значений z необходимо проведение дополнительных исследований.

3. Обобщая изложенное, для прямой волны для тех значений z , для которых выполняются условия применимости геометрической оптики, имеем

$$\begin{aligned} \dot{E}_x(y, z) &= \frac{\dot{E}_{1x}}{\sqrt[4]{n^2(z) - \epsilon_1 \sin^2 \vartheta_0}} e^{-ik_0 L_y} e^{-ik_0 L_z} = \\ &= \frac{\dot{E}_{1x} \exp(-ik_1 y \sin \vartheta_0)}{\sqrt[4]{\epsilon_1 [f(z) - \sin^2 \vartheta_0]}} e^{-ik_1 \int_0^z \sqrt{f(z) - \sin^2 \vartheta_0} dz} \end{aligned}$$

Если учитывать прямую и обратную волны, то

$$E_x(y, z) = \frac{\exp(-ik_1 y \sin \vartheta_0)}{\sqrt[4]{\epsilon_1 [f(z) - \sin^2 \vartheta_0]}} \times \left[E_{1x} e^{-ik_1 \int_0^z \sqrt{f(z) - \sin^2 \vartheta_0} dz} + E_{2x} e^{ik_1 \int_0^z \sqrt{f(z) - \sin^2 \vartheta_0} dz} \right]. \quad (11.86)$$

где $\dot{E}_{1x}, \dot{E}_{2x}$ — комплексные постоянные.

4. В среде с линейно возрастающей с увеличением z диэлектрической проницаемостью имеем $f(z) = 1 + Bz$, $\dot{E}_{2x} = 0$ и

$$\int_0^z \sqrt{f(z) - \sin^2 \vartheta_0} dz = \int_0^z \sqrt{(1 + Bz) - \sin^2 \vartheta_0} dz = \int_0^z \sqrt{Bz + \cos^2 \vartheta_0} dz = \\ = \frac{2}{3B} \left[(Bz + \cos^2 \vartheta_0)^{3/2} - \cos^3 \vartheta_0 \right].$$

Поэтому

$$\dot{E}_x = \frac{\dot{E}_{1x} \exp[i(2k_1 \cos^2 \vartheta_0)/3B]}{\sqrt[4]{\epsilon_1 (Bz + \cos^2 \vartheta_0)}} e^{-ik_1 y \sin \vartheta_0} \cdot e^{-i[2k_1 (Bz + \cos^2 \vartheta_0)^{3/2}/3B]}, \quad (11.87)$$

Сравнение (11.87) с (11.19) и (11.25) показывает, что приближение геометрической оптики описывает асимптотическое поведение ЭМ поля при $\xi = [2k_1 (Bz + \cos^2 \vartheta_0)^{3/2}]/3B \rightarrow \infty$.

5. В среде с линейно убывающей с увеличением z диэлектрической проницаемостью $f(z) = 1 - Bz$, где $B = |B| > 0$. Тогда

$$\int_0^z \sqrt{f(z) - \sin^2 \vartheta_0} dz = \int_0^z \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - Bz} dz = -\frac{2}{3B} (\cos^2 \vartheta_0 - Bz)^{3/2} + \frac{2}{3B} \cos^3 \vartheta_0.$$

Поэтому из (11.86) имеем

$$E_x = \frac{\exp(-ik_1 y \sin \vartheta_0)}{\sqrt[4]{\epsilon_1 (\cos^2 \vartheta_0 - Bz)}} (E'_{1x} e^{i\xi} + E'_{2x} e^{-i\xi}), \quad (11.88)$$

где $E'_{1x} = E_1 \exp[(\mp i 2k_1 \cos^3 \vartheta_0)/3B]$, $\xi = 2k_1 (\cos^2 \vartheta_0 - Bz)^{3/2} / 3B$.

Сравнение (11.88) с (11.41) и (11.51) показывает, что первое приближение геометрической оптики асимптотически описывает парциальные волны только в области $0 \leq z \leq z_0$ при $\xi \gg 1$. В окрестности $z \approx z_0$, где $|\xi| \ll 1$, это приближение несправедливо.

В области, где $z_0 \ll z \leq \infty$, $\xi = -i2k_1(Bz - \cos^2 \theta_0)^{3/2} / 3B \cong \cong -i2k_1(Bz)^{3/2} / 3B$ ЭМ поле носит характер поверхностной волны, распространяющейся вдоль плоскости xz_0y , если $\dot{E}_{1x} = 0$ (поскольку при $z \rightarrow \infty \exp(i\xi) \rightarrow \infty$).

11.8. Понятие о методах физической оптики, геометрической теории дифракции, краевых волн и методе параболического уравнения

1. Классическая геометрическая оптика не учитывает дифракционных эффектов. Так как обмена энергией между соседними лучевыми трубками нет, то за препятствием образуется тень, граница между тенью (где ЭМ поле равно нулю) и областью, где поле отличается от нуля, проходит по лучу, коснувшемуся препятствия.

2. *Методом физической (волновой) оптики* можно приближенно вычислить поле и в освещенной области и в области тени. Метод применяется для расчетов полей излучения, в частности, в теории антенных устройств. Он основан на принципе Гюйгенса-Френеля, количественной формулировкой которого является интеграл Кирхгофа (3.23). Поэтому метод называют *приближением Кирхгофа*.

Метод физической оптики состоит в том, что функции ψ и $\partial\psi/\partial n$ в (3.23) выбираются обычно из следующего условия: на освещенной части поверхности они равны соответствующим значениям поля падающей волны, а на теневой — равны нулю.

В тех случаях, когда необходимо учитывать поляризационные явления, пользуются принципом эквивалентных поверхностных токов. При этом вместо точных значений \mathbf{J}, \mathbf{J}^M подставляют их приближенные значения: на освещенной части поверхности $\mathbf{J} = [\mathbf{H}^n, \mathbf{n}]$, $\mathbf{J}^M = [\mathbf{n}, \dot{E}^n]$, а на теневой принимают $\mathbf{J} = 0$, $\mathbf{J}^M = 0$.

Если поверхность $S' + S''$ в (3.20) совпадает с поверхностью идеально проводящего тела, то считают, что $\mathbf{J}^M = 0$ на поверхности в силу граничного условия $\dot{E}_\tau = 0$, а поверхностный электрический ток, используя законы отражения геометрической оптики (понятие локально плоской волны, падающей на локально плоскую поверхность), берут таким же, как в случае возбуждения идеально проводящей плоскости, т.е. полагают $\mathbf{J} = 2[\mathbf{H}^n, \mathbf{n}]$.

Способ задания приближенных значений поверхностных токов указывает на родство методов геометрической и физической оптики. Если предпосылкой метода геометрической оптики является предположение о независимости отражения соседних лучей, то в *основу метода физической оптики положена гипотеза о независимости токов, возбуждаемых в разных точках поверхности*. Метод физической оптики дает уточнение решения задачи, так как, хотя токи на теневой части поверхности и считаются по прежнему равными нулю, поле в области тени отлично от нуля, поскольку *учитываются волновые свойства поля*.

Противоречие метода проявляется в том, что поле в области тени никак не зависит от характеристик неосвещенной части поверхности: ее формы, кривизны, протяженности и др. Это следствие предположения об отсутствии токов на теневой части поверхности. Отмеченное может приводить к существенным погрешностям и позволяет ожидать,

что методом физической оптики можно получить удовлетворительные результаты в тех случаях, когда токи на теневой части поверхности действительно малы. Поскольку при вычислении тока на освещенной части поверхности применяется метод геометрической оптики, надо ожидать, что с уменьшением кривизны и увеличением электрических размеров освещенной части поверхности точность результатов, полученных методом физической оптики, увеличивается. Критерием же точности этого метода может служить строгое решение задачи или эксперимент.

Примером применения метода физической оптики служит задача о дифракции поля на отверстии в экране (§§ 2.10, 2.11 и 9.6).

3. *Геометрическая теория дифракции* сохраняет главное достоинство геометрической оптики — ее наглядность, увеличивая точность расчета полей [49].

Расчеты поля в зоне тени и полутени с помощью методов геометрической и физической оптики часто не дают удовлетворительного результата. Для преодоления этой трудности используют два пути. Первый путь основан на уточнении и дополнении методов геометрической оптики и физической оптики. Второй путь заключается в приближенном решении уравнения Гельмгольца для зон тени и полутени. В освещенной области эти пути дают результаты, совпадающие с результатами геометрической оптики.

4. *Метод, уточняющий геометрическую оптику*, базируется на обобщенном принципе Ферма о возможности распространения ЭМ поля не только вдоль обычных лучей, но и вдоль *дифракционных лучей*. Под последними понимаются лучи, проведенные по кратчайшему пути от источника в точку наблюдения и имеющие при этом общий отрезок гладкой кривой с отражающей поверхностью или общую точку с отражающим ребром. При рассеянии на крае экрана дифракционные лучи образуют конус, осью которого является касательная к ребру, а угол при вершине равен удвоенному углу между падающим лучом и касательной к ребру. В случае отражения от искривленной поверхности дифракционный луч (1) состоит из трех частей: двух отрезков, касательных к поверхности, проведенных из точек источника и наблюдения, и отрезка геодезической кривой на поверхности тела (рис. 11.5). Таким образом, дифракционные лучи проникают в область геометрической тени и образуют там некоторое поле. Поверхности равных фаз (2) перпендикулярны лучам (1).

Метод можно применить, например, к задаче о возбуждении удаленным источником цилиндра с произвольным поперечным сечением (рис. 11.5, б). Если ξ — длина дифракционного луча, отсчитываемая от точки касания b_1 до точки наблюдения p , а η — длина дуги, проходящая лучом на поверхности тела, то решение для области тени можно записать в виде:

$$\theta = D\theta^n(b_1)(\xi - \eta)^{-1/2} \exp(-ik\xi), \quad (11.89)$$

где θ — величина, пропорциональная напряженности поля, D — *дифракционный коэффициент*. Последний определяется сравнением решения (11.89) с асимптотикой строгого решения для круглого цилиндра. При этом радиус круглого цилиндра принимается равным радиусу кривизны заданного цилиндра в точке «отрыва» луча b_2 . Если рассматривается дифракция лучей на крае экрана произвольной формы, то в качестве эталонного берется строгое решение задачи о дифракции на крае полуплоскости, касательной к экрану. Считается, что токи вблизи точки касания этих двух экранов примерно одинаковы.

5. *Метод краевых волн*, уточняющий метод физической оптики, развит применительно к выпуклым металлическим телам, поверхность которых имеет изломы [49, 67]. Метод основывается на предположении, что на искривленной идеально проводящей части поверхности тела ток отличается от значения $\mathbf{J}_0 = 2\left[\mathbf{n}^n, \mathbf{n}\right]$, которое используется в методе физической оптики. В значение тока вводится поправка \mathbf{J}' и общий ток представляется в форме $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}'$, где \mathbf{J}_0 называется равномерной частью тока, а \mathbf{J}' — неравномер-

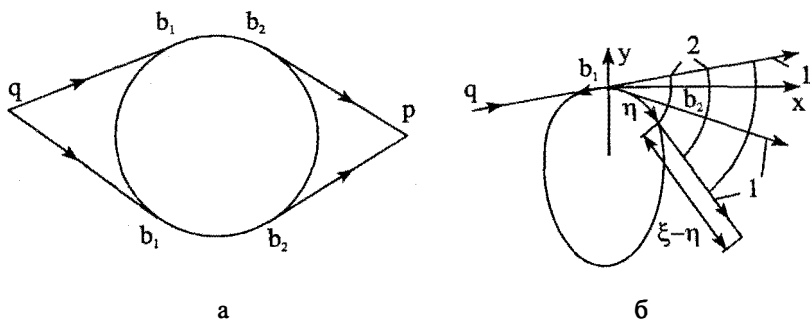


Рис. 11.5. Дифракционные лучи

ной. Точное значение \mathbf{J}' можно определить лишь на основе строгого решения электродинамической задачи. Однако, в ряде случаев оказывается возможным вычислить приближенное выражение неравномерной части тока. Например, если размеры изломов (ребер) и расстояния между изломами на поверхности тела велики по сравнению с длиной волны λ , то предполагается, что \mathbf{J}' отлично от нуля только в непосредственной близости от ребра и соответствует распределению тока у ребра клина, аппроксимирующего излом. Ток на ребре клина имеет характер краевой волны, распространяющейся от ребра, амплитуда тока быстро убывает с удалением от ребра.

6. Изложенные в п. 4 и п. 5 методы имеют ряд недостатков. Например, в случае тела сложной формы трудно получить эталонное решение. Решение (11.89) становится несправедливым у поверхности тела, где $\xi \rightarrow \eta$. Метод параболического уравнения, развитый В.А.Фоком и М.А.Леонтовичем, имеет ряд преимуществ [49, 57]. Параболическое уравнение при определенных условиях является упрощенным уравнением Гельмгольца и позволяет найти главный, превосходящий по величине остальные, член решения.

Если согласно обобщенному принципу Ферма в пространстве определены направления лучей как обычных, так и дифракционных, то следующим шагом является предположение о характере энергического обмена между лучевыми трубками. Гипотеза о независимости распространения поля внутри лучевых трубок заменяется следующими гипотезами: а) сохраняется понятие луча, энергия не накапливается в какой-либо точке лучевой трубки и не колеблется внутри нее; б) обмен энергией между разными лучевыми трубками — поперечная диффузия амплитуды — происходит в соответствии с принципом локальности, т.е. только между соседними лучевыми трубками. Из требований метода геометрической оптики сохраняется требование медленности изменения амплитуды напряженности поля вдоль луча.

Рассмотрим скалярное уравнение Гельмгольца для функции \dot{u} , описывающей с точностью до постоянного множителя продольную составляющую вектора $\dot{\mathbf{E}}$ или $\dot{\mathbf{H}}$ в однородной изотропной линейной среде:

$$\Delta \dot{u} + k^2 \dot{u} = 0. \quad (11.90)$$

Пусть задана некоторая идеально проводящая поверхность, функция \dot{u} удовлетворяет на ней однородному граничному условию. Построим во всем внешнем пространстве траектории лучей и ортогональные к ним поверхности равных фаз (волновых фронтов) и будем искать решение (11.90) в виде $\dot{u} \approx A \cdot \exp(-ikL)$, где L — длина вдоль луча. Таким образом, решение представлено в виде произведения двух сомножителей: медленно меняющейся амплитуды и быстро меняющегося фазового множителя.

Составим выражение для амплитуды A , для чего подставим значение \dot{u} в (11.90):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad}(Ae^{-ikL}) + k^2 Ae^{-ikL} &= -k^2 (\operatorname{grad} L)^2 Ae^{-ikL} - \\ - i2k (\operatorname{grad} L \cdot \operatorname{grad} A) e^{-ikL} - ikAe^{-ikL} \operatorname{div} \operatorname{grad} L + & \\ + e^{-ikL} \operatorname{div} \operatorname{grad} A + k^2 Ae^{-ikL} &= 0. \end{aligned} \quad (11.91)$$

В соответствии с уравнением эйконала (11.63) при $n=1$ $(\operatorname{grad} L)^2 = 1$. Поэтому из (11.91) имеем

$$i2k (\operatorname{grad} L \cdot \operatorname{grad} A) + ikA \operatorname{div} \operatorname{grad} L - \operatorname{div} \operatorname{grad} A = 0. \quad (11.92)$$

Если за счет медленности изменения амплитуды поля пренебречь последним членом, то получим уравнение $\operatorname{div}(A^2 \operatorname{grad} L) = 0$, выражающее гипотезу о сохранении энергии внутри лучевой трубки, т.е. вернемся к методу геометрической оптики.

Чтобы получить более точное решение, по сравнению с методом геометрической оптики, сохраним в слагаемом $\operatorname{div} \operatorname{grad} A$ те производные, которые описывают поперечную диффузию в направлении, перпендикулярном границе света и тени.

Запишем уравнение (11.92) в лучевых координатах L, ζ , где L — длина вдоль луча, а ζ — расстояние вдоль волнового фронта [48]. Поскольку $|\operatorname{grad} L| = 1$, метрический коэффициент $h_L = 1$, то (11.92) можно представить в виде:

$$i2k \frac{\partial A}{\partial L} + ik \frac{A}{h_\zeta} \frac{\partial h_\zeta}{\partial L} - \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial A}{\partial \zeta} \right) - \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial}{\partial L} \left(h_\zeta \frac{\partial A}{\partial L} \right) = 0. \quad (11.93)$$

Условием применимости квазиоптики является $k \gg |\operatorname{grad} A|$, поэтому четвертое слагаемое в этом уравнении должно быть мало по сравнению с первым и вторым. Это соответствует утверждению о малости продольной диффузии. В то же время третье слагаемое может быть соизмеримо с первыми двумя за счет большой величины $|\partial A / \partial \zeta|$ или малой величины h_ζ . Первый случай имеет место вблизи границы света и тени, а второй — вблизи каустических поверхностей, т.е. поверхностей, где сходятся близкие лучи и где велика кривизна волнового фронта. Подобные области называются зонами эффективной диффузии. Сравнение слагаемых, т.е. соотношение

$$\frac{ikA}{h_\zeta} \frac{\partial h_\zeta}{\partial L} \approx \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial A}{\partial \zeta} \right)$$

позволяет оценить ширину зоны эффективной диффузии (знак \approx означает равенство по порядку величин).

Если отбросить последнее слагаемое в (11.93), то получим параболическое уравнение (т.е. уравнение, в котором отсутствует хотя бы одна из вторых производных).

Существо метода параболического уравнения состоит в том, что на основе физических соображений о разной скорости изменения искомой функции по различным направлениям осуществляется приближенный переход от уравнения Гельмгольца к параболическому уравнению.

11.9. Понятие о методе интегрального уравнения

1. Из методов численного решения граничных задач электродинамики наибольшее применение получил метод интегрального уравнения. Это связано с тем, что

размерность интегрального уравнения задачи на единицу меньше размерности соответствующего дифференциального уравнения в частных производных той же задачи. Кроме этого, интегральное уравнение в компактной форме включает в себя все данные, относящиеся к задаче, в том числе и граничные условия, искомую функцию никаким дополнительным условиям подчинять не надо [15, 28, 48, 51, 53, 54, 57].

Получить интегральное уравнение данной задачи можно на основе соотношений (3.15), (3.16) для $\dot{\mathbf{E}}(p)$ и $\dot{\mathbf{H}}(p)$. При формулировке уравнений используются заданные граничные условия. Интегральное уравнение тем или иным способом сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая решается на ЭВМ. При этом необходимо определить оптимальный численный метод, который бы позволил при заданном объеме памяти ЭВМ и ее быстродействию получить при минимальных затратах машинного времени максимум информации об ЭМ явлении. Это возможно, если при решении электродинамической задачи использованы методы вычислительной математики.

Ниже на примерах рассмотрим получение интегральных уравнений поверхностных токов, а затем сведем решение их к решению СЛАУ.

2. Пример. Пусть бесконечный круговой импедансный цилиндр радиуса a возбуждается прямолинейной нитью синфазного магнитного тока. Нить параллельна оси цилиндра (рис. 9.3,а). Поверхностный импеданс зависит от азимутальной координаты и однороден по z . Среда, заполняющая неограниченное пространство, однородна и изотропна, линейна. Ее параметры ϵ_a, μ_a . Необходимо найти возбуждаемое ЭМ поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла, граничным условиям и условию излучения.

Эта задача отличается от задачи, поставленной в § 9.3, только тем, что поверхностный импеданс является функцией азимутальной координаты, т.е. $Z_m = Z_m(\varphi)$. Составляющие $\dot{H}_r, \dot{H}_\varphi$ и \dot{E}_z векторов $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ отсутствуют, поэтому $\dot{\mathbf{H}} = 1_z \dot{H}_z$, $\dot{\mathbf{E}} = 1_r \dot{E}_r + 1_\varphi \dot{E}_\varphi$. Граничное условие получаем из (4.29)

$$\dot{E}_\varphi(\varphi) = -Z_m(\varphi) \dot{H}_z(\varphi), \quad r = a. \quad (11.94)$$

Аналитическое решение этой задачи получить в замкнутой форме (например, методом собственных функций) не удастся. Для решения задачи численным методом сформулируем ее в виде интегрального уравнения для поверхностного тока. Приближенным решением последнего можно вычислить поверхностный ток. Затем по поверхностным электрическому и магнитному токам с помощью соотношения (3.15) или (3.16) можно найти $\dot{\mathbf{E}}(p)$ и $\dot{\mathbf{H}}(p)$.

Выберем в качестве поверхности S поверхность цилиндра (рис. 9.3). Учтем, что по условию задачи $\dot{\mathbf{j}} = 0$. Составляющие вектора $\dot{\mathbf{H}}(p)$ полного поля можно определить из (3.16), где $\mathbf{J} = [\mathbf{H}, -1_r] = -1_\varphi \dot{H}_z$, $\mathbf{J}^M = [-1_r, \mathbf{E}] = -1_z \dot{E}_\varphi$, т.е. $J_r = J_z = 0$, $J_\varphi = -\dot{H}_z$; $J_r^M = J_\varphi^M = 0$, $J_z^M = -\dot{E}_\varphi$.

Чтобы определить \dot{H}_z , зададим $\mathbf{M} = 1_z$. В качестве вспомогательного тока в (3.16) используем нить синфазного магнитного тока, т.е. $\dot{\mathbf{j}}_a^{m,c} = \mathbf{M} \delta(q - p_\perp) = 1_z \delta(r' - r) \delta(\varphi' - \varphi) / r'$, где $p_\perp = p_\perp(r, \varphi)$, $q = q(r', \varphi')$. Тогда $\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m$ — векторы напряженности поля синфазной нити магнитного тока (при $\dot{I}_a^M = 1$), однородного по z . Считаем, что граничные условия, которые могут быть наложены на вспомогательное поле по поверхности S , тоже однородны по z . Тогда поле вспомогательного тока является полем Н-волны, т.е. $\dot{\mathbf{H}}_m = 1_z \dot{H}_{zm}$, $\mathbf{E}_m = 1_r \dot{E}_{rm} + 1_\varphi \dot{E}_{\varphi m}$.

Сторонний ток $\mathbf{J}^{m,c} = 1_z I_o^m \delta(r-r_o) \delta(\varphi-\varphi_o) / r = 1_z I_z^m \delta(r_\perp - q_o)$, где $q_o = q_o(r_o, \varphi_o)$. В (3.16) поверхностный импеданс, а значит, и поверхностные токи, тоже однородны по z . Учитывая это, интегрируя в (3.16) по z вдоль цилиндра единичной длины $dS_q = ad\varphi' dz'$ и имея в виду, что $\mathbf{J} = 1_\varphi J_\varphi$, $\mathbf{J}^m = 1_z J_z^m$, получаем при $r' = a$

$$H_z(r, \varphi) = I_o^m H_{zm}(r, \varphi; r_o, \varphi_o) - \int_0^{2\pi} [J_\varphi(\varphi') \dot{E}_{\varphi m}(r, \varphi; a, \varphi') - J_z^m(\varphi') \dot{H}_{zm}(r, \varphi; a, \varphi')] ad\varphi'. \quad (11.95)$$

Когда функции J_φ , J_z^m будут известны, то $H_z(r, \varphi)$ может быть найдено по этой формуле. Однако, вторичные токи неизвестны. Для того, чтобы иметь уравнение для их вычисления, расположим точку r_\perp на поверхности цилиндра, т.е. положим $r = a$. Учтем, что $H_z(a, \varphi) = -J_\varphi$. Тогда

$$-J_\varphi(\varphi) = \dot{I}_0^m \dot{H}_{zm}(a, \varphi; r_o, \varphi_o) \Big|_{r_o \geq a} - \int_0^{2\pi} [J_\varphi(\varphi') \dot{E}_{\varphi m}(r, \varphi; a, \varphi') - J_z^m(\varphi') \dot{H}_{zm}(r, \varphi; a, \varphi')] \Big|_{r=a+0} ad\varphi'. \quad (11.96)$$

На вспомогательное поле наложим граничное условие

$$\dot{E}_{\varphi m}(r, \varphi) = 0, \quad r = a, \quad (11.97)$$

соответствующее цилиндру идеальной проводимости. При этом первое слагаемое под интегралом в (11.96) равно нулю и получаем

$$-J_\varphi(\varphi) = I_0^m \dot{H}_{zm}(a, \varphi; r_o, \varphi_o) \Big|_{r_o \geq a} + \int_0^{2\pi} J_z^m(\varphi') \dot{H}_{zm}(r, \varphi; a, \varphi') \Big|_{r=a+0} ad\varphi'.$$

Так как при $r = a$ $\dot{E}_\varphi(a, \varphi) = -J_z^m$, то из (11.94) имеем $J_\varphi = -J_z^m / Z_m$. С учетом этого

$$J_z^m(\varphi) - \int_0^{2\pi} Z_m(\varphi) \dot{H}_{zm}(r, \varphi; a, \varphi') \Big|_{r=a+0} J_z^m(\varphi') ad\varphi' = I_0^m Z_m(\varphi) \dot{H}_{zm}(a, \varphi; r_o, \varphi_o) \Big|_{r_o \geq a}. \quad (11.98)$$

Это есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $J_z^m(\varphi)$. Если Z_m зависит от φ , то найти аналитическое решение этого уравнения в общем случае не удастся.

3. Ядро интегрального уравнения (11.98) определяется полем вспомогательного тока и условием (11.97). Решая граничную задачу для \dot{H}_{zm} так же, как в § 9.3, получаем при $j_B^m = 1$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{zm}(r, \varphi; a, \varphi') &= \frac{i}{2W\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\cos n(\varphi - \varphi')}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(kr), \\ \dot{H}_{zm}(a, \varphi; r_o, \varphi_o) &= \frac{i}{2W\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\cos n(\varphi - \varphi_o)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(kr_o). \end{aligned} \quad (11.99)$$

4. Перейдем от (11.98) к СЛАУ. Подставим (11.99) в (11.98); обозначим $Z_m / W = Z_0(\varphi)$ и для удобства разделим результат на Z_0 . Имеем

$$J_z^m(\varphi) / Z_0(\varphi) - \int_0^{2\pi} K(\varphi, \varphi') J_z^m(\varphi') d\varphi' = f(\varphi, \varphi_o), \quad (11.100)$$

где ядро K и свободный член f :

$$K(\varphi, \varphi') = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\varphi - \varphi') \frac{H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)}(ka)},$$

$$f(\varphi, \varphi_0) = \frac{i \dot{I}_0^M}{2\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\varphi - \varphi_0) \frac{H_n^{(2)}(k\tau_0)}{H_n^{(2)}(ka)}.$$

В (11.100) точку наблюдения тока на цилиндре можно зафиксировать ($\varphi = \text{const}$). Точка интегрирования в процессе выполнения интегрирования, перемещаясь в интервале $0 \leq \varphi' \leq 2\pi$, попадает на точку наблюдения тока, т.е. при некотором φ' может выполняться равенство $\varphi = \varphi'$. При $\varphi' \rightarrow \varphi$ имеем $|K(\varphi, \varphi')| \rightarrow \infty$, т.е. ядро имеет особенность. Если $\tau_0 \neq a$, то при $\varphi_0 = \varphi$ функция $f(\varphi, \varphi_0)$ не имеет особенности.

Чтобы перейти от (11.100) к СЛАУ, разобьем интервал интегрирования в (11.100) на N одинаковых промежутков $\Delta\varphi = 2\pi/N$. Середина промежутка номера j ($j = 1, 2, \dots, N$) $\varphi_j = \Delta\varphi/2 + (j-1)\Delta\varphi$. Применим метод Крылова-Боголюбова [15]. На каждом из промежутков $\Delta\varphi$ значение функции $J_z^M(\varphi)$ считаем постоянным и равным значению (приближенному) в серединной точке $\dot{J}_z^M(\varphi_m)$. При этом вынося $\dot{J}_z^M(\varphi_m)$ из-под знака интеграла, имеем

$$\dot{J}_z^M(\varphi_j) / Z_0(\varphi_j) - \sum_{m=1}^N \dot{J}_z^M(\varphi_m) \int_{\varphi_m - \Delta\varphi/2}^{\varphi_m + \Delta\varphi/2} K(\varphi_j, \varphi') d\varphi' = f(\varphi_j, \varphi_0), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (11.101)$$

Вводя обозначения $\dot{J}_z^M(\varphi_j) = \dot{J}_j^M$, $D_{jm} = \int_{\varphi_m - \Delta\varphi/2}^{\varphi_m + \Delta\varphi/2} K(\varphi_j, \varphi') d\varphi'$, $f(\varphi_j, \varphi_0) = f_j$, $Z_0(\varphi_j) = Z_j$, соотношение (11.101) запишем в виде

$$\dot{J}_j^M / Z_j - \sum_{m=1}^N \dot{J}_j^M D_{jm} = f_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (11.102)$$

Это СЛАУ. Матрица ее известна, так как Z_j и D_{jm} известны.

Если вычислить $\dot{J}_z^M(\varphi_j)$, то значения \dot{J}_φ в точках φ_j находятся с помощью граничного условия: $\dot{J}_\varphi(\varphi_j) = -\dot{J}_z^M(\varphi_j) / Z_m(\varphi_j)$.

5. Когда нить стороннего магнитного тока расположена на поверхности цилиндра ($\tau_0 = a$) при $\varphi_j = \varphi_0$ свободный член в (11.100) имеет особенность ($|f(\varphi, \varphi_0)| \rightarrow \infty$ при $\varphi \rightarrow \varphi_0$). Положение точек, в которых определяется ток, при этом необходимо задавать так, чтобы $\varphi_j \neq \varphi_0$.

Порядок N СЛАУ определяется числом точек, в которых вычисляются значения тока. С увеличением N может быть реализована большая точность вычисления функции $J_z^M(\varphi)$. Однако, при этом возрастает порядок системы, а значит, и — трудности реализации численного алгоритма на ЭВМ. Надо иметь ввиду, что система (11.102) является комплексной ($\dot{J}_j^M = \text{Re} \dot{J}_j^M + i \text{Im} \dot{J}_j^M$), поэтому порядок действительной СЛАУ равен $2N$.

Оценка точности вычислений тока может быть проведена рассмотренными в [15] методами.

Отметим, что на \vec{E}_m, \vec{H}_m в (11.96) может быть наложено на поверхности S граничное условие, отличающееся от условия (11.97). Например, можно наложить импедансное граничное условие $\vec{E}_{\text{зм}} = -Z_1 \vec{H}_{\text{зм}}$, где Z_1 — постоянный поверхностный импеданс. Значение Z_1 может выбираться из соображений упрощения алгоритма или увеличения точности решения получаемого интегрального уравнения.

6. Выше рассмотрен пример получения одномерного интегрального уравнения и сведения его к СЛАУ, когда искомая функция зависит только от одной координаты. В уравнение входил интеграл по дуге окружности на цилиндре. Если поверхностный импеданс или сторонние источники зависят не только от азимутальной координаты, но и от координаты z или цилиндр имеет конечную длину, то из выражения (3.16) можно получить интегральное уравнение, но оно будет уже *двумерным*, поверхностный ток становится функцией координат φ и z и в уравнение будет входить интеграл по поверхности цилиндра.

Задачи

1. Пусть неподмагниченная плазма граничит с нейтросферой, имеющей $\epsilon_1 = 1$. Плотность N электронов плазмы линейно убывает с увеличением высоты. Если плоскость xz совместить с границей плазмы и нейтросферы, то $N(z) = bz$. На высоте $z' = 150$ км над границей $N(z') = 10^6$ эл/см³. Определить положение плоскости xz_0y , фазу Φ_1 коэффициента отражения на частоте $f = 8$ МГц, если угол падения волны $\vartheta_0 = 75^\circ$.

2. Угол падения волны ϑ_0 из нижнего полупространства с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 на границу раздела со средой с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_1(1 \pm Vz)$ равен 75° (рис. 11.1) Определить радиусы кривизны лучей при $V = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ для z , близких к нулю.

3. Методом геометрической оптики найти поле, рассеянное круговым металлическим цилиндром, расположенным в однородной изотропной среде. Падающее поле возбуждается нитью электрического тока.

4. На плоскую прямоугольную металлическую пластину с размерами $a \times b$, расположенную в однородной изотропной среде, падает с направления нормали к ней плоская ЭМ волна. Методом физической оптики найти поле рассеяния.

5. Методом физической оптики найти эффективную площадь рассеяния плоской прямоугольной металлической пластины с размерами $a \times b$. Пластина расположена в неограниченном однородном, изотропном пространстве.

6. Сформулировать исходные положения геометрической теории дифракции.

12. РАДИОТРАССЫ И ИХ МОДЕЛИ. ЗЕМНАЯ ВОЛНА

12.1. Краткая характеристика радиотрасс

1. Для передачи сигналов от радиопередающей антенны (излучателя) к радиоприемной антенне в качестве линий передачи энергии часто используют естественную среду. Линию передачи при этом называют *естественной радиотрассой* или *радиолинией*. ЭМ волны распространяются в приповерхностных толщах Земли, атмосфере или космическом пространстве. Параметры среды зависят от частоты ЭМ поля, температуры, влажности почвы, времени суток и года и т.д. Под влиянием среды в распространяющемся ЭМ поле по сравнению со свободным пространством изменяются амплитуда, фаза, групповая и фазовая скорости, фронт волны (направление распространения), поляризационные характеристики.

При расчете радиолиний возникают следующие основные задачи: а) расчет напряженности электрического (магнитного) поля или мощности на входе радиоприемного устройства при заданной мощности излучения (мощности радиопередающего устройства), б) расчет необходимой мощности излучения для обеспечения заданных значений напряженности ЭМ поля или мощности на входе радиоприемного устройства, в) выбор оптимальной рабочей длины волны, г) определение скорости распространения и направления прихода ЭМ поля, д) изучение поляризационных характеристик и возможных искажений сигнала.

Принято измерять и рассчитывать напряженность электрического поля.

2. Параметры почвы, воды, льда, снега в приповерхностных слоях Земли или атмосферы зависят от многих факторов. Поэтому изучают влияние физических процессов на эти параметры. Математическая модель, учитывающая влияние всех физических процессов на параметры радиотрассы, а последних — на характеристики ЭМ поля, оказывается очень сложной. Поэтому ее строят для каждой конкретной радиотрассы, учитывая основные факторы, оказывающие воздействие на распространяющееся ЭМ поле.

ЭМ поле рассматривается в *дальней зоне излучателя*. Радиоволны, распространяющиеся на малом электрическом расстоянии от земли, называют *земными*. На их характеристики влияют ϵ_{a1} , σ_1 приповерхностных слоев Земли, сферичность Земли и отклонения от сферичности

(гладкости), параметры атмосферы. В математической модели первого приближения влияние атмосферы и сферичности Земли не учитываются, Земля считается локально плоской. Только математическая модель второго приближения учитывает влияние сферичности Земли. Затем в математическую модель вводится фактор, учитывающий параметры атмосферы.

В атмосфере Земли *нейтросфера* и *ионосфера* отличаются друг от друга электрическими свойствами. Поэтому они по-разному влияют на распространяющееся ЭМ поле. Нейтросфера состоит из нейтральных молекул газов. Это нижний слой атмосферы толщиной около 60 км. Ее делят на *тропосферу* и *стратосферу*. Тропосфера — это приземный слой, имеющий толщину около 10–15 км, неоднородный в вертикальном и горизонтальном направлениях. Коэффициент преломления тропосферы неоднороден, поэтому возможна *рефракция ЭМ поля*. На неоднородностях возможно *рассеяние ЭМ поля*. Эти явления обуславливают распространение *тропосферных волн*.

Так как плотность газов уменьшается с высотой, то в стратосфере ϵ близка к 1 и мало зависит от каких-либо факторов. Поэтому стратосфера меньше, чем тропосфера, влияет на распространение радиоволн.

Ионосферой называют слой атмосферы от высоты, равной 60 км, до $20 \cdot 10^3$ км над поверхностью Земли. Газ малой плотности в ней частично или полностью ионизирован. Образовавшаяся плазма с $N = 10^3 + 10^6$ эл/см³ находится в постоянном магнитном поле Земли, N зависит от высоты. Поэтому возможны явления рефракции и отражения ЭМ поля в ионосфере. Ионосфера статистически неоднородная среда, коэффициент преломления ее меняется в вертикальном и горизонтальном направлениях. Поэтому возможно явление рассеяния ЭМ поля, что обуславливает возможность его распространения на большие расстояния. Радиоволны, распространяющиеся посредством отражения и рассеяния в ионосфере, называют *ионосферными*. На характеристики последних свойства тропосферы и приповерхностных слоев Земли мало влияют.

На высотах, равных 3–4 радиусам Земли, атмосфера переходит в межпланетную плазму, в которой газ полностью ионизирован, $N = 10 - 100$ эл/см³. Распространение ЭМ поля в космическом пространстве изучается отдельно.

Таким образом, возможно построение математических моделей, изучающих отдельно влияние на распространяющееся ЭМ поле приповерхностного слоя Земли, тропосферы, ионосферы, межпланетной плазмы.

3. Условия распространения ЭМ поля в пределах частот каждой из 9 частотных полос примерно одинаковы. Поэтому рассматриваются особенности распространения радиоволн в диапазонах СДВ и ДВ, СВ, КВ и УКВ (см. табл. В.1).

12.2. Модель свободного пространства

1. Простейшей математической моделью является модель свободного пространства. При заданном (измеренном) токе в прямолинейном излучателе поперечная составляющая вектора \dot{E} в дальней зоне определяется по (2.18), (2.19), (2.22). В случае элементарного электрического вибратора распределение тока $\dot{I}^c(z) = \dot{I}_0$ по вибратору длины L равномерно. Поэтому в (2.18) $a^3 F(\theta) = \dot{I}_0 L \sin \theta$. Получающиеся выражения просты и удобны для расчетов. Поэтому часто заданный прямолинейный излучатель с некоторой функцией распределения тока по его длине L приводят к «эквивалентному» излучателю с равномерным распределением тока \dot{I}_0 и действующей длиной L_d , вычисляемой из условия равенства напряженности его поля в дальней зоне

$$\dot{E}_\theta(p) = \frac{i\beta \dot{I}_0 L_d W_0}{4\pi} F(\theta) \frac{e^{-ikR}}{R} \quad (12.1)$$

напряженности поля заданного излучателя. Приравняв (12.1) и (2.22), с учетом (2.18), (2.19) получаем $L_d = a^3 / \dot{I}_0$. В случае элементарного электрического вибратора и прямолинейной нити с бегущей волной тока $L_d = L$ (§ 2.4, § 2.6). Для вычисления L_d линейного излучателя необходимо задать (измерить) функцию распределения тока по линейному излучателю (§§ 2.2).

2. Если задана (измерена) мощность излучения P_Σ , то для элементарного электрического вибратора из (2.42) $|\dot{I}_0| = (3P_\Sigma / \pi W_0)^{1/2} (\lambda / L)$. Подставляя $|\dot{I}_0|$ в (12.1) и считая, что $L = L_d$, получаем $\dot{E}_\theta(p) = |\dot{E}_\theta(p)| \exp(i\Phi)$, где $|\dot{E}_\theta(p)| = \sqrt{90P_\Sigma} |F(\theta)| / R$, $\Phi = -\beta R + \arg F(\theta) + \pi/2 + \arg \dot{I}_0$.

Одним из основных параметров излучателя (антенны) является коэффициент направленного действия D_Σ (КНД). D_Σ — число, показывающее во сколько раз пришлось бы увеличить P_Σ при переходе от направленной антенны к ненаправленной при условии, что остается неизменным значение $\dot{E}_\theta(p)$ (коэффициенты полезного действия обеих

антенн равны). Тогда $D_{\Sigma} = P_{\Sigma} / P_{\Sigma_n}$, где P_{Σ_n} — мощность излучения ненаправленной антенны. Элементарный электрический вибратор в экваториальной плоскости имеет $D_{\Sigma} = 1,5$. Для него $|\dot{E}_{\theta}(p)| = \sqrt{60P_{\Sigma}D_{\Sigma}} \sin \theta / R$. Это выражение совместно с (12.1) можно обобщить на линейную антенну, имеющую значение D_{Σ} , соответствующее максимуму характеристики направленности:

$$\dot{E}_{\theta}(p) = |\dot{E}_{\theta}(p)| e^{i\Phi(p)} = \sqrt{60P_{\Sigma}D_{\Sigma}} |F(\theta, \varphi)| e^{i\Phi(p)} / R. \quad (12.2)$$

Ниже индекс « θ » в выражениях (12.1), (12.2) заменяется индексом «0», означающим поперечную составляющую вектора $\dot{E}_0(p)$ в свободном пространстве.

3. Пример. Радиоприемная антенна расположена в свободном пространстве. Передающая и приемная антенны заданы в виде прямолинейных четвертьволновых несимметричных электрических вибраторов, причем приемная антенна находится в экваториальной плоскости передающей и составляет угол γ с ее осью (рис. 3.2, з). Измеренный ток на входных зажимах передающей антенны $|I_0| = 1$ А. Приемная антенна расположена на расстоянии 10 км от передающей. Найти напряжение на выходе радиоприемной антенны, если $\lambda = 10$ см.

При вычислении $L_d = a^2 / I_0$ по (2.18) учтем, что $I^c(z) = I_0 \sin \beta(L - z)$, где $L = \lambda/4$. Тогда действующая длина передающей антенны при $\theta = \pi/2$

$$L_d = \frac{1}{I_0} \int_0^{\lambda/4} I_0 \sin \beta(L - z') dz' = \frac{\lambda}{2\pi} < L.$$

По (12.1) имеем $|\dot{E}_0(p)| = 3$ мВ/м. На приемной антенне передающая наводит (§ 3.5) э.д.с. $\mathcal{E}_{12} = |\dot{E}_0(p)| \cdot L_{пр} \cos \gamma$, где $L_{пр} = \lambda/2\pi$ — действующая длина приемной антенны. Таким образом, $\mathcal{E}_{12} = (3000 \cdot 10^{-1} / 2\pi) \cos \gamma \approx 48 \cos \gamma$ мкВ.

4. При расчете радиоприемных антенн в УКВ диапазоне определяется, в основном, мощность на входе приемной антенны $P_{0,пр} = \Pi_0 S_{пр}$. Так как $\Pi_0(p) = |\dot{E}_0(p)|^2 / 2W_0$, а эффективная площадь антенны $S_{пр} = D_{пр} \lambda^2 / 4\pi v$, где $D_{пр}$ и v — КНД и коэффициент использования площади приемной антенны, то используя (12.2) при $|F(\theta, \varphi)| = 1$, $v = 1$, получаем

$$P_{0,пр} = P_{\Sigma} D_{\Sigma} D_{пр} (\lambda / 4\pi R)^2. \quad (12.3)$$

Значит, применение направленных антенн эквивалентно увеличению мощности радиопередающего устройства в $D_{\Sigma} D_{пр}$ раз. Целесо-

образность увеличения или P_{Σ} или $D_{\Sigma}D_{\text{пр}}$ определяется экономическими и экологическими соображениями.

При $D_{\Sigma} = D_{\text{пр}} = 1$ (ненаправленные антенны) из (12.3) имеем $\Gamma_0 = P_{0,\text{пр}} / P_{\Sigma} = (\lambda / 4\pi R)^2$ — основные потери передачи.

12.3. Множитель влияния среды. Замирания

1. Земные радиоволны распространяются у границы раздела воздух-земля. Все виды земной поверхности считаются немагнитными ($\mu_1 = 1$). Относительная комплексная диэлектрическая проницаемость $\epsilon = \epsilon_{a1} / \epsilon_0 = \epsilon_1 - i\sigma_1 / \omega\epsilon_0 = \epsilon_1 - i60\lambda\sigma_1$. Если отношение плотностей токов смещения и проводимости в почве $|j_c| / |j^B| = \omega\epsilon_{a1} / \sigma_1 \geq 3$, то *почву считают диэлектриком*, если $\omega\epsilon_{a1} / \sigma_1 \leq 1/3$, то — *проводником* (§ 1.8). Поскольку в диапазонах УВЧ–ГВЧ $\omega\epsilon_{a1} / \sigma_1 > 3$, то все виды земной поверхности, за исключением морской воды, считаются *диэлектриками*. Морская вода в диапазоне дециметровых волн имеет $|j_c| \approx |j^B|$. Для длин волн $\lambda > 300$ м все виды почв считаются проводниками.

Отметим, что деление сред на проводники и диэлектрики зависит от частоты и является условным.

На проводимость почвы основное влияние оказывает ее влажность (см. рис. 1.17). Считается, что влажность почвы меняется в течение года до глубины в 1 м. Глубина δ_1 проникновения поля в почву в зависимости от частоты меняется от единиц до десятков метров. Для морской воды на частотах $f > 30$ МГц δ_1 меньше единиц см, в диапазоне НЧ δ_1 равно единицам метров.

Для земной поверхности обычно $|\epsilon_1| > 10$, только на участках, покрытых сухим песком, в сантиметровом диапазоне длин волн $|\epsilon_1| = 2-5$. Поэтому при решении граничных задач применимы импедансные граничные условия (4.29).

2. Решить граничные задачи при неоднородном поверхностном сопротивлении даже для простых моделей не удастся. Поэтому при расчетах радиотрасс применяется следующий метод. Считается, что составляющие $\dot{E}_m(p, \omega)$ ($m = x, y$ или z) вектора \dot{E} для заданной радиолинии определяются так же, как в свободном пространстве, но влияние

среды учитывается с помощью множителя влияния среды $V_m(p, \omega) = |V_m| \exp(i\Psi_m)$.

Тогда

$$\dot{E}_m(p, \omega) = \dot{E}_{0m}(p, \omega)V_m(p, \omega), \quad (12.4)$$

где \dot{E}_{0m} вычисляется по (12.1) или (12.2). Мгновенные значения E_m определяются по (1.60):

$$E_m(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_{0m} |V_m| e^{i[\omega t + \Phi(p, \omega) + \Psi_m(p, \omega)]} d\omega,$$

т.е. $V_m(p, \omega)$ имеет смысл коэффициента передачи эквивалентного пространству четырехполосника. Строго V_m можно определить, решая граничную задачу дифракции ЭМ поля на неоднородном импедансном шаре (Земле), покрытом неоднородной атмосферой. Но строгого решения такой задачи из-за ее сложности не получено. Поэтому в инженерных расчетах применяют модели радиотрасс с гладкой поверхностью раздела сред при усредненных по трассе постоянных параметрах среды. В более сложных моделях могут задаваться однородные (но разные) параметры сред на выделенных участках радиотрассы (стыки однородных участков).

3. Из (12.4) и (12.3) для мощности $P_{\text{пр}}$ на входе радиоприемного устройства с учетом влияния среды имеем

$$P_{\text{пр}} = P_{0, \text{пр}} |V_m(p, \omega)|^2. \quad (12.5)$$

Эквивалентный естественной радиотрассе четырехполосник должен характеризовать *случайный процесс*. Детерминированный сигнал после прохождения через такой четырехполосник приобретает характеристики случайного сигнала. Его форма, амплитуда, фаза, частота, время прихода, поляризация *флуктуируют*, т.е. отклоняются по случайным законам от средних значений этих параметров. Флуктуации амплитуды сигнала называют *замираниями* (федингами). Они вызывают искажения сигнала и определяют *устойчивость работы радиолинии*.

Множитель влияния среды рационально рассматривать как сложную функцию большого числа случайных аргументов. Для моделирования последней используется аппарат предельных теорем теории вероятностей, приводящий к моделям Релея, Райса, Хойта и др.

Физическими причинами возникновения флуктуаций сигнала являются изменения во времени свойств среды и *многолучевость* в процессе распространения ЭМ поля. Свойства среды могут меняться во времени, например, под влиянием метеорологических условий. Многолучевость в точке p создается в результате появления луча-0,

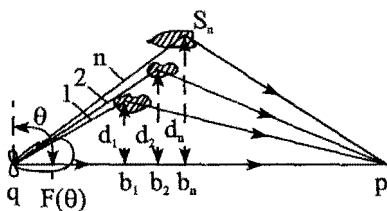


Рис. 12.1. Пример многолучевости

распространяющегося по пути qp (расстояние R_{qp}) и лучей $1, 2, \dots, N$. Лучи $1 + N$ отражаются, например, от N неоднородностей в атмосфере, имеющих случайный характер (рис. 12.1). Высота неоднородности $d_n(t)$ и ее положение в горизонтальной плоскости $R_{qb_n}(t)$ меняются по случайным законам. Если $R_{qb_n}, R_{b_n p} \gg d_n$ то

$$R_{qs_n p} = (R_{qb_n}^2 + d_n^2)^{1/2} + (R_{b_n p}^2 + d_n^2)^{1/2} \approx R_{qp} + d_n^2 / 2R_{qp} \xi_n (1 - \xi_n),$$

где $\xi_n(t) = R_{qb_n} / R_{qp}$ — меняется по случайному закону.

Причиной изменения высоты неоднородности d_n и ее горизонтального положения могут быть, например, нисходящие и восходящие потоки воздуха, ветер. Разность хода луча-0 и луча номер n равна $\Delta R_n = R_{qs_n p} - R_{qp} \approx d_n^2 / 2R_{qp} \xi_n (1 - \xi_n)$. Разность фаз $\Delta \psi_n = \beta \Delta R_n$ меняется по случайному закону.

Поле луча-0 с напряженностью $E_{m0}(p, \omega)$ интерферирует с полями N лучей. Тогда

$$E_m(p, t) = |E_{m0}| \cos[\omega t + \Phi_m(t)] + \sum_{n=1}^N |E_{mn}| \cos[\omega t + \Phi_{mn}(t)]. \quad (12.6)$$

Различают *быстрые и медленные замирания*. Флуктуации амплитуд и фаз сигналов изучают на основе измерений $E_m(p, t)$ на конкретных радиотрассах. Результаты измерений показывают, что замирания являются *нестационарным случайным процессом*. Но с достаточной для инженерных расчетов точностью в течение ограниченных интервалов времени их можно определить как *стационарный случайный процесс*. Длительность этих интервалов времени для конкретных условий определяется экспериментально [68]. Замирания в течение ограниченного интервала времени называют быстрыми, а изменение средних значений амплитуды сигнала за большие интервалы времени — медленными. Скорость замираний определяется их частотой, равной среднему числу пересечений мгновенным значением огибающей сигнала заданного уровня за единицу времени, или обратной частоте величиной — средним периодом замираний. Медленные замирания связаны с изменением во времени коэффициентов затухания и отражения поля. Например, для

луча-0 $\ln(|\dot{E}_{m0}|/|\dot{E}_{m0}|_{R=0}) = -\alpha R_{gp}$. Предположив, что случайная величина α распределена по нормальному закону, имеем распределение амплитуды $|\dot{E}_{m0}|$ по логарифмически-нормальному закону. Измерения подтверждают, что медленные замирания описываются логарифмически нормальным законом.

Быстрые замирания являются результатом случайных изменений фазовых набегов лучей. Плотность распределения $p(|E_{mN}|)$ амплитуды E_{mN} напряженности суммарного поля N лучей (суммы по n) в (12.6) подчиняется закону распределения Релея: $p(E_{mN}) = 2|E_m| \exp[-|E_m|^2 / 2\gamma^2] / \gamma \sqrt{2\pi}$, где γ^2 — дисперсия $|\dot{E}_m|$. Плотность распределения амплитуды напряженности поля \dot{E}_m (12.6) подчиняется *обобщенному закону Релея*.

Применяются понятия медианного значения $E_{мед}$ — величины напряженности поля в точке p , превышаемой в течение 50% времени наблюдения, а также уровни E_{99}, E_{90}, E_{10} и т.д., превышаемые в интервалах времени наблюдения соответственно 99, 90, 10 и т.д. процентов. По записям сигнала вычисляется интенсивность флуктуаций, т.е. дисперсия.

Временная функция корреляции $C(\tau)$ описывает статистическую связь сигналов в точке p при их временном разнесении. Нормированные функции корреляции удовлетворительно описываются законом $C(\tau) = \exp(-\tau/\tau_0)$, где τ — интервал разнесения сигналов во времени, τ_0 — масштаб временной корреляции. Пространственная функция корреляции описывает статистическую связь сигналов двух разнесенных в пространстве на интервал l точек наблюдения p_1 и p_2 . Ее нормированное значение $C(l) = \exp(-l/l_0)$, где l_0 — масштаб пространственной корреляции.

Применяется также понятие *частотного спектра флуктуаций*. Он характеризует распределение энергии флуктуирующего сигнала по частоте, его называют энергетическим спектром или спектром мощности случайного процесса. Он связан с функцией корреляции и наиболее полно характеризует частотные свойства замираний [68].

12.4. Модели радиотрасс без учета влияния атмосферы

1. При расчете напряженности поля земной радиоволны в математических моделях первого приближения атмосферу считают однородной непоглощающей средой при $\epsilon = 1$, $\sigma = 0$, поверхность земли — гладкой и однородной. Пусть передающая антенна расположена в точке q на высоте $h_1 > \lambda$ над поверхностью Земли, а приемная — в точке p на высоте $h_2 > \lambda$ (рис. 12.2, а, б). Расстояние между точками q и p равно $R_{qp} = R$. Область пространства, существенная для распространения радиоволн, в зависимости от соотношения между R , h_1 , h_2 и λ может не включать в себя часть поверхности Земли (случай а), а может включать (случай б). Если область пространства, существенная для распространения радиоволн, перекрывается земной поверхностью (случай б), то сферичность Земли с высотой сегмента Δ является «препятствием» для ЭМ волны и последняя может распространяться в точку p только за счет дифракционных явлений (если не учитывается влияние атмосферы) подобно тому, как это происходит в области полутени и тени в случае полуплоскости (§ 9.5). Для уменьшения влияния Земли на ЭМ поле в точке p необходимо не только, чтобы высота сегмента Δ была равна нулю, но и первой зоной Френеля не охватывалась бы поверхность Земли (случай а).

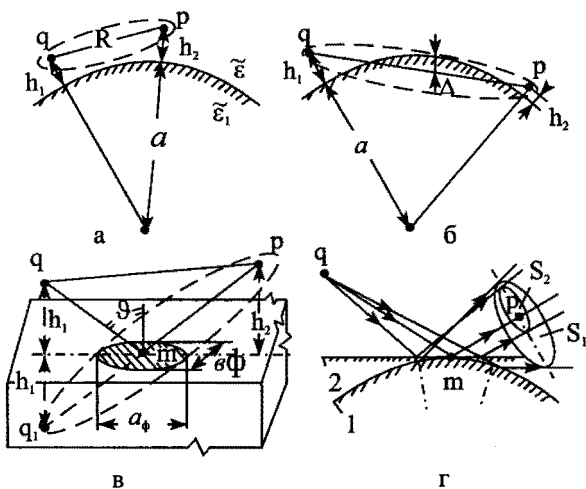


Рис. 12.2. К обоснованию моделей

Для построения математических моделей применяют понятие *расстояния прямой видимости* — расстояния R_0 между точками q и p , при котором прямая линия, проведенная через эти точки, касается земной поверхности: $R_0 = [(a + h_1)^2 - a^2]^{1/2} + [(a + h_2)^2 - a^2]^{1/2}$. Поскольку радиус Земли $a = 6370$ км $\gg h_{1,2}$, то $R_0 \approx (2a)^{1/2} (h_1^{1/2} + h_2^{1/2})$.

Используют три следующих модели радиотрасс: а) радиотрассы малых протяженностей, при которых $R < 0,2R_0$. При этом сферичность Земли мало влияет на ЭМ поле в точке p . Землю считают локально плоской; б) радиотрассы средней протяженности, при которых $0,2R_0 < R < 0,8R_0$. Первая зона Френеля при этом не перекрывается сегментом Δ . Но сферичность Земли необходимо учитывать; в) радиотрассы, у которых $R > 0,8R_0$. При этом вычисляется поле дифракции на земном шаре (§ 9.4). Область трассы, лежащая на расстояниях $0,8R_0 < R < 1,2R_0$, называется областью полутени; при $R > 1,2R_0$ точка p находится в тени.

2. В случае первой математической модели ($R < 0,2R_0$) отраженное от земли ЭМ поле можно вычислить с помощью метода *зеркальных изображений* (§ 4.5). Фиктивный (зеркальный, мнимый) источник тогда находится в точке q_1 (рис. 12.2,б). Область пространства, существенная для распространения отраженного поля, ограничена эллипсоидом с фокусами в точках q_1 и p . Пересечение эллипсоида с поверхностью Земли происходит по участку поверхности Земли, существенному при отражении ЭМ волны. Он ограничен эллипсом, большая ось которого вытянута в направлении распространения поля. Размеры малой и большой осей эллипса $b_\phi = [R'_1 R_1 \lambda / (R'_1 + R_1)]^{1/2}$, $a_\phi = b_\phi / \cos \vartheta$, где $R'_1 = q_1 m$, $R_1 = m p$. Если $h_1 \ll h_2$, то участок расположен вблизи излучателя и вытянут в сторону точки p . Если $h_1 \gg h_2$, то существенный участок поверхности земли расположен вблизи точки p и вытянут в сторону излучателя. Таким образом, если существенный участок ровный, то поверхность Земли считается плоскостью.

В пределах существенного участка \mathcal{E}_1 может изменяться. Это изменение приводит к изменению коэффициента отражения $\Delta R_{\parallel, \perp} = \partial R_{\parallel, \perp} / \partial \vartheta \cdot (\partial \vartheta / \partial R) \cdot a_\phi$. Если $|\Delta R_{\parallel, \perp}| \ll |R_{\parallel, \perp}|$, то этим изменением пренебрегают.

3. Замена сферической поверхности (1) Земли на существенном участке плоской поверхностью (2) приводит к тому, что трубка лучей,

отраженных от сферической поверхности, заменяется трубкой лучей, отраженных от плоской поверхности раздела сред (рис. 12.2,з). Но площадь поперечного сечения S_1 первой трубки больше площади поперечного сечения S_2 второй, так как лучи, отраженные от шара, имеют большую расходимость. Поэтому амплитуда вектора \mathbf{E}^B убывает с ростом расстояния R в $v \approx [1 + h_1 h_2 R^2 / a(h_1 + h_2)^3]^{-1/2}$ раз быстрее [71], чем в модели плоской Земли (v называют коэффициентом расходимости).

4. Математические модели радиотрасс применяются при гладкой в пределах существенного участка поверхности Земли. Однако, в оригиналах это условие не выполняется. Величину допустимых отклонений от гладкости определим с помощью рис. 12.3,а. Пусть ζ есть глубина неровности в плоской поверхности. Если плоское ЭМ поле падает на плоскую поверхность раздела сред под углом ϑ , то отраженные под тем же углом ϑ лучи называют *зеркальными*. Плоский фронт падающего ЭМ поля находится на плоскости aa' , а плоский фронт отраженного ЭМ поля — на плоскости bb' . Если луч qmM зеркально отражится от неровности, то он дополнительно проходит путь $2\zeta \cos \vartheta = nm + mn'$, его разность хода по сравнению с лучом $Qm'M'$, который мог бы отразиться от плоскости в отсутствие неровности, равна $2\zeta \cos \vartheta$. За счет этого появляется разность фаз $\Delta\Phi = \beta 2\zeta \cos \vartheta$. Допустимая разность фаз $\Delta\Phi_g$ зависит от назначения приемного устройства. Обычно задают $\Delta\Phi_g = \pi/2$. Тогда $\Delta\Phi_g = \pi/2 = \beta 2\zeta_g \cos \vartheta$. Поэтому допустимая глубина неровностей $\zeta_g = \lambda / 8 \cos \vartheta$. Это соотношение называют *критерием Релея*. Если неровности покрывают весь существенный участок (или значительную его часть), то требования к ве-

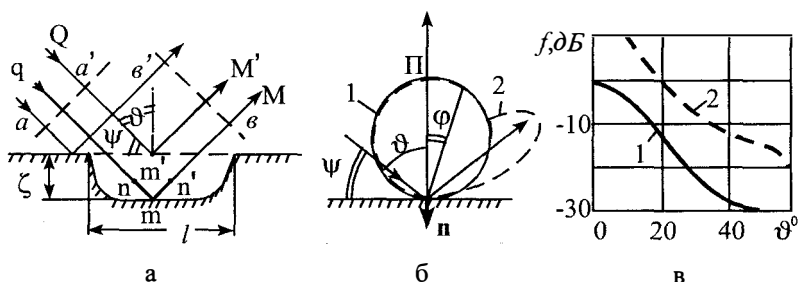


Рис. 12.3. К пояснению влияния на ЭМ поле неровностей

личине ζ_g ужесточаются.

Горизонтальный размер неровности l (или всех неровностей, если их много) должен быть значительно меньше a_ϕ . Тогда допустимый горизонтальный размер неровности $l_g \ll (\pi\lambda R)^{1/2} / \cos \vartheta$.

При расчетах часто используют не угол падения ϑ , а угол скольжения (возвышения) $\psi = \pi/2 - \vartheta$ (рис. 12.3). Тогда $\zeta_g < \lambda/8 \sin \psi$, $l_g \ll (\pi\lambda R)^{1/2} / \sin \psi$, т.е. вертикальный и горизонтальный размеры неровности для зеркального отражения существенно зависят от угла скольжения ψ . Чем меньше угол скольжения, тем больше допустимые размеры неровностей. Например, при $\Delta\Phi_g = \pi/2$ и $\psi = 20^\circ$ имеем $\zeta_g = 0,35\lambda$, а при $\psi = 1^\circ$ получаем $\zeta_g = 7\lambda$.

Если неровности не удовлетворяют критерию Релея, то отраженное ЭМ поле является *полурассеянным*. При *рассеянном*, или *диффузном*, отражении поля (оптический термин) плотность потока мощности отраженного ЭМ поля зависит от угла наблюдения ϕ по «закону косинуса» (закону Ламберта): $\Pi = \Pi_0 \cos \phi$ при любом угле падения ϑ , где Π_0 — значение плотности Π при $\phi = 0$. Диаграмма рассеяния (1) изображена на рис. 12.3,б. Она не зависит от ϑ . Но в природе нет поверхностей, которые полностью диффузно рассеивают ЭМ поле. Отраженное подстилающей поверхностью поле является *полудиффузным*, или *полурассеянным*. Его диаграмма рассеяния (2) изображена пунктиром на рис. 12.3,б. Полурассеянное отражение поля объясняется наличием в пределах существенного участка поверхности Земли расположенных по случайному закону неровностей. Чем меньше λ , тем легче выполнение условий, при которых отраженное поле близко к диффузному. Это относится, в первую очередь, к диапазону СВЧ.

При рассеянии ЭМ поля неровной земной поверхностью, как следует из диаграмм рассеяния, изображенных на рис. 12.3,б, и из результатов, полученных в § 9.3,9.5, вторичное поле распространяется и в направлении к источнику поля. В однопозиционных системах из отраженного в обратном направлении поля может извлекаться информация о характеристиках неровностей, но часто это поле создает помехи радиоприему полезного сигнала. Уровень обратного отражения оценивают эффективной площадью обратного рассеяния σ_3 (§ 9.2). Чаще всего $\sigma_3(\vartheta)$ определяется экспериментально. На рис. 12.3,в изображены нормированные диаграммы обратного рассеяния $f(\vartheta) = \sigma_3(\vartheta) / \sigma_{3,0}(0)$

(в децибеллах) для взволнованной поверхности моря, где $\sigma_{3,0}(0)$ — значение σ , при нормальном падении волны на $\lambda = 3,2$ см ($\vartheta = 0$), 1 — соответствует $\lambda = 3,2$ см, 2 — $\lambda = 0,85$ см. Графики показывают, что σ , существенно зависит от $\zeta/\lambda, l/\lambda$ и уменьшается с уменьшением $(\zeta \cos \vartheta)/\lambda$, что объясняется уменьшением разности фаз $\Delta\Phi = (4\pi\zeta \cos \vartheta)/\lambda$.

5. В диапазоне СВЧ при расчетах обычно используют экспериментальные графики зависимости $R_{\parallel,\perp}(\psi)$, так как теоретические графики, рассчитанные для ровной поверхности, для неровной поверхности могут существенно отличаться. Это отличие особенно проявляется для взволнованной поверхности моря при горизонтальной поляризации падающего ЭМ поля. Например, при $\lambda = 3$ см $|R_{\perp}|$ при $\psi = 5^\circ$ и при высотах морских волн, сравнимых с λ , меньше в 10 раз расчетного. При вертикальной поляризации растительный покров на почве может существенно изменять R_{\parallel} .

Влияние на ЭМ поле малых выступов, пологих хаотически расположенных на поверхности неровностей, неоднородностей ϵ_1 рассмотрено в [71, 72].

12.5. Поле излучателя, поднятого над земной поверхностью. Первая модель

1. Пусть протяженность радиолинии удовлетворяет условию $R_{qp} = R < 0,2R_0$. $h_{1,2} \ll R$. Но $h_{1,2} > \lambda$. Тогда применима первая модель — модель плоской Земли. Обозначим через r горизонтальное рас-

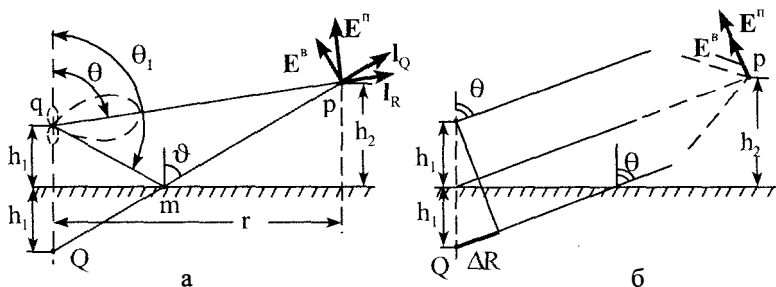


Рис. 12.4. Модель (первая) плоской земли

стояние между точками q и p (рис. 12.4,а). В точке q расположен излучатель, имеющий в свободном пространстве характеристику направленности $F(\theta)$ в вертикальной плоскости. Он возбуждает в точке p первичное поле, имеющее вектор $\dot{E}_0^n \perp \mathbf{1}_R$. На существенный однородный участок поверхности раздела сред падает ЭМ поле и отражается от него. Вектор \dot{E}^B отраженного поля в точке p можно определить, как показано в § 4.5, методом зеркальных изображений. Фиктивный источник расположен в точке Q . Так как $R_{Qp} \gg \lambda$, то точка p находится в дальней зоне фиктивного источника, поэтому $\dot{E}^B \perp \mathbf{1}_Q$.

$R_{qp} = [r^2 + (h_2 - h_1)^2]^{1/2}$, $R_{Qp} = [r^2 + (h_1 + h_2)^2]^{1/2}$. Значит, разность хода лучей Qp и qp равна $\Delta R = R_{Qp} - R_{qp} \cong 2h_1 h_2 / r - h_1 h_2 (h_1^2 + h_2^2) / r^3$ (рис. 12.4,б). Считаем, что набег фазы поля $\beta h_1 h_2 (h_1^2 + h_2^2) / r^3 \ll \pi$ и им можно пренебречь. Кроме того, $1/R_{qp} \approx 1/R_{Qp} \approx 1/r$, $\theta_1 \approx \pi - \theta$, $\vartheta \approx \theta$.

Так как векторы \dot{E}_0^n и \dot{E}^B в дальней зоне параллельны (рис. 12.4,б), то $\dot{E}(p) = \dot{E}_0^n(p) + \dot{E}^B(p) = \mathbf{b}(\dot{E}_0^n + \dot{E}^B) = \mathbf{b}\dot{E}(p)$, где $\dot{E}(p) = \dot{E}_0^n(p) + \dot{E}^B(p)$, \mathbf{b} — орт $\mathbf{b} \perp \mathbf{1}_R$. В свободном пространстве по (12.1), (12.2) $\dot{E}_0^n(p) = (60P_\Sigma D_\Sigma)^{1/2} |F(\theta)| \exp[i\Phi_0(p)] / r$, где $\Phi_0(p) = -\beta R + \arg F(\theta) + \pi/2 + \arg I_0$. Для поля фиктивного источника по (4.49), (4.50) имеем

$$\dot{E}^B(p) = R_{\perp}(\vartheta) (60P_\Sigma D_\Sigma)^{1/2} r^{-1} |F(\theta_1)| \cdot \exp[i\Phi(p)],$$

где R_{\parallel} и R_{\perp} — коэффициенты отражения по электрическому полю при вертикальной и горизонтальной поляризациях поля, $R_{\parallel} = R_{\parallel E}$, (§ 4.1), $\Phi(p) = -\beta R_{Qp} + \arg F(\theta_1) + \pi/2 + \arg I_0$. Тогда для полного поля получаем $\dot{E}(p) = \dot{E}_0^n + \dot{E}^B = \dot{E}_0^n (1 + \dot{E}^B(p) / \dot{E}_0^n(p)) = \dot{E}_0^n V(p)$, где $V(p) = 1 + \dot{E}^B(p) / \dot{E}_0^n(p)$ — множитель влияния среды, в данном случае множитель влияния плоской земли.

Подставляя значения $\dot{E}^B(p)$, $\dot{E}_0^n(p)$ и учитывая, что $\vartheta \approx \theta$, находим

$$V(p) = 1 + R_{\parallel, \perp}(\theta) \frac{F(\theta_1)}{F(\theta)} e^{-i\beta \Delta R}.$$

Модуль множителя влияния среды

$$|V(p)| = [1 + |R_{\parallel,\perp}(\theta)|^2 \frac{|F(\pi - \theta)|^2}{|F(\theta)|^2} + 2|R_{\parallel,\perp}(\theta)| \frac{|F(\pi - \theta)|}{|F(\theta)|} \cos \xi]^{1/2}, \quad (12.7)$$

где $\xi = -\Phi_{\parallel,\perp}(\theta) - \beta\Delta R + \arg F(\pi - \theta) - \arg F(\theta)$.

Выражение $|\dot{E}(p)| = |\dot{E}_0(p)| \cdot |V(p)|$ называют *интерференционной формулой* ($|\dot{E}_0(p)| = |\dot{E}_0^n(p)|$).

2. В случае слабонаправленного излучателя $F(\theta) \approx F(\theta_1) \approx F(\theta - \pi)$. Поэтому из (12.7) имеем

$$|V(p)| \approx [1 + |R_{\parallel,\perp}(\theta)|^2 + 2|R_{\parallel,\perp}(\theta)| \cos(\Phi_{\parallel,\perp} + \beta 2h_1 h_2 / r)]^{1/2}. \quad (12.8)$$

Если r/λ меняется, то аргумент косинуса меняется. При косинусе, равном единице, $|V(p)|$ принимает максимальные значения $|V(p)| = |V(p)|_{\text{макс}} = 1 + |R_{\parallel,\perp}(\theta)|$, а при косинусе, равном минус единице, $|V(p)| = |V(p)|_{\text{мин}} = 1 - |R_{\parallel,\perp}(\theta)|$. Зависимость $|V(r/\lambda)|$ при фиксированных h_1/λ , h_2/λ и ϵ_1 изображена на рис. 12.5,а. За счет изменения разности хода лучей qp и Qp при изменении r/λ возникают интерференционные явления (см. § 2.7): разность фаз векторов \dot{E}^n и \dot{E}^s на фазовой плоскости меняется, появляются лепестки в множителе влияния среды. При уменьшении r/λ угол падения θ уменьшается, значения $|R_{\parallel,\perp}|$, как видно из рис. 4.2,в, уменьшаются. Поэтому значения $|V(r/\lambda)|$ в максимумах уменьшаются, а в минимумах возрастают. Ширина интерференционных лепестков с ростом r/λ увеличивается, что объясняется гиперболической зависимостью разности хода ΔR лучей от r/λ .

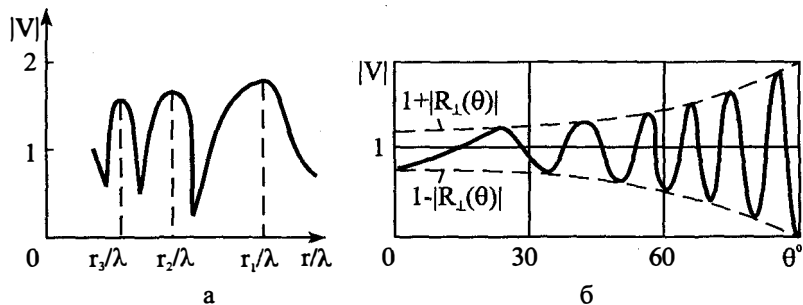


Рис. 12.5. Зависимость $|V|$ от координат

В стационарных радиолиниях обычно выбирают $r/\lambda > r_1/\lambda$.

3. В случае слабонаправленного излучателя рассмотрим ЭМ поле в направлении $\theta \approx \pi/2$. Как следует из графиков, изображенных на рис. 4.2, при $\theta \rightarrow \pi/2$ $\Phi_{\parallel} = \pi - \Delta_{\parallel}$, $\Phi_{\perp} = \pi + \Delta_{\perp}$, где $\Delta_{\parallel, \perp}(\theta)$ — малые величины. При этом $h_1 + h_2 \approx r \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \theta) = r \operatorname{ctg} \theta$. Поэтому $h_2 \approx r \operatorname{ctg} \theta - h_1$. Значит, $\Delta R \approx 2h_1 h_2 / r \approx 2h_1 \operatorname{ctg} \theta - 2h_1^2 / r$. Таким образом, в (12.8)

$$\begin{aligned} \cos(\Phi + 2\beta h_1 h_2 / r) &\approx \cos[\pi \mp \Delta(\theta) + 2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta - 2\beta h_1^2 / r] = \\ &= -\cos[2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta \mp \Delta(\theta) - 2\beta h_1^2 / r] = \end{aligned}$$

$$= -[\cos(2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta \mp \Delta) \cos(2\beta h_1^2 / r) + \sin(2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta \mp \Delta) \sin(2\beta h_1^2 / r)],$$

где верхний знак соответствует вертикальной поляризации, а нижний — горизонтальной. Так как здесь $2\beta h_1^2 / r = 4\pi(h_1/\lambda) h_1 / r \ll 1$, а Δ — малые величины, то вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь. Кроме того, при этом $\cos(2\beta h_1^2 / r) \approx 1$. При этих условиях получаем $\cos(\Phi + 2\beta h_1 h_2 / r) \approx -\cos(2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta \mp \Delta)$ и $|V_{\parallel}(p)| \approx [1 - 2|R(\theta)| \times$

$\times \cos(2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta - \Delta(\theta)) + |R(\theta)|^2]^{1/2}$. При $\theta \approx \pi/2$ аргумент $2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta \mp \Delta \ll 1$, поэтому при обеих поляризациях имеем

$|V_{\parallel, \perp}(p)| \approx [1 - 2|R_{\parallel, \perp}(\theta)| + |R_{\parallel, \perp}(\theta)|^2]^{1/2} = 1 - R_{\parallel, \perp}(\theta)$. Поскольку $|R_{\parallel}| < |R_{\perp}|$ (см. рис. 4.2, в), то $|V_{\parallel}| > |V_{\perp}|$. Таким образом, для направлений, близких

к направлению, определяемому углом $\theta = 90^\circ$, модуль множителя влияния среды для вертикальной поляризации поля больше, чем для горизонтальной, т.е. *при вертикально поляризованном поле в горизонтальном направлении возбуждается ЭМ поле большей интенсивности, чем при горизонтально поляризованном*. Это обстоятельство используется при выборе вертикальной поляризации в радиолинии, существенный участок которой имеет большое значение параметра $60\lambda\sigma_1$. Например, в случае навигационной радиолокационной системы, которая должна облучать цели, расположенные на море, выбирается вертикальная поляризация.

4. Рассмотрим формулу Б. А. Введенского, часто применяемую при приближенных вычислениях напряженности поля. При $\theta \approx 90^\circ$ имеем $|R_{\parallel, \perp}| \approx 1$, $\Delta_{\parallel, \perp} \approx 0$. Из (12.8) получаем

$|V| \approx \sqrt{2[1 - \cos(2\beta h_1 h_2 / r)]^{1/2}}$. Поскольку $1 - \cos(2\beta h_1 h_2 / r) = 2\sin^2 \beta h_1 h_2 / r$, то $|V| \approx 2\sin \beta h_1 h_2 / r \approx 2\beta h_1 h_2 / r$, так как синус при $\beta h_1 h_2 / r \ll 1$, то можно заменить его аргументом. Таким образом,

$$|E(p)| = |E_0(p)| \cdot |V|, \quad |V(p)| \approx \frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda r}.$$

Это соотношение называют *формулой Б.А.Введенского*. Необычную зависимость $|E(p)| \sim 1/r^2$ можно объяснить тем, что в горизонтальном направлении поле истинного источника за счет интерференционных явлений компенсируется полем зеркального изображения, ток в котором по амплитуде почти равен току истинного источника, а по фазе сдвинут почти на 180° . Формулу Введенского применяют, если $\beta h_1 \cos \theta < \pi/9$.

5. Рассмотрим зависимость $|V(\theta)|$ для слабонаправленных антенн при заданном значении h_1/λ . В случае горизонтальной поляризации, если $2\beta h_1^2/r \ll 1$ из (12.8) имеем $|V_\perp(\theta)| \approx [1 + |R_\perp(\theta)|^2 + 2|R_\perp| \times \cos(2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta + \Phi_\perp(\theta))]^{1/2}$. С изменением θ изменяется $|R_\perp(\theta)|$ и аргумент косинуса. При $2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta_{n, \text{мн}} + \Phi_\perp(\theta_{n, \text{мн}}) = 2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $\cos(2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta_{n, \text{мс}} + \Phi_\perp(\theta_{n, \text{мс}})) = 1$ и $|V_\perp(\theta_{n, \text{мс}})| \approx 1 + |R_\perp(\theta_{n, \text{мс}})|$. В направлениях $\theta_{n, \text{мс}}$ обеспечиваются максимумы амплитуды возбуждаемого поля. Углы $\theta_{n, \text{мс}}$ можно определить из трансцендентного уравнения $2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta_{n, \text{мс}} = 2\pi n - \Phi_\perp(\theta_{n, \text{мс}})$ или $\operatorname{ctg} \theta_{n, \text{мс}} = n\lambda/2h_1 - [\Phi_\perp(\theta_{n, \text{мс}})/2\pi](\lambda/2h_1)$. Число минимумов ограничено и зависит от h_1/λ .

При $2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta_{m, \text{мн}} + \Phi_\perp(\theta_{m, \text{мн}}) = (2m+1)\pi$, где $m = 0, 1, 2, \dots, M$, обеспечиваются минимумы возбуждаемого поля, так как $\cos(2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta_{m, \text{мн}} + \Phi_\perp(\theta_{m, \text{мн}})) = -1$ и $|V_\perp(\theta_{m, \text{мн}})| \approx 1 - |R_\perp(\theta_{m, \text{мн}})|$.

Для вертикальной поляризации $|V_\parallel| \approx [1 + |R_\parallel|^2 + 2|R_\parallel| \times \cos(2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta + \Phi_\parallel)]^{1/2}$. При $2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta_{m, \text{мс}} + \Phi_\parallel(\theta_{m, \text{мс}}) = 2\pi m$, где $m = 0, 1, 2, \dots, M$, имеем $\cos(2\beta h_1 \operatorname{ctg} \theta_{m, \text{мс}} + \Phi_\parallel(\theta_{m, \text{мс}})) = 1$ и $|V_\parallel(\theta_{m, \text{мс}})| \approx 1 + |R_\parallel(\theta_{m, \text{мс}})|$. В направлениях $\theta_{m, \text{мс}}$ ЭМ поле имеет максимальное значение $|E(\theta_{m, \text{мс}})|$.

высотами h'_1, h'_2 (рис. 12.6). При этом $h'_{1,2} = h_{1,2} - \Delta h_{1,2}$, где $\Delta h_{1,2}$ можно найти, зная длину радиолинии $R \approx r$ и положение «точки отражения m ». В точке m плоскость GG' касается поверхности Земли. Пользуясь малостью угла γ , можно показать, что

$$\Delta h_{1,2} = [h_{1,2} / (h_1 + h_2)]^2 \cdot r^2 / 2a.$$

Сферичность Земли приводит к изменению угла падения (по сравнению с плоской моделью). Поэтому изменяются коэффициенты отражения. Угол падения определяется выражением $\text{ctg } \theta \approx (h'_1 + h'_2) / r$.

Сферичность Земли приводит и к появлению коэффициента расходимости лучей $v \approx [1 + 2h'_1 h'_2 r^2 / a(h'_1 + h'_2)^3]^{-1/2}$ (§ 12.5). Уменьшение напряженности поля за счет расхождения лучей оценивается с помощью коэффициентов отражения. Последние над сферической поверхностью равны $R_{с.дл.л} = vR_{||,л}$.

При расчетах по второй модели в *интерференционной формуле* (12.8) и *формуле Введенского* используют значения h'_1, h'_2 и $R_{с.дл.л}$. Математическая модель справедлива, если $\cos \theta \gg 0,7(\lambda / \pi a)^{1/3}$.

2. Пример. Найти напряженность поля в точке p , расположенной на высоте 12 м над поверхностью Земли на расстоянии 20 км от излучателя. Мощность излучения равна 10 Вт, коэффициент направленного действия излучателя равен 3, максимум излучения направлен на точку p . Поляризация поля вертикальная. Радиолиния работает на частоте 2500 МГц, излучатель находится на высоте 15 м. Существенный участок расположен на влажной глине (влажность 10%).

Найти мощность на входе радиоприемного устройства, если коэффициент направленного действия приемной антенны равен 2.

При решении задачи учтем, что приемную и передающую антенны можно считать слабонаправленными. Определим математическую модель. Расстояние прямой видимости $R_0 = (2a)^{1/2} (h_1^{1/2} + h_2^{1/2}) = 26,2$ км. При этом $R/R_0 = 0,76$, что соответствует возможности применения 2-й модели. Находим приведенные высоты антенн. Так как $\Delta h_1 = 9,69$ м, $\Delta h_2 = 6,2$ м, то $h'_1 = 5,31$ м, $h'_2 = 5,8$ м.

Условие $\beta h'_1 h'_2 (h_1'^2 + h_2'^2) / r^3 \ll \pi$ ($r \approx R$) выполняется, поэтому применима интерференционная формула. Определяем θ : $\text{ctg } \theta \approx (h'_1 + h'_2) / r = 0,266 \cdot 10^{-3}$, поэтому $\theta \approx 89^{\circ} 43'$.

По графикам рис. 1.17 находим для глины при $f = 2500$ МГц $\epsilon_1 \approx 10$, $\sigma_1 = 0,5 \cdot 10^{-2}$ См/м. Параметр $60\lambda\sigma_1 \approx 3,6 \cdot 10^{-2}$. Из графиков рис. 4.2,в следует, что при $\theta \approx 90^{\circ} \left| R_1 \right| = 1$, $\Phi_1 \approx \pi$. Условие применимости формулы Введенского ($\beta h'_1 h'_2 / r < \pi / 9$) выполняется. Поэтому применяем формулу Введенского $|V| = 4\pi h'_1 h'_2 / \lambda r = 0,161$.

Напряженность поля в точке p вычисляем по (12.4), (12.2): $|\vec{E}(p)| = 342$ мкВ/м.

Мощность на входе радиоприемного устройства находим по (12.5), (12.3):

$$P_{\text{пр}} = 3,55 \cdot 10^{-13} \text{ Вт.}$$

12.7. Поле вертикального электрического вибратора, расположенного вблизи земной поверхности

1. В диапазонах ОНЧ–СЧ и частично в ВЧ диапазоне, где длины волн равны от десятков километров до десятков метров, расположить антенны на больших по сравнению с λ высотах невозможно. Условие $h_1, h_2 > \lambda$ нереализуемо. Антенны, обычно в виде вертикальных мачт или башен (1), располагаются непосредственно у земной поверхности (рис. 12.7,а). Падающее на земную поверхность ЭМ поле при этом нельзя считать локально плоским. Вторичное поле нельзя вычислить с помощью коэффициентов отражения. Для определения поля применяются строгие методы, аналогичные методу, использованному в § 4.5. При небольшой протяженности радиотрасс применяют модель плоской Земли. Параметры почвы сначала считают однородными. Влияние атмосферы на ЭМ поле не учитывается.

Согласно результатам § 4.5, если проводимость нижней среды $\sigma_1 \rightarrow \infty$, то воздействие нижней среды на ЭМ поле в верхнем полупространстве можно заменить зеркальным изображением вибратора (2). Ток в зеркальном изображении равен по амплитуде и фазе току в истинном источнике. Так как вибратор расположен у земной поверхности, то общая действующая длина (излучатель плюс зеркальное изображение) удваивается. Поэтому при вычислении вертикальной составляющей

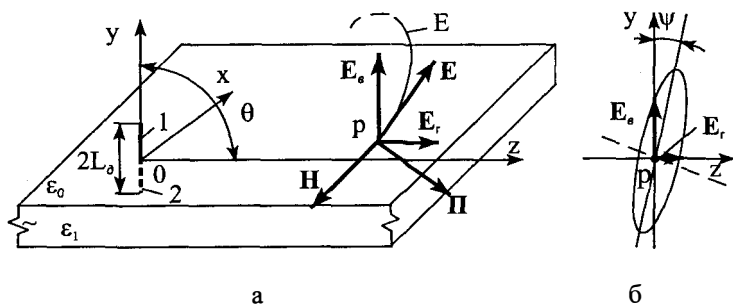


Рис. 12.7. Поле вертикального вибратора

$\dot{E}_y = \mathbf{1}_y \dot{E}_y$ вектора \dot{E} при $y \geq 0$ по заданному току \dot{I}_0 имеем по (12.1)

$$\dot{E}_y = E_{0,в} = \frac{i\beta I_0 2L_d W_0}{4\pi} F(\theta, \varphi) e^{-i\beta R} / R, \quad (12.9)$$

т.е. множитель влияния среды $V(\rho) = 2$. Если $\dot{E}_{0,в}$ вычисляется по заданной мощности излучения, то надо учесть, что величина D_Σ в направлении $\theta = 90^\circ$ увеличивается в 4 раза, так как в (2.19) $a^3 F(\theta) = 2L_d I_0 \sin \theta$. Из (12.2) имеем

$$\dot{E}_y = E_{0,в} = \sqrt{60P_\Sigma \cdot 4D_\Sigma} F(\theta, \varphi) e^{i\Phi(\rho)} / R. \quad (12.10)$$

Горизонтальная составляющая $\dot{E}_{0r} = \dot{E}_z$ на поверхности раздела сред ($y = 0$) при $\sigma_1 \rightarrow \infty$ отсутствует.

Математическая модель, соответствующая $\sigma_1 \rightarrow \infty$, неприменима при расчетах земной волны, но полезна для оценки значения \dot{E}_y .

Ниже рассматриваем земную волну. При этом точка ρ расположена на малой высоте, $\theta \approx \pi/2$ и $F(\pi/2, \varphi) = F(\varphi)$.

2. В природных условиях ϵ_1 — комплексная величина. В нижней среде имеются потери. Фронт распространяющейся волны у поверхности раздела сред так же, как в случае фронта волны над проводом конечной проводимости (§ 2.9, § 7.5), искривляется (см. фронт 4 на рис. 7.9,а). Кроме вертикальной составляющей \dot{E}_v на фронте у поверхности раздела сред имеется горизонтальная продольная составляющая $\dot{E}_r = \dot{E}_z$ (см. (2.59)). Последняя определяет составляющую $\dot{\Pi}_y$ вектора Пойнтинга, направленную в почву и характеризующую потери на нагревание последней.

Над поверхностью раздела сред $\dot{E} = \mathbf{1}_y \dot{E}_y + \mathbf{1}_z \dot{E}_z$, где $\dot{E}_y = \dot{E}_v$, $\dot{E}_z = \dot{E}_r$, $\dot{H} = \mathbf{1}_x \dot{H}_x$. В дальней зоне излучателя $\dot{H}_x = -\dot{E}_y W_0^{-1}$. На поверхности S раздела сред по (4.28) $\dot{E}_z = -W_1 \dot{H}_x$. Поэтому на S $\dot{E}_z = W_1 W_0^{-1} \dot{E}_y = \dot{E}_y / \sqrt{\epsilon_1}$, т.е. вблизи земной поверхности

$$\dot{E}_r = \dot{E}_v / \epsilon_1^{1/2} = \dot{E}_v \exp(-i \frac{1}{2} \arg \epsilon_1) / |\epsilon_1|^{1/2}, \quad |\epsilon_1| = [\epsilon_1^2 + (60\lambda\sigma_1)^2]^{1/2}.$$

Амплитуда горизонтальной составляющей вектора \dot{E} у земной поверхности в $|\epsilon_1|^{1/2}$ раз меньше амплитуды вертикальной составляющей. В диапазонах НЧ и СЧ это отличие составляет десятки раз. Поэто-

му в точке p *вблизи земной поверхности применяют приемные антенны вертикальной поляризации.*

Поскольку \dot{E}_B и \dot{E}_r сдвинуты по фазе на угол $0,5 \arg \epsilon_1$, то результирующее ЭМ поле имеет эллиптическую поляризацию. Так как $|\dot{E}_B| \gg |\dot{E}_r|$ для обычных почв, то эллипс поляризации вытянут в вертикальном направлении (рис. 12.7,б). Угол между его большой осью и осью y определяется выражением $\operatorname{tg} \psi = |\dot{E}_r|/|\dot{E}_B| = |\epsilon_1|^{-1/2}$. Параметры эллипса поляризации подробно изучены в [71]. Угол ψ определяет и угол наклона фронта волны.

В почве ($y \leq 0$) $\dot{E}_1 = 1_y \dot{E}_y^1 + 1_z \dot{E}_z^1$, $\dot{H}_1 = 1_x \dot{H}_x^1$. Из граничного условия (1.82) имеем $\dot{E}_{y1} = \dot{E}_y / \epsilon_1$ при $y = 0$, т.е. амплитуда вертикальной составляющей $|\dot{E}_{1B}|$ в почве в $|\epsilon_1|$ раз меньше амплитуды вертикальной составляющей $|\dot{E}_B|$ над почвой вблизи поверхности почвы. Из граничного условия (1.85) получаем $\dot{E}_z^1 = \dot{E}_z$ при $y = 0$, т.е. амплитуды горизонтальных составляющих над почвой и под почвой у поверхности раздела почти одинаковы. Но при $\sigma_1 \neq 0$ с ростом $|y|$ в почве и $|\dot{E}_{1r}|$, и $|\dot{E}_{1B}|$ затухают по экспоненциальному закону (глубина проникновения равна δ_1).

3. Итак, распространяющееся над почвой ЭМ поле затухает, фаза его тоже зависит от параметров почвы. Строгое решение задачи возбуждения ЭМ поля вертикальным диполем при однородном значении ϵ_1 в интегральной форме дано в 1909 г. А.Зоммерфельдом. Вид, пригодный для инженерных расчетов, этому решению придали М.В.Шулейкин и Ван дер Поль. Для неоднородных трасс решение задачи получено Е.Л.Фейнбергом [71].

Влияние почвы на ЭМ поле в инженерных расчетах учитывается с помощью множителя влияния среды, который при заданном токе в вибраторе определяется как $V(\rho) = 2w(\rho)$, где $\rho = \zeta r$ — численное расстояние, $\zeta = -i\beta(\epsilon_1 - 1)/2\epsilon_1^2$, $w(\rho) = |w(\rho)| \exp[-i\eta(\rho)]$ — функция (множитель) ослабления (по сравнению с полем над идеально проводящей плоскостью) поля. Тогда над почвой

$$\dot{E}_B(p) = \dot{E}_{0,B}(p)w(\rho), \quad (12.11)$$

где $\dot{E}_{0,B}$ определяется или выражением (12.9) или (12.10).

Для функции $w(\rho)$ получено [71] интегральное уравнение, решение которого численным методом позволило построить графики зависимости $|w(\rho)|$ и $\eta(\rho)$ при различных значениях параметра $\epsilon_1/60\lambda\sigma_1$. Для всех видов почв, кроме песка, $|\epsilon_1| \gg 1$. Поэтому $\rho \approx -i\beta r/2\epsilon_1$. Графики функции ослабления с достаточной для практики точностью аппроксимируются выражением

$$|w(\rho)| \approx (2 + 0,3|\rho|)/(2 + |\rho| + 0,6|\rho|^2). \quad (12.12)$$

Выражение (12.11) называют формулой Шулейкина-Ван дер Поля. Из (12.12) следует, что при $|\rho| \rightarrow 0$, когда $\sigma_1 \rightarrow \infty$ или $r \rightarrow 0$, $|w(\rho)| \rightarrow 1$, т.е. волна по (12.11) распространяется без затухания. Если $|\rho|$ велико, то $|w(\rho)| \approx 1/2|\rho|$, и $|\dot{E}_v|$ убывает с ростом $|\rho|$ как $1/|\rho|^2$, т.е. не по экспоненциальному закону, как в среде с тепловыми потерями, а гораздо медленнее (так же как по формуле Введенского).

Учтем, что $|\rho| \approx \pi r/|\epsilon_1|\lambda$, $r=R$. Фазовая скорость волны $v_\phi = dR/dt$. Фронт волны (12.11) определяется выражением $\omega t - \beta R + \arg F + \pi/2 + \arg I_0 - \eta(|\rho|) = \text{const}$. Дифференцируя это выражение по t , имеем $\omega - \beta dR/dt - d\eta/dR \cdot dR/dt = 0$. Отсюда получаем $v_\phi = c[1 + (1/2|\epsilon_1|)d\eta/d|\rho|]^{-1}$.

Графики зависимости $\arg w(\rho)$ от $|\rho|$ при разных значениях па-

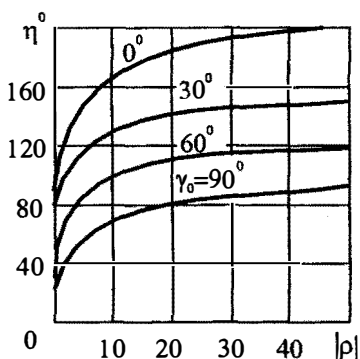


Рис. 12.8. Графики зависимости $\arg w(\rho)$ от $|\rho|$

раметра $\gamma_0 = \text{arctg}(\epsilon_1/60\lambda\sigma_1)$ изображены на рис. 12.8. С ростом r (или $|\rho|$), как видно из графиков, сначала $d\eta/d|\rho|$ уменьшается, а затем при $|\rho| > 20$ имеем $d\eta/d|\rho| \approx 0$. Поэтому v_ϕ с ростом r сначала возрастает, а затем при $|\rho| > 20$ становится равной c . Таким образом, скорость распространения радиоволн на больших расстояниях от излучателя не зависит от параметров почвы и равна скорости распространения ЭМ поля в воздухе. Это существенно для радиолокации,

радионавигации, радиогодезии. Исследования зависимости $v_{\phi}(\rho)$ для разных видов почв выполнены П.А. Рзыным.

4. Формулу (12.11) применяют при расчетах до $r \leq 7 \cdot 10^3 \cdot \lambda^{1/3}$. Ошибки вычислений при этом не превышают 10% [71].

5. В случае неоднородной трассы, когда комплексная диэлектрическая проницаемость почвы имеет скачки на существенном участке, функция ослабления представляется в интегральном виде [71]. Если на участке имеется один скачок и r_1 — длина первого участка-1 трассы с ϵ_1 , а r_2 — длина участка-2 трассы с ϵ_2 ($r = r_1 + r_2$), то обозначив через $\rho_1 = \zeta_1 r_1$, $\rho_2 = \zeta_2 r_2$ — численные расстояния первого и второго участков, при $|\rho_1| \gg 1$, $|\rho_2| \gg 1$ по [71] имеем: $w(\rho) \approx 1/2(\zeta_1 \zeta_2)^{1/2} r$, т.е. $w(\rho)$ симметрично относительно параметров ζ_1 и ζ_2 (рис. 12.9,а). Это указывает на то, что *существенные участки, примыкающие к излучателю и приемной антенне, одинаково важны.*

Рассмотрим качественно вопрос об изменении функции $w(\rho)$. Пусть на участке-1 σ_1 меньше, чем σ_2 на участке-2. При этом $|\zeta_1| > |\zeta_2|$. Тогда $|\dot{E}_B|$ в пределах участка-1 при больших $|\rho_1|$ будет меняться в соответствии с функцией ослабления $|w_1| \approx 1/2|\zeta_1|r_1$. На участке-2 при $|\zeta_2|r_2 \gg 1$ имеем $|w(\rho)| \approx 1/2(|\zeta_1| \cdot |\zeta_2|)^{1/2} r$. Но $1/|\zeta_1| < 1/(\zeta_1 \zeta_2)^{1/2} < 1/|\zeta_2|$. Поэтому при переходе на участок-2 должен

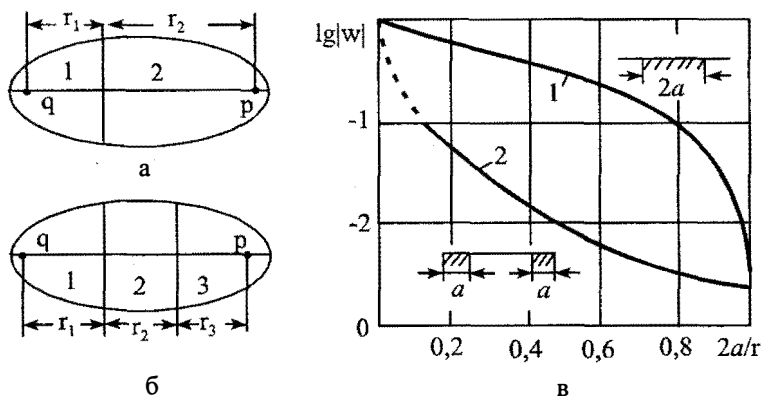


Рис. 12.9. Разнородные участки трасс и зависимость $|w|$ от заполнения трассы сухой

появиться скачок $|w(\rho)|$ вверх, т.е. напряженность поля по (12.12) должна скачком увеличиться.

Если на участке-1 $|\zeta_1| < |\zeta_2|$, то при переходе на участок-2 должен появиться скачок $|w(\rho)|$ вниз. Этот эффект наиболее четко проявляется на берегу моря, реализующего скачок диэлектрической проницаемости от ϵ_1 до ϵ_2 , если точка q находится на море, а точка p — на суше.

Пусть на существенном участке имеются два скачка параметров почвы на расстояниях $r = r_1$, $r = r_1 + r_2$, $r = r_1 + r_2 + r_3$, но $|\rho_1|, |\rho_2|, |\rho_3| \gg 1$ (рис. 12.9,б). Функция ослабления при этом $w(\rho) \approx 1/[2(\zeta_1 \zeta_3)^{1/2} \cdot r]$, т.е. определяется свойствами участков, примыкающих к излучателю и приемной антенне, и не зависит от свойств среднего участка. Это показывает, что передающая и приемная антенны должны располагаться на почвах с малыми значениями параметров ζ_1 и ζ_3 , т.е. σ_1 и ϵ_1 , σ_3 и ϵ_3 должны быть большими. Эти соображения подтверждаются [71] расчетами функции ослабления для случая, когда на трассе имеется два скачка параметров: для переходов типа море-суша-море и для переходов типа суша-море-суша (1 и 2 на рис. 12.9,в). Считалось, что морская вода — идеальный проводник, а суша такова, что при $2a/r = 1$ численное расстояние равно 100. Графики показывают, что хорошо проводящие участки, примыкающие к передающей и приемной антеннам, существенно увеличивают амплитуду напряженности электрического поля. Например, при $2a/r = 0,5$ амплитуда поля в точке p при q и p , расположенных на море, увеличивается на 30 дБ по сравнению со случаем, когда q и p расположены на суше, а участок между ними занимает море. Хорошо или плохо проводящий средний участок мало влияет на амплитуду поля.

6. При переходе границы раздела участков 1 и 2 (рис. 12.9,а) фазовая скорость волны изменяется, поверхность равных фаз возмущается. Если линия, разделяющая участки 1 и 2, не перпендикулярна линии qr , то фронт волны, пересекающий линию деления, искажается, направление распространения волны изменяется. Эти искажения могут привести к ошибкам в радионавигации, в радиопеленгаторах, использующих фазовые методы. Особое значение эти ошибки имеют для морской навигации, когда излучатель расположен на море, а точка p находится на суше вблизи береговой черты AA' (рис. 12.10). Явление изменения направления распространения волны при прохождении береговой черты называют *береговой рефракцией*.

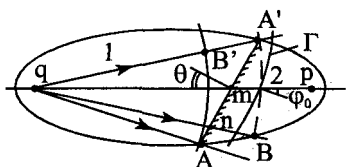


Рис. 12.10. К объяснению явления береговой рефракции

бы сферическим (изображен пунктирной линией). Но волна после точки A и в направлении точки B распространяется над сушей, на отрезке nB ее фазовая скорость равна v'_ϕ , она зависит от параметров суши (см. рис. 12.8). Волна на отрезке $B'A'$ распространяется над морем с фазовой скоростью $v_\phi > v'_\phi$. Поэтому фронт Γ волны наклоняется. Нормаль к фронту отклоняется от направления qr (от направления нормали к фронту $A'B$) на угол ϕ_0 .

Если направление на излучатель pr в точке p определяется по нормали к фронту Γ , то возникает угол *рефракционной ошибки* $\phi_0 \approx [2\pi(60\sigma_2 r_2)^{1/2}]^{-1} \operatorname{tg} \theta$ при хорошо проводящем сухопутном участке-2 (σ_2 — его проводимость, $r_2 = mr$). При сухопутном участке-2, являющемся диэлектриком, $\phi_0 \approx [2(\pi\beta\epsilon_2 r_2)^{1/2}] \operatorname{tg} \theta$ [71]. Величина угла ϕ_0 зависит от положения точки p относительно береговой черты AA' , если r_2 велико, то $\phi_0 \approx 0$. Это значит, что с увеличением r_2 волна переходит в сферическую и в точке p возмущения фронта волны отсутствуют.

Если излучатель расположен на суше, а точка p — на море, то ϕ_0 определяется приведенными выше выражениями путем замены в них r_2 на $r_1 = qm$.

В строгой постановке задача о береговой рефракции рассмотрена В.А.Фоком [57].

12.8. Поле в зоне тени

1. При расчете напряженности поля в области тени (третья модель) используются результаты строгого решения задачи дифракции поля на шаре с граничными условиями, в которых ξ_1 однородно по уг-

Причина явления состоит в том, что при распространении волны на участке-1 до точки A (если пренебречь отражением от неоднородности) фронт AB' волны является сферическим. Если бы граница AA' раздела участков отсутствовала, то фронт $A'B$ распространяющейся волны был

ловым координатам (§ 9.4). Решение задачи получено Г.Н.Ватсоном в 1918 г. для частного случая хорошо проводящей поверхности [46, 71]. Рядом авторов найдены решения для более общих граничных условий и построены асимптотические решения [46, 57, 71, 73]. В области тени точка p находится за препятствием, трасса становится закрытой, так как ее перекрывает за счет сферичности Земли сегмент высотой Δ/λ (рис. 12.2,б). Анализ асимптотического поведения решений задачи приводит к расчету вертикальной составляющей $|\dot{E}_v|$ по (12.4), где $V_m = U(x)F(y_1)F(y_2)$. Функция $U(x)$ зависит от r и ϵ_1 (r — расстояние между точками q и p по дуге окружности), $x = r/(a^2\lambda/\pi)^{1/3}$. Значения функций $F(y)$ определяются высотами подвеса антенн, $y_{1,2} = 2h_{1,2}/(a\lambda^2/\pi^2)^{1/3}$. Графики функций $U(x), F(y)$ приведены на рис. 12.11а,б. Расчет по изложенной методике выполняется, если $h_{1,2}/\lambda > 1$.

В диапазонах ОНЧ–ВЧ антенны поднять на большие по сравнению с λ высоты трудно. Они расположены у поверхности Земли, $h_{1,2}/\lambda < 1$. Поэтому $F(y_1) \approx F(y_2) \approx 1$. Для расчета напряженности поля при этом используют графики Международного Консультативного Комитета по Радио (МККР). Для примера на рис. 12.11,в приведены графики для поля над сушей, $\sigma_1 = 10^{-2}$ См/м, $\epsilon_1 = 4$ (пунктиром), и для поля над морем, $\sigma_1 = 4$ См/м, $\epsilon_1 = 80$. При этом $P_\Sigma D_\Sigma = 10^3$ Вт. Амплитуда напряженности поля с увеличением r убывает по экспоненциаль-

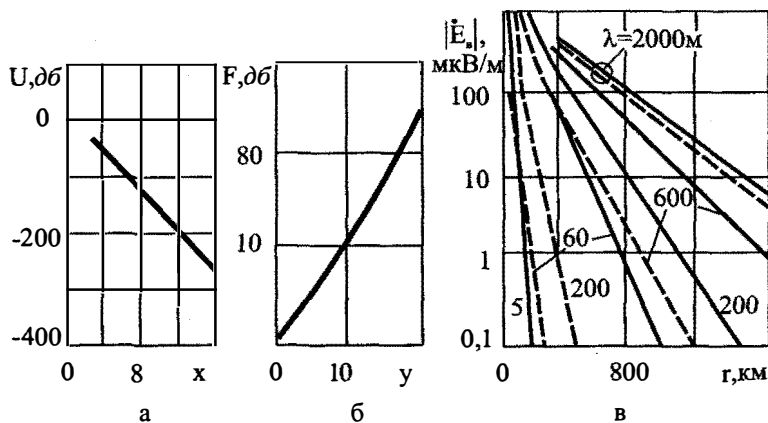


Рис. 12.11. К расчету поля земной волны в области тени

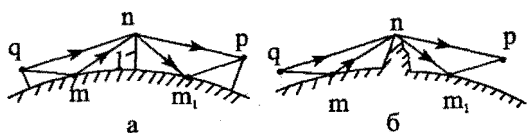


Рис. 12.12. “Усиливающие” препятствия

потери на нагревание почвы.

Рассмотренная модель не учитывает влияния атмосферы. Результаты расчетов далеки от опытных данных, поскольку поле в области тени определяется в диапазонах УВЧ–ГВЧ, в основном, влиянием тропосферы, а в диапазонах ВЧ–ОНЧ —, в основном, влиянием ионосферы. Эта модель имеет ограниченное применение.

2. Поле в области тени оказывается очень малым даже при больших мощностях излучения. Для увеличения напряженности поля может использоваться явление «усиления препятствием». Оно состоит в том, что $|\dot{E}_1(p)|$ в присутствии препятствия на трассе может оказаться больше $|\dot{E}(p)|$, но при отсутствии препятствия на той же трассе. Пусть препятствием является металлический экран (1) высоты H_0 (рис. 12.12,а). На экран падает первичное ЭМ поле (луч qn) и вторичное ЭМ поле (луч qtn). Результирующее ЭМ поле в точке p определяется интерференцией полей, приходящих от истинного источника по пути qn и затем — по путям np и nt_1p , и поля, приходящего в точку n от фиктивного источника по пути qtn , а затем — по путям np и nt_1p . Считая экран полуплоскостью, по графикам рис. 9.7, 9.11 можно рассчитать поля в точке p и вычислить результат их интерференции. Поле в точке p зависит от h_2/h_1 и от $H_0/\sqrt{\lambda r}$ и носит колебательный характер при изменении h_1/H_0 или h_2/H_0 . «Коэффициент усиления» g препятствием определяется как $|\dot{E}_1(p)|/|\dot{E}(p)|$. Например, применяя для расчета поля вторую модель, при $qn = np = 50$ км, $\lambda = 1$ м, $h_1 = h_2 = 10$ м, $H_0 = 1250$ м получаем $g = 13.5$. В случае шара $|\dot{E}(p)|$ — малая величина в области тени и g может достигать больших величин ($g = 60 - 80$ дБ), но между точками q и n и n и p должна существовать прямая видимость. Формулы

ному закону — быстрее, чем в случае второй модели. С увеличением λ увеличивается $|\dot{E}_B|$, так как уменьшаются Δ/λ и

для вычисления g приведены в [71]. При расчетах гора или холм аппроксимируется клином или полуплоскостью (рис. 12.12,б).

Расчет ЭМ поля в условиях города имеет большое практическое значение. Город в моделях часто рассматривают как пересеченную местность. Строго рассчитать $|\dot{E}|$ в этих условиях не удастся. Из опыта следует, что $|\dot{E}|$ в городе в ОВЧ–СВЧ диапазонах меньше в 3–5 раз, чем на открытой местности. В случае прямой видимости между точками q и p оценка $|\dot{E}|$ проводится по формуле Введенского, в которой высоты антенн отсчитываются от среднего уровня крыш. Разработан ряд компьютерных программ для приближенного расчета ЭМ поля в разных условиях города.

ЗАДАЧИ

1. Радиолиния расположена в свободном пространстве и работает на частоте, равной 3 ГГц. Чувствительность радиоприемного устройства равна 10^{-14} Вт, а коэффициенты направленного действия (КНД) радиопередающей и приемной антенн равны 10^3 . Найти необходимую мощность излучения, если $R_{qp} = 10^3$ км.

2. Рассчитать напряженность поля на расстоянии 3,6 км от передающей антенны, подвешенной на высоте $h_t = 10$ м, если приемная антенна находится на высоте, равной 4 м, распространение поля происходит над морем, $\lambda = 30$ см, мощность излучения равна 10 Вт, а КНД передающей антенны равен 3,6. Поляризация поля — горизонтальная. (Влияние тропосферы не учитывать). Вычислить мощность на входе радиоприемного устройства, если КНД приемной антенны равен 9.

3. Вертикальная передающая антенна расположена у земли. Измеренный ток в пучности равен 10 А. Действующая длина равна 100 м на $\lambda = 500$ м. Распространение поля происходит над влажной почвой. Найти вертикально поляризованную составляющую электрического поля, если $R_{qp} = 100$ км.

13. ТРОПОСФЕРНАЯ ВОЛНА

13.1. Диэлектрическая проницаемость и показатель преломления тропосферы

1. Чтобы учесть влияние тропосферы на распространение земной волны и рассчитать напряженность поля тропосферной волны, необходимо определить электродинамические параметры и построить математическую модель тропосферы. Деление атмосферы на нейтросферу, состоящую из тропосферы и стратосферы, и на ионосферу показано на рис. 13.1,а, где h — высота над уровнем моря. Границы между ними по высоте выражены не резко и зависят от времени года, времени суток, географического положения точки p .

Газ в нейтросфере по объему состоит из примерно 78 % азота, 21 % молекулярного кислорода, 0,93 % аргона и очень малых количеств неона, гелия, криптона, ксенона, водорода, метана, углекислого газа, озона, закиси азота. В тропосфере имеется пыль и водяной пар. Содержание последнего (по объему (0-4) %) убывает с ростом h и зависит от метеорологических условий.

Плотность атмосферы N_m равна числу молекул в 1 см^3 на данной высоте h (рис. 13.1,а) и связана с давлением p' (в паскалях) и абсолютной температурой T' законом $N_m = p' / k_B T'$. В однородной атмосфере давление зависит от высоты по барометрической формуле: $p' = p_0 \exp(-Mgh/mT')$, где p_0 — давление при $h=0$, M — масса грамм-молекулы газа, g — ускорение силы тяжести, m — универсальная газовая постоянная. Температура воздуха меняется с высотой (рис. 13.1,а). В тропосфере воздух нагревается от поверхности Земли и обычно температура убывает с ростом h на $(5-6)^\circ \text{K}$ на км. На небольших интервалах высот может возникнуть местное возрастание температуры — температурная инверсия. Увеличение температуры на высотах около 60 км объясняется поглощением озоном ультрафиолетового излучения Солнца.

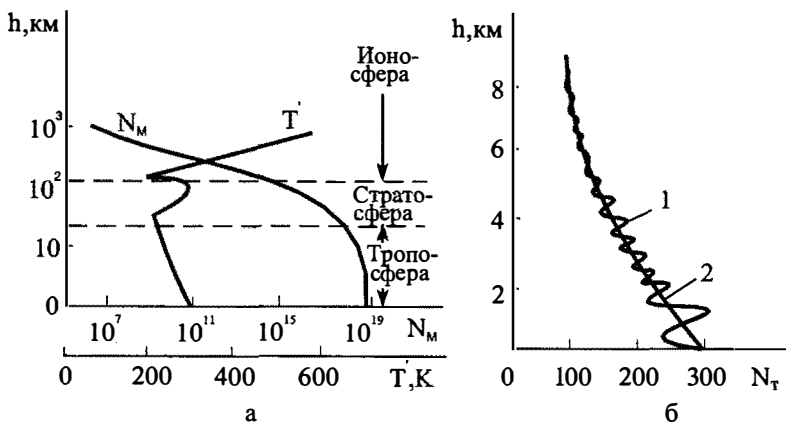


Рис. 13.1. Изменение параметров атмосферы с высотой

Начиная с высот около 80 км, температура возрастает из-за поглощения солнечного излучения и достигает $[(2-3) \cdot 10^3]^0$ К при $h > 500$ км.

Абсолютной влажностью тропосферы называется парциальное давление водяных паров p_n ; относительная влажность s' выражается в процентах $s' = p_n \cdot 100 / e_s$, где e_s — давление водяных паров, насыщающих пространство при заданной температуре, — определяется по специальным таблицам. Давление, температура, влажность тропосферы зависят от метеорологических условий.

При построении математических моделей радиолоний используется понятие «нормальной (стандартной) тропосферы». Параметры последней соответствуют среднему состоянию тропосферы со следующими свойствами: при $h = 0$ давление $p_0 = 0,1013$ МПа, $T' = 288^0$ К, $s' = 60\%$; с увеличением h на 1 км давление уменьшается на 1,2 кПа, температура — на 5,5⁰ К. Верхней границей нормальной тропосферы считают высоту $h = 11$ км.

В тропосфере непрерывно происходят случайные изменения, вызываемые воздушными потоками в вертикальном и горизонтальном направлениях. Движение воздуха носит вихревой, турбулентный характер. При этом скорости перемещения воздуха в локальных областях отличаются от средней. Поэтому и плотности воздуха в этих областях отличаются от средней, причем они флуктуируют.

В стратосфере плотность газа значительно меньше, чем в тропосфере. Поэтому стратосфера мало влияет на распространение радиоволн и ниже рассматриваются модели для изучения влияния только тропосферы.

2. Относительные магнитная и диэлектрическая проницаемости тропосферы: $\mu = 1$, $\varepsilon = 1 + k_s$, $k_s = k_r + k_n$, где k_r, k_n — диэлектрические восприимчивости газа и пара. Молекулы газа не имеют начального дипольного момента, их поляризация обусловлена только смещением зарядов в молекуле относительно равновесного положения. Поэтому $k_r = k_{r1} N_m = k_{r1} p_r / k_B T'$, где p_r — парциальное давление газа. Молекула воды (пара) обладает дипольным моментом. Поэтому вектор электрической поляризации ее обусловлен не только смещением зарядов в молекуле, но и поворотом последней в направлении вектора \mathbf{E} . С повышением температуры пара увеличивается скорость движения молекул, что затрудняет ориентацию молекул в направлении вектора \mathbf{E} и делает k_n зависимым от температуры воздуха: $k_n = (k_{r1} + k_{n1} / T') N_{mp}$, где N_{mp} — плотность пара в тропосфере. Значения k_{r1}, k_{n1} определяются экспериментально. Учитывая их численные значения, при $p' = p_r + p_n$ получаем

$$\varepsilon = 1 + \frac{1,552 \cdot 10^{-6}}{T'} \left(p' + \frac{4810 p_n}{T'} \right),$$

$$n = \varepsilon^{1/2} \approx 1 + \frac{0,776}{T'} \left(p' + \frac{4810 p_n}{T'} \right) \cdot 10^{-6}. \quad (13.1)$$

Считается, что n не зависит от частоты для $\lambda > 1$ см. Значение n мало отличается от 1. Поэтому при расчетах используют величину

ну $N_T = (n-1) \cdot 10^6$ — *приведенный коэффициент преломления тропосферы*. Численные его значения называют N — *единицами*. У поверхности Земли $N_T = N_0 = (260-460) N$ — *единиц*.

В диапазоне КВЧ сказываются потери (например, в парах воды), диэлектрическая проницаемость становится комплексной, а n зависит от частоты.

3. Непосредственное измерение коэффициента преломления производится рефрактометром, расположенном на летательном аппарате. Способ измерения основан на сравнении собственных частот двух резонаторов, один из которых герметизирован, а другой продувается воздухом. При одинаковых резонаторах, но разных заполняющих их средах отношение собственных частот равно n , а разность собственных частот пропорциональна N_T . График (1) зависимости от высоты измеренных значений N_T приведен на рис. 13.1,б.

4. При расчете радиолинии, протяженность которой значительно превышает расстояние прямой видимости (для расчета земной волны) применяется упрощенная модель тропосферы, в которой учитывается только *средний профиль изменения $N_T(h)$* (график (2) на рис. 13.1,б). Средний профиль изменения $N_T(h)$ для модели *нормальной тропосферы* аппроксимируется экспоненциальным законом $N_T = N_0 \exp(-b_0 h)$, где $b_0 = (0,1 \div 0,14) \text{ км}^{-1}$. При $0 \leq h < 3 \text{ км}$ $N_T \approx N_0 + \Gamma h$, где $\Gamma = dN_T / dh$ при $h = 0$. Для нормальной тропосферы $\Gamma = -40 \text{ км}^{-1}$; при $h = 10 \text{ км}$ $N_T = 93$ и постоянно в течение года.

При расчете радиолиний большой протяженности (использующих тропосферную волну) применяется более точная модель тропосферы, в которой зависимость $N_T(h)$ определяется: а) средним профилем изменения N_T с высотой, б) слоистыми неоднородностями, в) турбулентными флуктуациями.

Средний профиль N_T определяется так же, как выше. Слоистые неоднородности (слои) определяются как отклонения N_T от среднего профиля. Толщины слоев (по высоте) меняются от единиц до сотен метров, а протяженности в горизонтальном направлении — от сотен метров до сотен километров. Отклонение N_T в слое от среднего значения, называемое *интенсивностью слоя*, для $0 \leq h \leq 1 \text{ км}$ может составлять до $20N$ -единиц, а для высот $4 \text{ км} < h < 5 \text{ км}$ — до $2N$ -единиц. Слои перемещаются со скоростью ветра.

Обусловленные турбулентным движением воздуха флуктуации N_T определяются средним квадратическим отклонением N_T от среднего значения — интенсивностью $\Delta \bar{N}^2 = 10^{-3} + 10^{-4}$ — и масштабом неоднородности $L_0 = (0,01 + 500)$ м. Тропосфера заполнена мелко-масштабными неоднородностями, интенсивность их почти не зависит от h , а L_0 растет с увеличением h .

13.2. Рефракция электромагнитного поля в тропосфере

1. Рассмотрим модель тропосферы, у которой показатель преломления зависит *только* от высоты: $n = n(h)$. Джоулевы потери не учитываем. Тогда в тропосфере как неоднородной среде происходит *рефракция распространяющегося ЭМ поля*.

Среда имеет центральную симметрию. Используем приближение геометрической оптики. Все лучи являются плоскими кривыми, лежащими в плоскости падения (см. § 11.6). Радиус кривизны луча в тропосфере определяется по (11.78).

Учтем, что $R = a + h$. Тогда $dn/dR = dn/dh$. Так как $N_T = (n-1) \cdot 10^6$, то $n = 1 + N_T \cdot 10^{-6}$. Если средний показатель преломления тропосферы аппроксимируется линейным законом, то $n = 1 + N_0 \cdot 10^{-6} + (\Gamma \cdot h) \cdot 10^{-6}$. При этом $dn/dh = \Gamma \cdot 10^{-6}$, $n^{-1} \cdot dn/dh \approx \Gamma \cdot 10^{-6}$. Радиус кривизны луча находим по (11.78):

$$\rho_0 \approx \frac{10^6}{\Gamma \cos(\vartheta \cdot \hat{\mathbf{1}}_R)} = -\frac{10^6}{\sin \vartheta_1} \Gamma^{-1}, \quad (13.2)$$

где ϑ_1 — угол падения волны на нижнюю границу тропосферы (рис. 13.2, а).

При среднем профиле изменения $N_T(h)$, аппроксимируемом экспоненциальным законом, имеем $n(h) = 1 + N_0 \cdot 10^{-6} \cdot \exp(-b_0 h)$, $dn/dh = -N_0 b_0 \cdot 10^{-6} \exp(-b_0 h)$. При $h = 0$ получаем $dn/dh = -N_0 b_0 \cdot 10^{-6}$, $n^{-1} \cdot dn/dh \approx -N_0 b_0 \cdot 10^{-6}$. Поэтому

$$\rho_0 \approx \frac{10^6}{N_0 b_0 \sin \vartheta_1}.$$

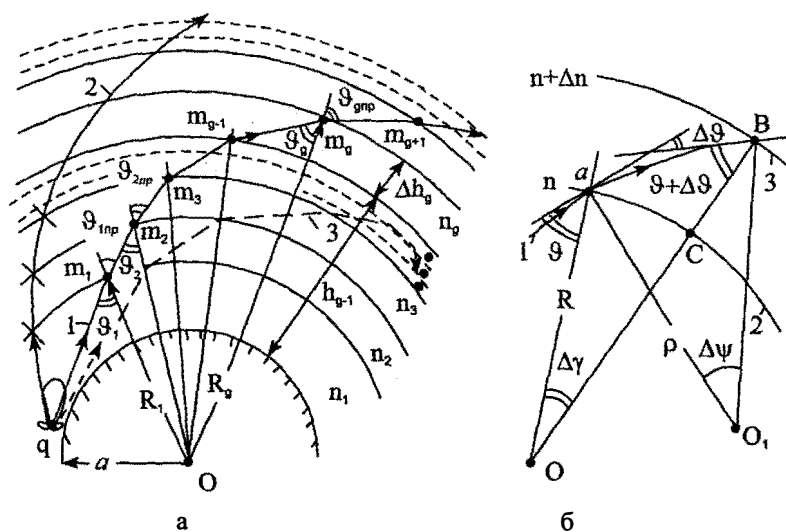


Рис. 13.2. Траектории лучей в тропосфере

Для земной волны, распространяющейся под влиянием тропосферы, обычно выбирают угол $\vartheta_1 \approx \pi/2$ (пологие лучи). Тогда при линейном $n(h)$ имеем $\rho_0 \approx -10^{-6} \Gamma^{-1}$. В нормальной тропосфере $\rho_0 \approx 25 \cdot 10^3$ км.

2. Чтобы пояснить явление рефракции, разделим тропосферу на G сферических слоев толщины Δh_g ($g=1,2,3,\dots,G$) каждый (рис. 13.2.a). Слой номер g имеет показатель преломления $n_g = n_g(a+h_g)$, $a+h_g = R_g$. Источник поля находится в точке q . Границы, разделяющие слои, имеют радиусы кривизны $R_g \gg \lambda_0$, поэтому их можно считать локально плоскими в точках m_g падения поля и применить законы Снеллиуса (см. § 11.6).

Пусть плоская волна под углом ϑ_1 падает (точка m_1) на границу раздела слоев, где происходит ее преломление (и отражение). На границе первого слоя $\sin \vartheta_{1np} = (n_1 \sin \vartheta_1) / n_2$. Пусть в первом случае $n_2 = n_1 + \Delta n_1$. Если Δn_1 положительно, то $\vartheta_{1np} < \vartheta_1$, т.е. угол преломления меньше угла падения. Аналогично, для любого слоя при возрастающем с увеличением h значении n ($n_{g+1} = n_g + \Delta n_g$, Δn_g — положительно) из выражения $\sin \vartheta_{np} = (n_g \sin \vartheta_g) / n_{g+1}$ следует, что угол ϑ_{gnp} уменьшается, направление распространения поля приближается к нормальям к слоям. Луч уходит из тропосферы. Если он не отразится от ионосферы, то ЭМ поле уносит энергию в космическое пространство.

Пусть во втором случае n уменьшается с возрастанием h . Тогда $\Delta n_g < 0$. При преломлении на каждом слое угол ϑ_{gnp} увеличивается (луч-1). Но $|\Delta n_g|$ могут быть такими, что возрастание ϑ_{gnp} мало и луч (при данном ϑ_1) уходит из тропосферы (луч-2). Если $|\Delta n_g|$ велико, то угол ϑ_{gnp} быстро возрастает от слоя к слою и (при заданном ϑ_1) на некоторой высоте h_b станет равным $\pi/2$. Тогда луч направляется к земной поверхности (луч-3).

3. Траекторию луча-1 определим по закону преломления. Для слоя номер g имеем $n_g \sin \vartheta_g = n_{g+1} \sin \vartheta_{gnp}$. Но по теореме синусов $R_{g+1} / \sin(\pi - \vartheta_{gnp}) = R_g / \sin \vartheta_{g+1}$. Поэтому из предыдущего выражения имеем $n_g R_g \sin \vartheta_g = n_{g+1} R_{g+1} \sin \vartheta_{g+1}$. Этот результат повторяет вывод, сделанный в § 11.6, п. 3: вдоль каждого луча выполняется условие — произведение $n_g R_g \sin \vartheta_g$ остается постоянным, т.е. при $\Delta h_g \rightarrow 0$

$$Rn(R) \sin \vartheta = n_0 a \sin \vartheta_0, \quad (13.3)$$

где $R = a + h$, n_0, ϑ_0 — значения $n(h), \vartheta$ при $h = 0$.

Таким образом, если известна функция $n(h)$ и угол падения ϑ в начале траектории, то $\vartheta(h)$ вычисляется в каждой точке. Так, в частности, можно найти условия, при которых $\vartheta(h) = \pi/2$ и луч приобретает горизонтальное направление, после чего из-за симметрии задачи он будет направлен к земле.

Если $\Delta h_g \rightarrow 0$, то ломаная траектория $qm_1 m_2 \dots m_g \dots m_G$ становится плавной. Радиус ρ кривизны траектории определим, используя рис. 13.2,б, где сферические поверхности 2 и 3 с центром O в центре земного шара проведены на расстоянии Δh по высоте, на этом расстоянии коэффициент n монотонно меняется на величину Δn . Волна падает на нижнюю поверхность 2 под углом ϑ , распространяется по искривленной траектории и падает на верхнюю сферу 3 под углом $\vartheta + \Delta \vartheta$. Длина отрезка кривой $aB = \Delta l = aC / \sin(\vartheta + \Delta \vartheta) = R \Delta \gamma / \sin(\vartheta + \Delta \vartheta) \approx R \Delta \gamma / \sin \vartheta$. Радиус кривизны кривой aB в точке a равен $\rho = \lim \Delta l / \Delta \psi$ при $\Delta \psi \rightarrow 0$, где $\Delta \psi$ — угол смежности. Считаем точку O_1 центром кривизны. Так как $\Delta \psi = \vartheta_{np} - \vartheta + \Delta \vartheta = \Delta \gamma + \Delta \vartheta$, то $\rho = \lim R \Delta \gamma / (\Delta \gamma + \Delta \vartheta) \sin \vartheta = \lim R / (1 + \Delta \vartheta / \Delta \gamma) \cdot \sin \vartheta$. При $\Delta \gamma \rightarrow 0$ имеем $\rho = R / (1 + d\vartheta / d\gamma) \sin \vartheta$. Чтобы найти $d\vartheta / d\gamma$, продифференцируем (13.3) по γ . Получаем

$$d(Rn \sin \vartheta) / d\gamma = R n \cos \vartheta d\vartheta / d\gamma + (R dn / d\gamma + n dR / d\gamma) \sin \vartheta = 0. \quad (13.4)$$

Поскольку $aC = R \Delta \gamma = \Delta h \operatorname{tg}(\vartheta + \Delta \vartheta) \approx \Delta h \operatorname{tg} \vartheta$, то при $\Delta h \rightarrow 0$ $\operatorname{tg} \vartheta = R \cdot d\gamma / dh$. Кроме того, $dR / dh = 1$. Поэтому из (13.4) $d\vartheta / d\gamma = -\operatorname{tg} \vartheta (dn / n d\gamma + dR / R d\gamma) = -\left(1 + R \frac{dn}{ndh}\right)$. Тогда, обозначая $b = dn / dh$, имеем

$$\rho = -n(b \sin \vartheta)^{-1}$$

4. При инженерном методе учета влияния тропосферы на распространение земной волны искривленную траекторию спрямляют, ис-

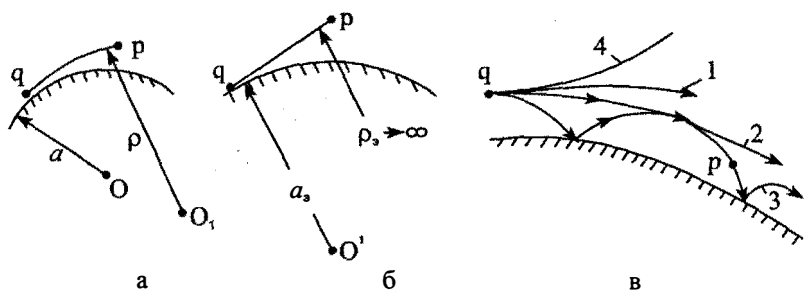


Рис. 13.3. К определению a_3 и различные виды тропосферной рефракции

пользуя понятие эквивалентного радиуса Земли [60, 74]. Искривленную траекторию в неоднородной тропосфере над землей (рис. 13.3,а) заменяют прямолинейной траекторией луча в однородной среде над Земным шаром с эквивалентным радиусом a_3 (рис. 13.3,б). Эту модель используют при линейном законе изменения $n(h) = n_0 + bh$. Отсчитывая высоту от значения h_1 , имеем: $h = h_1 + h'$, где h' — переменная. Из (13.3) при этом имеем

$$(a + h_1 + h')(n_0 + b(h_1 + h')) \sin \vartheta = (a + h_1)(n_0 + bh_1) \sin \vartheta_1.$$

Разделив равенство на $(a + h_1)(n_0 + bh_1)$, перемножив содержимое скобок слева, считая, что $a + h_1 \approx a$ в знаменателе и пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, имеем

$$[1 + h'(1/a + b)] \sin \vartheta \approx \sin \vartheta_1. \quad (13.5)$$

Если тропосфера над шаром с радиусом a_3 однородна и $n(h) = n_0$, то при $h = h_1 + h'$ из (13.3) имеем

$$(a_3 + h_1 + h')n_0 \sin \vartheta = (a_3 + h_1)n_0 \sin \vartheta_1,$$

или $[1 + h'/(a_3 + h_1)] \sin \vartheta = \sin \vartheta_1$. Если $(a_3 + h_1)^{-1} \approx a_3^{-1}$, то $(1 + h'/a_3) \sin \vartheta \approx \sin \vartheta_1$. Сравнивая левые части этого выражения и (13.5), имеем $1 + h'(1/a + b) \approx 1 + h'/a_3$, откуда получаем эквивалентный радиус Земного шара

$$a_3 \approx a(1 + ab)^{-1} = a(1 + a \cdot dN/dh \cdot 10^{-6})^{-1}. \quad (13.6)$$

В этой модели прямолинейный луч проходит над Землей эквивалентного радиуса на той же высоте, что и криволинейный луч над реальной Землей. Для нормальной тропосферы $K = a_3/a = 4/3$, при этом рефракция называется нормальной тропосферной рефракцией.

5. Влияние тропосферы на поле земной волны необходимо учитывать для второй и третьей моделей, особенно в области тени и полутени, где существенно влияние кривизны Земли. Поскольку над эквивалентным шаром распространение волны происходит по прямолинейной траектории, то справедливы все расчетные выражения, полученные на основе интерференционной формулы. В расчетных выражениях a заменяется на a_3 . При нормальной рефракции это приводит к увеличению на 15% расстояния прямой видимости, приведенные высоты $h'_{1,2}$ увеличиваются, следовательно, $|\dot{E}_m(p)|$ возрастает; в зоне тени и полутени это тоже приводит к увеличению $|\dot{E}_m(p)|$.

6. Различают положительную и отрицательную тропосферные рефракции. При положительной рефракции $b < 0$, n убывает с увеличением h и траектория луча обращена выпуклостью вверх ($\rho > 0$). При этом выделяют три частных случая: а) случай нормальной рефракции, при котором $b = -4 \cdot 10^{-5} \text{ км}^{-1}$, $\rho = 25 \cdot 10^3 \text{ км}$, $a_3 = 4a/3$ (1 на рис. 13.3,б); за счет влияния тропосферы $|\dot{E}_m(p)|$ возрастает; б) случай критической рефракции, при котором $b = -1/a = 1,57 \cdot 10^{-6} \text{ км}^{-1}$, $\rho = a$, $a_3 \rightarrow \infty$; при этом эквивалентная земная поверхность становится плоской и луч-2 параллелен этой поверхности; в) случай сверхрефракции, при котором $b < -a^{-1}$ и $\rho < a$, $a_3 < 0$; происходит полное внутреннее отражение волны в тропосфере, луч-3 возвращается к земной поверхности.

При отрицательной рефракции $b > 0$ и условно можно считать, что $\rho < 0$, $a_3 < a$ (луч-4). При этом за счет влияния тропосферы $|\dot{E}_m(p)|$ уменьшается.

В (13.6) dN/dh зависит от метеорологических условий. Поэтому a_3 зависит от этих условий и изменяется с их изменением. Таким образом, $|\dot{E}_m(p)|$ зависит от метеорологических условий. Кроме того, угол θ прихода волны тоже зависит от метеорологических условий.

7. Явление сверхрефракции обязано резкому уменьшению $n(h)$ при увеличении h . Последнее может происходить при температурной инверсии, появляющейся как вблизи земной поверхности, так и на высотах $h = (2 + 3) \text{ км}$. Температурная инверсия может возникать над сушей после захода Солнца, когда воздух вблизи почвы быстро охлаждается.

ется, а над морем — при движении с берега теплого сухого воздуха. Температурные инверсии — нерегулярные метеорологические явления.

В условиях сверхрефракции земная волна распространяется между земной поверхностью и тропосферой аналогично распространению волны в волноводе, образованном стенкой диэлектрического волновода (сверху) и полупроводящей поверхностью Земли (снизу). Для тропосферного волновода существует, как и в диэлектрическом волноводе, критическая длина волны $\lambda_{кр} = 8 \cdot 10^{-4} h_b^{3/2}$. Высота h_b , на которой происходит изгиб траектории луча и он направляется в сторону поверхности Земли, обычно достигает нескольких десятков метров. Поэтому в условиях тропосферного волновода могут распространяться только поля сантиметрового и дециметрового диапазонов. Точки q и p должны при этом находиться в тропосферном волноводе. Основывать работу радиолиний большой протяженности на явлении тропосферного волновода трудно из-за нерегулярности явления. Однако, это явление может быть причиной существенных помех радиолиниям, разнесенным на большие расстояния и имеющим близкие частоты. Кроме того, явление тропосферного волновода может ограничить работу радиолокационных станций обнаружения летательных аппаратов, так как при высоте последних, большей h_b , они не могут быть обнаружены.

8. Пример. Решить задачу § 12.7, п.2, но с учетом влияния тропосферы: точки q и p находятся в нормальной тропосфере.

Считаем, что распространение волны происходит по прямолинейной траектории над Землей эквивалентного радиуса a_3 . С учетом тропосферы $R_{03} = K^{1/2} R_0$. Для нормальной тропосферы $K = 4/3$. Поэтому $R_{03} = 1,15 \cdot 26,2 = 30,3$ км. Отношение $R/R_0 = 0,66$. Имеем вторую модель. Эквивалентный радиус Земли $a_3 = Ka$ и с учетом влияния тропосферы $\Delta h_{1,2,3} = \Delta h_{1,2} / K$; $\Delta h_{1,3} = 8,43$ м, $\Delta h_{2,3} = 5,39$ м. Поэтому $h'_1 = 6,57$ м, $h'_2 = 6,61$ м. Условия применимости интерференционных формул выполняются. Условия применимости формулы Введенского выполняются: $|V| = 4\pi h'_3 h'_2 / \lambda r = 0,227$ и $|\vec{E}(p)| = 482$ мкВ/м, $P_{пр} = 7,06 \cdot 10^{-13}$ Вт.

За счет рефракции амплитуда напряженности поля в точке p и мощность на входе радиоприемного устройства увеличились.

13.3. Дальнее тропосферное распространение радиоволн

1. Модуль множителя влияния среды $|V(p)|$ земной волны в области тени мал, хотя из-за нормальной рефракции он и повышается

на 15-20 %. Однако, опыт показал, что на расстояниях, превышающих расстояние прямой видимости, в диапазонах метровых и более коротких волн амплитуда напряженности поля на десятки и даже сотни децибел больше расчетного значения. Высокие по сравнению с дифракционной теорией уровни $|\dot{\mathbf{E}}|$ объясняются, главным образом, рассеянием ЭМ волны, во-первых, стабильными слоистыми неоднородностями тропосферы, и, во-вторых, мелкомасштабными неоднородностями турбулентного происхождения (§ 13.1, п. 4). В результате появляется поле рассеяния неоднородностей тропосферы — *тропосферная волна*. Явление называют *дальним тропосферным распространением радиоволн (ДТР)*.

2. Пусть точка p находится в области тени (рис. 13.4,а). В элементе объема ΔV , выделенном вокруг точки Q , относительная диэлектрическая проницаемость отличается от среднего значения на величину $\Delta\epsilon$. За счет турбулентного движения воздуха $\Delta\epsilon$ имеет порядок 10^{-6} . Вектор $\dot{\mathbf{E}}^n(Q)$ первичного поля, возбуждаемого излучателем, расположенным в точке q , является поперечным: $\dot{\mathbf{E}}^n(Q) = \mathbf{1}_\zeta \dot{E}^n(Q)$, где $\mathbf{1}_\zeta$ — орт, $\dot{E}^n(Q)$ определяется по (12.2), где $R = R_{qQ} = R_1$. Среда в элементе объема ΔV под действием падающего поля поляризуется, в ней появляется вторичный ток электрической поляризации с плотностью $\mathbf{j}^{3,n}$, который возбуждает вторичное (рассеянное) поле с векторами напряженностей $\dot{\mathbf{E}}^B, \dot{\mathbf{H}}^B$. Для полного поля $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^n + \dot{\mathbf{E}}^B$, $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}^n + \dot{\mathbf{H}}^B$. Вектор электрической поляризации в изотропной среде (см. § 1.2) $\Delta\mathbf{P} = \Delta\epsilon\epsilon_0\dot{\mathbf{E}} \approx \Delta\epsilon\epsilon_0\dot{\mathbf{E}}^n$, так как из-за малости $\Delta\epsilon$ в первом приближении считаем, что $|\dot{\mathbf{E}}^B| \ll |\dot{\mathbf{E}}^n|$. При этом по (1.43) $\mathbf{j}^{3,n} = \partial\Delta\mathbf{P}/\partial t$. Учтем, что частота флуктуаций $\Delta\epsilon$ мала по сравнению с частотой ω . Тогда

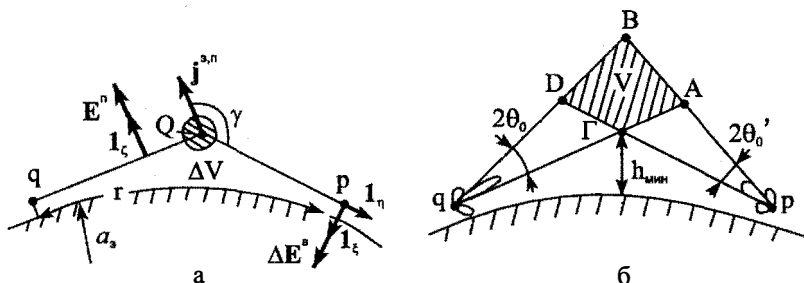


Рис. 13.4. К определению поля рассеяния при ДТР

$$\mathbf{j}^{3,n} \approx i\omega\Delta\epsilon\epsilon_0\mathbf{E}^n = \mathbf{1}_\zeta \dot{j}_\zeta^{3,n}, \text{ где } \dot{j}_\zeta^{3,n} \approx i\omega\epsilon_0\Delta\epsilon\dot{E}^n(Q).$$

Рассматривая элемент объема ΔV с плотностью тока $\mathbf{j}^{3,n}$ как «электрический момент» $\mathbf{j}^{3,n} \Delta V$ элементарного вибратора, по (2.40) в дальней зоне на расстоянии $R_2 = R_{Qp}$ в точке p имеем

$$\Delta\dot{E}^n(p) = \mathbf{1}_\zeta \Delta\dot{E}^n, \quad \dot{E}^n(p) = \frac{i\beta \dot{j}_\zeta^{3,n} \Delta V W}{4\pi} \sin \gamma \frac{e^{-ikR_2}}{R_2}, \quad (13.7)$$

где $\gamma = (\mathbf{1}_\zeta, \mathbf{1}_p)$. Учитывая (12.2), имеем

$$\Delta E^n(p) \approx -\frac{\Delta\epsilon\beta^2 \sqrt{60P_\Sigma D_\Sigma} \Delta V}{4\pi} |F(\theta, \varphi)| \sin \gamma \frac{\exp[-i\beta(R_1 + R_2) + i\Phi]}{R_1 R_2}.$$

Пусть $2\theta_0, 2\varphi_0$ и $2\theta'_0, 2\varphi'_0$ — ширины диаграмм направленности излучателя и приемной антенны в главных плоскостях (рис. 13.4, б). Тогда первичное поле воздействует только на часть тропосферы, попадающую в телесный угол $2\theta_0 \times 2\varphi_0$. Приемная антенна принимает рассеянное поле только из телесного угла $2\theta'_0 \times 2\varphi'_0$. Таким образом, в создании поля на входе приемной антенны участвует только рассеивающий объем V , ограниченный линиями qA, qB и Bp, Dp . Высота расположения объема обычно составляет $(0,6 \div 5)$ км ($h_{\text{мин}} \approx r^2 / 8a_3$) при $r = 200 - 600$ км. Объем V вытянут вдоль трассы, угол $\gamma \approx (91,3 + 94)^\circ$. Поле, рассеянное объемом V , получаем, считая, что $\Delta V \rightarrow 0$ и интегрируя (13.7) по объему V :

$$E^n(p) \approx -\frac{\beta^2 \sqrt{60P_\Sigma D_\Sigma}}{4\pi} \int_V \Delta\epsilon(Q) \frac{\exp[-i\beta(R_1 + R_2) + i\Phi]}{R_1 R_2} \times \sin \gamma |F(\theta, \varphi)| dV. \quad (13.8)$$

В радиолиниях, использующих ДТР, применяются передатчики большой мощности ($P_\Sigma = 10 - 100$ кВт), антенны, имеющие большие эффективные площади, такие, что $D_\Sigma, D_{\text{пр}}$ равны (50-60) дБ (до 40 м в диаметре), на входе приемников устанавливают малошумящие параметрические усилители, линии работают на частотах 300+5000 МГц. Радиолинии ДТР используют там, где нельзя или невыгодно устанавливать радиорелейные линии: в оборонных объектах, на малонаселенных территориях, через проливы и др.

3. В (13.8) необходимо интегрировать по слоям, где меняется $\Delta\epsilon(Q)$. При этом тропосферная волна в точке p становится «многолучевой». Значение $\dot{E}^B(p)$ зависит от степени неоднородности $\Delta\epsilon(Q)$, меняющейся в пространстве и во времени случайным образом. Расстояния R_{qQ} и R_{Qp} тоже меняются случайным образом. Это приводит к случайному изменению разности фаз интерферирующих полей $\Delta E^B(p)$. Поэтому $|\dot{E}^B(p)|$ — случайная величина и поле \dot{E}^B, \dot{H}^B подвержено быстрым замираниям. Амплитуды $|\Delta \dot{E}^B(Q)|$ при слабонаправленных антеннах приближенно можно считать одинаковыми для элементов $\Delta V(Q)$ объема V , фазы же их — случайные величины, плотность вероятности их равномерно распределена в интервале от 0 до 360° . При этом $|\dot{E}^B(p)|$ в (13.8) распределена по закону Релея (§ 12.3, п. 2). Интервал пространственной корреляции быстрых замираний в направлении «вдоль трассы» значительно больше, чем в перпендикулярном направлении. Поэтому для борьбы с замираниями применяют *разнесенный прием* на 2 или 4 антенны, отстоящие на $(70+100)\lambda$ друг от друга по фронту волны; принятые сигналы детектируют, а затем суммируют. В случае разнесения по частоте относительный частотный разнос составляет $\Delta f / f \approx (2+5) \cdot 10^{-3}$.

Случайные изменения метеорологических условий приводят к медленным замираниям.

Характерным для радиолиний ДТР является наличие амплитудных искажений сигнала. Рассмотрим причину их возникновения. Пусть точка $p \in S_{\text{пр}}$, где $S_{\text{пр}}$ — эффективная площадь приемной антенны. Для упрощения считаем, что поле в точке p является результатом интерференции только двух лучей от элементов ΔV_1 и ΔV_2 , расположенных у точек В и Г. Длины путей лучей равны qBp и $qГp$. Сдвиг фаз полей, возбуждаемых моментами $j^{3,n}\Delta V_1$ и $j^{3,n}\Delta V_2$, за счет разности $\Delta R = qBp - qГp$ хода лучей до точки p на частоте f равен $\Delta\psi = 2\pi f \Delta R / v_\phi$, а на частоте $f + F_n$ имеем $\Delta\psi_n = 2\pi(f + F_n)\Delta R / v_\phi$. На каждой частоте передаваемого спектра частот возникает своя разность фаз $\Delta\psi$. За счет интерференции суммарное поле на этих частотах может быть равно нулю, а может удвоиться. Поэтому сигнал искажается. Так как $\Delta\epsilon$ флуктуирует, то $\Delta\psi$ флуктуирует и искажения меняются

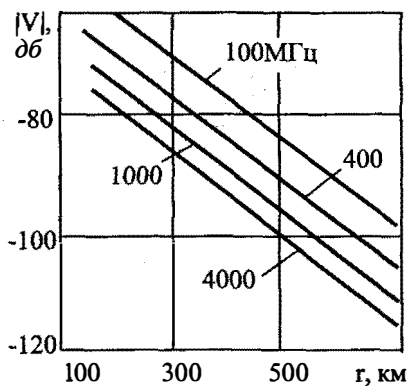


Рис. 13.5. Зависимость медианных значений $|V(r)|$

во времени. Для уменьшения искажений необходимо, чтобы $\Delta\psi - \Delta\psi_n \ll 2\pi$, т.е. $F_n \ll v_\phi / \Delta R$. Это ограничивает максимальную ширину полосы частот Δf радиолинии. Для увеличения Δf надо уменьшать ΔR . Это достигается уменьшением объема рассеяния за счет сужения диаграмм направленности антенн. Увеличение же направленности антенн выше некоторого предела приводит в линиях

ДТР к потере усиления антенн. Эти потери проявляются в том, что при увеличении линейных размеров антенны коэффициент направленного действия ее увеличивается не пропорционально увеличению площади $S_{пр}$, а гораздо медленнее. Причина этого явления в том, что на $S_{пр}$ имеются фазовые искажения, увеличивающиеся с увеличением линейных размеров антенны. Фазовые искажения на $S_{пр}$ появляются из-за того, что R_{Qp} разное для точек $p \in S_{пр}$. В аналогичном положении находится и передающая антенна.

Радиолинии ДТР являются узкополосными, их полосу частот Δf (МГц) при слабонаправленных антеннах можно определить по формуле $\Delta f = 16,7/r^3$, где r — расстояние, выраженное в сотнях километров.

Множитель влияния среды $|V|$ зависит в радиолиниях ДТР от λ , времени года (уровень сигнала зимой существенно ниже, чем летом), от метеорологических условий, географического положения и др. факторов. На рис. 13.5 изображены графики зависимости медианных значений $|V(r)|$, полученные при условии 50 % вероятности ведения радиосвязи в зимние месяцы. Для получения более надежной связи увеличивают P_Σ, D_Σ и $D_{пр}$. Инженерные методы расчета радиолиний ДТР изложены в [75].

13.4. Затухание радиоволн в тропосфере

1. Различают *нерезонансное* и *резонансное (селективное) затухание* радиоволн в тропосфере. Нерезонансное затухание обусловлено тепловыми потерями энергии распространяющегося ЭМ поля. Резонансное затухание связано с тем, что каждая молекула вещества может поглощать и излучать ЭМ поле только своих собственных наборов частот — спектров поглощения. Поглощение энергии распространяющегося ЭМ поля молекулами происходит при совпадении его частоты с одной из дискретных частот внутримолекулярных переходов. Молекула при этом переходит в более высокое энергетическое состояние.

Переход молекулы с более высокого энергетического уровня на более низкий сопровождается излучением ЭМ поля на собственной резонансной частоте. Это поле является одним из полей шумов в радиодиапазоне.

Затухание волны учитывается множителем влияния среды. Если коэффициент затухания меняется по длине трассы, то

$$V(r) = \exp\left[-\int_0^r \alpha(r') dr'\right]. \quad (13.9)$$

2. Рассмотрим нерезонансное затухание радиоволны. Распространяющееся ЭМ поле затрачивает часть энергии на нагревание капель (частиц) дождя, тумана, льдинок, града, снега (гидрометеоров), пыли. Кроме этого, происходит рассеяние ЭМ поля на частицах (гидрометеорах, пыли) и напряженность поля в точке p зависит от значения эффективной площади рассеяния каждой частицы и их совокупности. При нерезонансном затухании α зависит от количества частиц в единице объема, их размеров, формы и электрических параметров, от длины волны. Значения α в сухом снеге и граде составляет единицы процентов от α дождя той же интенсивности. Значение α в тумане и облаках тоже мало, но при их больших протяженностях и длительности существования затухание в них приходится учитывать.

На рис. 13.6,а изображены графики зависимости α_d (в дБ/км) от частоты для дождя при разной его интенсивности J_d . При этом за счет дождя в соответствии с (13.9) $V_d = \exp(-\alpha_d r_d)$, где r_d — часть длины трассы r , учитывающая неравномерное распределение интенсивности дождя как вдоль поверхности земли, так и в вертикальном направлении.

Множитель влияния V_T тумана и облаков рассчитывается аналогичным образом; графики зависимости α_T (в дБ/км) от частоты при

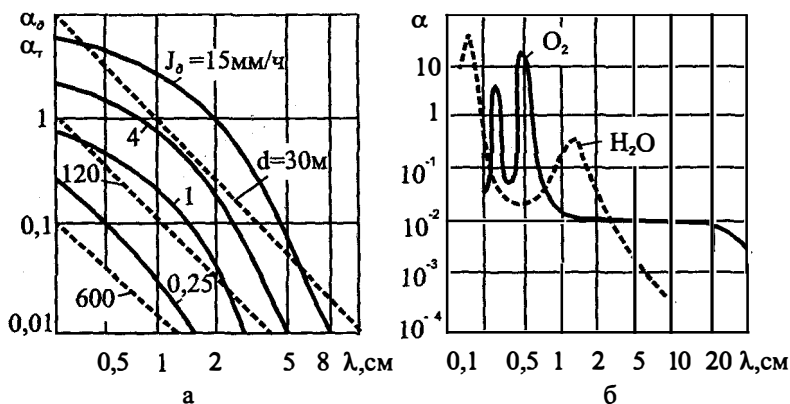


Рис.13.6. Коэффициенты затухания в дожде, тумане, кислороде, парах воды

разной дальности видимости d изображены на рис. 13.6,а (пунктирные кривые).

3. В радиодиапазоне расположены спектры поглощения только кислорода и паров воды. Множитель влияния среды за счет резонансного затухания рассчитывается по (13.9). Поскольку по длине трассы α может меняться, то интеграл в (13.9) вычисляется приближенно. Коэффициенты затухания α_v и α_k (дБ/км) в парах воды и в кислороде определяются по графикам рис. 13.6,б, рассчитанным для нулевой высоты в тропосфере, при давлении 760 мм рт.ст., температуре 20° С и плотности паров воды $7,5 \text{ г/м}^3$. Из графиков видно, что пары воды имеют полосы поглощения вблизи длин волн 0,164 и 1,36 см, а кислород — вблизи длин волн 0,25 и 0,5 см. Частоты, на которых происходит резонансное поглощение ЭМ поля, неприменимы для передачи сигналов в тропосфере. Например, для $0,1 \text{ см} < \lambda < 1 \text{ см}$ «окна прозрачности» атмосферы имеются вблизи длин волн, равных 0,4 и 0,8 см. Эти длины волн рекомендуются для работы в диапазоне КВЧ.

4. При учете нерезонансного и резонансного затуханий в (13.9) $\alpha = \alpha_d + \alpha_T + \alpha_v + \alpha_k$.

13.5. Рассеяние и деполяризация поля осадками

1. При падении ЭМ поля на гидрометеоры и частицы пыли возникает рассеяние ЭМ волн (§§ 9.3, 9.4). Амплитуда поля рассеяния частицы зависит от ее диэлектрической и магнитной проницаемостей, от электрического размера. Каждая частица характеризует-

ся диаграммой рассеяния. Совокупность частиц описывается ЭПР. Полное поле в точке p за счет дифракционных явлений может уменьшаться по амплитуде.

Амплитуда поля рассеяния в обратном направлении (т.е. величина эффективной площади обратного рассеяния) может быть значительной. При применении однопозиционных радиолокационных систем поле рассеяния частиц может приниматься в точке p вместе с полем, рассеянным объектом. Поэтому поле, рассеянное частицами, является полем помехи. Для подавления помех применяют круговую поляризацию первичного поля и поляризационные фильтры в приемных антеннах. Объясняется это следующим. Если форма частиц близка к сферической, то рассеянное ими поле имеет поляризацию, близкую к круговой, а направление вращения вектора \dot{E}^a — обратно направлению вращения вектора \dot{E}^n . При этом приемная антенна значительно ослабляет поле помехи.

2. В диапазонах СВЧ-ГВЧ проявляется деполяризация поля, рассеянного частицами. Поэтому полное поле оказывается деполяризованным. Причиной деполяризации является искривленная форма поверхности частиц: при падении на них первичного поля линейной поляризации вторичное поле имеет составляющую E_{\parallel}^a , параллельную вектору \dot{E}^n , и составляющую \dot{E}_{\perp}^a , ортогональную вектору \dot{E}^n . Деполяризацию поля определяют коэффициентом деполяризации $\gamma_n = \frac{|E_{\perp}^a|}{|E_{\parallel}^a + E^n|} = \frac{|E_{\perp}^a|}{|E^n|}$. В СВЧ диапазоне для оценки γ_n (в дБ) применяют [75] справедливую при $-15 \text{ дБ} \geq V_d \geq -50 \text{ дБ}$ эмпирическую формулу $\gamma_n = -0,4V_d - 35,5$, где V_d — множитель влияния дождя, в дБ. Деполяризация поля увеличивается при увеличении интенсивности осадков, при этом амплитуда поля $|E_{\parallel}^a + E^n|$ уменьшается. Величина γ_n меняется по случайному закону. Явление деполяризации поля изучено мало.

ЗАДАЧИ

1. В нормальной тропосфере передающая антенна подвешена на высоте, равной 25 м, имеет КНД, равный 5; мощность излучения равна 10 Вт на $\lambda = 0,1$ м. Определить напряженность поля на расстоянии, равном 20 км, на высоте 9 м, если максимум диаграммы направленности ориентирован на точку p , распространение поля происходит над влажной почвой.

2. Рассчитать напряженность поля на расстоянии 24 км от передающей антенны, подвешенной на высоте, равной 10 м и имеющей КНД, равный 3. Точка приема находится на высоте $h_2 = 8$ м от поверхности земли. Мощность излучения равна 15 Вт, а частота $f = 10$ ГГц. Распространение ЭМ поля происходит в тропосфере, коэффициент преломления которой аппроксимирован линейной функцией высоты с $dN_T/dh = -36$ 1/км.

3. Рассчитать напряженность поля при условиях предыдущей задачи, но учесть, что в пределах радиолинии появился туман с дальностью видимости, равной 30 м.

14. ИОНОСФЕРНАЯ ВОЛНА. ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ОНЧ–ГВЧ ДИАПАЗОНОВ

14.1. Строение ионосферы

1. Ионосфера представляет плазму, квазинейтральную в пределах макрообъема, т.е. число положительных зарядов в ней равно числу отрицательных. Свободные заряды появляются в ионосфере в процессе *ионизации*, при котором один или несколько электронов с наружных оболочек атомов и молекул отрываются путем воздействия внешних источников энергии. Основным источником ионизации газов атмосферы является *солнечная радиация*. Солнце излучает ЭМ колебания широкого спектра и выбрасывает движущиеся с большой скоростью потоки заряженных частиц (корпускул — электронов, протонов). Эти потоки называют солнечным ветром. *Ионизацию (фотоионизацию)* способно производить ЭМ поле с $\lambda < 0,134$ мкм. *Ударная ионизация* возникает при столкновении корпускул с атомами и молекулами. Роль ударной ионизации проявляется главным образом в полярных районах, куда за счет магнитного поля Земли стекается солнечный ветер. Источником фотоионизации является *радиация звезд*. Но роль этого источника мала. Также мала роль еще одного источника ударной ионизации — метеоров, вторгающихся в земную атмосферу со скоростями 11–73 км/с и создающих местную ионизацию в столбах газа, столбы существуют от одной до нескольких секунд на высотах от 80 до 120 км.

Процесс рекомбинации обратен процессу ионизации. При тепловом движении частицы с зарядами противоположных знаков оказываются на малых расстояниях друг от друга. Под действием кулоновской силы они соединяются, превращаясь в молекулы и атомы. Часть электронов присоединяется к нейтральным молекулам, образуя отрицательно заряженные ионы.

Изменение плотности $N(t)$ электронов во времени на высоте h подчиняется дифференциальному уравнению баланса ионизации. С заходом Солнца (источника ионизации) электронная плотность N уменьшается тем быстрее, чем больше плотность атмосферы.

2. Сведения о строении ионосферы получены экспериментальным путем. На высотах от 250 до 400 км имеется *основной максимум ионизации*, называемый слоем F_2 . Области ионосферы, находящиеся выше и ниже основного максимума ионизации, называют *внешней и*

внутренней ионосферой. Части ионосферы, содержащие относительные максимумы N , называют слоями. Во внутренней ионосфере имеются четыре регулярных слоя D, E, F_1 и F_2 (рис. 14.1). Каждый слой характеризуется электронной плотностью $N_m(h_m)$ в максимумах h_m ионизации, высотой h_0 нижней границы слоя, числом ν соударений электрона с тяжелыми частицами.

Параметры ионосферных слоев определяются регулярными суточными и сезонными изменениями излучения Солнца. С наступлением темноты из-за рекомбинации исчезает слой D , но слой E сохраняется, ночью его значение N_m уменьшается. Слой F_1 в средних широтах наблюдается только в летние дни. В остальное время он сливается со слоем F_2 , образуя область F .

3. Регулярные изменения N_m, h_m, h_0, ν связаны с 11-летним циклом изменения солнечной активности, характеризуемым относительным числом солнечных пятен. Зависимость N_m, h_m, h_0, ν от числа последних позволяет прогнозировать параметры ионосферы на некоторый период вперед.

4. Регулярная структура ионосферы может нарушаться. Различают два вида отклонений $N(h)$ от регулярного среднего значения: флуктуации около средних значений, существующие всегда, и длительные аномальные изменения средних значений, появляющиеся в периоды ионосферных возмущений.

Флуктуации $N(h)$ создают неоднородную, быстроменяющуюся

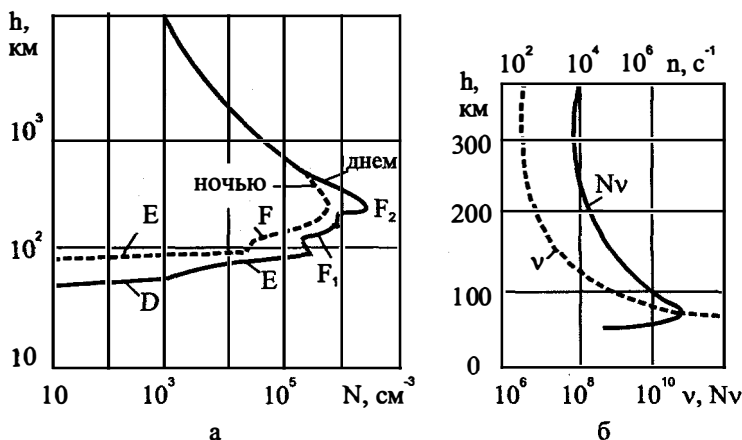


Рис. 14.1. Графики зависимостей N , ν и $N\nu$ от высоты

локальную структуру ионосферы. Неоднородности разделяют на *мелкомасштабные* (с горизонтальными размерами 100-1000 м) и *крупномасштабные* (с горизонтальными размерами в десятки и сотни километров). Мелкомасштабные неоднородности неустойчивы, они образуются за счет вихревых движений и диффузии и быстро сменяют друг друга. Среднеквадратические скорости хаотического движения неоднородностей в слое D равны приблизительно 1 м/с, в слое E — 2-4 м/с, в области F — 6-7 м/с. Скорости регулярного дрейфа в слоях D и E около 60-80 м/с, в области F — от 20 до 500 м/с.

Аномальные существенные отклонения $N(h)$ от средних значений и нарушения самой структуры ионосферы, длящиеся более 1 ч, называют *ионосферными возмущениями и бурями*. Больше воздействуют на работу радиолиний возмущения *корпускулярной природы*. При этом Земля попадает в корпускулярные потоки, испускаемые активным Солнцем. Заряженные частицы, двигаясь вокруг силовых линий магнитного поля Земли по траекториям, подобным спирали, направляются к полярным областям (см. § 10.3, п. 1). Они вызывают не только ионосферные, но и магнитные бури. Возмущения зависят от широты точки p . В полярных широтах возмущается вся ионосфера, возрастают N и v слоя D , повышается значение σ и, значит, возрастает α . В слое F_2 уменьшается N_m в освещенной части Земли и повышается в затененной — за счет появления спорадических образований. У полюса в любое время суток появляется спорадический слой E_S . В средних широтах в основном возмущается область F , только при сильных ионосферных бурях возмущаются и нижние слои ионосферы.

При вспышках рентгеновского излучения на Солнце в ионосфере появляются возмущения волнового происхождения, длящиеся от нескольких минут до 1-2 ч в освещенной части земного шара. При этом быстро возрастают N и α слоя D .

14.2. Условия распространения волн в ионосфере

1. Плазма ионосферы находится в магнитном поле Земли. Его напряженность у поверхности Земли увеличивается от 28 А/м у экватора до 40 А/м в средних геомагнитных широтах и затем до 56 А/м у магнитных полюсов. Тензор диэлектрической проницаемости подмагниченной плазмы определен в (10.8) и зависит от N и v , меняющихся в пространстве. Поэтому *ионосфера — анизотропная диспергирующая неоднородная среда*.

Можно считать, что условие $\omega^2 \gg v^2$ удовлетворяется на частотах $f > 3$ МГц, т.е. в диапазонах декаметровых и более коротких длин волн. При этом неподмагниченная плазма имеет $\epsilon \approx 1 - \omega_0^2 / \omega^2$, $\sigma \approx \epsilon_0 v \omega_0^2 / \omega^2$, где $\omega_0 = 2\pi f_0 \approx 2\pi \cdot 9 \cdot \sqrt{N}$ — собственная частота плазмы. На частотах, где $\epsilon < 0$, α имеет большую величину; при $\omega \approx v$ наблюдается резонансное поглощение ЭМ поля. И ϵ , и σ зависят от произведения $N \cdot v$. На рис. 14.1,б изображены графики зависимостей v и $N \cdot v$ от высоты h . При этом использована зависимость $N(h)$ (рис. 14.1,а). Из графиков видно, что $N \cdot v$ имеет максимум на высотах расположения слоя D и нижней части слоя E . Поэтому σ и α имеют максимумы на этих же высотах. Поскольку слой D существует только в дневное время, то из этого следует, что затухание радиоволн в дневное время значительно больше, чем в ночное.

Как отмечалось в § 10.3, при $\omega^2 \gg v^2$ с увеличением f уменьшается σ и при $f > 100$ МГц α в ионосфере мало. С ростом частоты $\epsilon \rightarrow 1$, $\sigma \rightarrow 0$ и параметры ионосферы приближаются к параметрам свободного пространства. Поэтому *основное влияние на распространение радиоволн ионосфера оказывает на частотах $f < 100$ МГц.*

2. При распространении волны в подмагниченной ионосфере вдоль магнитного меридиана линейно поляризованная волна распадается на две волны круговых поляризаций: положительно и отрицательно поляризованные волны (§§ 10.3, 10.5). Условия распространения их оказываются разными. Коэффициенты фазы и затухания в анизотропной ионосфере определяются по (10.11), (10.10). Если $\omega \rightarrow \omega_m$, то наступает продольный гиромагнитный резонанс, α_+ принимает повышенное значение, амплитуды векторов поля волны положительной поляризации затухают больше, чем отрицательно поляризованной волны. При продольном распространении волны ($v=0$) $n_{\pm} = [1 - \omega_0^2 / \omega(\omega \mp \omega_m)]^{1/2}$, а постоянная Фарадея $\gamma_0 = \omega(n_- - n_+) / c$.

При распространении волны перпендикулярно силовым линиям магнитного поля Земли в ионосфере волна расщепляется на обыкновенную и необыкновенную волны (§ 10.6). Для обыкновенной волны ионосфера является изотропной средой с коэффициентом преломления $n_{об} = (1 - \omega_0^2 / \omega^2)^{1/2}$ при $v=0$. Для необыкновенной волны $n_{но}$ зависит от напряженности подмагничивающего поля. Волновой процесс необыкновенной волны в ионосфере не может существовать, если частота распространяющегося поля удовлетворяет условиям

$\omega < \omega_{1,2} = [(\omega_m/2)^2 + \omega_0^2]^{1/2} \mp \omega_m/2$ (см. § 10.3, п. 7 и § 10.6, п. 6). При поперечном гиромагнитном резонансе резко возрастает значение коэффициента затухания необыкновенной волны. При падении линейно поляризованной волны из свободного пространства на ионосферу возникает явление двойного лучепреломления.

3. В случае произвольного направления распространения волны вектор Π составляет с вектором \mathbf{h} напряженности магнитного поля Земли угол χ . Тогда продольная и поперечная составляющие вектора \mathbf{h} равны $h_{\parallel} = h \cos \chi$, $h_{\perp} = h \sin \chi$, а гироскопические частоты «продольная» $\omega_{\text{мп}} = \omega_m \cos \chi$, «поперечная» $\omega_{\text{мпп}} = \omega_m \sin \chi$. При $v = 0$ имеем

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon_{1,2} = 1 - 2\omega_0^2 \cdot \{2\omega^2 - \omega_{\text{мпп}}^2 / \eta \pm [\omega_{\text{мпп}}^4 / \eta^2 + 4\omega^2 \omega_{\text{мп}}^2]\}^{-1/2},$$

где $\eta = 1 - \omega_0^2 / \omega^2$. Волна распадается на две составляющие, параметры которых описываются ϵ_1 и ϵ_2 . Обе составляющие поляризованы по эллипсу и имеют различные коэффициенты затухания. Если $\omega_{\text{мпп}}^4 \gg 4\omega^2 \omega_{\text{мп}}^2 \eta^2$, то последним членом в знаменателе выражений $\epsilon_{1,2}$ можно пренебречь. При этом значения $\epsilon_{1,2}$ соответствуют двум значениям ϵ для обыкновенной и необыкновенной волн при распространении в поперечном магнитном поле. Это случай квазипоперечного (QT) распространения волн. Если же $\omega_{\text{мпп}}^4 \ll 4\omega^2 \omega_{\text{мп}}^2 \eta^2$, то получаем значения $\epsilon_{1,2}$, соответствующие продольному распространению волн. Это случай квазипродольного (QL) распространения волн.

Выполнение неравенств зависит от ω_0 / ω (от η). Если $\omega_0 / \omega \rightarrow 1$, то даже при малых углах χ распространение волны является приближенно квазипоперечным. Если $\omega_0^2 / \omega^2 \ll 1$, то даже при больших углах χ распространение волны является приближенно квазипродольным.

Условие $\omega_0 \approx \omega$ выполняется при отражении волны (в отражающем слое, см § 11.4). Поэтому в отражающем (отклоняющем) слое распространение волны относят к типу QT . Условие $\omega_0 \ll \omega$ выполняется в неотражающем (неотклоняющем) слое. Поэтому в неотклоняющем слое распространение волны относят к типу QL . Распространение метровых и более коротких волн в неотклоняющих слоях ионосферы относится к типу QL , если $\chi \leq 89^\circ$. В диапазоне декаметровых волн распространение считают типа QL в слоях D, E , если $\chi < 70 - 75^\circ$. Магнитное поле Земли оказывает наибольшее влияние на

распространение волн в диапазоне СЧ. Эффект Фарадея проявляется в диапазоне ВЧ и даже — в диапазоне УВЧ.

14.3. Траектории радиоволн в ионосфере без учета влияния магнитного поля Земли

1. Коэффициенты затухания и преломления ионосферы в магнитном поле Земли зависят от значений $\omega \pm \omega_m$. При $\omega \gg \omega_m$ они совпадают с коэффициентами затухания и преломления неподмагниченной плазмы. Поэтому в ряде случаев можно пренебречь влиянием магнитного поля Земли и рассматривать упрощенную модель ионосферы. Считаем, что магнитным полем Земли и потерями в ионосфере можно пренебречь.

Электронная плотность N согласно графика рис. 14.1,а во внутренней ионосфере возрастает с высотой по сложному закону, достигая максимума на высоте 300–400 км. Относительная диэлектрическая проницаемость по (10.9) $\epsilon = 1 - f_0^2 / f^2$, где f_0 [кГц] = $9(N)^{1/2}$. С ростом высоты во внутренней ионосфере ϵ немонотонно уменьшается, имеет максимумы на высотах, где имеются максимумы электронной плотности слоев, достигает абсолютного минимума на высоте слоя F_2 , а затем при увеличении высоты возрастает до единицы во внешней ионосфере. *Ионосфера, таким образом, неоднородная среда.* Если ее параметры меняются мало на протяженности длины волны, то определить траектории волны в ней можно методами *геометрической оптики*. Предполагаем, что в горизонтальном направлении параметры ионосферы не меняются и выполняются условия применимости геометрической оптики. Пусть h_0, n_0 — высота нижней границы и коэффициент преломления ионосферы на этой границе, θ_0 — угол падения волны на нижнюю границу (рис. 13.2,а). Условно разделим ионосферу на тонкие слои, в пределах каждого g -го слоя, находящегося на высоте h_g , считаем $\epsilon(h_g)$ постоянной. Тогда траектория волны определяется выражением (13.3), полученным для тропосферы:

$$(a + h_0)n_0 \sin \theta_0 = (a + h_g)n(h_g) \sin \theta_g. \quad (14.1)$$

При уменьшении толщины Δh_g слоев траектория волны обращается в кривую. Так как $n(h_g)$ уменьшается с ростом высоты h_g , то угол падения θ_g волны на следующий слой увеличивается. На некоторой высоте могут создаться условия для полного внутреннего отраже-

ния волны. Траектория при этом направлена по касательной к сферической границе раздела слоев. Даже при малой неоднородности траектория может отклониться вниз и тогда волна возвратится на Землю. Это явление называют *отражением волны от ионосферы* (см. § 11.4). Таким образом, отражение волны от ионосферы происходит в той ее области, где ϵ убывает с высотой (N возрастает с высотой). Поэтому волна может отражаться *только во внутренней* ионосфере ниже максимума электронной плотности.

2. В результате рефракции угол ϑ должен достигнуть значения $\pi/2$ на высоте h_j . На границе нижнего слоя $n_0 \approx 1$. Поэтому условием отражения по (14.1) является $\sin \vartheta_0 = n(h_j)(a + h_j)/(a + h_0)$. Учтем здесь, что $n = (1 - f_0^2 / f^2)^{1/2}$. Обозначим $h_j = h_0 + z_0$, где z_0 — высота над нижней границей ионосферы, на которой происходит отражение волны. Тогда $\sin \vartheta_0 = (1 - f_0^2 / f^2)^{1/2} [1 + z_0 / (a + h_0)]$. Из этого выражения следует, что ЭМ поле на частоте f отразится от ионосферы при данной электронной плотности $N(z_0)$ только, если $\sin \vartheta_0$ не меньше правой части этого выражения. Поэтому, чем больше N , тем при меньших значениях угла ϑ_0 возможно отражение поля. Угол $\vartheta_{\text{о,кр}}$, при котором в данных условиях еще возможно отражение поля, называют *критическим углом*. Выражение позволяет определить частоты полей, которые могут отражаться ионосферой на данной высоте z_0 при заданном угле ϑ_0 :

$$f \leq f_0 \{1 - \sin^2 \vartheta_0 / [1 + z_0 / (a + h_0)]^2\}^{-1/2}. \quad (14.2)$$

Так как $z_0 \approx 200 - 300$ км, $a = 6370$ км, $h_0 \approx 100 - 300$ км, то $z_0 / (a + h_0) \ll 1$ и этим слагаемым можно пренебречь. Тогда получаем приближение плоской Земли: $f \leq f_0 \sec \vartheta_0$, называемое *законом секанса*. Из этих выражений видно, что, чем больше частота ЭМ поля, тем необходима большая электронная плотность в ионосфере для его отражения. С увеличением угла ϑ_0 необходимая N уменьшается. Однако, электронная плотность ограничена значением N_m . Угол падения ϑ_0 тоже ограничен значением $\vartheta_{\text{о,м}}$ из-за сферичности Земли и границы ионосферы. Если направление падения волны на ионосферу касательно поверхности Земли, то $\sin \vartheta_{\text{о,м}} = a / (a + h_0)$, т.е. $0 \leq \vartheta_0 \leq \vartheta_{\text{о,м}}$. Поэтому максимально высокая частота f_m ЭМ поля, которое отражается ионосферой

$$f_m = 9(N_m)^{1/2} \left\{ \left[-\sin^2 \vartheta_{0,m} / [1 + z_0 / (a + h_0)]^2 \right]^{1/2} \right\}; \quad (14.3)$$

$$f_m \approx 9\sqrt{N_m} \sec \vartheta_{0,m}.$$

Из этих выражений и результатов §§ 14.1, 14.2 следует, что условия отражения ЭМ поля регулярно выполняются только для диапазонов ВЧ–ОНЧ. Максимальные частоты поля, отражающегося от ионосферы при наклонном падении, не превышают 30–40 МГц.

Из (14.3) следует, что при вертикальном падении поля на слой $f_b = f_0$, т.е. при вертикальном падении волны на ионосферу отражение ее происходит на той высоте, где частота поля равна собственной, т.е. там, где $\epsilon = 0$ (см. § 11.4). Сравнение выражения $f_b = f_0$ с законом секанса показывает, что при одной и той же электронной плотности ионосферы ЭМ поле, падающее на слой наклонно, может отразиться при частоте f_θ , превышающей в $\sec \vartheta_0$ раз частоту f_b поля, отражающегося при вертикальном падении волны на слой. Частоты f_b и f_θ ЭМ полей, отражающихся от одного и того же уровня электронной плотности слоя, называют эквивалентными.

3. Обычно антенна в точке q имеет такую диаграмму направленности (1), что на нижнюю границу ионосферы (2) падает пучок лучей под разными углами ϑ_0 (рис. 14.2). Чем меньше угол ϑ_0 , тем глубже проникает в слой поле частоты f . Радиусы кривизны лучей в точках перегиба их неодинаковы. В нижней части слоя $|dn/dh|$ велико (см. рис. 14.1,а), поэтому радиус кривизны мал. Если z_0 приближается к области, где N имеет максимум, $|dn/dh|$ уменьшается и радиус кривизны траектории увеличивается. Траектория луча относительно точек q и p при расчетах радиолиний считается симметричной. На-

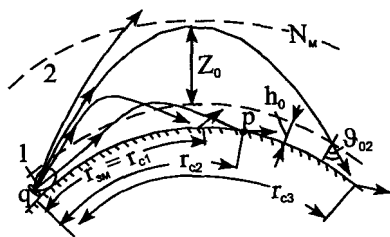


Рис. 14.2. Траектории ионосферных волн

меньшее расстояние r_{zm} по поверхности Земли, на котором возможен прием ионосферной волны, называют предельным расстоянием зоны молчания для частоты f . В точке p , расположенной в зоне молчания, при $r_{qp} < r_{zm}$, ионосферная волна отсутствует, ЭМ поле может существовать только за счет земной волны.

Наибольшие дальности распространения ионосферной волны имеют значения $r_m \approx 2 \cdot 10^3$ км для слоя E и $r_m = (2,5 - 4) \cdot 10^3$ км для слоя F_2 и соответствуют углу падения $\theta_{o,m}$ при отражении на высоте, где N близко к N_m . Если $r_{qp} > r_m$, то ионосферная волна в точку p может попадать за счет нескольких отражений от ионосферы и поверхности Земли.

14.4. Радиопрогнозы

1. При вертикальном падении на ионосферный слой отражается ЭМ поле, имеющее максимальную частоту f_{vm} , соответствующую максимуму электронной плотности N_m : $f_{vm} = 9(N_m)^{1/2}$. Если частота при вертикальном падении $f > f_{vm}$, то ЭМ поле от ионосферы не отражается. Частоты f_{vm} называют *критическими частотами* $f_{кр}$ слоев E, F_1, F_2 и обозначают $f_{крE}, f_{крF_1}, f_{крF_2}$.

Результаты систематических измерений параметров ионосферы используются для составления долгосрочных и краткосрочных радиопрогнозов критических частот и высот ионосферных слоев. Долгосрочный прогноз определяет среднее состояние ионосферы на некоторый период времени. Краткосрочный прогноз определяет время ионосферных возмущений, вероятных отклонений параметров ионосферы от средних значений при спокойной ионосфере.

Долгосрочный прогноз составляется по результатам изучения параметров ионосферы ионосферными станциями. Критические частоты слоев меняются в течение суток, месяца, года и цикла солнечной активности. Поэтому прогноз составляют на каждый месяц каждого года в течение цикла солнечной активности. Составляется также график зависимости $f_{кр}$ от дня месяца и времени суток. Зависимость $f_{кр}$ от широты и долготы точки p устанавливается по измерениям параметров, полученным мировой сетью ионосферных станций. Основу прогноза составляет измеренная зависимость $f_{кр}$ от числа солнечных пятен. Прогноз числа солнечных пятен составляет Главная астрономическая обсерватория. Прогноз $f_{кр}$ для географических точек позволяет составить мировые карты с нанесенными линиями равных критических частот для каждого ионосферного слоя. Карты публикуются в выпусках «Месячный прогноз распространения радиоволн».

2. Экспериментальное исследование ионосферы выполняется в основном методом вертикального ее зондирования на *ионосферной станции*. Ионосферной станцией называют приемно-передающее устройство, определяющее зависимость высоты отражения излучаемого вертикально вверх ЭМ поля от частоты. Она состоит из передатчика, работающего в импульсном режиме, частота которого плавно меняется от 1 до 20 МГц, антенны с ориентированным вертикально вверх максимумом излучения, и приемника, синхронно настраивающегося на изменяемую частоту передатчика. На некоторой частоте f излученный импульс отражается от ионосферы на высоте, где $f = f_0$, затем принимается станцией и подается на устройство обработки сигнала. Если считать, что скорость распространения волны равна c , то действующая высота отражения $h' = c\Delta t / 2$, где Δt — время запаздывания отраженного импульса. Таким образом измеряются f_0 и h' .

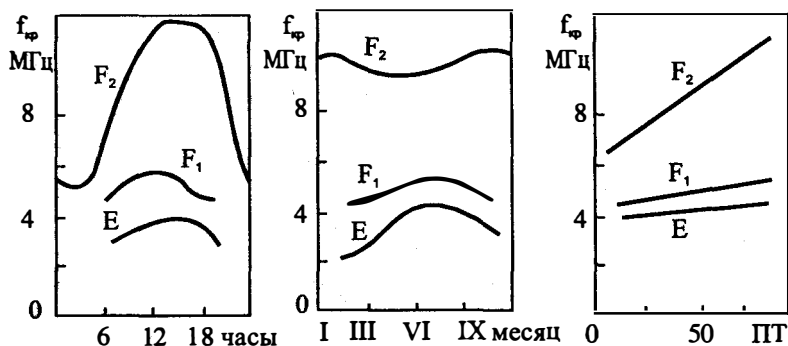


Рис. 14.3. Изменение критических частот на средних широтах

По f_0 вычисляется зависимость $N(h')$, $f_{кр}$ соответствует $N_m(h')$. По зависимости $N(h')$, $f(h')$ можно определить истинную высоту, соответствующую отражению поля на частоте $f = f_0$ и отличающуюся от h' из-за того, что скорость распространения импульса в плазме отличается от c . Для примера на рис. 14.3 приведены графики зависимости усредненных значений $f_{кр}$ от времени суток, месяца, числа солнечных пятен (ПТ).

Изучение ионосферы проводится и с помощью ракет и искусственных спутников Земли. Применяют и другие радиофизические методы исследования ионосферы.

14.5. Влияние магнитного поля Земли

1. *Отражение ЭМ волны от ионосферы с учетом магнитного поля Земли рассматривают как квазиперпендикулярное.* Волна расщепляется на обыкновенную и необыкновенную (§ 10.6). Условия распространения обыкновенной волны рассмотрены в § 14.3. Необыкновенная квазиперпендикулярная волна имеет коэффициент преломления $n_{н\omega} = [2\epsilon_+ \epsilon_- / (\epsilon_+ + \epsilon_-)]^{1/2}$, где ϵ_{\pm} — комплексные величины, зависящие от ω_0 , ν , $\omega_{мп}$, ω . При этом волновой процесс в подмагнитной плазме отсутствует, если $n_{н\omega} = 0$ (при $\nu = 0$), т.е. $\epsilon_{\pm} = 0$. Условия $\epsilon_{\pm} = 0$ при $\omega > \omega_{мп}$ приводят к ограничению частоты ω распространяющегося ЭМ поля двумя предельными частотами $\omega_{1п,2п} = [(\omega_{мп} / 2)^2 + \omega_0^2]^{1/2} \mp \omega_{мп} / 2$ (§ 10.3). *Необыкновенная волна, имеющая частоту $\omega \leq \omega_{1п,2п}$, в плазме распространяться не может, она отражается от нее.*

Из первого условия ($\epsilon_+ = 0$) отражения необыкновенной волны находим собственную частоту плазмы, при которой происходит отражение: $\omega_{01} = [\omega(\omega - \omega_{мп})]^{1/2}$. Частоте ω_{01} соответствует электронная плотность слоя $N(z_{01})$ на высоте z_{01} : $\omega_{01} = 2\pi \cdot 9N^{1/2}(z_{01})$. Из второго условия ($\epsilon_- = 0$) имеем: $\omega_{02} = [\omega(\omega + \omega_{мп})]^{1/2}$. Частоте ω_{02} соответствует электронная плотность слоя $N(z_{02})$ на высоте z_{02} : $\omega_{02} = 2\pi \cdot 9N^{1/2}(z_{02})$. Так как $\omega_{02} > \omega_{01}$, то второе условие отражения необыкновенной волны выполняется на большей высоте, т.е. $z_{02} > z_{01}$. Таким образом, *необыкновенная волна отражается на двух уровнях электронной плотности и ей соответствуют две отраженных волны.*

Обыкновенная волна отражается при $\omega = \omega_0$. Но $\omega_{01} < \omega_0 < \omega_{02}$. Значит, $N(z_{01}) < N(z_0) < N(z_{02})$. Таким образом, *необыкновенная волна отражается выше и ниже уровня z_0 отражения обыкновенной волны.*

Поскольку значение $|\epsilon_+ + \epsilon_-|_2$ для луча-2, отражающегося выше уровня z_0 , больше значения $|\epsilon_+ + \epsilon_-|_1$ для луча-1, отражающегося ниже уровня z_0 , то коэффициент затухания α_{12} волны, определяемой траекторией луча-2, больше коэффициента затухания α_{11} волны, определяемого траекторией луча-1. Поэтому в точке p обычно доминирует волна, определенная лучом-1. Критическая частота этой волны $f_{кр,01} = f_{кр} + 0,5f_m \approx f_{кр} + 0,7$ МГц.

При $\omega < \omega_{мп}$ ($f \leq 1,4$ МГц), т.е. в части диапазона СЧ и в диапазонах НЧ и ОНЧ, волна, соответствующая лучу-1, существовать не может.

2. Поляризация ЭМ поля, отраженного ионосферой или прошедшего через ионосферу, определяется значениями N, χ, ω . На пути распространения волны N и χ меняются. Поскольку в произвольном случае вектор Пойнтинга распространяющейся волны имеет составляющие, параллельные вектору \mathbf{h} , то имеет место и эффект Фарадея и эффект Фохта (см. § 10.5, § 10.6). Если падающее на ионосферу ЭМ поле имеет линейную поляризацию, то при выходе из ионосферы его поляризация становится эллиптической. При выходе из ионосферы (при $N = 0$) поляризацию называют предельной.

Различают два случая: а) поляризация поля, прошедшего через ионосферу (характерной является радиолиния космос–Земля), б) в точ-

ку p приходит несколько волн, отразившихся от разных участков ионосферы (радиолинии Земля–Земля, работающие на ионосферных волнах).

Первый случай соответствует однолучевому приему. При этом в точке p рассчитывается поле обыкновенной и необыкновенной волн.

Поскольку в радиолиниях этого типа применяются частоты $f > 1$ ГГц, то условия распространения соответствуют квазипродольному случаю. Угол поворота большой оси эллипса поляризации может быть рассчитан интегрированием постоянной Фарадея по пути распространения волны.

Второй случай соответствует многолучевости в точке p . Все параметры эллипса поляризации поля в точке p оказываются флуктуирующими.

14.6. Затухание радиоволн в ионосфере

1. В случае произвольного направления распространения волны на возбуждение продольно распространяющейся волны расходуется ЭМ энергия, приблизительно пропорциональная $\cos \chi$, а поперечно распространяющейся — пропорциональная $\sin \chi$. Поэтому мощность излучения, расходуемая на возбуждение обыкновенной волны, зависит от угла χ . В (12.2), (12.3) необходимо учитывать уменьшение P_2 .

Коэффициент затухания обыкновенной волны в однородной ионосфере рассчитывается по (10.11), (10.10). Он рассмотрен в § 10.3. Но ионосфера является неоднородной средой, α в каждом слое зависит от высоты z . Поэтому множитель влияния среды рассчитывается по (13.9), т.е. $V = \exp(-\Gamma_{qp})$, где Γ_{qp} — общий интегральный коэффициент затухания, представляющий собой сумму интегралов от коэффициентов затухания по путям в слоях D, E, F_1 и F_2 . Если луч отражается, например, от слоя F_1 , то считается, что $\alpha_{F_2} = 0$.

В неотклоняющих слоях справедливо приближение QL , поэтому могут быть рассчитаны α_{\pm} и интегралы по путям, пройденным в каждом слое. В отклоняющем слое справедливо приближение QT .

Расчет $\Gamma(r_{qp})$ декаметровых волн выполняют, считая, что в нижних слоях ионосферы справедливо приближение QL , а в отклоняющем слое — приближение QT .

2. Для расчета функции V применяются и результаты вертикального зондирования ионосферы. Если Γ_{ν} — измеренное значение на частоте f_{ν} при вертикальном зондировании, то для волны на эквивалентной частоте $f = f_{\nu} \sec \theta_0$, падающей на ионосферный слой под углом θ_0 , $\Gamma = \Gamma_{\nu} / \sec \theta_0$ (теорема Мартина). Зависимость $\Gamma(f)$ может быть очень сложной.

При m -кратном отражении волны от ионосферы и почвы длина пути волны увеличивается. Увеличивается и значение Γ_{qp} . Параметры слоев при каждом последующем отражении меняются.

14.7. Особенности распространения волн ОВЧ–ГВЧ диапазонов

1. В этих диапазонах не удовлетворяется условие отражения волн от ионосферы, антенны имеют узкие диаграммы направленности, их обычно располагают на больших высотах над поверхностью Земли. Поверхность Земли нельзя считать ровной. Тропосфера оказывает влияние на распространение волн. Встречающиеся случаи делят следующим образом: а) $r_{qp} < 0,2R_0$ (первая модель — модель плоской Земли, r_{qp} до 5–6 км); для расчетов применяют интерференционные формулы, б) $0,2R_0 < r_{qp} < 0,8R_0$ (r_{qp} до 80–100 км); применяются интерференционные формулы и понятия приведенной высоты и эквивалентного радиуса Земли, в) $0,2R_0 < r_{qp} < 0,8R_0$, но на пути распространения волны имеются значительные препятствия (большой город, гористая местность), г) r_{qp} до 200–1000 км, распространение волны — за счет рассеяния на неоднородностях тропосферы, д) $r_{qp} > 1000$ км, распространение волны — за счет отражения от ионосферы и рассеяния на ее неоднородностях.

2. Нерегулярное сверхдальнее распространение поля диапазона ОВЧ связано с повышением электронной плотности в слое F в годы максимума солнечной активности или с появлением спорадического слоя E_S . Радиус зоны молчания при отражении поля от слоя F ($\lambda = 6 - 10$ м) не менее 2000 км, путем двух последовательных отражений от слоя F и почвы временами поле распространяется на расстояния до $(2+7) \cdot 10^3$ км.

Спорадический слой E_S , имеющий значение N , достаточное для отражения поля УКВ диапазона, может появляться днем в летнее время в южных широтах. Закономерность появления слоя E_S не установлена. Высота слоя составляет 100–120 км, поэтому максимальная дальность распространения ионосферной волны $(2+2,5) \cdot 10^3$ км, радиус зоны молчания $(1+2,5) \cdot 10^3$ км. С появлением слоя E_S возникают взаимные помехи в работе радиолиний, использующих ионосферное рассеяние радиоволн.

3. Регулярное ионосферное распространение за счет рассеяния радиоволны на неоднородностях ионосферы происходит так же, как в случае рассеяния на неоднородностях тропосферы. Используются отклонения электронной плотности от среднего значения, при этом $\Delta \epsilon = -e_3^2 \Delta N / m_3 \epsilon_0 \omega^2$, т.е. неоднородность ϵ убывает с увеличением

частоты как $1/\omega^2$. Поэтому напряженность поля в точке p резко убывает с увеличением частоты, возрастают искажения сигнала, накладываются ограничения на полосу частот радиолинии. Применяются частоты 30+60 МГц. Возникают глубокие замирания, для борьбы с ними применяют прием на разнесенные антенны. Это рассеянное поле устойчиво к нарушениям, возникающим для ионосферной волны в диапазоне ВЧ; радиолиния работает круглосуточно на одной частоте (не меняются антенны), уровень помех определяется только космическими шумами и шумами Солнца. Однако, необходимо иметь $P_{\Sigma} \geq 10$ кВт и антенны с коэффициентами направленного действия (около 20+30 дБ). Длина радиолиний составляет до 2300 км, минимальная длина — около 900 км.

4. В радиолинии, принимающей в точке p поле рассеяния на следах метеоров, рассеивающий объем расположен на высоте около 100 км над поверхностью Земли. Метеорные следы существуют короткое время, поэтому радиолиния работает так, что передача информации происходит только во время появления интенсивных метеорных следов. Применяются частоты 40–80 МГц, протяженность радиолинии до 1600–1800 км, антенны имеют коэффициенты направленного действия 6+18 дБ. Радиолинии не имеют нарушений, связанных с ионосферно-магнитными бурями.

14.8. Особенности распространения волн УВЧ и СВЧ диапазонов на космических радиолиниях

1. В траектории искусственного спутника Земли (ИСЗ) выделяют три участка. На стартовом участке работающие двигатели ракеты-носителя в плотных слоях атмосферы образуют ионизированный газ большой электронной плотности с большим значением σ (ν — велико). На втором участке траектории движение спутника вокруг Земли происходит по эллиптической орбите в разреженной атмосфере. Распространение радиоволн происходит как в пределах расстояния прямой видимости, так и за его пределами, на распространение волны влияют тропосфера и ионосфера. Третий участок траектории проходит, в основном, в плотных слоях атмосферы и соответствует возвращению спутника на Землю, ионизация газа происходит за счет термодинамического его нагрева спутником, имеющим сверхзвуковую скорость при вхождении в атмосферу. На первом и третьем участках распространение волны происходит в пределах прямой видимости, на ЭМ поле влияют ионизированный газ, окружающий ракету-носитель или ИСЗ, ионосфера и тропосфера.

Траектория космического корабля отличается от траектории ИСЗ вторым участком. При этом корабль движется в межпланетной плазме. На распространение волны в радиолинии Земля–космический корабль влияет тропосфера, ионосфера и межпланетная плазма. В радиолинии космический корабль–космический корабль на распространение ЭМ поля влияет межпланетная плазма.

2. Межпланетная плазма квазинейтральна. Ионизированные частицы двигаются в радиальном направлении от Солнца, электронная плотность убывает с увеличением расстояния от Солнца по квадратичному закону. Вблизи Земли $N \approx 60$ эл/см³, поэтому $f_0 \approx 70$ кГц, напряженность магнитного поля равна $4 \cdot 10^{-3}$ А/м. Средние размеры неоднородностей межпланетной плазмы около 200 км, крупномасштабных неоднородностей — $(0,1 \div 1) \cdot 10^6$ км. Неоднородности перемещаются со скоростями 300–800 км/с. Неоднородности плазмы вызывают флуктуации амплитуды, фазы, угла прихода, спектра ЭМ поля.

На радиолиниях Земля–космос в межпланетной плазме ЭМ поле затухает мало ($\alpha \approx 4 \cdot 10^{-21}$ дБ/км). Влияние на ЭМ поле оказывают основные потери радиолинии и затухание волны в атмосфере Земли. Диапазон частот ограничен отражающими и поглощающими свойствами атмосферы Земли. Радиоволны с $\lambda > 10$ м отражаются от ионосферы. Поэтому они не могут применяться в радиолинии Земля–внешняя ионосфера (или космос). Коэффициент затухания в ионосфере при $\lambda < 10$ м мал и уменьшается с ростом частоты как f^{-2} . Для $f > 100$ МГц общий интегральный коэффициент затухания всей ионосферы $\Gamma < 0,1$ дБ. Верхняя граница частот определяется затуханием поля в тропосфере и равна примерно 10 ГГц.

В радиолиниях Земля–ИСЗ, траектория которых находится во внутренней ионосфере, возможна работа в ОВЧ и ВЧ диапазонах.

При прохождении радиоволной ионосферы проявляется эффект Фарадея. Угол поворота плоскости поляризации зависит от частоты (как f^{-2}), зенитного угла на точку p и непрерывно меняется. Максимальные его значения от единиц до тысяч градусов. Изменение угла поворота плоскости поляризации обусловлено флуктуациями электронной плотности. Для борьбы с поляризационными замираниями применяют передающие и приемные антенны с круговой поляризацией.

3. Рефракция волны в тропосфере и ионосфере приводит к *рефракционной ошибке* в измерении угловых координат космического объекта радиотехническими методами. Рефракционной ошибкой является угол между истинным направлением на космический объект и касатель-

ной к траектории волны в точке p . Рефракционные ошибки в тропосфере и ионосфере суммируются. Они резко уменьшаются с увеличением частоты. Так, например, при угле возвышения 78° рефракционная ошибка за счет влияния ионосферы (при высоте ИСЗ, равной 450 км и при максимальной N) составляет на частоте 100 МГц около $38''$, а на частоте 400 МГц — только $2''$.

При измерении радиотехническими методами расстояния до космического объекта появляется ошибка, обусловленная тем, что скорости распространения ЭМ поля в тропосфере и ионосфере отличаются от скорости света в свободном пространстве. Ошибка за счет влияния тропосферы составляет 2–8 м для зенитных углов $0-70^\circ$ и 30–80 м — для зенитных углов $85-89^\circ$. Ошибка за счет влияния ионосферы при малых углах возвышения может достигать 2–4 км на частоте 10 МГц и 40 м — на частоте 1 ГГц.

4. На космических радиолиниях существенны космические помехи, возникающие за счет радиоизлучения, создаваемого внеземными источниками. Основным источником космических помех является Галактика, на ее радиоизлучение накладывается излучение дискретных источников (Солнца, планет, звезд). Последнее имеет меньшее значение, так как оно принимается приемной антенной только, если максимум диаграммы направленности ориентирован на источник. Радиоизлучение Галактики принимается антенной со всех направлений, но особенно оно интенсивно в ее экваториальной плоскости в направлении центра Галактики. При расчете шума используются карты распределения радиоизлучения по небесной сфере.

На частотах, больших 1 ГГц, шумы за счет радиоизлучения атмосферы Земли становятся преобладающими.

Теоретические вопросы распространения радиоволн на космических радиолиниях и расчет последних изложены в [76–79].

14.9. Особенности распространения волн ВЧ диапазона

1. Земная волна в ВЧ диапазоне быстро затухает, так как почва в этом диапазоне частот является полупроводником и поэтому коэффициент затухания велик. Напряженность поля рассчитывают по формулам интерференционной или Шулейкина–Ван дер Поля. При обычных мощностях излучения протяженность радиолинии не превышает нескольких десятков километров.

Ионосферная волна в ВЧ диапазоне распространяется на многие тысячи километров путем последовательного отражения от ионосферы и земной поверхности. Этот способ распространения ЭМ поля называют *скачковым* (рис. 14.2). Он характеризуется расстояниями скачков r_{c1}, r_{c2}, \dots , числом скачков A , углами выхода ϑ_{01} и прихода ϑ_{02} , максимальной применимой частотой (МПЧ) и наименьшей применимой частотой (НПЧ). Расстояния скачков определяются высотой отражающего слоя, частотой падающего ЭМ поля (рабочей частотой), шириной диаграммы направленности передающей антенны (в вертикальной плоскости). Максимальные расстояния скачка в среднем при отражении от слоя F_2 принимают равным 4000 км, — от слоя F_1 — 3000 км, — от слоя E — 2000 км.

Если ионосфера однородна в горизонтальном направлении, то $\vartheta_{01} = \vartheta_{02}$. Минимальное расстояние скачка при $\vartheta_0 = \vartheta_{0,кр}$ определяет зону молчания. Углам выхода луча $\vartheta_0 > \vartheta_{0,кр}$ соответствует ряд траекторий луча, оптимальным является условие, при котором угол прихода волны в точку p соответствует направлению максимального излучения антенны.

Чтобы ЭМ поле было принято в точке p , должно выполняться условие отражения его от ионосферы и должна быть реализована заданная устойчивость работы радиолинии.

Для отражения ЭМ поля необходимо, чтобы рабочая частота не превышала значения, определенного по (14.3). Из этого условия выбирается МПЧ. Она определяет верхнюю границу рабочих частот для данного расстояния. Второе условие определяет нижнюю границу рабочих частот — НПЧ, поскольку в ВЧ диапазоне, чем ниже f , тем больше α в ионосфере.

Поскольку параметры ионосферы меняются в течение суток и года, то изменяются МПЧ и НПЧ и, следовательно, меняется полоса частот, в которой может работать радиолиния. Это существенно усложняет и удорожает радиолинию.

2. Методы определения МПЧ основаны на результатах измерений $f_{кр}$ и высот ионосферных слоев. При расчетах используют «месячный прогноз распространения радиоволн». МПЧ вычисляется для каждого часа суток, по результатам строится суточный график изменения МПЧ. Чтобы вероятность нарушения радиосвязи при случайных изменениях N не превышала 10%, радиолиния должна работать на *оптимальной рабочей частоте* (ОРЧ), которая меньше на 15% МПЧ.

3. Для определения НПЧ необходимо установить зависимость амплитуды вектора $\dot{E}(p)$ от частоты. Значение $|\dot{E}_m(p)|$ рассчитывается по (12.4), (12.1) или (12.2), а методы расчета $|V_m(p)|$ являются полупирическими. По методу А.Н.Казанцева

$$|V_m(p)| = 0,5(1 + |R_{\parallel, \perp}|) |R_{\parallel, \perp}|^{(A-1)} \cdot \exp(-\Gamma),$$

где коэффициент 0,5 учитывает влияние постоянного магнитного поля Земли на распространяющееся поле. Поэтому P_{Σ} делится поровну на возбуждение в ионосфере обыкновенной и необыкновенной волн — за счет этого $|V_m(p)|$ уменьшается в $\sqrt{2}$ раз (необыкновенная волна затухает в ионосфере). Кроме этого, предполагается, что поляризация поля в точке p близка к круговой, а антенна в точке p принимает одну ортогональную составляющую — за счет этого $|V_m(p)|$ уменьшается еще в $\sqrt{2}$ раз; Γ — интегральный коэффициент затухания в ионосфере (см. § 14.6). Зная уровень шумов, можно найти минимальное значение $|\dot{E}_m|$, и вычислить максимально допустимый коэффициент поглощения $\Gamma_{\text{доп}}$. По $\Gamma_{\text{доп}}$ определяется значение НПЧ. Суточные графики изменения НПЧ и МПЧ изображают на одном и том же рисунке. Графики дают представление о полосе рабочих частот, которые можно применять в разное время суток. За счет увеличения $P_{\Sigma} D_{\Sigma}$ можно снизить значение НПЧ.

4. МПЧ можно измерять и методом возвратно-наклонного зондирования ионосферы (метод Н.И.Кабанова). Метод использует полурассеянное отражение ионосферной волны земной поверхностью в районе точки p . Рассеянные лучи вновь отражаются от ионосферы и могут приниматься в точке q . По рассеянному полю можно измерять МПЧ и НПЧ в точке q .

5. Основной причиной быстрых замираний сигнала является многолучевое распространение волн. Колебания напряженности поля являются быстрыми и глубокими. Интерференция полей обыкновенной и необыкновенной волн тоже приводит к замираниям. К тому же приводит интерференция полей, рассеянных на неоднородностях тропосферы.

Причиной поляризационных замираний является поворот плоскости поляризации поля. Причиной медленных замираний сигнала является изменение затухания волны в ионосфере.

Для борьбы с замираниями сигнала применяют приемные антенны с узкой диаграммой направленности; при этом антенна принимает только один луч. Используют также прием на разнесенные на

$(10-25)\lambda$ в направлении, перпендикулярном направлению трассы, антенны. Эффективной является и поляризационная обработка сигнала.

6. Во время ионосферно-магнитных бурь разрушается слой F и работа радиолинии нарушается прежде всего на наиболее высоких частотах, а восстанавливается раньше на более низких частотах.

Внезапные вспышки поглощения в ионосфере появляются на освещенной стороне Земли. Они приводят к нарушению работы радиолиний на наиболее низких частотах. Продолжительность их — от нескольких минут до нескольких часов.

14.10. Особенности распространения волн СЧ, НЧ и ОНЧ диапазонов

1. Напряженность поля земной волны при $r_{qp} < 500-700$ км определяют по формуле Шулейкина-Ван дер Поля, а при больших r_{qp} — по строгим дифракционным формулам. Земная волна в этом диапазоне испытывает значительное затухание в полупроводящей среде под поверхностью Земли.

На большие расстояния ЭМ поле в СЧ диапазоне ночью распространяется ионосферной волной путем отражения от слоя E . Днем в неотражающем слое D ионосферная волна практически полностью затухает. Поэтому днем распространение поля происходит только земной волной на небольшие расстояния. Слой E мало подвержен ионосферным возмущениям. Поэтому последние мало влияют на распространение ЭМ поля СЧ диапазона.

Амплитуда медианного значения напряженности поля $|\dot{E}_m|$ [мкВ/м] ионосферной волны ночью для вертикальной антенны может определяться по эмпирической формуле, предложенной Союзом европейского радиовещания (VER):

$$|\dot{E}_m| = 10233 (P_{\Sigma} G_{\Sigma} / r_{qp})^{1/2} \exp(-8,94 \cdot 10^{-4} \lambda^{-0,26} r_{qp})$$

где P_{Σ} определено в кВт, а r_{qp} и λ — в км, r_{qp} — расстояние по дуге большого круга. Середине радиолинии соответствует местная полночь, магнитное склонение в этой точке составляет 61° , число солнечных пятен равно нулю. Если эти параметры отличаются, то вводятся поправки [79].

Ночью в точку p возможен приход земной и ионосферной волн. Флуктуации электронной плотности приводят к флуктуациям фа-

зы ионосферной волны. Интерференция ионосферной и земной волн приводит к ближним замираниям поля. При больших r_{qp} ЭМ поле в точке p может быть результатом интерференции двух полей — поля, отразившегося один раз от слоя E , и поля, отразившегося два раза от слоя E (два скачка). Флуктуации разности фаз этих полей приводят к дальним замираниям. С замираниями борются, применяя передающие антенны, у которых направление максимума излучения поля «прижато» к земной поверхности. При этом зона ближних замираний удаляется от точки q , ЭМ поле претерпевшее два скачка, оказывается ослабленным.

В СЧ диапазоне проявляется перекрестная модуляция ЭМ поля в ионосфере (люксембург–горьковский эффект, см. § 10.7). За счет перекрестной модуляции приемником воспринимаются интенсивные грозовые помехи (грозовой разряд модулирует принимаемый сигнал).

2. В диапазонах НЧ и ОНЧ все виды почвы являются проводниками, коэффициент затухания за счет потерь в почве мал, поэтому земная волна затухает мало. ЭМ поля диапазонов НЧ и ОНЧ хорошо дифрагируют на Земном шаре. Этим объясняется распространение поля земной волной на расстояния до 3000 км. Напряженность электрического поля для $r_{qp} \leq 500 - 600$ км определяется по формуле Шулейкина–Ван дер Поля, для $r_{qp} > 600$ км — по дифракционным формулам.

При $r_{qp} > 300 - 400$ км появляется ионосферная волна, при $r_{qp} \approx 700 - 1000$ км амплитуды напряженностей полей земной и ионосферной волн приблизительно равны. Интерференция полей этих волн приводит к изрезанному графику зависимости амплитуды напряженности поля от расстояния.

Частота $\omega \leq \nu$ в диапазонах НЧ и ОНЧ. Поэтому ϵ зависит от ν и условие отражения волны ионосферой зависит от ν . Для отражения волны достаточно небольшой электронной плотности. Днем отражение происходит от нижней границы слоя D , а ночью — от нижней границы слоя E . Токи смещения и проводимости при этом имеют один порядок. Поэтому слои D и E в этих диапазонах оказываются полупроводниками. По вертикали на расстоянии, равном λ , свойства слоев D и E резко меняются. По этой причине отражение ЭМ поля от слоев D и E происходит как от границы раздела воздух–полупроводник и тепловые потери малы. Нижние границы слоев D и E расположены на высотах 60–100 км, т.е. расстояние между этими границами и поверхностью Земли имеет порядок длины волны. Поэтому условия распространения поля соответствуют условию в диэлектрическом (ионосферном) волноводе, полупроводящими стенками которого являются поверхность

Земли и нижняя граница ионосферы. Существуют частоты, при которых ЭМ поле может распространяться с минимальным затуханием ($f = 8,6 - 12$ кГц, т.е. $\lambda \approx 25 - 35$ км), и критические частоты (около 3 кГц, т.е. $\lambda \approx 100$ км). Фазовая скорость ЭМ поля в таком волноводе нестабильна утром и вечером, когда меняются значения N и ν . Это надо учитывать при работе радионавигационных систем.

Возбужденное в ионосферном волноводе ЭМ поле распространяется между границами сферической формы. С ростом r_{qp} площадь кольцевого сечения волновода увеличивается (плотность ЭМ энергии уменьшается) до тех пор, пока радиус кольца не станет равным радиусу земного шара, а затем уменьшается (плотность ЭМ энергии возрастает). Естественно, что плотность ЭМ энергии в точке p , соответствующей антиподу (диаметрально противоположной точке q) из-за потерь не равна плотности ЭМ энергии в точке q . Но наблюдается увеличение амплитуды напряженности поля при $r_{qp} = 20 \cdot 10^3$ км (эффект антипода).

Для расчета амплитуды напряженности поля используют эмпирическую формулу Остиа:

$$|E_m| = \sqrt{P_\Sigma D_\Sigma} / r_{qp} \cdot (\gamma / \sin \gamma)^{1/2} \cdot \exp(-14 \cdot 10^{-4} \lambda^{-0,6} r_{qp})$$

где P_Σ определено в кВт, а r_{qp} и λ — в км; r_{qp} — расстояние по дуге большого круга, γ — центральный угол (рис. 12.6). Формулу применяют до значений $r_{qp} = (16 - 18) \cdot 10^3$ км над морем и сушей, причем над сушей, начиная от величин $r_{qp} = (2 - 3) \cdot 10^3$ км.

В диапазонах НЧ и ОНЧ поле меняется мало в течение суток и в течение года, нет его случайных изменений. Но полоса частот в этих диапазонах мала.

В диапазонах НЧ и ОНЧ гроззовые разряды могут возбуждать ЭМ поле отрицательно поляризованной волны, которое, распространяясь вдоль магнитного поля Земли (вдоль силовой линии магнитного поля) в ионосфере без отражения от ионосферы при малых значениях α_- (см. § 10.3, п. 6), достигает поверхности Земли на другом «конце» силовой линии магнитного поля. Это создает помеху радиоприему («свистящий атмосферик»), воспринимающуюся на слух как сигнал с изменяющейся за время 0,5–1 секунд частотой (от 400 до 8000 Гц). ЭМ поле грозгового разряда может отражаться от земной поверхности и приниматься через 2–3 с в месте своего возбуждения.

В диапазонах НЧ и ОНЧ осуществляется телеграфная связь на дальние расстояния, работают системы радионавигации.

14.11. Помехи радиоприему. Уравнение связи

1. Приемная антенна «в точке p » находится под воздействием ЭМ поля полезного сигнала и внешних ЭМ полей *мешающих сигналов* (помех) искусственного происхождения, возбуждаемых различными радиоэлектронными системами (*взаимные помехи*), промышленными и бытовыми электрическими установками (*индустриальные помехи*). К помехам искусственного происхождения относятся и *организованные помехи*, ухудшающие условия работы радиоэлектронных средств противника. Помимо этого на антенну воздействуют ЭМ излучения (шумы) *естественного происхождения*: шумы за счет тепловых потерь в антенно-фидерном тракте и его элементах, тепловые шумы Земли и ее атмосферы, шумы Галактики, Солнца, Луны, планет Солнечной системы, «радиозвезд», шумы за счет атмосферных помех.

Сама радиоприемная система имеет тепловые потери мощности. За счет их появляется мощность шумов на выходе этой системы.

Известно, что если R — «шумящее» сопротивление, то хаотическое тепловое движение свободных электронов приводит к появлению э.д.с. теплового шума. Средний квадрат $\bar{\mathcal{E}}^2$ э.д.с., обусловленной тепловыми флуктуациями в «шумящем» сопротивлении R в полосе частот Δf , вычисляется по формуле Найквиста $\bar{\mathcal{E}}^2 = 4k_B T \Delta f$, где $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град — постоянная Больцмана, $T^\circ K$ — температура сопротивления (в градусах Кельвина). Мощность шума, выделяемая в согласованную с цепью нагрузку в полосе частот Δf , $P = k_B T \Delta f$.

2. Для оценки результата воздействия шумов на радиоприемную систему используют параметры — *коэффициент шума и эффективную шумовую температуру*. Коэффициент шума показывает во сколько раз отношение мощностей сигнала и шума на выходе четырехполосника меньше этого же отношения на его входе при прохождении через четырехполосник сигнала от стандартного источника, т.е.

$$F = \left(P_{с,вх} / P_{ш,вх} \right) / \left(P_{с,вых} / P_{ш,вых} \right). \quad (14.4)$$

Стандартным называют источник, интенсивность $N_{ш,0}$ шумов которого постоянна и равна интенсивности шумов активного сопротивления, имеющего температуру $T_0 = 290 K$, т.е.

$$N_{ш,0} = k_B T_0 = 4 \cdot 10^{-21} \text{ Вт/Гц.}$$

Если учесть, что $P_{с,вых}(f)/P_{с,вх}(f) = K(f)$ — значение ординаты амплитудно-частотной характеристики четырехполюсника по мощности на частоте f (K — коэффициент передачи по мощности), то $dP_{ш,вх} = N_{ш,вх}(f)df = N_{ш,о}df$, а $dP_{ш,вых} = [N_{ш,о} + N_{ш,сб}] \cdot K(f)df$, где $N_{ш,сб}(f)$ — спектральная интенсивность собственных шумов четырехполюсника, отнесенная к его входу. При этом из (14.4) имеем

$$F = 1 + N_{ш,сб} / N_{ш,о}.$$

Более полно шумовые свойства четырехполюсника описывает *интегральный (средний) коэффициент шума*, равный отношению полной мощности шумов на выходе четырехполюсника к составляющей этой мощности, обусловленной шумами стандартного источника [69]:

$$F = \frac{\int_0^{\infty} (N_{ш,о} + N_{ш,сб}) K df}{\int_0^{\infty} N_{ш,о} K df} = 1 + \frac{\int_0^{\infty} N_{ш,сб} K df}{N_{ш,о} \int_0^{\infty} K df} = 1 + \frac{P_{ш,сб,вых}}{N_{ш,о} K_0 \Delta f_{ш}}.$$

Тогда мощность собственных шумов на выходе четырехполюсника

$$P_{ш,сб,вых} = N_{ш,о} \cdot K_0 \Delta f_{ш} (F - 1) = k_B T_0 K_0 \Delta f_{ш} (F - 1),$$

где $K_0 = K(f_0)$, f_0 — центральная (резонансная) частота, $\Delta f_{ш}$ — шумовая полоса четырехполюсника:

$$\Delta f_{ш} = \frac{1}{K_0} \int_0^{\infty} K(f) df.$$

Таким образом, при анализе шумовых параметров реальный четырехполюсник, на входе которого действует стандартный источник шума, выделяющий на согласованной входной нагрузке шумовую мощность $P_{ш,вх} = N_{ш,о} \cdot \Delta f_{ш}$, можно заменить эквивалентным идеальным (нешумящим) четырехполюсником, у которого дополнительно к стандартному источнику шума подключен на входе источник с номинальной мощностью шума

$$P_{ш,сб,вх} = P_{ш,сб,вых} / K_0 = k_B T_0 \Delta f_{ш} (F - 1) = k_B T_3 \Delta f_{ш}, \quad (14.5)$$

где

$$T_3 = (F - 1) T_0 \quad (14.6)$$

— *эффективная шумовая температура четырехполюсника* — температура согласованного с четырехполюсником активного сопротивления, которое, будучи подсоединено ко входу идеального четырехполюсника, создает на его выходе мощность $P_{ш,сб,вых}$, равную мощности собственного шума реального четырехполюсника.

3. Рассмотрим эффективную шумовую температуру за счет шумов *естественного происхождения*. Если Δf — полоса частот сигнала, то мощность шумов на входе приемника $P_{ш\Sigma}$ является суммой мощности собственных шумов приемника $P_{ш,пр} = k_B \Delta f T_{пр}$, приведенной к его входу, мощностей тепловых потерь в фидерном тракте $P_{ш,ф} = k_B \Delta f T_{ф}$ и в элементах антенны $P_{ш,А} = k_B \Delta f T_{А}$, мощности шумов внешних источников естественного происхождения $P_{ш,в} = k_B \Delta f T_{в}$:

$$P_{ш\Sigma} = k_B T_{\Sigma} \Delta f = P_{ш,пр} + P_{ш,ф} + (P_{ш,А} + P_{ш,в} \cdot \eta_{А}) \eta_{ф},$$

где T_{Σ} — эквивалентная суммарная шумовая температура приемной антенны, $\eta_{А}$ и $\eta_{ф}$ — коэффициенты полезного действия (КПД) приемной антенны и фидера.

Разделив последнее выражение на $k_B \Delta f$, получаем

$$T_{\Sigma} = T_{пр} + T_{ф} + (T_{А} + T_{в} \eta_{А}) \eta_{ф}. \quad (14.7)$$

Не рассматривая методы расчета величины $T_{пр}$, отметим, что для транзисторных усилителей диапазона СВЧ $T_{пр}$ имеет порядок сотен градусов по Кельвину, а для параметрических — десятки градусов, для охлаждаемых до температур жидкого азота или гелия мазеров — единиц градусов [69, 70].

Эквивалентные шумовые температуры $T_{ф}$ фидерного тракта и его элементов и антенны $T_{А}$ определяются их тепловыми потерями и потерями за счет рассогласования тракта и антенны, а также физическими температурами соответствующих устройств.

Эквивалентная шумовая температура *внешних источников* шума обусловлена собственным радиоизлучением космических источников, собственным тепловым радиоизлучением поверхности Земли, тепловым радиоизлучением атмосферы Земли и отраженным от поверхности Земли радиоизлучением космических источников и атмосферы.

Тепловое радиоизлучение источников характеризуют *спектральной плотностью потока* U и *спектральной интенсивностью* (яркостью) I_f .

Спектральной плотностью потока называют мощность, излучаемую источником в единичной полосе частот через единичную площадку в направлении нормали к последней ($[U] = \text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$). Спектральная интенсивность $I_f = dU / d\Omega$, где Ω — телесный угол ($[I_f] = \text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1} \cdot \text{ср}^{-1}$).

Пусть начало ССК (R, θ, φ) расположено в точке p . Обозначим через $|F_{nm}(\theta, \varphi)| = |F_m(\theta, \varphi)| / |F_m(\theta, \varphi)|_{\max}$ — нормированную амплитудную характеристику направленности приемной антенны, расположенной в свободном пространстве, где $|F_m(\theta, \varphi)|_{\max} = |F_m(\theta_0, \varphi_0)|$ — значение, соответствующее максимуму функции при углах $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$, m — означает заданный тип поляризации (см. § 12.3).

Спектральная интенсивность I_f радиоизлучения теплового происхождения выражается через яркостную температуру T_γ по классической формуле Релея–Джинса: $I_f = 2k_B T_\gamma \cdot \lambda^{-2}$.

Яркостной температурой T_γ источника радиоизлучения называют эквивалентную температуру абсолютно черного тела, спектральная интенсивность которого равна интенсивности данного источника. Функция $T_\gamma(\theta, \varphi)$ описывает распределение интенсивности радиоизлучения по источнику.

Если $D_{пр,м} = D_{0m} |F_{nm}(\theta, \varphi)|^2$ — коэффициент направленного действия приемной антенны, а D_{0m} — его значение при $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$, $S_{пр,м} D_{пр,м} \lambda^2 / 4\pi v$ — эффективная площадь антенны (§ 12.2), то мощность шумов, наводимых в антенне в полосе частот Δf тепловым радиоизлучением (со спектральной интенсивностью $I_f(\theta, \varphi)$) окружающего пространства, с учетом (12.5)

$$\begin{aligned} P_{в,м} &= 0,5 \int_{4\pi} I_f(\theta, \varphi) \cdot |V_{в,м}(p, \omega)|^2 \cdot S_{пр,м} \cdot \Delta f d\Omega = \\ &= \frac{k_B \Delta f D_{0m}}{4\pi v} \int_{4\pi} T_\gamma(\theta, \varphi) \cdot |V_{в,м}(p, \omega)|^2 \cdot |F_n(\theta, \varphi)|^2 d\Omega, \end{aligned}$$

где учтено, что $I_f = 2k_B T_\gamma / \lambda^2$, а коэффициент 0,5 учитывает, что ЭМ поле радиоизлучения неполяризовано, а приемная антенна принимает ЭМ поле по одной из двух ортогонально поляризованных составляющих $\dot{E}_{в,м}$ вектора $\dot{E}_в$ (поэтому половина мощности шума теряется), $V_{в,м}(p, \omega) = V_{в,м}(R_{pq}, \theta, \varphi, \lambda)$ — множитель влияния среды для данного источника радиоизлучения.

Так как $P_{в,м} = k_B \Delta f T_{в,м}$, то разделив последнее равенство на $k_B \Delta f$, получаем

$$T_{в,м} = \frac{D_{0m}}{4\pi V} \int_{4\pi} T_{я}(\theta, \varphi) \cdot |V_{в,м}| \cdot |F_{нм}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (14.8)$$

Таким образом, эффективная шумовая температура приемной антенны зависит от ориентации в пространстве ее диаграммы направленности и от поляризационных свойств антенны. Поэтому эквивалентная суммарная шумовая температура T_{Σ} в (14.7) приемной антенны зависит от поляризационных свойств антенн. Обозначим ее через $T_{m\Sigma}$. Формула (14.8) позволяет рассчитать $T_{в,м}$, если известна характеристика направленности и распределение яркостных температур внешних источников. При этом пределы интегрирования в формуле могут быть разделены на части телесных углов, соответствующие каждому источнику радиоизлучения. Величина $T_{в,м}$ представляет тогда сумму интегральных составляющих вкладов каждого источника (атмосферы, Земли, Галактики, Солнца и др. дискретных источников, отраженного от поверхности Земли, атмосферных помех за счет грозовых разрядов).

4. Тепловое *радиоизлучение атмосферы* обусловлено поглощением энергии распространяющегося ЭМ поля в газах тропосферы и атмосферных образованиях (дожде, тумане, облаках). Кислород создает почти постоянный уровень теплового излучения, так как его содержание в тропосфере почти не меняется. Но содержание водяного пара, присутствие облачных образований и зон дождя, их средние температуры зависят от места наблюдения и времени года, высоты над уровнем моря. Графики для расчета яркостных температур тропосферы, облаков, тумана и дождя приведены в [69]. Яркостная температура тропосферы в полосе частот от 0,1 ГГц до 15 ГГц меняется при угле места $\vartheta = 0$ от значения 30 К до 200 К, а при $\vartheta = 40^\circ$ — от 1 К до 8 К (угол ϑ отсчитывается от линии горизонта).

Расчет яркостной температуры сложной модели тропосферы, когда учитывается наличие слоя тумана, слоистого облака, надоблачных слоев атмосферы, показал [69], что при $f < 0,1$ ГГц значение $T_{я} \leq 1$ К.

Тепловое *радиоизлучение Земли* определяется собственным тепловым радиоизлучением Земли, отраженными от Земли радиоизлучением космических источников и радиоизлучением атмосферы. Яркостная температура при этом зависит от средней температуры поверхности Земли и коэффициентов отражения (4.9), (4.15) при горизонтальной и вертикальной поляризациях поля.

Яркостная температура для почвы с $\epsilon \leq 10$ в полосе частот от 75 ГГц до 10 ГГц при $\vartheta \approx 0$ составляет доли градуса Кельвина, а при $\vartheta = 10^\circ$ $T_{я} = 50$ К ($\epsilon = 10$) и $T_{я} = 140$ К ($\epsilon = 2$) для горизонтальной поляризации поля. Но при *вертикальной поляризации яркостная тем-*

пература выше. С ростом угла ϑ значение $T_{\text{я}}$ увеличивается. Аналогичным образом изменяется и $T_{\text{я}}$ для участка морской воды. Но при вертикальной поляризации $T_{\text{я}}$ меняется от 180 К до 250 К ($\vartheta = 6^\circ$) в полосе частот от 100 МГц до 10 ГГц в то время, как при горизонтальной поляризации она меняется лишь в пределах (2–8) К.

Радиоизлучение, отраженное от поверхности Земли, необходимо учитывать только для частот, больших 10 ГГц.

5. Радиоизлучение космических источников шума состоит из непрерывного фонового излучения Галактики, радиоизлучений дискретных источников и атомарного водорода на частоте 1240 МГц.

Яркостная температура Галактики зависит от координат точек небосвода и частоты. Из результатов измерений следует, что узкий яркий «пояс» радиоизлучения шириной около 3° , лежащий в плоскости галактического экватора, обнаруживается в сантиметровом и дециметровом диапазонах длин волн [69].

На частотах, меньших 250 МГц, имеется широкий «пояс» радиоизлучения, сконцентрированный в пределах $(15\text{--}30^\circ)$ галактической широты. Изотропная составляющая излучения распределена по всей небесной сфере; на частотах, больших 250 МГц, она очень мала, но увеличивается с уменьшением частоты. Наблюдаются и несимметричные распределения: Северный полярный след, превращающийся в локализованный источник на частотах, больших 600 МГц; локализованные радиобразования в районах Лебеда, Веги и Ориона с размерами от 5 до 15° ; слабый «пояс» излучения (пик Лебеда) на частотах 81, 158 и 250 МГц.

Яркостная температура фонового излучения Галактики в галактическом центре в полосе частот от 10 МГц до 5 ГГц меняется от $7 \cdot 10^5$ до 1 К, вне галактического центра в полосе частот от 10 МГц до 500 МГц она изменяется от 10^3 до 1 К.

Дискретные источники космического радиоизлучения наблюдаются на фоне непрерывного излучения Галактики. Существенный вклад в шумовую температуру вносят только Солнце, Луна, планеты Юпитер, Венера, Марс и ряд «радиозвезд».

В радиоизлучении Солнца различают пять составляющих [69]: тепловое излучение «спокойного» Солнца; устойчивые шумы солнечных пятен; шумовые бури, состоящие из кратковременных всплесков, связанных с большими солнечными пятнами; шумовые всплески, обусловленные солнечными вспышками; неполяризованные изолированные выбросы. Яркостная температура, усредненная по видимому телесному углу Солнца, в полосе частот от 30 МГц до 7,5 ГГц меняется от $3 \cdot 10^6$ до $(7,5 \cdot 10^3)$ К в максимуме солнечной активности и от $1,5 \cdot 10^6$ до $(6,4 \cdot 10^3)$ К — в минимуме последней.

При расчетах вклада радиоизлучения Луны в эффективную шумовую температуру антенны яркостная температура лунного диска может быть принята равной 210 К.

С увеличением частоты от 300 МГц до 10 ГГц яркостная температура Юпитера убывает от 10^5 до $(1,1 \cdot 10^2)$ К. Яркостная температура Венеры с ростом частоты от 3 ГГц до 37,5 ГГц убывает от 600 до 315 К. Измеренная яркостная температура Марса в трехсантиметровом диапазоне длин волн равна 212 К. Из радиозвезд наибольшую яркостную температуру в дециметровом диапазоне длин волн имеют Стрелец и Лебедь — х, а на $\lambda = 1$ м — Кассиопея — А.

6. Основные источники атмосферных помех — грозовые разряды, при которых импульсы тока возбуждают ЭМ поле с непрерывным спектром частот. Так как длительность импульсов тока $\tau = 0,1\text{--}0,3$ мс,

то наибольшего значения амплитуда вектора \dot{E}_a этого поля достигает в полосе частот от 300 до 10^4 Гц. Местные грозы возбуждают ЭМ поле, у которого $|\dot{E}_a(f)|$ уменьшается как f^{-1} при росте частоты.

Основные помехи создают грозы, происходящие в течение всего года в экваториальных районах Земного шара. Зависимость $|\dot{E}_a|$ от f при этом сложна, так как $|\dot{E}_a|$ зависит от множителя влияния среды.

В ночные часы уровень помех выше, чем в дневные, что особенно проявляется в диапазоне СВ. В диапазоне КВ в ночное время уровень помех выше при $\lambda > 30$ м, а в дневное — при $\lambda < 20$ м. В диапазоне УКВ обнаруживаются помехи только от местных гроз.

Уровень атмосферных шумов носит квазистационарный характер и зависит от географических координат «точки p ». Он медленно изменяется по сезонам года и в течение суток, поэтому его можно прогнозировать [88].

Для характеристики атмосферных помех МККР предложен параметр — *эффективный коэффициент помех* [88]. Он определяется отношением $g_a = P_a / k_B T_0 \Delta f$, где P_a — мощность помехи. Ее представляют в виде $P_a = k_B T_a \Delta f$, где T_a — шумовая температура атмосферных помех. Это представление является приближенным, так как атмосферные помехи узкополосны. Но в пределах эквивалентной полосы приемника спектральную плотность помехи считают равномерной. Поэтому $g_a = T_a / T_0$.

В [88] на основе обобщения результатов измерений на карты Земного шара нанесены усредненные линии одинаковых уровней g_a для частоты $f = 1$ МГц для четырех сезонов года и 6 равных частей суток. Для пересчета значений g_a на другие частоты каждой карте ставится в соответствие график зависимости усредненных значений g_a от частоты. Графики показывают, что значение $10 \lg g_a$ в полосе частот от 0,01 до 20 МГц при увеличении частоты уменьшается почти по линейному закону. За 100% уровень помех принят уровень в экваториальных районах Африки и Южной Америки. Если принять уровень помех в России за 60%, то на частоте 10 кГц имеем $T_a = 10^{16} \cdot T_0$, на частоте 1 МГц — $T_a = 10^6 \cdot T_0$, на частоте 10 МГц — $T_a = 10^{3,5} \cdot T_0$. При $f \geq 20$ МГц — $T_a \approx 0$ и на этих частотах влиянием атмосферных шумов за счет гроз можно пренебречь.

Так как в диапазонах СДВ, ДВ и СВ применяются слабонаправленные приемные антенны, у которых $F_{им}(\theta, \varphi) \approx 1$, $D_{0m} \approx 1$, то по (14.8) $T_a \approx T_x$ (значение $|V_{a,m}|$ учтено при составлении карт и графиков в [88]).

7. В диапазонах СВЧ-ГВЧ ЭМ поле, рассеянное электрически заряженными каплями дождя и каплями грозových туч, принимается приемной антенной радиолокационной системы. При столкновении капель, обладающих зарядами противоположных знаков, происходит разряд. Разряды происходят и при падении капель на землю. Возникающие импульсы тока возбуждают ЭМ поле помех, отрицательно влияющих на работу радиолокационных систем.

Частицы снега и льда при сильном ветре электризуются и, сталкиваясь между собой, вызывают разряды, поля которых в диапазонах СВЧ-ГВЧ влияют на работу местных радиоэлектронных средств.

8. Меры защиты радиоприемного устройства от *организованных помех* изложены в [89].

9. При работе электрические, электронные и радиотехнические устройства различного назначения создают *индустриальные радиопомехи* (ИРП), которые воздействуют на радиоприемные устройства, телевизионные приемники, звукозаписывающую аппаратуру, электроинно-вычислительные машины, медицинскую диагностическую аппаратуру, и другие чувствительные к ЭМ полям устройства.

ИРП делят на две группы: излучаемые и распространяющиеся по проводам питания, заземления, коммутации [80]. Параметрами первой группы являются напряженность электрического или магнитного поля, плотность потока мощности, полоса частот, а второй — напряжение или ток, мощность, полоса частот.

Источники ИРП классифицируют по основным признакам помехообразующих элементов, являющихся источниками излучения ЭМ поля, и по месту их эксплуатации или установки:

1. Электроустройства бытового, коммунального или другого назначения, эксплуатируемые в жилых домах или подключенные к их электрической сети (лифты, пылесосы, кухонные плиты, швейные машины, ручные электронные инструменты и т.д.).

2. Наземный городской и железнодорожный электротранспорт (троллейбусы, трамваи, тяговые подстанции и др.).

3. Устройства, содержащие двигатели внутреннего сгорания (автомобили, мотоциклы, моторные лодки, бензопилы и др.).

4. Устройства, содержащие источники кратковременных ИРП (холодильники, вентиляторы, регуляторы скорости устройств и др.).

5. Промышленные, научные, медицинские и бытовые высокочастотные установки.

6. Линии электропередач и электрические подстанции.

7. Светильники с люминесцентными лампами.

8. Электрооборудование напряжением не выше 1000 В, эксплуатируемое вне жилых домов и не связанное с их электрическими сетями.

9. Устройства магистральной, внутризоновой и местной связи.

10. Телевизионные и УКВ радиовещательные приемники.

11. Радиовещательные приемники с амплитудной модуляцией.

Источники ИРП, устанавливаемые совместно со служебными радиоприемными устройствами, подразделяют на группы в зависимости от назначения служб (воздушная, морская, сухопутная, космическая).

На частотах f до 1 ГГц, как правило, ИРП характеризуются напряженностью векторов ЭМ поля, на частотах f , больших 1 ГГц — плотностью потока мощности. При оценочных расчетах считается, что на высотах от 1 до 4 м над уровнем земли амплитуда

вектора \dot{E}_n уменьшается с увеличением расстояния R_{qp} как $R_{qp}^{-2.2}$ и с ростом f в полосе от 30 МГц до 300 МГц увеличивается. Поляризация ЭМ поля не может быть предсказана [80].

Экранирующее влияние зданий на ЭМ поле ИРП зависит от материала и толщины стен зданий, площади окон. Считается, что здания снижают интенсивность ИРП приблизительно на 10 дБ.

ЭМ поле, создаваемое системами зажигания автомобиля на расстоянии 10 м от него, имеет максимальное значение на частоте 30 МГц [80]. Среднее значение напряженности электрического поля от автомобилей в группе составляет — 10 дБ мкВ/м.

Линии электропередач и их оборудование создают наибольшие напряженности ЭМ полей ИРП при дожде, снегопаде, тумане. Спектр ИРП находится на частотах от ОНЧ до ОВЧ. Значения $|\dot{E}_n|$ лежат в пределах от 40 до 160 дБ мкВ/м и на расстоянии около 10 м $|\dot{E}_n|$ изменяется как R_{qp}^{-2} .

Сварочные устройства создают ЭМ поле с наибольшим значением $|\dot{E}_n|$, равным приблизительно 20 дБ мкВ/м около частот 750 кГц, 3 и 20 МГц [80].

ИРП по проводам распространяются на значительные расстояния.

Подавление ИРП производится техническими и организационными мероприятиями. Подавление может быть осуществлено в источнике ИРП, на пути распространения ИРП и в радиоприемном устройстве *помехоподавляющими устройствами или их элементами*. К последним относят дроссели, фильтры, конденсаторы. Основными методами подавления ИРП являются *экранирование и фильтрация* [80, 90].

Нормирование ИРП производится по группам [80].

10. Считая, что в (14.6) $T_3 = T_{m\Sigma}$, по значению $T_{m\Sigma}$ находим коэффициент шума радиоприемной системы: $F_m = 1 + T_{m\Sigma} / T_0$.

11. При энергетическом расчете радиолинии необходимо выбрать мощность передатчика, тип поляризации ЭМ поля, параметры передающей и приемной антенн, параметры приемника и длину волны такими, чтобы в условиях реальной радиотрассы обеспечить необходимое качество связи. Для этого надо, чтобы $P_{c,вх} \geq \gamma^2 P_{ш,вх}$, где γ — коэффициент различимости [70]. Задаваемая величина последнего зависит от типа радиолинии. В телеграфии коэффициент различимости может быть задан равным 1, а в телевизионной радиолинии — $\gamma \geq 100$.

Учитывая, что $P_{ш,вх} = k_B \Delta f T_{m\Sigma}$, выразим значение $P_{c,вх}$ для реальной радиолинии. Учтем, что $P_{\Sigma} = P_{\Pi} \eta_{\Sigma}$, где P_{Π} — мощность, поступающая на вход передающей антенны, η_{Σ} — КПД передающей антенны.

Мощность сигнала, поступающего на вход приемника, $P_{c,вх} = P_{0,пр} \eta_A \eta_{\Phi}$, где $P_{0,пр}$ определено в (12.5):

$$P_{c,вх} = P_{\Pi} \cdot \epsilon_{m\Sigma} \epsilon_{пр,м} \left(\frac{\lambda}{4\pi R_{qp}} \right)^2 |V_m(\rho, \omega)|^2 \geq \gamma^2 k_B \Delta f T_{m\Sigma}, \quad (14.9)$$

где $\epsilon_{m\Sigma} = \eta_{\Sigma} D_{\Sigma}$, $\epsilon_{пр,м} = \eta_A D_{пр}$ — коэффициенты усиления антенн при заданном типе поляризации ЭМ поля, а $T_{m\Sigma}$ определено выражением (14.7).

Из (14.9) получаем уравнение связи:

$$P_{\Pi} \geq \gamma^2 \frac{k_B \Delta f T_{m\Sigma}}{\epsilon_{m\Sigma} \epsilon_{\text{пр},m} \eta_{\Phi}} \left(\frac{4\pi R_{\text{qp}}}{\lambda} \right)^2 |V_m|^{-2}. \quad (14.10)$$

Таким образом, величина P_{Π} , необходимая для качественного приема информации, зависит от вида передаваемой информации (от $\Delta f, \gamma$), от типа поляризации ЭМ поля, шумовой температуры $T_{m\Sigma}$, параметров антенн, длины волны и расстояния R_{qp} , множителя влияния среды. Поскольку $T_{m\Sigma}, \epsilon_{m\Sigma}, \epsilon_{\text{пр},m}$ и $|V_m|$ зависят от λ , то уравнение связи (14.10) можно использовать для выбора оптимальной длины волны или для решения других оптимизационных задач, например, выбора типа поляризации.

14.12. Особенности распространения волн оптического диапазона

1. Во многих оптических методах исследования и оптических приборах информацию извлекают из ЭМ поля, распространяющегося в естественных условиях Земли от источника к приемнику. Это, например, происходит в дальномерах, перископах, биноклях, телескопах и др. В более точных по сравнению с радиотехническими оптических навигационных системах ближнего ориентирования самолетов и морских судов применяются лазеры. В инфракрасной фотографии, в тепловизорах и системах самонаведения управляемых ракет используется поле излучения инфракрасной (ИК) области оптического диапазона длин волн. В этих случаях ИК излучение создают сами нагретые наблюдаемые объекты (используется принцип пассивной локации). В ночных биноклях, прицелах, позволяющих при облучении заданных объектов полем от мощного ИК источника вести наблюдение за ними или прицеливание в темноте (активная локация), ЭМ поле распространяется в естественных условиях Земли. ЭМ поле оптического диапазона длин волн используется в средствах связи (например, «оптический» телефон).

К оптическому диапазону относят ЭМ колебания с длиной волны λ от 0,01 мкм до 1 мм (частоты от $3 \cdot 10^2$ ГГц до 30 ГГц). Этот диапазон делят на ультрафиолетовую ($\lambda = 0,01 + 0,38$ мкм), видимую ($\lambda = 0,38 + 0,76$ мкм) и ИК области ($\lambda = 0,76$ мкм + 1 мм). ИК область делится на 3 части: ближнее ИК излучение ($\lambda = 0,76 + 1,5$ мкм), среднее — ($\lambda = 1,5 + 5,6$ мкм) и дальнее — (λ от 5,6 мкм до 1 мм).

ИК излучение возникает в результате колебательных и вращательных движений атомов и молекул нагретого вещества. Оптическое излучение с более короткими длинами волн достигается за счет переходов в атомах и молекулах излучающего тела.

Преимущества волн оптического диапазона связаны с малой длиной волны (большой частотой), что позволяет при заданной полосе частот Δf иметь огромное количество каналов (передать большие объемы информации) и при малых геометрических размерах передающей и приемной «антенн» достигать малой ширины диаграммы направленности (см. § 2.11), что дает высокую пространственную разрешающую способность и возможность достижения высоких концентраций излучаемой мощности в малом телесном угле (трубке лучей — «пучке волн») при сравнительно малой стоимости оборудования. Но использование отмеченных преимуществ ограничено существенным влиянием среды на множитель влияния $|V(p, \omega)|$.

2. Рассмотрим определения. Поглощение оптического излучения в атмосфере (энергетическое ослабление ЭМ волн) обусловлено, главным образом, явлениями его поглощения и рассеяния молекулами газов и разнообразными аэрозольными частицами

[91, 92]. Коэффициентом поглощения $\Gamma(f)$ для излучения с частотой f называется коэффициент пропорциональности в выражении закона поглощения (Бугера), который в дифференциальной форме имеет вид: $dI(f) = -\Gamma(f)I(f)dl$, где dl — ослабление направленного излучения интенсивности I , прошедшего через слой толщины dl ($I(f)$ пропорционально $|V(f)|^2$). Для однородной среды интегральная форма закона имеет вид $I = I_0 \exp(-\Gamma l)$, где $I_0(f), I(f)$ — интенсивности излучения до и после прохождения слоя толщины l . Величину $\tau = \Gamma l$ называют *оптической толщиной среды*, а величины

$$T(f) = I(f)/I_0(f) \text{ и } A(f) = 1 - T(f) \quad (14.11)$$

спектральными пропусканием и поглощением среды [91, 92]. Из этих выражений следует, что знание $\Gamma(f)$ позволяет провести количественную оценку доли поглощенного (или пропущенного) данным слоем среды монохроматического излучения.

Функции $T(f)$ и $A(f)$ могут характеризовать доли прошедшего через слой среды и поглощенного слоем излучения в спектральном интервале $\Delta f = f_2 - f_1$ (полосе частот), если их определить [92] как

$$T = \frac{\int_{f_1}^{f_2} I_0(f) e^{-\tau} df}{\int_{f_1}^{f_2} I_0(f) df}, \quad A = \frac{\int_{f_1}^{f_2} I_0(f) (1 - e^{-\tau}) df}{\int_{f_1}^{f_2} I_0(f) df} \quad (14.12)$$

Если в полосе частот Δf имеем $I_0(f) = \text{const}$, то

$$T = \frac{1}{\Delta f} \int_{f_1}^{f_2} e^{-\tau(f)} df, \quad A = \frac{1}{\Delta f} \int_{f_1}^{f_2} (1 - e^{-\tau(f)}) df \quad (14.13)$$

Энергетические потери оптического излучения из-за поглощения атмосферными газами оценивают по (14.11), когда в пределах спектра излучения источника $\Gamma(f)$ можно считать независимым от частоты, например, в полосах частот, свободных от линий поглощения. Это наиболее важная для практики ситуация, при которой $\Gamma(f)$ принимает наименьшие значения. При этом полосы частот называют *«окнами прозрачности» атмосферы*.

Если нельзя пренебречь зависимостью Γ от f в полосе частот Δf , используют формулу (14.12). При этом зависимость T от f является сложной. Это происходит и тогда, когда $I(f)$ состоит из совокупности линий, в пределах спектральной ширины каждой из которых Γ не изменяются, но имеют разные значения для разных линий спектра излучения.

При экспериментальном определении значений T (или A) по (14.11) достаточно измерения для одного слоя среды, чтобы выполнить вычисления для другого слоя этой же среды. Если формула (14.11) неприменима, то измерения надо проводить для широкого интервала значений f и l , чтобы можно было использовать метод интерполяции для другого слоя.

3. Спектр поглощения атмосферных газов состоит из определенных спектральных линий (см. § 13.4). Интенсивности линий поглощения атмосферных газов изменяются от линии к линии так сильно, что если излучение попадает в центр наиболее интенсивной линии, то оно полностью поглощается в слое атмосферы толщиной в доли миллиметра. Наоборот, если излучение попадает в промежуток между «слабыми» линиями (в *«микроокна прозрачности»* атмосферы), то оно мало ослабляется в слое толщиной в десятки и сотни километров.

Таким образом, если распространение оптического излучения происходит в атмосфере Земли, то это излучение *должно приходиться на участки спектра*, занятые ши-

роками «окнами прозрачности» атмосферы или, что еще лучше, если оно в пределах этих «оконов» попадает по частоте в промежутки между слабыми линиями поглощения, т.е. в «микробока прозрачности» атмосферы. При этом длины волн источников излучения должны быть стабилизированы.

4. Молекулярное рассеяние оптического излучения хорошо изучено. ЭМ поле, попадая на молекулы и атомы газа, приводит их в колебательное и вращательное движение. Размеры молекул и атомов малы по сравнению с λ , поэтому они переизлучают ЭМ поле как элементарные излучатели. Особую роль в установлении закона переизлучения (закона рассеяния поля) имеет задача дифракции (рассеяния) ЭМ поля на сферической частице и ансамбле этих частиц. Благодаря тепловому движению частиц нет фазовой зависимости между вторичным излучением отдельных частиц. Поэтому, хотя расстояния между частицами малы по сравнению с λ , частицы рассматриваются как независимые излучатели и считается, что интенсивность вторичного излучения пропорциональна числу частиц. Коэффициент поглощения за счет молекулярного рассеяния в газах [92]

$$\Gamma_{\Gamma}(\lambda) = \frac{8\pi^3(n^2 - 1)^2(6 + 3\delta)}{3N\lambda^4(6 - 7\delta)},$$

где n — показатель преломления среды, $\delta = 0,035$ — фактор деполаризации рассеянного излучения, N — число молекул в единице объема.

Так как Γ_{Γ} пропорционально λ^{-4} , то влияние молекулярного рассеяния на $|V|^2$ проявляется меньше в ИК. Имеются таблицы значений Γ_{Γ} для разных λ , разных высот над землей и направлений распространения [91, 92]. Так, при распространении в приземном слое атмосферы на расстоянии $l = 10$ км при $\lambda = 0,3$ мкм потери составляют $T = 76,3\%$, при $\lambda = 0,55$ мкм — $T = 10,9\%$, при $\lambda = 1,06$ мкм — $T = 0,9\%$.

5. Поглощение оптического излучения за счет *аэрозольного рассеяния* включает в себя ослабление излучения собственно за счет рассеяния на частицах аэрозолей и ослабление за счет нагревания частиц распространяющимся полем [91]. Количественные данные [91, 92] о потерях излучения, распространяющегося через водный туман и облако с метеорологической дальностью видимости в $S = 200$ м, следующие: $\Gamma_{\Gamma} \approx 19,6$ 1/км при $\lambda = (0,51 + 10,6)$ мкм. В атмосферной дымке с $S = 10$ км $\Gamma_{\Gamma} \approx (0,4 + 0,01)$ 1/км при $\lambda = 0,5 + 10,6$ мкм. В снегопад максимальное значение $\Gamma_{\Gamma} \approx 30$ дБ/км при $\lambda = 0,6 + 10,6$ мкм.

6. Если энергетическое ослабление оптического излучения в атмосфере приводит к уменьшению дальности действия систем связи, навигации и др., то *рефракция волн* в атмосфере и турбулентность последней влияют на структуру «пучка волн» и траекторию его распространения и тем самым определяют *точностные параметры систем*.

Рефракция лучей рассмотрена в § 11.6, § 11.7, § 13.2. Под регулярной рефракцией понимают среднее значение угла рефракции, зависящее от метеоусловий. Случайной рефракцией называют изменения угла рефракции во времени, которые вызывают дрожание оптического «пучка волн» и описываются теорией распространения волн оптического диапазона в турбулентной атмосфере. Существует явление «боковой рефракции», вызываемое неоднородностью показателя преломления в горизонтальной плоскости [91, 92].

Для горизонтальных трасс рефракцию характеризуют *коэффициентом земной рефракции* (КЗР), равным отношению радиуса земного шара к радиусу кривизны луча в атмосфере. В навигации КЗР принят равным 0,16. Пределы изменения КЗР над сушей от 0,007 до 0,595 [91], в арктических районах он достигает значения 1,74.

Зависимость угла рефракции от λ для горизонтальных трасс незначительна. При увеличении λ оптическая рефракция переходит в радиорефракцию (см. § 13.2).

7. Векторы \vec{E}, \vec{H} в атмосфере испытывают флуктуации амплитуды и фазы. Турбулентность атмосферы вызывает искажение фронта волны, что приводит к расширению лучевой трубки («пучка волн»), перераспределению плотности потока мощности в ней, изменению его «центра тяжести» (направления «максимального излучения»), происходят случайные изменения поперечного сечения лучевой трубки. Расщепление оптического пучка на небольших расстояниях проявляется в виде сложной структуры наблюдаемого на экране пятна («зернистость луча»). С увеличением расстояния при наличии сильных флуктуаций оптический пучок расщепляется на тонкие нити, имеющие вид круглых или серповидных пятен, происходят случайные флуктуации поляризации волны.

8. Влияние фоновых помех в оптическом диапазоне на приемное устройство изложено в [92, 93].

9. При распространении в атмосфере ЭМ поля оптического диапазона, возбуждаемого при больших мощностях излучения, параметры атмосферы в лучевой трубке становятся зависящими от напряженностей векторов этого поля, что соответствует появлению *нелинейных эффектов* (см. § 10.7).

Эффект самофокусировки лазерного излучения состоит в том, что под воздействием ЭМ поля коэффициент преломления атмосферы в трубке лучей изменяется так, что трубка становится «оптическим волноводом» (см. § 7.8) или «линзовой линией» (§ 7.7).

Эффект насыщения состоит в том, что коэффициент поглощения в трубке лучей за счет молекулярного рассеяния в газах атмосферы уменьшается при увеличении плотности потока мощности (при $|\Pi| \geq 10^{11}$ Вт/м²). При этом наступает увеличение прозрачности («просветление») атмосферы.

10. Таким образом, оптическое излучение в атмосфере испытывает *существенное поглощение в аэрозолях*: в тумане и облаке коэффициент поглощения по мощности достигает значений 400 дБ/км и более. Поэтому в атмосфере естественные радиотрассы могут быть только *малой протяженности* или их можно использовать только в районах с сухим климатом. Навигационные системы оптического диапазона волн могут быть только *ближнего ориентирования* (ближнего действия).

В условиях *космического пространства* оптическое излучение испытывает *очень малое поглощение*. Поэтому на радиотрассах типа космос-космос применение оптического излучения перспективно.

14.13. Понятие об электромагнитной совместимости радиозлектронных средств

1. Радиочастотный спектр (РЧС) ограничен частотами ЭМ колебаний от 3 кГц до 300 ГГц. Наиболее загруженными его участками являются те, для которых освоена производством элементная база. Для работы каждого радиозлектронного средства (РЭС) необходима определенная полоса частот. В результате увеличения числа РЭС проявился недостаток в организации работы РЭС практически во всей освоенной части радиочастотного спектра. Неравномерность загрузки последнего обусловлена и особенностями распространения радиоволн. Наиболее перегруженными оказались ОВЧ, ВЧ и частично СЧ диапазоны.

Часто пространственная плотность размещения РЭС велика. В районах крупных административных центров число РЭС может достигать $(50-60) \cdot 10^3$, на самолетах — 25-30, на надводных кораблях — 40 и более. Перегруженность и неравномерная нагрузка освоенной части радиочастотного спектра вынуждает использовать в РЭС близкие рабочие частоты. Это повышает вероятность работы РЭС на совпадающих или близких частотах излучения и приема ЭМ поля. В результате порождаются взаимные непреднамеренные

помехи работе РЭС. Изложенное является одной из основных причин нарушения ЭМ совместимости РЭС.

Под ЭМ совместимостью (ЭМС) РЭС понимают способность РЭС работать с требуемым качеством при воздействии непреднамеренных помех и не создавать недопустимых помех другим РЭС. Оценка ЭМС РЭС требует системного подхода. Дисциплина «ЭМС РЭС» изучает общие закономерности, присущие ЭМ связям между РЭС как элементами большой физической системы. Последняя состоит из совокупности РЭС, работающих в общих полосах частот и в ограниченном пространстве. Дисциплина изучает организацию работы большого числа РЭС при непреднамеренных ЭМ связях между ними. Теория ЭМС РЭС прогнозирует влияние условий эксплуатации на значения технических параметров РЭС, определяющих их ЭМС, на организационно-технические мероприятия, проводимые на этапах проектирования, производства и эксплуатации РЭС [80, 81]. Разработаны государственные стандарты на ЭМС РЭС [82, 83].

2. Предмет дисциплины «ЭМС РЭС» можно определить [80] как: «установление закономерностей, относящихся к оптимальному использованию искусственно создаваемых радиочастотных ЭМ полей для передачи и (или) приема или извлечения информации или энергии; установление закономерностей нежелательного воздействия на радиоэлектронное устройство других РЭС, одновременно с ним работающих; выявление путей и разработка критериев и методов обеспечения наибольших эффективности использования и вместимости радиочастотного пространства, в том числе совершенствования эксплуатационно-технических характеристик РЭС, влияющих на ЭМС РЭС; синтез РЭС и радиосистем с заданными характеристиками эффективности использования РЧС, т.е. характеристиками, включающими учет внеполосных и побочных излучений и побочных каналов приема, а также диаграмм направленности антенн. Синтез радиосистем включает также вопросы организации работы отдельных РЭС».

Эти задачи можно разделить на стратегические и локальные. Задачи стратегического характера решают вопросы распределения полос радиочастот между всеми радиослужбами. При этом устанавливаются границы полос частот, распределяемых каждой радиослужбе, статус распределения, условия совместимости, в том числе основные нормы на параметры радионизлучений РЭС по радиослужбам.

Распределение полос радиочастот между радиослужбами в международном масштабе происходит на компромиссной основе на Всемирных Административных Радиоконференциях по пересмотру Регламента радиосвязи. Таблица распределения частот между радиослужбами является одним из важнейших компонентов международного Регламента радиосвязи. Полосы частот внутри стран распределяются с учетом или в полном соответствии с таблицей.

К задачам стратегического характера относят также вопросы эффективного использования РЧС, установление общих правил работы в рамках радиослужбы, разработку планов выделения радиочастот, нормирование и стандартизацию, выдачу разрешений на разработку и серийный выпуск РЭС, установление правил координации работы РЭС.

На Всемирных административных радиоконференциях по радиовещанию, по спутниковому радиовещанию, морской подвижной службе, воздушной подвижной службе устанавливаются наиболее общие правила работы и требования к РЭС.

Задачи локального характера объединяют широкий круг конкретных задач ЭМС [80]: разработка и серийный выпуск РЭС, при этом системные требования к РЭС определены при решении стратегических задач, разработчик определяет «внутренние» параметры РЭС, обеспечивающие выполнение системных требований к ЭМС; проектирование и организация работы линий и сетей радиосвязи (применяются технические и организационные методы); организация группы РЭС, размещаемых на одном объекте (воздушном или морском судне, на радиодендре и др.). Размещение в непосредственной близости друг от друга многих РЭС приводит к их взаимодействию через общие цепи электропитания, через антенны, корпус РЭС и т.п. При этом проявляются помехи радиоприему за счет промышленных помех, побочных каналов приема, шумовых излучений и т.д. и поэтому

выявляется конкретная причина и уровень возникающей несовместимости группы РЭС. После этого определяются пути устранения несовместимости.

Международные правовые и технические решения, касающиеся использования РЧС и ЭМС РЭС освещены в [80].

ЗАДАЧИ

1. На ионосферу под углом 30^0 падает ЭМ поле частоты 1 МГц. Определить слой ионосферы, от которого поле отражается днем и ночью. (Использовать графики рис. 14.1).

2. Рассчитать максимальные частоты, при которых ЭМ поле отражается от каждого из слоев ионосферы при вертикальном падении на ионосферу (использовать графики рис. 14.1).

3. Рассчитать пределы изменения (по высоте) коэффициента затухания ЭМ поля в слое D на частоте 200 кГц (использовать графики рис. 14.1).

4. Рассчитать вертикально поляризованную составляющую медианного значения $|\dot{E}|$, возбуждаемого ночью в средней широте на расстоянии 1500 км от передающей антенны в виде вертикального вибратора над Землей, излучающего мощность 10 кВт на $\lambda = 800$ м, $D_{\Sigma} = 1,6$.

5. Рассчитать амплитуду вектора напряженности электрического поля, возбуждаемого вертикальным вибратором у поверхности суши на расстоянии 700 км, если $P_{\Sigma} D_{\Sigma} = 50$ кВт, $\lambda = 1500$ м.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Разложение вектора \mathbf{A} на составляющие в декартовой, цилиндрической (r, φ, z) и сферической системах (R, θ, φ) координат и связь между составляющими вектора (системы координат согласованы):

$$\mathbf{A} = \mathbf{1}_x A_x + \mathbf{1}_y A_y + \mathbf{1}_z A_z = \mathbf{1}_r A_r + \mathbf{1}_\varphi A_\varphi + \mathbf{1}_z A_z = \mathbf{1}_R A_R + \mathbf{1}_\theta A_\theta + \mathbf{1}_\varphi A_\varphi;$$
$$A_r = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi; \quad A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi; \quad A_z = A_z; \quad (\text{П.1.1})$$

$$A_R = A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta;$$

$$A_\theta = A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta, \quad A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi.$$

Координаты точки p связаны формулами

$$x = r \cos \varphi = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi = R \sin \theta \sin \varphi,$$
$$z = R \cos \theta, \quad R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}. \quad (\text{П.1.2})$$

Теорема Остроградского-Гаусса

$$\int_S \mathbf{A} \mathbf{n} dS = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV, \quad (\text{П.1.3})$$

где \mathbf{n} — орт, внешней относительно рассматриваемой области, нормали к замкнутой поверхности S , ограничивающей объем V .

Теорема Стокса:

$$\int_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \mathbf{n} dS. \quad (\text{П.1.4})$$

Теорема Грина:

$$\int_V (\psi_1 \Delta \psi_2 - \psi_2 \Delta \psi_1) dV = \int_S (\psi_1 \text{grad } \psi_2 - \psi_2 \text{grad } \psi_1) dS, \quad (\text{П.1.5})$$

где ψ_1, ψ_2 — скалярные функции.

Правила вычисления

$$\text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{B}, \quad \text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}; \quad (\text{П.1.6})$$

$$\text{div grad } \psi = \Delta \psi; \quad \text{rot grad } \psi = 0; \quad \text{div rot } \mathbf{A} = 0; \quad (\text{П.1.7})$$

$$\text{div } \psi \mathbf{A} = \psi \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \text{ grad } \psi; \quad \text{rot } \psi \mathbf{A} = \psi \text{ rot } \mathbf{A} + [\text{grad } \psi, \mathbf{A}]; \quad (\text{П.1.8})$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \mathbf{C} = [\mathbf{B}, \mathbf{C}] \mathbf{A} = [\mathbf{C}, \mathbf{A}] \mathbf{B}. \quad (\text{П.1.9})$$

Декартова система координат (ДСК):

$$\text{grad } \psi = \mathbf{1}_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (\text{П.1.10})$$

$$\text{rot}_x \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \text{rot}_y \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \text{rot}_z \mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}; \quad (\text{П.1.11})$$

$$\Delta \psi = \partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 + \partial^2 \psi / \partial z^2. \quad (\text{П.1.12})$$

Цилиндрическая система координат (ЦСК):

$$\text{grad}_r \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \text{grad}_\varphi \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad \text{grad}_z \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad (\text{П1.13})$$

$$\text{div A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (\text{П1.14})$$

$$\text{rot A} = \mathbf{1}_r \left(\frac{\partial A_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{1}_\varphi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right); \quad (\text{П1.15})$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (\text{П1.16})$$

Сферическая система координат (ССК):

$$\text{grad}_R \psi = \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad \text{grad}_\theta \psi = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \text{grad}_\varphi \psi = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad (\text{П1.17})$$

$$\text{div A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (\text{П1.18})$$

$$\begin{aligned} \text{rot A} = & \mathbf{1}_R \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \\ & + \mathbf{1}_\theta \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial R} (R A_\varphi) \right] + \mathbf{1}_\varphi \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R A_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right]; \end{aligned} \quad (\text{П1.19})$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\partial \psi}{\partial R}) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{П1.20})$$

П.2. СВОЙСТВА δ -ФУНКЦИИ

Трехмерную δ -функцию $\delta(p-q) = \delta(p, q)$ определяют правилом

$$\int_{V_n} f(p) \delta(p-q) dV = \begin{cases} f(q), & q \in V_n, \\ 0, & q \notin V_n, \end{cases} \quad (\text{П2.1})$$

где $f(p)$ — некоторая финитная функция, т.е. отличная от нуля лишь в конечных областях пространства, $p = p(x, y, z)$ — точка наблюдения, $q = q(x', y', z')$ — точка интегрирования. При $f(p) = 1$, имеем правило

$$\int_{V_n} \delta(p-q) dV = \begin{cases} 1, & q \in V_n, \\ 0, & q \notin V_n. \end{cases} \quad (\text{П2.2})$$

Если ξ, η, ζ — криволинейная ортогональная система координат в пространстве, а L_ξ, L_η, L_ζ — метрические коэффициенты (Ляме), то $dV = L_\xi L_\eta L_\zeta d\xi d\eta d\zeta$ и в соответствии с (П2.2) размерностью трехмерной δ -функции является $[\delta(p-q)] = [dV]^{-1} = \text{м}^{-3}$.

Одномерная δ -функция по (П2.1) определяется правилом

$$\int_L f(\xi) \frac{1}{L_\xi} \delta(\xi - \xi') L_\xi d\xi = \begin{cases} f(\xi'), & \xi' \in L, \\ 0, & \xi' \notin L, \end{cases} \quad (\text{П2.3})$$

поэтому $[\delta(\xi - \xi') / L_\xi] = [L_\xi d\xi]^{-1} = m^{-1}$. Трехмерная и одномерная δ -функции связаны соотношением

$$\delta(p-q) = \frac{\delta(\xi - \xi_0)}{L_\xi} \frac{\delta(\eta - \eta_0)}{L_\eta} \frac{\delta(\zeta - \zeta_0)}{L_\zeta}. \quad (\text{П2.4})$$

В ДСК $L_\xi = L_\eta = L_\zeta = 1$, в ЦСК $L_\xi = 1, L_\eta = r, L_\zeta = 1$, в ССК $L_\xi = 1, L_\eta = R, L_\zeta = R \sin \theta$.

Интеграл Фурье δ -функции

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(x-x')} d\lambda. \quad (\text{П2.5})$$

δ -функция симметрична по аргументам p и q : $\delta(p-q) = \delta(q-p)$.

П.3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\psi}{dx} + (1 - \frac{m^2}{x^2}) \psi = 0 \quad (\text{П3.1})$$

называется уравнением Бесселя или уравнением цилиндрических функций m -го порядка. Частными решениями уравнения являются $J_m(x)$ и $N_m(x)$ — функции Бесселя и Неймана m -го порядка, аргумента x . Их сопоставляют с частными решениями, соответственно $\cos x$ и $\sin x$, уравнения $\psi'' + \psi = 0$, определяющего тригонометрические функции. Экспоненциальным функциям $\exp(\pm ix) = \cos x \pm i \sin x$ соответствуют функции Ганкеля $H_m^{(1)}(x)$ и $H_m^{(2)}(x)$ — первого и второго рода аргумента x :

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iN_m(x); \quad H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iN_m(x). \quad (\text{П3.2})$$

Общее решение уравнения (П3.1) выражается в двух формах

$$\psi(x) = a_m J_m(x) + b_m N_m(x); \quad \Psi(x) = c_m H_m^{(1)}(x) + d_m H_m^{(2)}(x), \quad (\text{П3.3})$$

где a_m, b_m, c_m, d_m — постоянные коэффициенты.

Корни $v_{mn}(n=1,2,\dots)$ уравнения $J_m(x) = 0$ определяются значениями $v_{01} = 2,405, v_{02} = 5,52, v_{03} = 8,654, \dots; v_{11} = 3,83, v_{12} = 7,02, v_{13} = 10,17, \dots; v_{21} = 5,14, v_{22} = 8,42, \dots$. Используются и корни $v'_{mn}(n=1,2,\dots)$ уравнения $J'_m(x) = 0$: $v'_{01} = 3,83, v'_{02} = 7,02, v'_{03} = 10,17, \dots; v'_{11} = 1,84, v'_{12} = 5,33, v'_{13} = 10,17, \dots; v'_{21} = 3,05, v'_{22} = 6,7, \dots; v'_{31} = 4,2, v'_{32} = 8,01, \dots$.

Асимптотические представления функций при $x \gg 1, x \gg |m|$

$$H_m^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[\pm i \left[x - \frac{\pi}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \right], \quad (\text{П3.4})$$

$$J_m(x) \approx (2/\pi x)^{1/2} \cos \left[x - \frac{\pi}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right], \quad N_m(x) \approx (2/\pi x)^{1/2} \sin \left[x - \frac{\pi}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right].$$

При $x \ll 1$

$$\begin{aligned}
 J_0(x) &\approx 1 - x^2/4, \quad J_m \approx (x)^m / (2^m \cdot m!) \quad (m > 0), \\
 N_0(x) &= -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{1,78x}, \quad N_m(x) \approx -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^m, \quad m > 0, \\
 H_0^{(2)}(x) &= \frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{(i1,78x)}, \quad H_1^{(2)}(x) \approx \frac{2i}{\pi x}.
 \end{aligned}
 \tag{П3.5}$$

Обозначив через $Z_m(x)$ любую цилиндрическую функцию при m - целом, имеем функциональные соотношения

$$Z'_m(x) = -\frac{m}{x} Z_m(x) + Z_{m-1}(x), \tag{П3.6}$$

$$Z_{-m}(x) = (-1)^m Z_m(x), \quad \frac{d}{dx} [x^m Z_m(kx)] = kx^m Z_{m-1}(kx),$$

$$J_m(x) = \frac{1}{2} [H_m^{(1)}(x) + H_m^{(2)}(x)] = \frac{1}{2} [H_m^{(2)}(x) - (-1)^m H_m^{(2)}(-x)]. \tag{П3.7}$$

Если $R = [r^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') + r'^2]^{1/2}$ — расстояние между точками $p(r, \varphi)$ и $q(r', \varphi')$, то

$$H_0^{(2)}(kR) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi')} \begin{cases} J_n(kr') H_n^{(2)}(kr), & r \geq r', \\ J_n(kr) H_n^{(2)}(kr'), & r \leq r'. \end{cases} \tag{П3.8}$$

Разложение экспонент в ряд Фурье имеет вид

$$\exp(\pm i x \cos \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pm i)^n \exp(\mp i n \alpha) J_n(x). \tag{П3.9}$$

Вронскиан цилиндрических функций

$$J_m(x) H_m^{(2)'}(x) - J_m'(x) H_m^{(2)}(x) = 2/i \pi x. \tag{П3.10}$$

П4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ФУНКЦИЯ ГРИНА

1. В ДСК векторное уравнение Гельмгольца (1.117) распадается на три независимых скалярных уравнения Гельмгольца (см. задачу 1.25): $\Delta \dot{A}_m + k^2 \dot{A}_m = -\dot{j}_m^c$, где $m = x, y$ или z . Предполагаем, что функции $\dot{j}_m^c(\rho)$ заданы в области V_n и интегрируемы с квадратом в V_n (т.е. мощность стороннего источника конечна), а решение ищется в неограниченном однородном изотропном пространстве.

Составляющую \dot{j}_m^c можно представить в виде пары преобразованной Фурье. К составляющим векторного потенциала $\dot{A}_m(\rho, \omega)$, зависящим от трех координат x, y, z , можно трижды применить преобразование Фурье:

$$\dot{A}_m = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_m e^{-i\kappa_1 x - i\kappa_2 y - i\kappa_3 z} d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (\text{П4.1})$$

Отличие (П4.1) от преобразования (1.52) заключается в физическом смысле переменных. В (1.52) ω — частота, t — время. В (П4.1) $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ обладают теми же математическими свойствами, но рассматривать их надо как пространственные частоты, их называют также коэффициентами распространения ($[\kappa] = \text{м}^{-1}$) поскольку, например, $\exp(-i\kappa_1 x)$ при $\kappa_1 > 0$ выражает расходящуюся волну, а при $\kappa_1 < 0$ — сходящуюся волну. Функцию $g_m(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ по аналогии с функцией $\dot{a}(p, \omega)$ в (1.52) называют спектральной плотностью (пространственным спектром) составляющей $\dot{A}_m(p, \omega)$.

Если найти значение g_m , то подставив его в (П4.1) и проинтегрировав последнее, найдем искомую составляющую \dot{A}_m . С этой целью подставим (П4.1) в уравнение Гельмгольца. Учтем, что дифференцирование можно производить под знаком интеграла в (П4.1) и $\partial^2 \exp(-i\kappa\eta)/\partial\eta^2 = -\kappa^2 \exp(-i\kappa\eta)$. После этого применим к результату тройное обратное преобразование Фурье, для чего умножим все выражение на $\exp(i\kappa_1 x + i\kappa_2 y + i\kappa_3 z)/(\sqrt{2\pi})^3$ и результат проинтегрируем по x, y, z , изменяющимся в неограниченных пределах. Заменяя образовавшиеся интегралы Фурье δ -функцией типа (П2.5) и используя основное свойство последних, найдем выражение g_m . Подставляя его в (П4.1), и учитывая, что j_m^c отличается от нуля только в области V_n , имеем

$$\dot{A}_m(p, \omega) = \int_{V_n} j_m^c(x', y', z', \omega) G(p, q) dV', \quad (\text{П4.2})$$

где $dV' = dx' dy' dz'$,

$$G(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\kappa_1(x-x') - i\kappa_2(y-y') - i\kappa_3(z-z')}}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - k^2} d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3 \quad (\text{П4.3})$$

является функцией точки наблюдения $p(x, y, z)$ и точки интегрирования $q(x', y', z')$ стороннего тока в V_n — точки источников поля. Функцию $G(p, q)$ называют функцией Грина (функцией наведения, влияния) однородного неограниченного изотропного пространства.

Учитывая, что $\dot{A} = \mathbf{1}_x \dot{A}_x + \mathbf{1}_y \dot{A}_y + \mathbf{1}_z \dot{A}_z$, $j^c = \mathbf{1}_x j_x^c + \mathbf{1}_y j_y^c + \mathbf{1}_z j_z^c$, и умножая компоненты (П4.2) последовательно на орты ДСК, а затем суммируя результат, получаем решение векторного уравнения Гельмгольца

$$\dot{A}(p, \omega) = \int_{V_n} j^c(q, \omega) G(p, q) dV'. \quad (\text{П4.4})$$

Выражение (П4.3) является интегральным разложением функции Грина. Его можно упростить, выполнив интегрирование по одной из переменных, например, κ_2 . Подынтегральное выражение в (П4.3) на плоскости комплексного переменного κ_2 (при фиксированных значениях κ_1, κ_3) имеет две особые точки типа полюса при $\kappa_2 = i\nu_0$ и при $\kappa_2 = -i\nu_0$, где $\nu_0 = (\kappa_1^2 + \kappa_3^2 - k^2)^{1/2}$. Предположим, что $\kappa_1^2 + \kappa_3^2 > k^2$, где k — действительно. Тогда первый полюс находится в верхней полуплоскости, а второй — в

нижней. Если $y - y' < 0$, то интеграл по κ_2 можно дополнить интегралом по полуокружности бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости, где при $\kappa_2 \rightarrow i\infty$ подынтегральное выражение стремится к нулю. Тогда интеграл по κ_2 в (П4.3) равен интегралу по замкнутому контуру, охватывающему особую точку. Применяя теорему о вычетах, находим, что интеграл равен произведению $2\pi i$ на вычет в верхней полуплоскости в точке $\kappa_2 = iv_0$. Вычислениями находим, что интеграл по κ_2 равен $\pi v_0^{-1} \exp[v_0(y - y')]$.

При $y - y' > 0$ интеграл по κ_2 можно дополнить интегралом по полуокружности бесконечно большого радиуса в нижней полуплоскости, где при $\kappa_2 \rightarrow -i\infty$ подынтегральное выражение стремится к нулю. Тогда интеграл равен интегралу по замкнутому контуру. С помощью теоремы о вычетах находим значение интеграла, равное $\pi v_0^{-1} \exp[-v_0(y - y')]$.

Таким образом, после интегрирования по κ_2

$$G(p, q) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\kappa_1(x-x') - i\kappa_3(z-z') \pm \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_3^2 - k^2} (y-y')}}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_3^2 - k^2}} d\kappa_1 d\kappa_3, \quad (\text{П4.5})$$

где верхний знак берется при $y - y' < 0$, а нижний — при $y - y' > 0$.

При $\kappa_1^2 + \kappa_3^2 < k^2$ тем же путем получаем выражение (П4.5). Последнее выражение справедливо и при комплексном значении k .

2. В ЦСК $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Для преобразования (П4.4) введем замену переменных интегрирования $\kappa_1 = \kappa \cos \psi$, $\kappa_2 = \kappa \sin \psi$, $\kappa_3 = h$ и заменим экспоненты $\exp[-i\kappa r \cos(\psi - \varphi)]$, $\exp[i\kappa r' \cos(\psi - \varphi')]$ их разложениями (П3.9). Выполняя интегрирование по ψ , имеем

$$G(p, q) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi - \varphi')} \int_{\kappa=0}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\kappa r) J_n(\kappa r')}{\kappa^2 + h^2 - k^2} e^{-ih(z-z')} \kappa d\kappa dh.$$

Для того, чтобы получить пределы интегрирования по κ от $-\infty$ до ∞ при $r > r'$ заменим $J_n(\kappa r)$, а при $r < r'$ — $J_n(\kappa r')$ по (П3.7) и применим формулу $J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)$. Объединяя результат и применяя теорию вычетов для интегрирования по κ , находим

$$G(p, q) = \frac{i}{8\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi - \varphi')} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} dh \kappa \begin{cases} J_n(\nu r') H_n^2(\nu r), & r \geq r', \\ J_n(\nu r) H_n^2(\nu r'), & r \leq r', \end{cases} \quad (\text{П4.6})$$

где $\nu = -i\sqrt{h^2 - k^2}$ и учтено асимптотическое поведение (П3.4) функции Ганкеля.

3. В ССК, если $R_{pq} = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ — расстояние между точками наблюдения p и интегрирования q , то переходя от ДСК к ССК с помощью связей $x - x' = R_{pq} \sin \theta \cos \varphi$, $y - y' = R_{pq} \sin \theta \sin \varphi$, $z - z' = R_{pq} \cos \theta$ и вводя в пространстве коэффициентов распространения переменные κ, ϑ, ψ с помощью замены $\kappa_1 = \kappa \sin \vartheta \cos \psi$, $\kappa_2 = \kappa \sin \vartheta \sin \psi$, $\kappa_3 = \kappa \cos \vartheta$ и предполагая, что точка p находится на оси $z - z'$, сразу находим значения интегралов по ψ и ϑ в (П4.3). В результате имеем

$$G(p, q) = \frac{1}{4\pi^2 i R_{pq}} \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{i\kappa R_{pq}}}{\kappa^2 - k^2} \kappa d\kappa - \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\kappa R}}{\kappa^2 - k^2} \kappa d\kappa \right).$$

Для того, чтобы перейти здесь к интегралу по κ в бесконечных пределах и затем воспользоваться теоремой о вычетах, сделаем замену переменной $\kappa = -\kappa'$ во втором интеграле. Тогда, объединяя интегралы, получаем

$$G(p, q) = \frac{1}{4\pi^2 i R_{pq}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\kappa R_{pq})}{\kappa^2 - k^2} \kappa d\kappa. \quad (П4.7)$$

Подынтегральное выражение здесь имеет две особые точки типа полюса при $\kappa = \kappa_{01} = k = \beta - i\alpha$ и $\kappa = \kappa_{02} = -k = -\beta + i\alpha$. Первый полюс κ_{01} лежит в четвертом квадранте комплексного переменного κ , а второй полюс κ_{02} — во втором. Добавляя к (П4.7) исчезающее малый интеграл по полуокружности в верхней полуплоскости комплексного переменного κ и применяя теорему о вычетах, получаем

$$G(p, q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-i\kappa R_{pq}}}{R_{pq}}. \quad (П4.8)$$

Эта свернутая форма функции Грина часто применяется при вычислении полей в неограниченном пространстве.

4. Для того, чтобы выяснить физическое содержание функции Грина, подставим в уравнение Гельмгольца (1.117) его решение (П4.4):

$$\int_{V_n} \mathbf{j}^c(x', y', z') \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G(p, q) \right] dx' dy' dz' = -\mathbf{j}^c(x, y, z)$$

Объект в квадратных скобках есть δ -функция, так как переводит функцию $\mathbf{j}^c(q)$ из точек q в точки p по правилу (П2.1). Следовательно,

$$\Delta G(p, q) + k^2 G(p, q) = -\delta(p - q), \quad (П4.9)$$

т.е. функция Грина удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца, источником ее является точечный источник в точке q . Уравнение (П4.9) однородно при всех p , кроме $p = q$, т.е. когда точка наблюдения совпадает с точечным источником.

Мгновенное значение $G(p, q; t) = \text{Re}[G(p, q) \exp(i\omega t)] = \exp(-\alpha R) / 4\pi R_{pq} \times \times \cos(\omega t - \beta R_{pq})$. Значит, функция $G(p, q)$ выражает расходящуюся от точечного источника волну, амплитуда которой в трехмерном пространстве без потерь убывает с ростом расстояния от источника R_{pq} как $1/R_{pq}$, а если имеются тепловые потери ($\alpha \neq 0$), то по закону — $\exp(-\alpha R_{pq}) / R_{pq}$.

Отметим, что вторым решением уравнения (П4.9) является $G_1(p, q) = 1/4\pi R_{pq} \cdot \exp(ikR_{pq})$. Оно описывает сходящуюся к точечному источнику волну (если зависимость от времени векторов поля выбрана в виде $\exp(i\omega t)$).

П.5. Учебники, учебные пособия и справочники по дисциплине «Электродинамика и распространение радиоволн»

1. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В.. Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1971. — 662 с.
2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988. — 640 с.
3. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Сов. радио, 1979. — 374 с.
4. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1989. — 544 с.
5. Фальковский О.И. Техническая электродинамика. — М.: Связь, 1978. — 430 с.
6. Долухаиов М.П. Распространение радиоволн. — М.: Связь, 1972. — 336 с.
7. Черенкова Е.Л., Чернышев О.В. Распространение радиоволн. — М.: Радио и связь, 1984. — 272 с.
8. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн. — М.: Высшая школа, 1975. — 280 с.
9. Федоров Н.Н. Основы электродинамики. — М.: Высшая школа, 1980. — 399 с.
10. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцев А.Д. Техническая электродинамика. — М.: Радио и связь, 2000. — 536 с.
11. Альперт Я.Л. Распространение радиоволн и ионосфера. — М.: Изд. АН СССР, 1960. — 480 с.
12. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. — М.: Наука, 1986. — 544 с.
13. Градштейн И.С., Рыжик И.Н. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Изд. физ.-мат. лит., 1962. — 1100 с.
14. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. — М. — Л.: Изд. физ.-мат. лит., 1963. — 358 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. Математические модели и научно-технический прогресс. В кн.: Наука и человечество. — М., 1979.
2. Лебедев А.Н. Моделирование. — М.: Радио и связь, 1989. — 224 с.
3. Голин Г.М., Филонович С.Р. Классики физической науки. — М., Высшая школа, 1989. — 576 с.
4. Дуков В.М. Электродинамика. — М.: Высшая школа, 1975. — 248 с.
5. Максвелл Дж.К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. — М., Гос. изд. технико-теоретич. литературы, 1954. — 688 с.
6. Зоммерфельд А. Электродинамика. — М.: Изд. иностр. лит., 1958. — 501 с.
7. Карцев В. Приключения великих уравнений. — М., Знание, 1986. — 288 с.
8. Григорьян А.Т., Вяльцев А.Н. Генрих Герц. — М.: Наука, 1968. — 308 с.
9. Кухаркин Е.С., Сестрорецкий Б.В. Электрическая прочность волноводных устройств. — М.: Высшая школа, 1963. — 452 с.
10. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Сов. радио, 1979. — 374 с.
11. Полые металлические волноводы. Ч.1 и 2 / Международная электротехническая комиссия. Публикация 152, 153-1, 153-2, 153-4 /Комитет по участию СССР в международном энергетическом объединении, 1967.
12. Иларионов Ю.А., Раевский С.Б., Сморгонский В.Я. Расчет гофрированных и частично заполненных волноводов. — М.: Сов. радио, 1980. — 200 с.
13. Ефимов И.Е., Шернина Г.А. Волноводные линии передачи. — М.: Связь, 1979. — 232 с.
14. Дерюгин Л.Н. Расчет критической частоты П- и Н-образных волноводов. — Радиотехника, 1948, т.3, № 6. — 49 с.
15. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. — Л. — М., ГИТТЛ, 1949. — 696 с.
16. Гальченко Н.А., Михалевский В.С., Синявский Г.П. Волноводы сложных сечений и полосковые линии. — Изд. Ростовского университета, 1978. — 176 с.
17. Заргаю Г., Ляпин В.П., Михалевский В.С. и др. Волноводы сложных сечений. — М.: Радио и связь, 1986. — 124 с.
18. Янке Е., Эмде Ф., Лем Ф. Специальные функции. — М., Наука, 1968. — 344 с.
19. Ефимов И.Е. Радиочастотные линии передачи. — М., Сов. радио, 1964. — 600 с.
20. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Изд. физ.-мат. лит., 1962. — 1100 с.
21. Айзенберг Г.З. Антенны ультракоротких волн. — М.: Связь и радио, 1957. — 700 с.
22. Взятыхшев В.Ф. Диэлектрические волноводы. — М.: Сов. радио, 1970. — 216 с.
23. Волоконно-оптические линии связи. Справочник /Под ред. С.В. Свечникова, Л.М. Андрушко, — Киев: Тэхника, 1988. — 240 с.
24. Содха М.С., Гхатак А.К. Неоднородные оптические волноводы. Пер. с англ. /Под ред. В.А. Киселева. — М.: Связь, 1980. — 216 с.
25. Основы волоконно-оптической связи. Пер. с англ. /Под ред. Е.М.Дианова. — М.: Сов. радио, 1980. — 230 с.
26. Гроднев И.И., Верник С.М. Линии связи. — М.: Радио и связь, 1988. — 544 с.
27. Конструирование и расчет полосковых устройств. /Под ред. И.С. Ковалева. — М., Сов. радио, 1974. — 296 с.
28. Вычислительные методы в электродинамике. /Под ред. Р. Митры. Пер. с англ. /Под ред. Э.Л. Бурштейна. — М.: Изд. Мир, 1977. — 486 с.

П.5. Учебники, учебные пособия и справочники по дисциплине «Электродинамика и распространение радиоволн»

1. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1971. — 662 с.
2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988. — 640 с.
3. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Сов. радио, 1979. — 374 с.
4. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1989. — 544 с.
5. Фальковский О.И. Техническая электродинамика. — М.: Связь, 1978. — 430 с.
6. Долуханов М.П. Распространение радиоволн. — М.: Связь, 1972. — 336 с.
7. Черенкова Е.Л., Чернышев О.В. Распространение радиоволн. — М.: Радио и связь, 1984. — 272 с.
8. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн. — М.: Высшая школа, 1975. — 280 с.
9. Федоров Н.Н. Основы электродинамики. — М.: Высшая школа, 1980. — 399 с.
10. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцев А.Д. Техническая электродинамика. — М.: Радио и связь, 2000. — 536 с.
11. Альперт Я.Л. Распространение радиоволн и ионосфера. — М.: Изд. АН СССР, 1960. — 480 с.
12. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. — М.: Наука, 1986. — 544 с.
13. Градштейн И.С., Рыжик И.Н. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Изд. физ.-мат. лит., 1962. — 1100 с.
14. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. — М. — Л.: Изд. физ.-мат. лит., 1963. — 358 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. Математические модели и научно-технический прогресс. В кн.: Наука и человечество. — М., 1979.
2. Лебедев А.Н. Моделирование. — М.: Радио и связь, 1989. — 224 с.
3. Голин Г.М., Филонович С.Р. Классики физической науки. — М., Высшая школа, 1989. — 576 с.
4. Дуков В.М. Электродинамика. — М.: Высшая школа, 1975. — 248 с.
5. Максвелл Дж.К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. — М., Гос. изд. технико-теоретич. литературы. 1954. — 688 с.
6. Зоммерфельд А. Электродинамика. — М.: Изд. иностр. лит., 1958. — 288 с.
7. Карцев В. Приключения великих уравнений. — М., Знание, 1986. — 288 с.
8. Григорьян А.Т., Вяльцев А.Н. Генрих Герц. — М.: Наука, 1968. — 308 с.
9. Кухаркин Е.С., Сестрорецкий Б.В. Электрическая прочность волноводных устройств. — М.: Высшая школа, 1963. — 452 с.
10. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Сов. радио, 1979. — 374 с.
11. Полые металлические волноводы. Ч.1 и 2 / Международная электротехническая комиссия. Публикация 152, 153-1, 153-2, 153-4 / Комитет по участию СССР в международном энергетическом объединении, 1967.
12. Иларионов Ю.А., Раевский С.Б., Сморгонский В.Я. Расчет гофрированных и частично заполненных волноводов. — М.: Сов. радио, 1980. — 200 с.
13. Ефимов И.Е., Шермина Г.А. Волноводные линии передачи. — М.: Связь, 1979. — 232 с.
14. Дерюгин Л.Н. Расчет критической частоты П- и Н-образных волноводов. — Радиотехника, 1948, т.3, № 6. — 49 с.
15. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. — Л. — М., ГИТТЛ, 1949. — 696 с.
16. Гальченко Н.А., Михалевский В.С., Синявский Г.П. Волноводы сложных сечений и полосковые линии. — Изд. Ростовского университета, 1978. — 176 с.
17. Заргано Г., Ляпин В.П., Михалевский В.С. и др. Волноводы сложных сечений. — М.: Радио и связь, 1986. — 124 с.
18. Янке Е., Эмде Ф., Лем Ф. Специальные функции. — М., Наука, 1968. — 344 с.
19. Ефимов И.Е. Радиочастотные линии передачи. — М., Сов. радио, 1964. — 600 с.
20. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Изд. физ.-мат. лит., 1962. — 1100 с.
21. Айзенберг Г.З. Антенны ультракоротких волн. — М.: Связь и радио, 1957. — 700 с.
22. Взятыхшев В.Ф. Диэлектрические волноводы. — М.: Сов. радио, 1970. — 216 с.
23. Волоконно-оптические линии связи. Справочник / Под ред. С.В. Свечникова, Л.М. Андрушко, — Киев: Тэхника, 1988. — 240 с.
24. Содха М.С., Гхатак А.К. Неоднородные оптические волноводы. Пер. с англ. / Под ред. В.А. Киселева. — М.: Связь, 1980. — 216 с.
25. Основы волоконно-оптической связи. Пер. с англ. / Под ред. Е.М.Дианова. — М.: Сов. радио, 1980. — 230 с.
26. Гроднев И.И., Верник С.М. Линии связи. — М.: Радио и связь, 1988. — 544 с.
27. Конструирование и расчет полосковых устройств. / Под ред. И.С. Ковалева. — М., Сов. радио, 1974. — 296 с.
28. Вычислительные методы в электродинамике. / Под ред. Р. Митры. Пер. с англ. / Под ред. Э.Л. Бурштейна. — М.: Изд. Мир, 1977. — 486 с.

29. **Нефедов Е.И., Фиалковский А.Т.** Полосковые линии передачи. — М.: Наука, 1980. — 312 с.
30. **Ковалев И.С.** Прикладная электродинамика, — Минск: Наука и техника, 1978. — 344 с.
31. **Завадский В.** Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. — М.: Наука, 1972. — 558 с.
32. **Панченко Б.А., Нефедов Е.И.** Микрополосковые антенны. — М.: Радио и связь, 1986. — 144 с.
33. **Антенны и устройства СВЧ, проектирование фазированных антенных решеток.** /Под ред. Д.И. Воскресенского. — М.: Радио и связь, 1994. — 592 с.
34. **Устройства генерирования и формирования радиосигналов.** /Под ред. Г.М. Уткина, В.Н. Кулешова и М.В. Благовещенского. — М.: Радио и связь, 1994. — 416 с.
35. **Вамберский М.В., Казанцев В.И., Шелухин С.А.** Передающие устройства СВЧ. Под ред. М.В. Вамберского. — М.: Высшая школа, 1984. — 448 с.
36. **Диденко А.Н.** Сверхпроводящие волноводы и резонаторы. — М.: Сов. радио, 1973. — 256 с.
37. **Федоров Н.Н.** Основы электродинамики. — М.: Высшая школа, 1980. — 400 с.
38. **Баскаков С.И.** Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. — М.: Высшая школа, 1980. — 152 с.
39. **Кисулько Г.В.** Электродинамика полых систем. — Л.: Издание Военной академии связи, 1949. — 426 с.
40. **Григорьев А.Д., Янкевич В.Б.** Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. — М.: Радио и связь, 1984. — 248с.
41. **Диэлектрические резонаторы.** /Под ред. М.Е. Ильченко. — М.: Радио и связь, 1989. — 328 с.
42. **Вайнштейн Л.А.** Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966. — 476 с.
43. **Вайнштейн Л.А.** Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988. — 440 с.
44. **Ильинский А.С., Г.Я.Слепян.** Импедансные граничные условия и их применение. — М.: Наука, Радиотехника и электроника, 1990. — Т. 35, вып. 6.
45. **Федорюк М.В.** Метод перевала. — М., Наука, 1977. — 368 с.
46. **Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.** Возбуждение электромагнитных волн. — М.: Радио и связь, 1983. — 296 с.
47. **Радиотехнические системы.** /Под ред. Ю.М.Казаринова. — М.: Высшая школа, 1990. — 496 с.
48. **Марков Г.Т., Васильев Е.Н.** Математические методы прикладной электродинамики. — М.: Сов. радио, 1970. — 120 с.
49. **Аналитические методы в теории дифракции и распространения волн.** /Под ред. С.В. Бутаковой. — М.: Научный совет по акустике АН СССР, 1970. — 452 с.
50. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. — М., Гос. изд. технико-теор. лит., 1953. — 680 с.
51. **Морс Ф.М., Фешбах Г.** Методы теоретической физики. Пер. с англ., т. 1 и II. — М., ИЛ., 1958. — 930+846 с.
52. **Князев П.Н.** Интегральные преобразования. /Под ред. Ф.Д. Гахова, — Минск: Высшейшая школа, 1969. — 200 с.
53. **Васильев Е.Н.** Возбуждение тел вращения. — М.: Радио и связь, 1987. — 272 с.
54. **Верлань А.Ф., Сизиков В.С.** Интегральные уравнения. — Киев: Наукова Думка, 1986. — 544 с.
55. **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. — 2-е изд. — М.: Наука, 1970. — 512 с.
56. **Никольский В.В.** Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. — М.: Наука, 1967. — 460 с.

57. **Фок В.А.** Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970. — 518 с.
58. **Бреховских Л.М.** Волны в слоистых средах. — М.: Изд. АН СССР, 1957. — 502 с.
59. **Гинзбург В.Л.** Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Изд. Наука, 1967. — 683 с.
60. **Бреховских Л.М., Годин О.А.** Акустика слоистых сред. — М.: Наука, 1989. — 412 с.
61. **Бори М., Вольф Э.** Основы оптики. Пер. с англ. /Под ред. Г.П. Мотулевич. — М.: Наука, 1970. — 856 с.
62. **Кравцов Ю.Л., Орлов Б.И.** Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980. — 304 с.
63. **Кочки Н.Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Наука, 1965.
64. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Электродинамика сплошных сред. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 532 с.
65. **Боровиков В.А., Книбер Б.Е.** Геометрическая теория дифракции: в книге [49].
66. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике. — М.: Наука, изд. 13, 1986.
67. **Уфимцев П.Я.** Метод краевых волн в физической теории дифракции. — М.: Сов. радио, 1962. — 244 с.
68. **Долуханов М.П.** Флуктуационные процессы при распространении радиоволн. — М.: Связь, 1971. — 184 с.
69. **Энергетические характеристики космических радиолиний.** Под ред. О.А.Зенкевича. — М.: Сов. радио, 1972. — 436 с.
70. **Мануилов Б.Д.** Антенно-фидерные устройства. — МО РФ. —1995. — 361 с.
71. **Фейнберг Е.Л.** Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. — М.: АН СССР, 1961. — 546 с.
72. **Басс Ф.Г., Фукс И.М.** Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.
73. **Введенский Б.А.** Основы теории распространения радиоволн. — М.—Л.: ОНТН, 1934. — 227 с.
74. **Колосов М.А., Шабельников А.В.** Рефракция электромагнитных волн в атмосферах Земли, Венеры и Марса. — М.: Сов. радио, 1976. — 220 с.
75. **Дальнее тропосферное распространение ультракоротких радиоволн.** /Под ред. Б.А. Введенского, М.А. Колосова, А.И. Калинина, А. С. Шифрина. — М.: Сов. радио, 1965.
76. **Черенкова Е.Л., Чернышев О.В.** Распространение радиоволн. — М.: Радио и связь, 1984. — 272 с.
77. **Колосов М.А., Арманд Н.А., Яковлев О.И.** Распространение волн при космической связи. — М.: Связь, 1969. — 155 с.
78. **Яковлев О.И.** Распространение радиоволн в солнечной системе. — М.: Сов. радио, 1974. — 192 с.
79. **Корсунский Л.Н.** Распространение радиоволн при связи с искусственными спутниками Земли. — М.: Сов. радио, 1971. — 207 с.
80. **Егоров Е.И., Калашников Н.И., Михайлов А.С.** Использование радиочастотного спектра и радиопомехи. — М.: Радио и связь. — 1986. — 304 с.
81. **Электромагнитная совместимость радиоэлектронных средств и систем.** /Под ред. Н.М. Царькова. — М.: Радио и связь, 1985. — 272 с.
82. **Теория и методы оценки электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств.** /Под ред. Ю.А. Феоктистова. — М.: Радио и связь, 1988. — 216 с.
83. **ГОСТ 23872-79.** Совместимость РЭС электромагнитная.
84. **Микаэлян А.Л.** Теория и применение ферритов на СВЧ. — М. — Л., Госэнергоиздат., 1963. — 664 с.
85. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.

86. Коган Н.Л., Машковцев Б.М., Цибизов К.Н. Сложные волноводные системы. — Л.: Судпромгиз, 1963. — 356 с.
87. Петров Б.М. Нелинейные граничные условия и вольтамперные характеристики. Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. Т.38. №1, 1995. с.63-68.
88. Документы X пленарной ассамблеи МККР. — Отчет № 322. Распределение по Земному шару атмосферных помех и их характеристики. — М.: Связь, 1965.
89. Защита от радиопомех. /Под ред. М.В. Максимова. — М.: Сов. радио. — 1976. — 496 с.
90. Михайлов М.И., Разумов П.Д., Соколов С.А. Электромагнитные влияния на сооружения связи. — М.: Связь, 1979. — 264 с.
91. Зуев В.Е., Фадеев В.Я. Лазерные навигационные системы. — М.: Радио и связь, 1987. — 160 с.
92. Зуев В.Е., Кабанов М.В. Перенос оптических сигналов в земной атмосфере (в условиях помех). — М.: Сов. радио, 1977. — 368 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Вектор плотности тока:**
линейного - 19, 120
магнитного смещения - 33, 60
поверхностного - 18, 152, 212
полного электрического - 31
объемного - 16, 17, 54
смещения - 31, 54, 213
электрической и магнитной поляризаций - 42
- Волна:**
азимутально-однородная - 233, 271
аномальная - 233, 279
антифазная - 249, 251
бегущая - 84, 98, 118, 207
быстрая - 124
высшего типа - 209
гибридная - 269
затухающая - 208
земная - 458
ионосферная - 459
критическая длина - 208, 230, 273
локально-плоская - 434, 437
медленная - 119, 133
магнитного типа - 126, 187, 207
нормально поляризованная - 163
обыкновенная, необыкновенная - 398, 399
однородная - 122
основного типа - 209, 230, 238, 242
парциальная - 170, 261, 264, 430
плоская - 134
поверхностная - 119, 133, 169, 263, 267
поперечная - 98, 239
пространственная - 257
прямая, обратная - 392
стоячая - 84, 207
сферическая - 98, 129
тропосферная - 459, 497
цилиндрическая - 122
электрического типа - 126, 187, 207
- Волновая функция - 97**
- Вольтамперная характеристика - 25**
- Гармоники Флоке - 299, 372**
- Глубина проникновения - 99, 100**
- Диапазон радиоволн - 8**
- Дисперсия среды - 28, 29, 99, 208, 506**
- Диссипация - 39**
- Добротность:**
собственная - 313
нагруженная - 314
внешняя - 314
- Дифракция - 343, 351, 353, 364, 446**
- Закон:**
Джоуля-Ленца - 37, 38
интенсивности - 439, 448
Кирхгофа - 9, 34, 36
Кулона - 19
обобщенный Гаусса - 21, 29
обобщенный Ома - 27, 36
обобщенный Релея - 465
обобщенный электромагнитной индукции - 31, 32
полного тока - 22, 23, 30, 31
преломления и отражения лучей - 443
Снеллиуса - 164
сохранения электрического заряда - 15, 17, 94
сохранения энергии ЭМ поля - 44, 45, 59
- Задача граничная - 145, 146, 189, 199, 315**
- Заряд:**
плотность линейного - 14, 120
плотность поверхностного - 14
плотность объемного - 13
- Затухание:**
нерезонансное - 500
резонансное - 500
- Зона:**
ближняя - 104, 113
дальняя (излучения) - 91, 113, 128, 364
промежуточная - 104
Фраунгофера - 364
Френеля - 367, 368
- Излучатель:**
Герца - 101
Гюйгенса - 132, 367
поверхностный - 85, 126
прямолинейный - 79, 82, 87, 90, 116
элементарный - 103, 114, 131, 367
- Интерференция - 114, 367**

Колебания:

- вынужденные – 309, 314
- вырожденные – 319
- высшие типы – 319
- основного типа – 319, 325, 329
- собственные – 309
- тип – 310
- электрического и магнитного типов – 318

Коэффициент:

- замедления – 260, 274, 305
- затухания – 73, 99, 101, 194, 196, 221, 233
- отражения, прохождения – 165, 167, 170, 420, 423, 428
- распространения волны – 185, 188, 203
- “усиления преломлением” – 486
- фазы – 73, 97, 101
- Френеля – 165, 167

Луч: – 368

- геометрический световой – 437
- дифракционный – 375
- зеркальный – 468
- вектор кривизны – 441
- основной – 375
- радиус кривизны – 442, 490
- разность хода – 91
- траектория – 491, 508

Метод:

- дифракционных лучей – 451
- зеркальных изображений – 181, 467
- интегрального уравнения – 453
- Казанцева – 520
- краевых волн – 451
- параболического уравнения – 452
- разделения переменных – 226, 418
- физической оптики – 450

Мощность:

- излучения – 108, 114, 123, 224, 461
- переносимая – 190, 219

Направленности:

- характеристика – 95, 104, 130
- диаграмма – 95, 105, 131, 359

Периодическая решетка – 370

Поляризация поля:

- вертикальная – 166
- вращающаяся – 135
- вырождение – 232, 234

круговая – 136

- левая – 137
- линейная – 135, 398
- нормальная – 163, 180
- параллельная – 166, 178
- правая – 137
- предельная – 513
- прошедшего через ионосферу – 514
- эллиптическая – 136, 171, 232, 475, 479

Принцип:

- взаимности (теорема) – 159, 396
- Гюйгенса – 155
- Гюйгенса-Френеля – 156
- Гюйгенса-Кирхгофа – 157
- перестановочной двойственности – 61, 391
- предельного поглощения – 148
- Ферма – 445
- эквивалентных поверхностных токов – 153

Рамка:

- электрического тока – 80, 82, 109
- элементарная – 82, 111
- элементарная магнитная – 83, 115, 214

Релаксация – 39, 70

Рефракция: – 442, 490

- береговая – 482
- нормальная тропосферная – 493
- положительная, отрицательная – 494
- сверхрефракция – 494

Скорость:

- групповая – 99, 100, 124, 208
- света – 97, 118
- фазовая – 97, 118, 124, 208

Собственная:

- длина волны – 308
- добротность – 308, 313, 322, 326, 329
- частота – 308, 312, 330

Трасса:

- закрытая – 369
- открытая – 369

Уравнения:

- баланса мощностей – 45, 59
- волновые – 69, 71
- Гельмгольца – 73, 74
- дисперсионное – 229, 258, 265, 271, 280
- Лапласа – 75, 291
- Максвелла – 32, 53, 60

- материальные – 19, 27, 28, 34, 53, 55
- релаксации – 70
- эйконала - 436
- Условия:**
 - граничные – 63, 64, 67, 189, 190, 254, 302
 - излучения – 148, 190
 - импедансные – 173, 295
 - Лоренца – 69, 70, 72
 - на ребре – 356
- Формула:**
 - Введенского – 474
 - интерференционная – 472
 - Шулейкина-Ван дер Поля – 480
- Френеля:**
 - дифракция – 364
 - зоны – 367
 - интегралы – 365
- Фронт волны** – 97
- Характеристика:**
 - направленности – 95, 104, 130
 - рассеяния – 350
- Частота**
 - комбинационная – 408
 - максимальная и наименьшая применимые – 519
 - оптимальная рабочая – 519
 - поперечного ферромагнитного резонанса – 399
- свободной прецессии – 380
- собственная – 308, 312, 325, 387
- гиромагнитного резонанса – 385
- Эйконал** – 435
- Эффект:**
 - антипода – 523
 - близости – 250
 - Коттона-Мутона – 402
 - краевой – 139
 - Люксембург-Горьковский – 403
 - поверхностный в проводниках – 174, 283
 - смещения поля – 390, 399
 - Фарадея – 395, 396, 513
 - Фохта – 402, 513
- Явление:**
 - гиромагнитного резонанса – 383, 385, 388
 - дифракции – 343
 - полного внутреннего отражения (преломления) – 167, 168, 261, 432
 - поперечного гиромагнитного резонанса – 399, 507
 - продольного гиромагнитного резонанса – 389, 506
 - самовоздействия волны - 402

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Основные обозначения и сокращения.....	4
Введение.....	6
Глава 1. Система уравнений электродинамики.....	12
1.1. Плотности зарядов и токов.....	12
1.2. Векторы электромагнитного поля. Материальные уравнения.....	19
1.3. Основные уравнения электродинамики.....	29
1.4. Основные законы теории электрических цепей.....	34
1.5. Источники электромагнитного поля.....	39
1.6. Уравнение баланса мощностей в электромагнитном поле.....	43
1.7. Примеры применения уравнения баланса мощностей.....	47
1.8. Основные уравнения электродинамики в комплексной форме.....	51
1.9. Уравнение баланса мощностей для комплексных амплитуд векторов поля.....	57
1.10. Фиктивные магнитные заряды и токи.....	60
1.11. Граничные условия на поверхностях раздела реальных сред.....	61
1.12. Граничные условия на поверхности идеально проводящего тела.....	65
1.13. Векторные и скалярные потенциалы. Волновые уравнения.....	68
1.14. Уравнение Гельмгольца.....	71
1.15. Уравнения электростатики, магнитостатики, стационарных и квазистационарных токов.....	74
Задачи.....	75
Глава 2. Возбуждение электромагнитного поля в неограниченном пространстве.....	78
2.1. Модель неограниченного однородного пространства. Общая характеристика задач.....	78
2.2. Математические модели излучателей.....	79
2.3. Прямолинейные излучатели. Общие выражения составляющих векторов поля.....	87
2.4. Поле прямолинейных излучателей в зоне излучения.....	91
2.5. Сферическая волна.....	95
2.6. Элементарный электрический вибратор.....	101
2.7. Рамка электрического тока.....	109
2.8. Элементарный магнитный вибратор. Элементарная магнитная рамка.....	114
2.9. Бесконечная прямолинейная нить тока. Поверхностная волна, цилиндрическая волна.....	116
2.10. Поверхностный излучатель.....	126
2.11. Излучение поверхности прямоугольной формы с равномерным распределением стороннего поля. Элементарный поверхностный излучатель.....	129
2.12. Плоский лист тока. Плоская волна.....	132

2.13. Вращающаяся поляризация поля.....	134
2.14. Электростатические поля. Поле стационарного тока	138
Задачи.....	140
Глава 3. Теоремы электродинамики	143
3.1. Лемма Лоренца	143
3.2. Теоремы единственности решений уравнений Максвелла. Условия излучения	145
3.3. Принцип эквивалентности.....	148
3.4. Принцип Гюйгенса и интеграл Кирхгофа	155
3.5. Теорема взаимности	157
Задачи.....	160
Глава 4. Отражение электромагнитных волн	162
4.1. Падение плоской волны на плоскую границу раздела двух сред	162
4.2. Полное преломление, полное отражение.....	167
4.3. Импедансные граничные условия	172
4.4. Сопротивление плоского проводника при поверхностном эффекте.....	174
4.5. Метод зеркальных изображений.....	176
Задачи.....	183
Глава 5. Основы общей теории направляющих систем	184
5.1. Определения	184
5.2. Граничные задачи для электрических и магнитных волн	185
5.3. Мощность, переносимая полем через поперечное сечение направляющей системы	190
5.4. Коэффициенты затухания векторов поля	191
Глава 6. Электромагнитные волны в закрытых направляющих системах	197
6.1. Граничная задача о возбуждении прямоугольного волновода	197
6.2. Свойства электрических и магнитных волн в прямоугольном волноводе	205
6.3. Волна основного типа в прямоугольном волноводе	209
6.4. Физические соображения о возбуждении типов волн	215
6.5. Мощности. Коэффициент затухания типов волн в прямоугольном волноводе	219
6.6. Круглый волновод	225
6.7. Эллиптический волновод	234
6.8. Волноводы П- и Н-образного сечения	236
6.9. Коаксиальная линия	239
Задачи.....	246
Глава 7. Электромагнитные волны в открытых направляющих системах	247
7.1. Симметричные линии	247
7.2. Возбуждение поверхностных волн над слоем диэлектрика на металле	252
7.3. Диэлектрическая пластина	263

7.4. Круглый диэлектрический волновод.....	266
7.5. Однопроводная линия поверхностной волны	278
7.6. Сопротивление прямолинейного цилиндрического провода. Поверхностный эффект.....	283
7.7. Понятие о квазиоптических направляющих системах	285
7.8. Понятие об оптических волноводах	287
7.9. Полосковые волноводы.....	289
7.10. Возбуждение поверхностных волн над ребристой структурой. Периодические структуры	293
7.11. Спиральный волновод.....	299
Задачи.....	306
Глава 8. Электромагнитное поле в резонаторах	308
8.1. Определения.....	308
8.2. Добротность	311
8.3. Возбуждение прямоугольного резонатора	314
8.4. Собственные колебания цилиндрического резонатора.....	322
8.5. Собственные колебания в коаксиальном резонаторе. Резонаторы на основе отрезков направляющих систем с Т-волной.....	327
8.6. Эквивалентные параметры объемных резонаторов. Резонаторы с укорачивающей емкостью	330
8.7. Торoidalный и магнетронный резонаторы	332
8.8. Диэлектрические резонаторы.....	334
8.9. Понятие об открытых (квазиоптических) резонаторах.....	336
Задачи.....	340
Глава 9. Дифракция электромагнитных волн	342
9.1. Характеристика задач дифракции	342
9.2. Эффективная площадь рассеяния объекта	344
9.3. Рассеяние электромагнитного поля цилиндром	346
9.4. Дифракция электромагнитного поля на цилиндре и шаре	351
9.5. Дифракция электромагнитного поля на клине и полуплоскости.....	352
9.6. Дифракция Френеля. Область пространства, существенная при распространении радиоволн.....	362
9.7. Рассеяние поля плоской периодической решеткой	370
Задачи.....	376
Глава 10. Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах. Нелинейные среды	377
10.1. Анизотропные среды.....	377
10.2. Свойства феррита	378
10.3. Свойства плазмы.....	384
10.4. Перестановочная двойственность.....	391
10.5. Эффект Фарадея.....	391
10.6. Волны в поперечно намагниченных феррите и плазме	397
10.7. Понятие об ЭМ явлениях в нелинейных средах	402
Задачи.....	408

Глава 11. Распространение электромагнитных волн в неоднородных средах. Понятия о приближенных методах решения задач электродинамики 410

11.1. Общие сведения.....	410
11.2. Дифференциальные уравнения для векторов напряженностей полей.....	412
11.3. Волны в полупространстве с линейно нарастающей диэлектрической проницаемостью.....	416
11.4. Волны в полупространстве с линейно убывающей диэлектрической проницаемостью.....	424
11.5. Уравнения геометрической оптики. Локально плоская волна.....	433
11.6. Общие свойства лучей.....	440
11.7. Волны в неоднородных средах в приближении геометрической оптики.....	447
11.8. Понятие о методах физической оптики, геометрической теории дифракции, краевых волн и методе параболического уравнения.....	450
11.9. Понятие о методе интегрального уравнения.....	453
Задачи.....	457

Глава 12. Радиотрассы и их модели. Земная волна 458

12.1. Краткая характеристика радиотрасс.....	458
12.2. Модель свободного пространства.....	460
12.3. Множитель влияния среды. Замирания.....	462
12.4. Модели радиотрасс без учета влияния атмосферы.....	466
12.5. Поле излучателя, поднятого над земной поверхностью. Первая модель.....	470
12.6. Поле излучателя, поднятого над шаром. Вторая модель.....	475
12.7. Поле вертикального электрического вибратора, расположенного вблизи земной поверхности.....	477
12.8. Поле в зоне тени.....	483
Задачи.....	486

Глава 13. Тропосферная волна 487

13.1. Диэлектрическая проницаемость и показатель преломления тропосферы.....	487
13.2. Рефракция электромагнитного поля в тропосфере.....	490
13.3. Дальнее тропосферное распространение радиоволн.....	495
13.4. Затухание радиоволн в тропосфере.....	500
13.5. Рассеяние и деполаризация поля осадками.....	501
Задачи.....	502

Глава 14. Ионосферная волна. Особенности распространения волн ОНЧ–ГВЧ диапазонов 503

14.1. Строение ионосферы.....	503
14.2. Условия распространения волн в ионосфере.....	505
14.3. Траектория радиоволн в ионосфере без учета влияния магнитного поля Земли.....	508
14.4. Радиопрогнозы.....	511
14.5. Влияние магнитного поля Земли.....	512
14.6. Затухание радиоволн в ионосфере.....	514
14.7. Особенности распространения волн ОВЧ–ГВЧ диапазонов.....	515

14.8. Особенности распространения волн УВЧ и СВЧ диапазонов на космических радиолниях	516
14.9. Особенности распространения волн ВЧ диапазона.....	518
14.10. Особенности распространения волн СЧ, НЧ и ОНЧ диапазонов	521
14.11. Помехи радиоприему. Уравнение связи	524
14.12. Особенности распространения волн оптического диапазона	533
14.13. Понятие об электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств	536
Задачи.....	538
Приложения	539
П.1. Формулы векторного анализа	539
П.2. Свойства δ -функции.....	540
П.3. Цилиндрические функции	541
П.4. Решение уравнения Гельмгольца в неограниченном пространстве. Функция Грина.....	542
П.5. Учебники, учебные пособия и справочники по дисциплине «Электродинамика и распространение радиоволн»	545
Список литературы	547
Предметный указатель	551

Адрес издательства в Интернет www.TECHBOOK.RU

Учебное издание

Борис Михайлович Петров

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Учебник

Обложка художника В. Г. Ситникова

ЛР № 071825 от 16 марта 1999 г.

Подписано в печать 20.07.06. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.

Уч.-изд. л. 34,1. Доп. тираж 3 000 экз. Изд. № 6073

Зак. 3652

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО ПФ «Полиграфист».

160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.

Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75.

Вышли в свет и имеются в продаже:

Антенно-фидерные устройства и распространение радиоволн: Учебник для вузов / Г. А. Ерохин, О. В. Чернышев, Н. Д. Козырев, В. Г. Кочержевский; Под ред. Г. А. Ерохина. – 2-е изд., испр. – М.: Горячая линия–Телеком, 2004. – 491 с.: ил., ISBN 5-93517-092-2

Излагаются основные вопросы теории излучения и приема радиоволн, рассматриваются наиболее распространенные типы антенно-фидерных устройств и методы их расчета, особенности линии питания антенн различных волн, а также вопросы электромагнитной совместимости антенн, общая теория и особенности распространения радиоволн различных диапазонов. Особое внимание уделено вопросам, имеющим непосредственное отношение к проектированию и эксплуатации систем радиосвязи, радиовещания и телевидения.

Для студентов специальности «Радиосвязь, радиовещание, телевидение». Может быть полезна также студентам других радиотехнических специальностей, связанных с расчетом и эксплуатацией соответствующих радиосистем.

Колосовский Е. А. Устройства приема и обработки сигналов. Учебное пособие для вузов. – М: Горячая линия–Телеком, 2007. – 456 с.: ил., ISBN 5-93517-264-X.

Систематизированы сведения по всем разделам вузовской программы одноименного курса. Изложены теоретические основы приема сигналов на фоне помех, принципы построения трактов сигнальной и промежуточной частоты радиоприемных устройств, основные положения теории синтеза частот, способы обеспечения регулировок и структуры частных трактов при приеме сигналов с различными видами модуляции. Рассмотрены факторы, влияющие на качественные показатели радиоприемных устройств.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности 200700 – «Радиотехника» направления 654200 – «Радиотехника». Может быть использовано для повышения квалификации специалистами.

Петров Б. М., Костромитин Г. И., Горемыкин Е. В. Логопериодические вибраторные антенны: Учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия–Телеком, – 2004. – 239 с., ISBN 5-93517-191-0.

Изложены методы расчёта и особенности конструкций применяющихся в дециметровом диапазоне длин волн широкополосных телевизионных, сотовой связи и радиотелефонных классических, частичнопечатных, печатных и с кусочно-линейными излучателями логопериодических вибраторных антенн; приведены программы расчётов и рекомендации по изготовлению антенн.

Для студентов, обучающихся по направлению «Радиотехника», радионженеров и квалифицированных радиолюбителей.

Справки по телефону: (495) 737-39-27, e-mail: radios_hl@mtu-net.ru
WWW.TECHBOOK.RU.

Заказать книги *наложенным платежом* можно через почтовое агентство «Дессси», выслав почтовую открытку или письмо по адресу: 107113, Москва, а/я 10, «Dessy»; тел. (495) 304-72-31 или по электронной почте: post@dessy.ru.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

В учебнике систематически и подробно рассмотрены основные уравнения и положения электродинамики, изучаются возбуждаемые электромагнитные (ЭМ) поля в неограниченном однородном пространстве, теория направляющих систем, граничные задачи о возбуждении или возможности существования ЭМ волн в направляющих системах и в объемных резонаторах, явления рассеяния и дифракции волн, соответствующие прикладным задачам радиотехники; изложены основные положения геометрической оптики, понятия о нелинейных средах и о распространении ЭМ волн в неоднородных и анизотропных средах; рассмотрено влияние поверхности Земли, тропосферы и ионосферы на распространение ЭМ волн различных диапазонов. Особое внимание уделено физической интерпретации явлений электромагнетизма, имеется 378 иллюстраций. Даны примеры расчетов и сформулированы 132 контрольные задачи.

Для студентов радиотехнических специальностей.

Петров Борис Михайлович, доктор техн. наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, действительный член Академии Инженерных наук РФ. Работает профессором кафедры Антенн и радиопередающих устройств Таганрогского государственного радиотехнического университета, который закончил в 1957 г. Обучался в аспирантуре Московского энергетического института (у проф. Г.Т. Маркова), где защитил кандидатскую (1965 г.) и докторскую (1975 г.) диссертации.

Научная специализация — прикладная электродинамика, антенны и устройства СВЧ и КВЧ.

Опубликовал более 200 научных и научно-методических работ, в том числе 21 авторское свидетельство на изобретения. Подготовил 33 кандидата и 2 доктора наук.

Книги издательства «Горячая линия – Телеком»

можно заказать через
почтовое агентство DESSY
107113, г.Москва, а/я 10,
а также интернет-магазины

ISBN 5-93517-073-6



9 785935 170738

Сайт издательства

www.telcom.ru

интернет-магазин

OZON



2504294