Н. Н. СТЕПАНОВ

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1948 МОСКВА

11-5-2

Курс сферической тригонометрии Н. Н. Степанова представляет собой учебное пособие для студентов: астрономов, геодезистов, топографов, маркшейдеров; одновременно оно может служить и целям справочно-прикладного характера.

Сообразно с этим расположен материал, разработаны главы решений сферических треугольников и приведены схемы для вычислительных работ.

Редактор *А. Р. Шульман* Техн. редактор *К. М. Волчок*

Подписано к печати 7/VI 1948 г. 9,75 печ. л. 9,1 уч.-изд. л. Тираж 25.000 экз.
40 416 тип. зн. в 1 печ. л. М-00929. Цена 3 р. 50 коп. Заказ № 3578.

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый курс сферической тригонометрии написан мной на основании опыта многолетней работы по этому предмету в различных специальных школах и имеет целью дать необходимое пособие для студентов: астрономов, геодезистов, топографов, маркшейдеров.

При выводе основных формул сферической тригонометрии наряду с аналитическими методами приводятся и геометрические для развития у учащихся необходимого для их специальных работ «пространственного мышления».

Параллельно с теорией приводятся разработанные схемы решения задач по различным методам, вводящие учащихся в сферу вычислительной техники. Этим схемам придается большое значение, и учащимся рекомендуется, руководствуясь ими, решать определенные задачи, относящиеся к пройденному отделу курса, обязательно доводя решение задач до конца и проверяя получаемые результаты контрольными формулами.

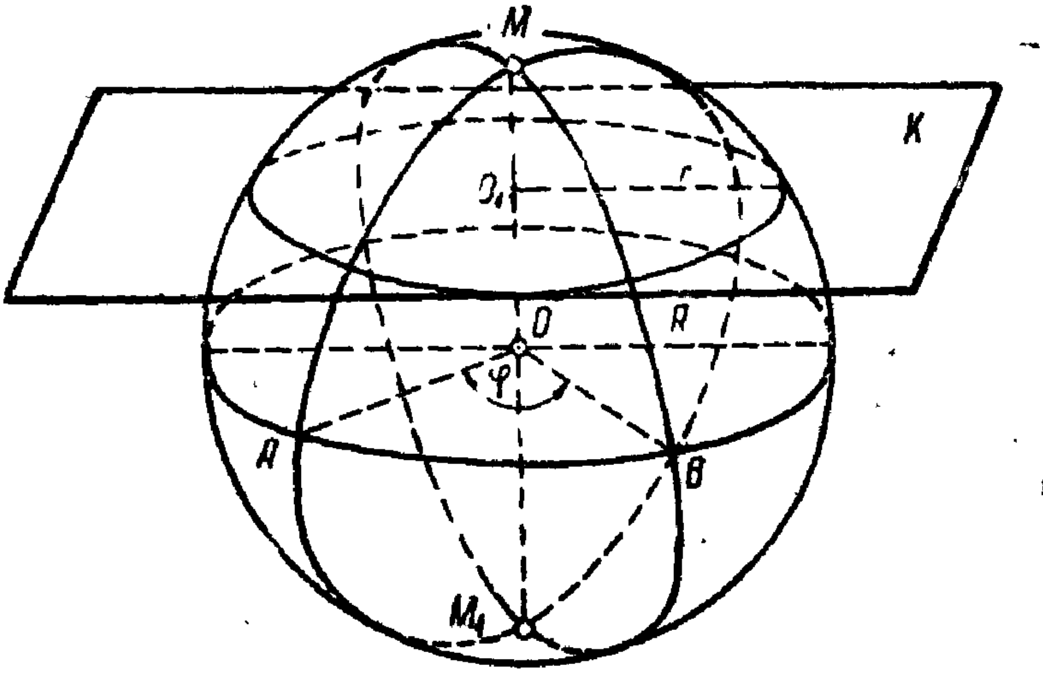
Автор

Ленинград, 1948 г.

I. ВВЕДЕНИЕ В СФЕРИЧЕСКУЮ ТРИГОНОМЕТРИЮ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Сферическая тригонометрия имеет своим предметом решение сферических треугольников, образуемых на поверхности шара дугами больших кругов.

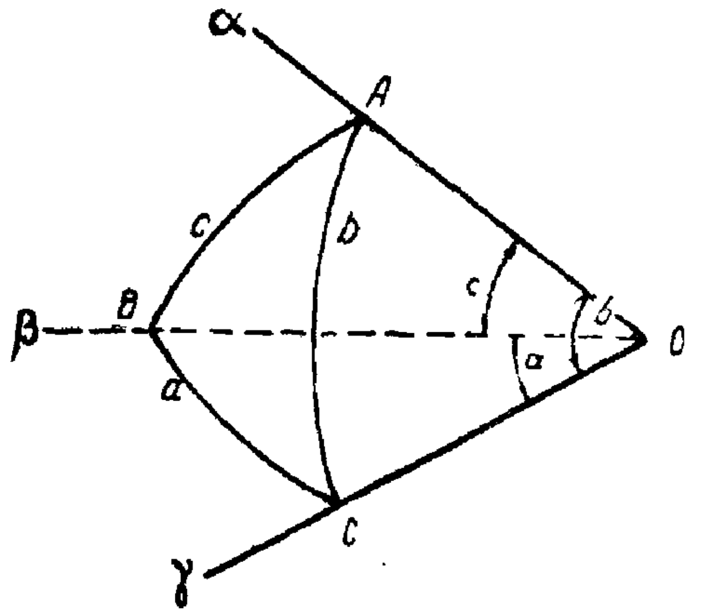
§ 1. Круги на шаре. Всякая плоскость K (черт. 1), пересекаясь с шаром, даст на шаре некоторую окружность



Черт. 1.

радиуса r. Перпендикулярный к плоскости K диаметр шара, проходя через его центр O, пересекает шар в двух точках M и M_1, называемых *сферическими* центрами круга. Круги, плоскости которых проходят через центр сферы O, называются *большими* кругами; остальные круги на сфере называются малыми кругами. Сферические центры M и M_1 большого круга называются его *полюсами*; большой круг в этом случае называется *полярой* точек M и M_1. Ясно, что полюса отстоят от соответствующих больших кругов на 90°, или четверть окружности.

§ 2. Понятие о сферическом треугольнике. Если какой-нибудь трехгранный угол с вершиной O и с ребрами $O\alpha$, $O\beta$ и $O\gamma$ пересечь сферой, имеющей центром вершину трехгранного угла, то в пересечении получатся три дуги больших кругов AB, AC и BC, которые на поверхности сферы составят фигуру, называемую *сферическим треугольником* (черт. 2).



Черт. 2.

Наоборот, если на сфере имеется треугольная фигура, составленная взаимным пересечением дуг трех больших кругов, то эту фигуру можно рассматривать как результат пересечения сферы и трехгранного угла с вершиной в центре сферы.

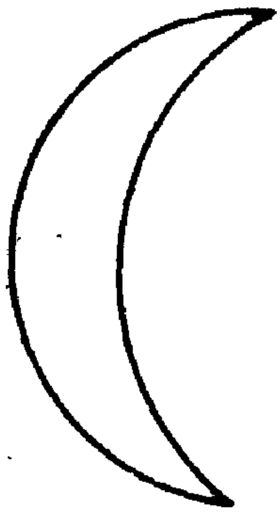
Ясно, что если на сфере задать три точки A, B и C и через каждую пару их провести дугу большого круга, то составится вполне определенный сферический треугольник ABC, так как через две точки, взятые на сфере, можно провести только одну дугу большого круга. Поэтому сферический треугольник можно определить как часть сферической поверхности, заключенной между тремя пересекающимися по две дугами больших кругов.

Будем вершины и углы сферического треугольника обозначать большими буквами латинского алфавита (A, B, C), а противоположные им стороны — соответствующими малыми буквами того же алфавита (a, b, c).

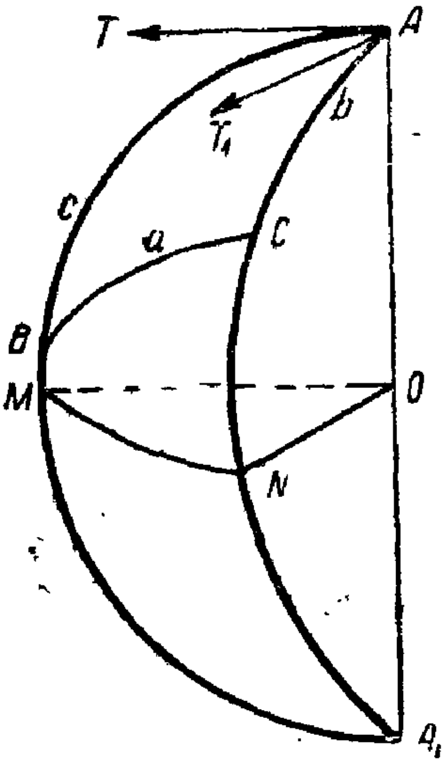
Во всяком сферическом треугольнике не может быть двух сторон, длина которых была бы более половины окружности, т. е. более 180°, потому что при двух сторонах, из которых каждая больше 180°, сферического треугольника вообще не получится, так как две эти стороны, не встречая третьей, пересекутся, образовав на сфере фигуру, называемую сферическим *двухугольником.*

Таким образом двухугольником называется фигура на сфере, образованная двумя пересекающимися полуокружностями больших кругов (черт. 3).

Если две стороны сферического треугольника не могут быть больше 180°, то одна третья сторона может быть и больше 180°. Но мы в дальнейшем будем рассматривать только такие сферические треугольники, которые получаются на сфере от соединения попарно трех данных точек наименьшими дугами больших кругов, т. е. такие треугольники, у которых все стороны и углы меньше 180°. Такие сферические треугольники называются эйлеровыми (знаменитый математик Леонард Эйлер, 1707—1783).


Черт. 3.

Если же дан будет такой сферический треугольник, у которого какая-либо сторона будет больше 180°, то вместо него будем рассматривать другой треугольник, служащий дополнением данного до полусферы. Этот последний треугольник будет эйлеров. Зная же элементы этого вспомогательного треугольника, легко определить элементы данного.



Черт. 4.

Так как всякие два большие круга пересекаются в двух точках, находящихся на концах одного и того же диаметра, то ясно, что если продолжить какие-либо две смежные стороны сферического треугольника до второй точки их пересечения, то эта вторая точка будет лежать на одном общем диаметре с первой точкой (черт. 4).

Этим построением образуется другой сферический треугольник BCA_1, который в отношении первоначального треугольника ABC называется сопряженным треугольником по стороне a.

Стороны и углы сопряженного треугольника A_1BC легко находятся по элементам основного треугольника:

$$\angle A_1 = \angle A, \qquad \text{сторона } a \text{ общая,}$$
$$\angle BCA_1 = 180^\circ - \angle C, \qquad \text{сторона } A_1B = 180^\circ - c,$$
$$\angle A_1BC = 180^\circ - \angle B, \qquad \text{сторона } A_1C = 180^\circ - b.$$

§ 3. Измерение углов и сторон сферического треугольника. Углом между кривыми называют угол между касательными к этим кривым в точке пересечения. Поэтому под углом A сферического треугольника ABC (черт. 4)[1] будем понимать угол между касательными AT и AT_1, проведенными к его сторонам AB и AC в вершине A. Эти касательные лежат очевидно в плоскостях $ABMA_1$ и $ACNA_1$ двугранного угла MAA_1N, перпендикулярны к его ребру AA_1, т. е. образуют линейный угол этого двугранного угла. В этом смысле мы будем говорить, что двугранный угол MAA_1N измеряет сферический угол TAT_1. Отсюда угол TAT_1 равен углу MON, т. е. сферический угол A измеряется дугой MN большого круга, заключенной между его сторонами AB и AC (или продолжениями), в отношении которой вершина A угла есть полюс.

Длина стороны сферического треугольника, представляя длину дуги большого круга, проходящего между двумя его вершинами, является наикратчайшим расстоянием на сфере между ними и называется *сферическим расстоянием* между данными точками.

Измерение сферического расстояния сводится к измерению углов, что дает возможность в сферической тригонометрии сравнивать между собой линии и углы. Всякое сферическое расстояние AB соответствует в качестве дуги большого круга, проходящего через точки A и B, центральному углу AOB, равному $\varphi = \angle AMB$ (черт. 1). Так как у всех больших кругов радиус один и тот же, то расстояние AB может быть измерено непосредственно углом φ, т. е. в градусах.

Кроме градусного измерения сферического расстояния еще существует *радиальное*, единицей измерения при котором

---

[1] Заметим, что при составлении чертежа бывает выгодно одну из сторон располагать в плоскости чертежа. Так, на черт. 4 в плоскости чертежа лежит сторона AB.

принимается радиус соответствующего круга. Если мы обозначим длину сферического расстояния между двумя точками A, B в градусном измерении через φ и то же расстояние в радиальном измерении через l, то будем иметь такое соотношение:

$$\frac{\varphi^\circ}{l}=\frac{360^\circ}{2\pi R},$$

откуда

$$l=\frac{\pi\times R}{180^\circ}\varphi;\quad l=\frac{\pi}{180\times 60\times 60}\times R\times\varphi'',$$

но

$$\frac{\pi}{180\times 60\times 60}$$

есть дуга в $1''$, она с большей точностью может быть принята равной $\sin 1''$, поэтому

$$l=\varphi'' R\sin 1''.$$

§ 4. Соотношение между сторонами сферического треугольника. В трехгранном угле $OABC$ (черт. 2) плоские его углы измеряются сторонами сферического треугольника, на которые опираются, а двугранные углы измеряются соответствующими углами сферического треугольника. Такая зависимость между трехгранным углом и соответствующим ему сферическим треугольником позволяет теоремы о трехгранном угле распространить и на сферический треугольник.

1) Известно, что во всяком трехгранном угле каждый из плоских углов меньше суммы двух других плоских углов, т. е. $AOC<AOB+BOC$. Ввиду того, что эти плоские углы измеряются сторонами сферического треугольника, то $\angle AOC=b$, $\angle AOB=c$, $\angle BOC=a$. Откуда для сферического треугольника имеем: $b<a+c$, т. е. *каждая сторона сферического треугольника менее суммы двух других.*

Перенося один из членов неравенства из правой части в левую, получим вытекающее из этой теоремы первое следствие: $b-c<a$, т. е. *каждая сторона сферического треугольника больше разности двух других.*

Прибавим к обеим частям неравенства $a+c>b$ по b, получим $a+b+c>2b$ или, разделив обе части последнего неравенства на 2, имеем второе следствие из теоремы

$\frac{a+b+c}{2}>b$, т. е. *полупериметр сферического треугольника всегда более каждой из его сторон.*

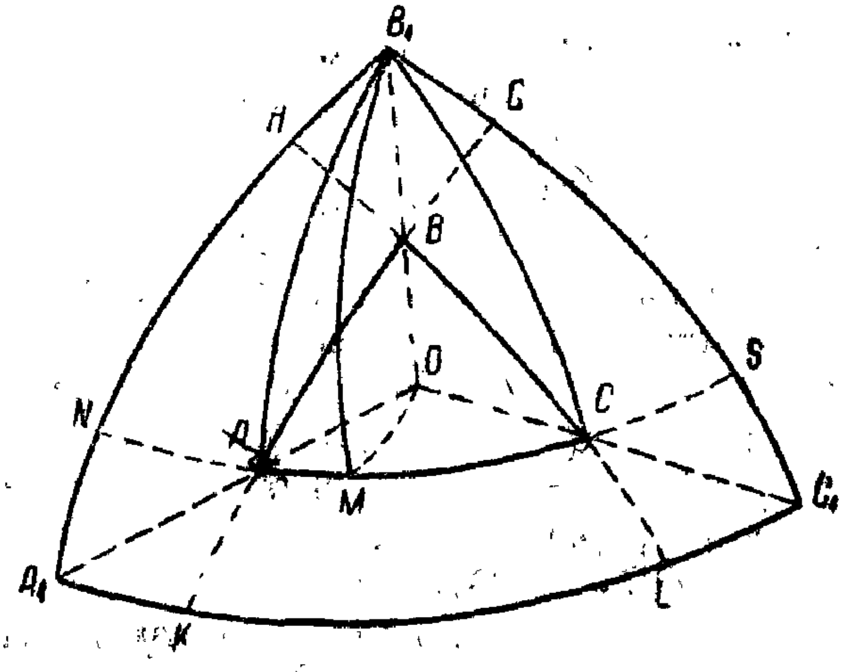
2) Известно, что во всяком трехгранном угле сумма плоских его углов менее 360°:

$$\angle AOC+\angle BOC+\angle AOB<360^\circ.$$

Заменяя плоские углы сторонами сферического треугольника, их измеряющими, будем иметь: $a+b+c<360^\circ$, т. е. *сумма сторон сферического треугольника всегда меньше 360°.*

§ 5. Полярный сферический треугольник и его свойства. Полярным треугольником для данного сферического треугольника называется такой сферический треугольник, по отношению сторон которого вершины данного являются полюсами.

Построим полярный треугольник для данного сферического треугольника ABC (черт. 5). Из точки A радиусом, рав-



Черт. 5.

ным 90°, проведем на сфере дугу B_1C_1, тогда точка A будет полюсом для проведенной дуги. Точно так же из точки B проведем дугу A_1C_1 и из точки C дугу A_1B_1. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ будет полярный для данного треугольника ABC.

Нетрудно видеть, что вершины построенного полярного треугольника суть полюсы для сторон данного треугольника.

Проведем через точки B_1, A и B_1, C дуги больших кругов. Тогда, если вершина A является полюсом дуги B_1C_1, каждая точка этой дуги отстоит от A на $90°$, а потому дуга большого круга AB_1 будет равна $90°$ и центральный угол B_1OA, опирающийся на нее, будет прямой.

Таким же образом, рассуждая по отношению вершины C и дуги A_1B_1, придем к заключению, что угол B_1OC будет тоже прямой.

Но если прямая B_1O перпендикулярна к двум прямым, проведенным на плоскости A_1OC_1, то она будет перпендикулярна и ко всякой третьей линии, проведенной в этой плоскости через ее основание, т. е. дуга большого круга, соединяющая вершину полярного треугольника B_1 с любой точкой M, лежащей на стороне основного треугольника AC, будет равна $90°$. Заключение: вершина B_1 полярного треугольника является полюсом для стороны AC основного треугольника.

Точно так же можно доказать, что две другие вершины полярного треугольника A_1 и C_1 являются полюсами для сторон начального треугольника BC и AB.

Итак: *если один сферический треугольник полярен относительно другого, то и второй будет полярен относительно первого* (т. е. треугольники будут взаимно полярны).

Теорема. *Стороны и углы двух полярных относительно друг друга треугольников попарно взаимно дополняют друг друга до 180°.*

Доказательство. Дано, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полярны один относительно другого (черт. 5).

Будем обозначать углы и стороны основного треугольника через A, B, C, a, b, c, элементы же построенного для него полярного треугольника теми же буквами, только с индексами A_1, B_1, C_1, a_1, b_1, c_1.

а) Докажем, что угол основного сферического треугольника, например B, сложенный со стороной полярного треугольника b_1, дает в сумме $180°$.

Продолжим дуги больших кругов BA и BC на сфере до пересечения со стороной полярного треугольника A_1C_1 в точках K и L.

Мы знаем, что сферический угол измеряется дугою большого круга, содержащегося между его сторонами, в отношении которой вершина угла есть полюс, а поэтому угол B измеряется дугою KL. Поэтому $B + b_1 = KL + A_1C_1$. Заменяя в этом равенстве A_1C_1 через $A_1K + KL + LC_1$, а затем объединяя слагаемые по порядку по два, получим:

$$B + b_1 = KL + A_1K + KL + LC_1 = A_1L + KC_1.$$

Ввиду того, что точка C_1 есть полюс дуги BK, находим, что $KC_1 = 90°$; ввиду того, что точка A_1 есть полюс дуги BL, имеем: $A_1L = 90°$.

Итак, $B + b_1 = 90° + 90° = 180°$.

Точно таким же образом доказывается, что

$$A + a_1 = 180°, \quad C + c_1 = 180°,$$

т. е. сумма угла данного сферического треугольника и соответствующей стороны полярного треугольника равна 180°.

б) Нетрудно доказать, что *сумма угла полярного треугольника и соответствующей стороны основного равна 180°*. Докажем, например, что $B_1 + b = 180°$. Угол B_1 измеряется дугою NS; поэтому $B_1 + b = NS + AC$; но вместо NS, как показывает чертеж, можно поставить сумму $NC + CS$, а вместо AC разность $AS - CS$, тогда будем иметь:

$$B_1 + b = NC + CS + AS - CS = NC + AS = 90° + 90° = 180°.$$

Заметим, что доказанное очевидно и в силу взаимной полярности треугольников.

в) Следует заметить: если каждая сторона одного треугольника меньше 90°, то построенный для него полярный треугольник будет находиться вне данного, как видим это на черт. 5; если же какие-либо стороны одного треугольника больше 90°, а другие меньше 90°, то его полярный треугольник будет пересекать стороны данного; наконец, если каждая из сторон данного треугольника больше 90°, то его полярный треугольник будет находиться внутри него.

Свойствами полярного треугольника мы будем пользоваться в дальнейшем при выводе различных формул сферической тригонометрии.

Понятие о полярном треугольнике введено в науку в XVIII веке геометром Снеллиусом.

§ 6. Соотношение между углами сферического треугольника. а) Для данного сферического треугольника ABC

вообразим полярный треугольник $A_1B_1C_1$, имеющий стороны a_1, b_1, c_1. По отношению этого полярного треугольника будем по доказанному (§ 4) иметь:

$$360° > a_1 + b_1 + c_1 > 0.$$

Переходим теперь от полярного треугольника к данному по формулам:

$$a_1 = 180° - A; \quad b_1 = 180° - B; \; c_1 = 180° - C.$$

Получим:

$$360° > 180° - A + 180° - B + 180° - C > 0;$$
$$360° > 540° - (A + B + C);$$
$$A + B + C > 180°;$$
$$540° - (A + B + C) > 0;$$
$$A + B + C < 540°.$$

Соединяя окончательные неравенства в одно, будем иметь:

$$540° > A + B + C > 180°,$$

т. е. *во всяком сферическом треугольнике сумма углов всегда меньше 540° и больше 180°.*

Разность между суммою трех углов сферического треугольника и 180° называется *сферическим избытком*, или *эксцессом сферического треугольника.* Эксцесс обозначается буквою $\mathfrak{E}$ и по только что доказанному всегда положителен.

б) По отношению полярного треугольника имеем: $a_1 + b_1 > c_1$. Переходя от полярного треугольника к основному, будем иметь: $180° - A + 180° - B > 180° - C$, откуда имеем:

$$A + B - C < 180°,$$

т. е. *во всяком сферическом треугольнике сумма двух углов без третьего всегда меньше 180°.*

§ 7. Условия равенства сферических треугольников. Сферические треугольники на одной и той же сфере равны при условии, если данные равные части расположены в треугольниках одинаковым образом и имеют:

а) по равным двум сторонам и углу, заключенному между ними;

б) по равным стороне и двум углам, к ней прилежащим;
в) по трем равным сторонам;
г) по трем равным углам.

Первые три случая равенства сферических треугольников доказываются так же, как и равенства плоских треугольников в начальной геометрии; что же касается четвертого случая, то доказательство его производится при помощи построения для данных сферических треугольников, им полярных.

Пусть дан сферический треугольник, имеющий соответственно углы A, B, C и стороны a, b, c, другой данный треугольник имеет углы D, E, F и стороны d, e, f. Дано, что $A=D$, $B=E$ и $C=F$, требуется доказать, что треугольники равны.

Для доказательства вообразим для данных треугольников полярные. Пусть углы их и стороны будут обозначены теми же буквами, как и элементы данных, только с индексами. На основании свойств полярных треугольников имеем следующие соотношения:

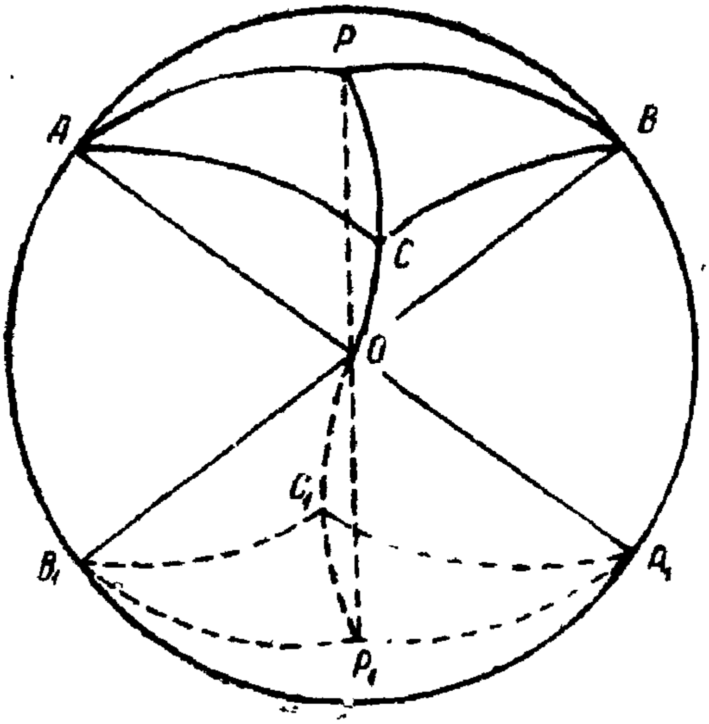
$$A+a_1=180^\circ, \quad D+d_1=180^\circ,$$
$$B+b_1=180^\circ, \quad E+e_1=180^\circ,$$
$$C+c_1=180^\circ, \quad F+f_1=180^\circ.$$

Ввиду того, что $A=D$, $B=E$ и $C=F$, находим, что $a_1=d_1$, $b_1=e_1$, $c_1=f_1$.

Отсюда вытекает, что полярные треугольники $A_1B_1C_1$ и $D_1E_1F_1$ равны по трем равным сторонам, а поэтому и их углы равны: $A_1=D_1$, $B_1=E_1$ и $C_1=F_1$.

Но если углы полярных треугольников равны, то стороны основных сферических треугольников обязательно равны, так как углы полярного треугольника служат дополнением до 180° сторон основного сферического треугольника. Отсюда заключаем: стороны основного сферического треугольника равны, а потому, на основании третьего условия равенства треугольников, и сами треугольники равны.

§ 8. Понятие о симметричных сферических треугольниках. Если от вершин сферического треугольника ABC проведем диаметры, то они пересекут сферическую поверхность в точках A_1, B_1 и C_1 (черт. 6). Если соединим эти точки дугами больших кругов, то получим другой сферический треугольник $A_1B_1C_1$, противолежащий первому и называющийся симметричным треугольником. В более общем случае мы будем называть симметричными и такие треугольники, соответственные вершины которых хотя и не расположены на концах общего диаметра, но в подобиое положение могут быть приведены некоторым движением по сфере. Очевидно, у симметричных треугольников все элементы равны. Несмотря на это, в общем случае такие треугольники,



Черт. 6.

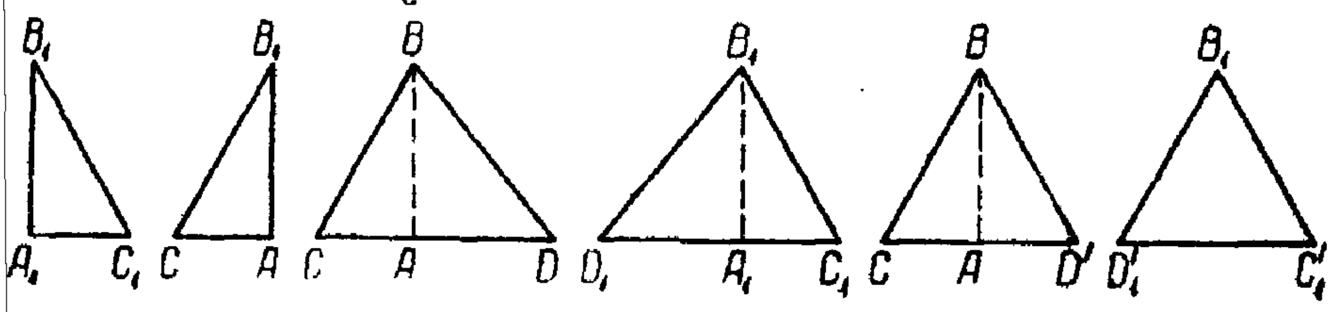
будучи наложены друг на друга, не могут совпасть своими элементами вследствие другого порядка их расположения.

С аналогичным случаем приходится встречаться и в плоской геометрии. Так, прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ и равновеликий ему, но симметрично расположенный относительно вертикальной оси, треугольник ABC не могут быть совмещены без вращения, т. е. не выходя из плоскости чертежа (черт. 6а). Равно не могут быть совмещены и косоугольные треугольники CBD и $D_1B_1C_1$. Однако, если последние сделаются равнобедренными, скажем, за счет движения точек D и D_1, то полученные треугольники могут быть совмещены без вращения, хотя соответственно обозначенные точки C и C_1, D и D_1 и не совпадут.

Все вышесказанное имеет место и для сферических треугольников, в отношении которых рассмотренный случай плоской геометрии можно считать частным случаем симметрии относительно бесконечно удаленной точки.

В силу приведенных соображений симметричные сферические равнобедренные треугольники могут быть совмещены на сфере. Пользуясь этим, докажем, что *данный сферический треугольник ABC и ему симметричный $A_1B_1C_1$ равновелики по площади.*

Для доказательства вообразим малый круг, проходящий через точки ABC, и пусть P есть центр этого круга.



Черт. 6а.

Соединив точку P дугами больших кругов с точками A, B и C, получим равные дуги AP, BP и PC.

Проведем через точку P диаметр, он в пересечении со сферой даст противоположную точку P_1, которую соединим дугами больших кругов с точками $A_1B_1C_1$. Очевидно, что в силу равенства центральных вертикальных углов $AP = A_1P_1$; $BP = B_1P_1$ и $CP = C_1P_1$. Ввиду же того, что $AP = BP = CP$, то и $A_1P_1 = B_1P_1 = C_1P_1$ и, следовательно, точка P_1 есть центр малого круга, проходящего через вершины треугольника $A_1B_1C_1$.

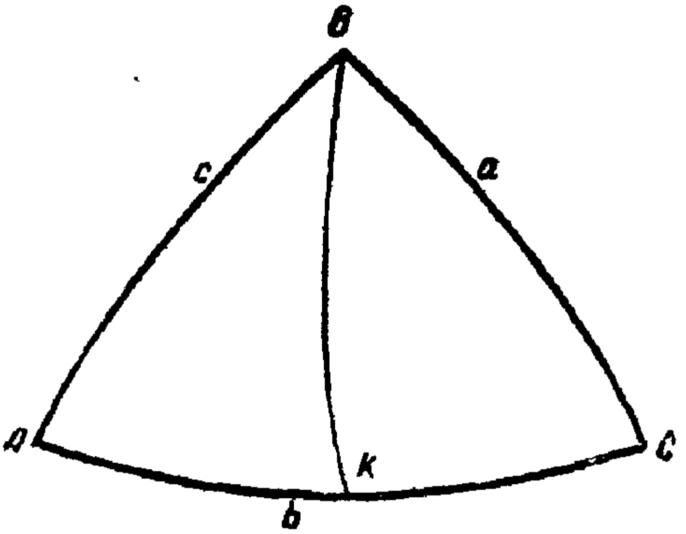
Сферические треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ разбились на равнобедренные симметричные треугольники, которые при наложении друг на друга вследствие своей равнобедренности совпадут, и площади их поэтому будут равны. Вследствие этого:

$$\triangle APB = \triangle A_1P_1B_1$$
$$+\ \triangle APC = \triangle A_1P_1C_1$$
$$\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1.$$

Сложив найденные равенства почленно, получим, что площадь $\triangle ABC$ равновелика площади $\triangle A_1B_1C_1$ (равновелика, а не равна, потому что равные симметричные треугольники, на которые разбились основные треугольники, неодинаково в них расположены).

§ 9. Соотношения между сторонами и углами сферического треугольника. а) *Если в сферическом треугольнике две стороны между собою равны, то равны и углы, противолежащие им.*

Положим, что $a = c$. Требуется доказать, что $A = C$ (черт. 7).



Черт. 7.

Соединим вершину B дугой большого круга с серединой K стороны AC. Тогда в треугольниках ABK и BKC сторона BK общая, $AK = KC$ по построению, $AB = BC$ по условию. Треугольники ABK и BKC имеют равные, но расположенные в другом порядке стороны, т. е. они будут симметричны, поэтому угол A равняется углу C.

б) *В сферическом треугольнике против равных углов лежат равные стороны.*

Дано $A = C$; доказать, что $a = c$.

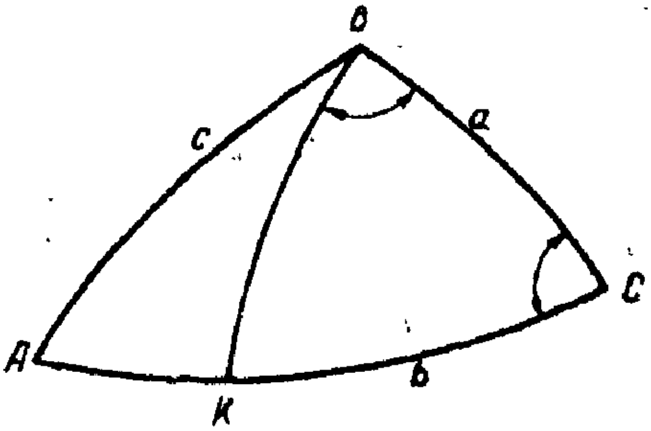
Эту теорему доказываем при помощи полярного треугольника. Если $A = C$, то $180° - a_1 = 180° - c_1$; $a_1 = c_1$. В полярном треугольнике, имеющем равные стороны $a_1 = c_1$, противоположные углы будут равны, т. е. $A_1 = C_1$. Переходя от этого равенства к основному треугольнику, будем иметь: $180° - a = 180° - c$, откуда $a = c$.

в) *Во всяком сферическом треугольнике против большего угла лежит и большая сторона* (черт. 8).

Пусть $B > C$, надо доказать, что $b > c$.

Проведем из вершины B дугу большого круга под углом C к стороне a. Тогда треугольник KBC будет равнобедренный с равными сторонами BK и KC.

Из треугольника ABK имеем $AB < AK + BK$, но $BK = KC$, поэтому $AB < AK + KC$, т. е. $AB < AC$, т. е. $b > c$.



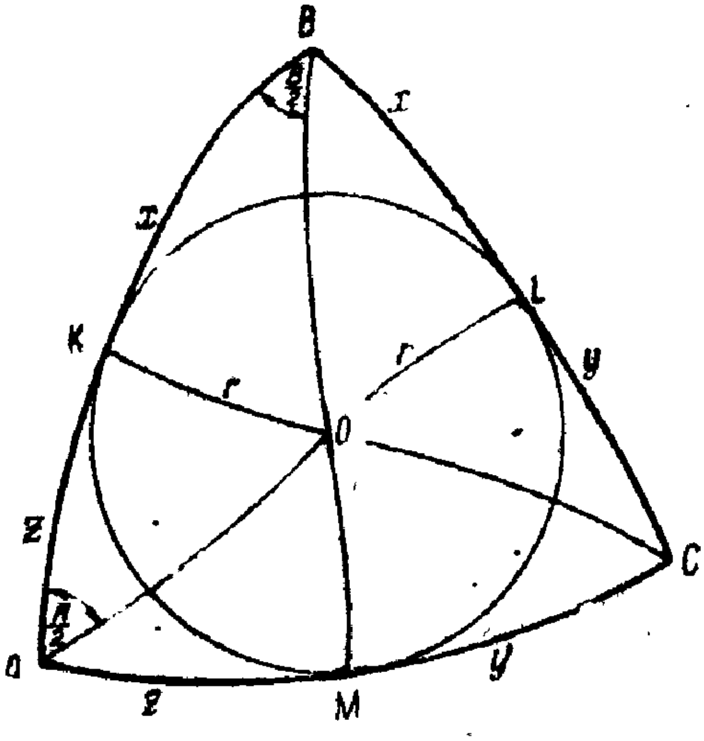
Черт. 8.

г) *В сферическом треугольнике против большей стороны лежит и больший угол.*

Дано $b > c$; доказать: $B > C$.

Эту теорему доказываем при помощи полярного треугольника. Если в основном треугольнике $b > c$, то в полярном треугольнике $180° - B_1 > 180° - C_1$, или $B_1 < C_1$. На основании предшествующей теоремы имеем в полярном треугольнике: $b_1 < c_1$ или, переходя к основному, будем иметь: $180° - B < 180° - C$, откуда $B > C$.

§ 10. Описанный около сферического треугольника и вписанный в него круги. а) *Вписанный круг.* Разделим углы A и B сферического треугольника ABC дугами больших кругов AO и BO пополам (черт. 9). Из точки O пересечения этих дуг проведем дуги больших кругов OK, OL и OM перпендикулярно к сторонам треугольника. Тогда треугольники AMO и AKO, имея углы при общей вершине A равные, сторону AO общую и углы K и M равные, как прямые, будут симметричные. Поэтому $MO = KO$. Точно так же найдем из симметричности треугольников KOB и OBL, что $KO = OL$.



Черт. 9.

Поэтому, если проведем из точки O окружность радиусом OM, то она коснется всех трех сторон треугольника.

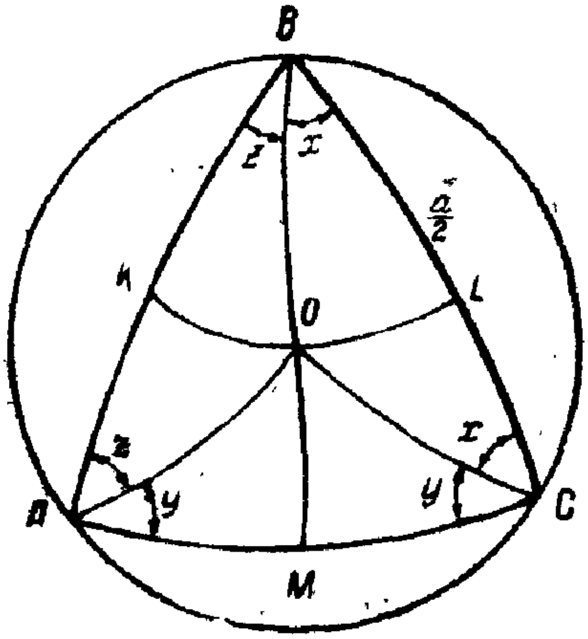
Соединим теперь центр описанного круга O с третьей вершиной C, получим два симметричные треугольника MOC и OLC, из которых видим, что $\angle OCM = \angle OCL$.

Назовем дугу большого круга, делящую угол пополам, *биссектрисой* угла.

Тогда делаем заключение:

Биссектрисы трех углов сферического треугольника пересекаются в центре малого круга, вписанного в треугольник.

б) *Описанный круг* (черт. 10). Разделим в треугольнике ABC пополам BC и AB и из точек деления K и L проведем дуги больших кругов под прямыми углами к сторонам. Получим точку пересечения этих дуг O, соединим точку O с вершинами A, B, C дугами больших кругов OA, OB и OC. Докажем, что эти дуги равны.



Черт. 10.

Треугольники AOK и KOB имеют сторону KO общей, стороны KB и KA равными и углы при общей вершине прямые. Следовательно, треугольники AKO и KBO симметричны. Стороны их AO и OB, как лежащие против равных углов, будут равны.

Точно так же из рассмотрения двух симметричных треугольников BOL и LOC выведем, что $BO = OC$. Отсюда делаем заключение, что $AO = OB = OC$, т. е. если из точки O, как центра, опишем радиусом, равным AO, окружность, то она пройдет через все три вершины треугольника.

Если теперь центр описанного круга O соединим со серединой стороны AC дугою большого круга OM, то получим два симметричных треугольника AOM и MOC. Следовательно, углы при точке M будут равны между собою, т. е. прямые.

Отсюда делаем заключение:

Три больших круга, проведенные через середины сторон сферического треугольника к ним перпендикулярно (медианы сферического треугольника), пересекаются в центре малого круга, описанного около сферического треугольника.

§ 11. Вопросы и упражнения.

1. Что такое сферический угол и как он измеряется?

2. Что такое сферическое расстояние между двумя точками на сфере? Градусное и линейное его измерение. Как выражается длина малого круга?

а) Выразить в линейной мере сферическое расстояние, измеренное в градусах: $\varphi_1 = 79°47'8''$; $\varphi_2 = 115°10'48''$.

(*Отв.* $l_1 = 1.39252$, $l_2 = 2.01027$).

б) Выразить в градусной мере сферическое расстояние, измеренное в единицах радиуса: $l_1 = 0{,}58430$, $l_2 = 2.42602$.

(*Отв.* $\varphi_1 = 33°28'41''$ $\varphi_2 = 139°0'2''$).

в) Как велика дуга большого круга земного шара, радиус которого 6 370 *км*, на которую опирается угол α?

$$\alpha_1 = 42°54'50'', \ \alpha_2 = 160°8'35''.$$

(*Отв.* $l_1 = 4776.3$ *км*, $l_2 = 17\,804{,}6$ *км*.)

г) Длина дуги большого круга земного шара равна l *км*; как велик опирающийся на нее центральный угол? $l_1 = 3\,562$ *км*, $l_2 = 7\,932.4$ *км*. (*Отв.* $\alpha_1 = 32°2'18''$, $\alpha_2 = 71°21'54''$.)

д) Определить в линейной мере длину параллели земного шара, содержащей α градусов и проходящей через точку, находящуюся под широтой φ. $\alpha = 42°15'7''$, $\varphi = 37°24'10''$. (*Отв.* $l = 3\,733{,}7$ *км*.)

3. Может ли сферический треугольник быть задан следующими элементами, и если не может, то почему?

а) $A = 58°35'$, $B = 71°28'$, $C = 82°31'$,
б) $A = 38°21'$, $B = 50°15'$, $C = 75°12'$,
в) $A = 172°15'$, $B = 150°30'$, $C = 87°20'$,
г) $a = 115°12'$, $b = 45°8'$, $c = 65°45'$,
д) $a = 115°30'$, $b = 130°20'$, $c = 114°10'$.

4. Что такое полярный треугольник, основные свойства его, какое практическое значение введения его в науку?

5. В чем заключается различие между понятиями: равные и симметричные треугольники?

II. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 12. Введение. Основными формулами сферической тригонометрии называются соотношения, связывающие четыре или пять элементов сферического треугольника, т. е. дающие возможность по трем или четырем данным его элементам определять четвертый или пятый.

Так как всего элементов в треугольнике шесть, то число основных формул, связывающих четыре элемента, равно числу возможных сочетаний из шести элементов по четыре, т. е. пятнадцать:

$$C_6^4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15.$$

Ввиду того, что вывод основных формул мы будем базировать не только на аналитическом, но и на графическом методе, считаем необходимым напомнить здесь основные положения теории проекций.

1) *Алгебраическая сумма проекций на какую-либо ось несомкнутого прямолинейного многоугольника равняется проекции на эту же ось его замыкающей.*

Как следствие отсюда вытекает:

Алгебраическая сумма проекций сторон замкнутого прямолинейного многоугольника, расположенного как угодно в пространстве, на какую-либо ось будет равна нулю.

2) *Ортогональная проекция отрезка прямой на какую-либо ось равняется длине проектируемого отрезка, умноженной на косинус угла, образуемого осью проекций с этим отрезком.*

Как следствие отсюда вытекает:

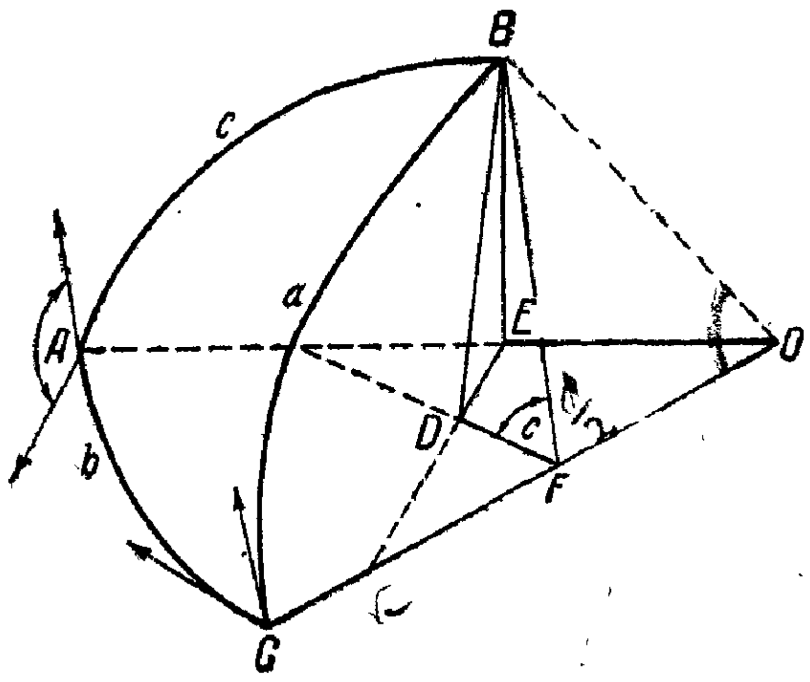
3) *Проекция отрезка, перпендикулярного к оси проекции, равна нулю.*

§ 18. Формулы косинуса стороны. Эти формулы известны обычно под названием формул Альбатегния (математик, живший во второй половине X века).

Так называются формулы, выражающие зависимость между тремя сторонами сферического треугольника и одним из его углов.

Читается формула так:

Косинус одной стороны сферического треугольника равняется произведению косинусов двух других его сто-



Черт. 11.

рон плюс произведение синусов тех же сторон на косинус угла между ними.

а) Вывод формулы, основанной на теории проекций.

Пусть ABC — данный сферический треугольник (черт. 11). Соединим вершины треугольника ABC с центром сферы O. Опустим из вершины B перпендикуляры на плоскость большого круга, проходящего через две другие вершины треугольника A и C, и на радиусы, соединяющие центр сферы с этими вершинами. Пусть эти перпендикуляры будут BD, BE и BF. Соединяя подошвы этих перпендикуляров прямыми ED и FD, получим ломаную линию $OEDF$ и ее замыкающую OF. Спроектируем полученную ломаную линию на ось проекций, совпадающую с направлением ее замыкающей.

Тогда будем иметь следующее соотношение:

$$\text{пр. } OF = \text{пр. } OE + \text{пр. } ED + \text{пр. } DF. \qquad (a)$$

Рассмотрим значение каждого из элементов, входящего в это соотношение.

OF, как показывает чертеж, равняется $\cos a$; проекция $\overline{OF}$ на ось OF тоже будет $\cos a$, пр. $DF = 0$, так как $DE \perp OF$.

На основании теоремы стереометрии «о трех перпендикулярах» очевидно, что прямая OF, лежащая в плоскости большого круга ACO и перпендикулярная к наклонной к нему BF, будет перпендикулярна и к проекции этой наклонной FD.

Чтобы найти пр. ED, заметим, что, на основании теоремы о трех перпендикулярах, DE перпендикулярна к OE, откуда угол BED есть линейный угол двугранного угла, измеряющего сферический угол A. Принимая во внимание, что угол EKD между ED и осью проектирования равен $90° - b$, получим, что

$$\text{пр. } ED = ED\cos(90° - b) = ED\sin b;$$

$$ED = BE\cos A; \quad BE = \sin c,$$

поэтому

$$\text{пр. } ED = \sin b \sin c \cos A.$$

Для проекции EO последовательно имеем:

$$\text{пр. } EO = EO\cos b; \quad \text{пр. } EO = \cos c; \quad \text{пр. } EO = \cos b\cos c.$$

Теперь, подставляя полученные значения в соотношение (a), имеем:

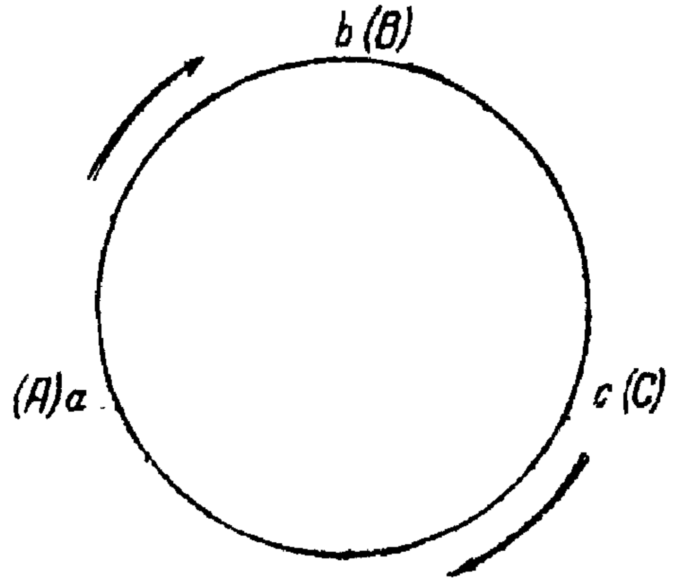
$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A. \qquad (1)$$

При помощи аналогичных построений можно вывести остальные две формулы для сторон b и c:

$$\cos b = \cos c\cos a + \sin c\sin a\cos B,$$

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C.$$

Последние две формулы легко получаются из первой при помощи способа круговой перестановки букв (черт. 12). Вторую формулу получаем, заменяя в ней букву a на b, b на c, c на a и A на B. Затем третью формулу получаем, заменяя во второй формуле снова a на b, b на c, c на a и B на C.

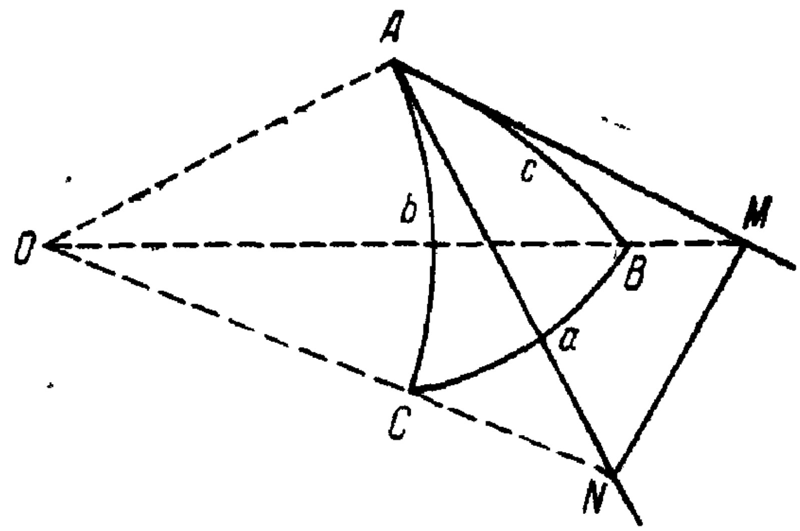


Черт. 12.

б) Второй способ вывода формулы.

Имеем сферический треугольник ABC, вершины которого соединяем с центром O (черт. 13).

Предположим, что стороны сферического треугольника b и c каждая порознь меньше $90°$. Проведем из точки A касательные к сторонам сферического треугольника AB и AC; одна из них будет лежать в плоскости AOC, а другая — в плоскости AOB; в силу наложенного ограничения эти касательные пересекут продолженные радиусы OB и OC в точках M и N. Соединяем точку M с N.



Черт. 13.

На основании теоремы плоской тригонометрии: «квадрат стороны треугольника равняется сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними», мы из треугольника MAN имеем:

$$MN^2 = AN^2 + AM^2 - 2AN \cdot AM \cos A.$$

Из треугольника OMN имеем:

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cos a.$$

Из сравнения этих двух равенств вытекает:

$$AN^2 + AM^2 - 2AN \cdot AM \cos A = \\ = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cos a,$$

откуда

$$2OM \cdot ON \cos a = OM^2 + ON^2 - AN^2 - AM^2 + \\ + 2AN \cdot AM \cos A.$$

Из прямоугольного треугольника OMA видим, что $OM^2 - AM^2 = OA^2$.

Из прямоугольного треугольника ONA видим, что $ON^2 - AN^2 = OA^2$.

После соответствующих подстановок получаем:

$$2 \cdot OM \cdot ON \cos a = 2OA^2 + 2AN \cdot AM \cos A,$$

$$OM \cdot ON \cos a = OA^2 + AN \cdot AM \cos A.$$

Разделив обе части последнего равенства на произведение $OM \cdot ON$, получим:

$$\cos a = \frac{OA}{OM} \cdot \frac{OA}{ON} + \frac{AN}{ON} \cdot \frac{AM}{OM} \cdot \cos A.$$

Из чертежа видно, что

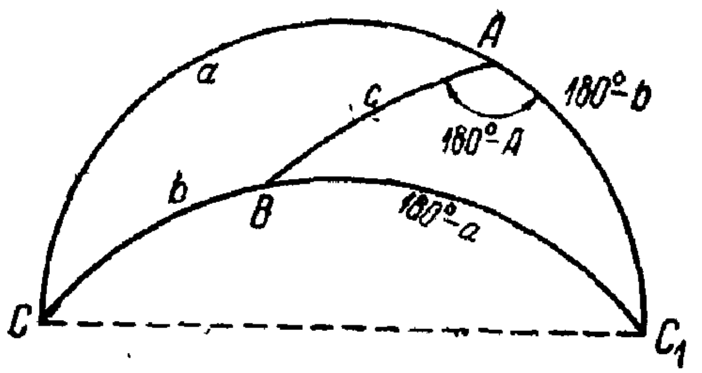
$$\frac{OA}{OM} = \cos b; \quad \frac{OA}{ON} = \cos c; \quad \frac{AN}{ON} = \sin b; \quad \frac{AM}{OM} = \sin c.$$

Делая замену отношений $\frac{OA}{OM}$, $\frac{OA}{ON}$, $\frac{AN}{ON}$ и $\frac{AM}{OM}$ полученными тригонометрическими функциями, получим окончательно:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Обобщим теперь выведенную формулу для случая, когда какая-либо из сторон b и c больше $90°$, или каждая из них больше $90°$.

Предположим сначала, что $b > 90$, $c < 90°$ (черт. 14). Продолжим стороны сферического треугольника b и a до их пересечения в точке C_1, тогда получим сферический треугольник BAC_1, у которого сторона $c < 90°$ и сторона $(180° - b) < 90°$, а значит, на основании выведенной формулы мы можем написать:



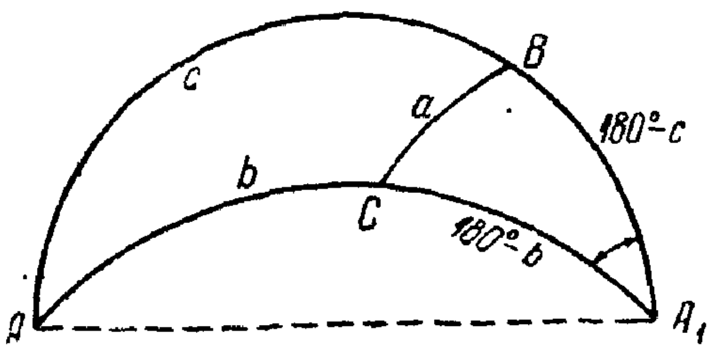
Черт. 14.

$$\cos(180° - a) = \cos(180° - b)\cos c + \\ + \sin(180° - b)\sin c\cos(180° - A),$$

$$-\cos a = -\cos b\cos c - \sin b\sin c\cos A,$$

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A.$$

Теперь предположим, что $b > 90°$ и $c > 90°$ (черт. 15). Продолжим стороны сферического треугольника c и b до их пересечения в точке A_1; тогда в сферическом треугольнике стороны $(180° - b) < 90°$ и $(180° - c) < 90°$, поэтому на основании предшествующей формулы пишем:



Черт. 15.

$$\cos a = \cos(180° - b)\cos(180° - c) + \\ + \sin(180° - b)\sin(180° - c)\cos A_1,$$

но $A = A_1$, поэтому имеем:

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A.$$

Формула косинуса стороны, как видно, заключает четыре элемента сферического треугольника, из которых три лежат рядом, а один отдельно.

§ 14. Формулы синусов. Эти формулы выражают зависимость между двумя сторонами сферического треугольника и двумя противоположными углами.

Синусы сторон сферического треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов.

а) Вывод формулы на основании теорем о проекциях.

Рассмотрим два прямоугольных треугольника BDE и BDF (черт. 11). Принимая их общую сторону как замыкающую двух ломаных линий, будем проектировать эти ломаные линии на ось проекций, совпадающую с замыкающей. Имеем:

$$\text{пр. } BD = \text{пр. } BE + \text{пр. } ED; \quad \text{пр. } BD = \text{пр. } BF + \text{пр. } FD,$$

откуда

$$\text{пр. } BE + \text{пр. } ED = \text{пр. } BF + \text{пр. } FD.$$

Проекция BE на ось BD равна $BE\cos DBE$; BE, как показывает чертеж, есть $\sin c$; $\angle DBE$ равен $90° - A$; поэтому

$$\text{пр. } BE = \sin c \cos (90° - A) = \sin c \sin A. \qquad (b)$$

Проекция ED на ось BD равна нулю, потому что косинус угла между ними равен нулю.

Проекция BF на ось BD равна $BF\cos FBE$; $BF = \sin a$; $\angle FBE = 90° - C$; поэтому пр. $BF = \sin a \cos (90° - C) = \sin a \sin C$.

Проекция DF на ось BD равна нулю, так как угол между ними $90°$.

Подставляя полученные значения в равенство (b), имеем

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C;$$

откуда получаем:

$$\frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin C}.$$

Точно так же можно доказать, что

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}; \qquad \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

Из приведенных нами трех формул синусов мы можем принять только две за независимые, так как третье отношение есть их очевидное следствие. Все эти формулы можно написать еще так:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin c}{\sin C}; \quad \frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C},$$

откуда имеем:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}=m, \tag{2}$$

т. е.: *в сферическом треугольнике отношение синуса стороны к синусу противолежащего угла равно постоянной величине.*

б) Вывод формулы синусов из основных формул косинуса стороны:

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$

$$\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B.$$

Мы видим, что в эти формулы входят элементы a, b, A и B, зависимость между которыми надо найти, но, кроме этих элементов, еще входит c, который нам не нужен. Отсюда вытекает, что задача вывода формулы синусов сводится к исключению этого элемента c.

Перенесем первый член правой части каждого равенства в левую часть и возведем после этого обе части каждого в квадрат:

$$\cos a-\cos b\cos c=\sin b\sin c\cos A,$$

$$\cos b-\cos a\cos c=\sin a\sin c\cos B,$$

$$\cos^2 a+\cos^2 b\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c=\sin^2 b\sin^2 c\cos^2 A,$$

$$\cos^2 b+\cos^2 a\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c=\sin^2 a\sin^2 c\cos^2 B.$$

Вычитаем почленно из первого равенства второе:

$$\cos^2 a-\cos^2 b+\cos^2 b\cos^2 c-\cos^2 a\cos^2 c=$$
$$=\sin^2 b\sin^2 c\cos^2 A-\sin^2 a\sin^2 c\cos^2 B.$$

Выносся общие множители за скобки, получаем:

$$\cos^2 a(1-\cos^2 c)-\cos^2 b(1-\cos^2 c)=$$
$$=\sin^2 c(\sin^2 b\cos^2 A-\sin^2 a\cos^2 B)$$

или

$$\cos^2 a \sin^2 c - \cos^2 b \sin^2 c =$$
$$= \sin^2 c (\sin^2 b \cos^2 A - \sin^2 a \cos^2 B).$$

Сокращаем обе части равенства на $\sin^2 c$:

$$\cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 b \cos^2 A - \sin^2 a \cos^2 B.$$

Заменяем в этом равенстве косинусы через синусы:

$$(1 - \sin^2 a) - (1 - \sin^2 b) =$$
$$= \sin^2 b (1 - \sin^2 A) - \sin^2 a (1 - \sin^2 B),$$
$$1 - \sin^2 a - 1 + \sin^2 b =$$
$$= \sin^2 b - \sin^2 b \sin^2 A - \sin^2 a + \sin^2 a \sin^2 B.$$

После сокращений получаем:

$$\sin^2 a \sin^2 B - \sin^2 b \sin^2 A = 0; \quad \sin^2 a \sin^2 B = \sin^2 b \sin^2 A,$$

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}.$$

Извлекаем квадратный корень из обеих частей равенства:

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Двойного знака при извлечении корня писать не надо, так как по условию мы рассматриваем в данном случае только такие сферические треугольники, у которых каждая из сторон меньше 90°.

в) Формулу синусов из формулы косинуса стороны можно вывести иначе:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Решаем это уравнение относительно A:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Обе части этого равенства возведем в квадрат:

$$\cos^2 A = \frac{\cos^2 a - 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

и вычтем каждую часть из единицы:

$$1-\cos^2 A=\frac{\sin^2 b\sin^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 b\cos^2 c}{\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Разделим обе части равенства на $\sin^2 a$ и введем вместо синусов в числителе второй части равенства косинусы

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 b\cos^2 c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Раскроем скобки и сделаем сокращения:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=$$

$$=\frac{1-\cos^2 b-\cos^2 c+\cos^2 b\cos^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 b\cos^2 c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.$$

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Выражение, стоящее в правой части равенства, симметрично относительно элементов a, b, c и не изменит своей величины от круговой перестановки букв. Очевидно, если мы произведем такие же вычисления для $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}$ и $\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}$, получим в правой части то же выражение; поэтому

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}=\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}.$$

Откуда имеем:

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

Формула синусов иногда формулируется иначе: *произведение синуса стороны на синус прилежащего угла равняется произведению синусов противолежащих им элементов*. В такой формулировке она преимущественно используется в астрономии.

§ 15. Формулы пяти элементов. Эти формулы связывают между собою пять элементов сферического треугольника: три стороны и два угла или три угла и две стороны.

а) Вывод формулы на основании теорем о проекциях. Для вывода этой формулы рассматриваем в четырехугольнике $DEOF$ (черт. 11) сторону DF как замыкающую. Тогда, на основании первой теоремы о проекциях, будем иметь:

$$\text{пр. } DF = \text{пр. } FO + \text{пр. } OE + \text{пр. } ED.$$

Принимая за ось проекций замыкающий отрезок DF, будем иметь:

$$\text{пр. } DF = \sin a \cos C,$$
$$\text{пр. } FO = \cos a \cos 90^\circ = 0,$$
$$\text{пр. } OE = \cos c \cos (90^\circ - b) = \cos c \sin b,$$
$$\text{пр. } ED = \sin c \cos A \cos (180^\circ - b) = -\sin c \cos b \cos A.$$

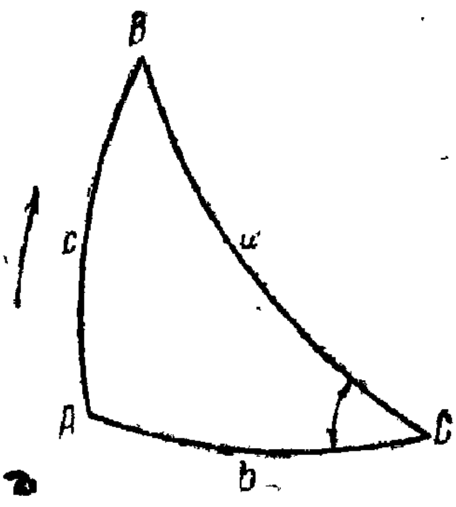
Окончательно после подстановки имеем:

$$\sin a \cos C = \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A, \qquad (3)$$

т. е. *синус стороны, умноженный на косинус угла прилежащего, равен синусу другой стороны, ограничивающей этот угол, на косинус третьей стороны минус косинус стороны, ограничивающей угол, умноженный на произведение синуса третьей стороны и косинуса угла, противолежащего первой стороне.*

Эта формула называется иначе формулой *синуса стороны на косинус угла.*

Таких формул, очевидно, будет шесть, так как число сочетаний из шести элементов, взятых по два, шесть.



Черт. 16.

Их легко все написать, если в выведенной формуле сделать круговую перестановку букв (черт. 16), а затем, написав формулу для другого прилежащего угла, вновь сделать круговую перестановку букв.

$$\sin b \cos A = \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B,$$
$$\sin c \cos B = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C,$$
$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A,$$
$$\sin b \cos C = \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B,$$
$$\sin c \cos A = \sin b \cos a - \cos b \sin a \cos C.$$

б) Вывод формулы *синуса стороны, умноженного на косинус угла*, из формулы косинуса стороны:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B.$$

Во второе равенство вставим значение $\cos a$ из первого равенства, для чего умножим обе части верхнего равенства на $\cos c$ и сложим с нижним:

$$\cos b + \cos a \cos c = \cos a \cos c + \cos b \cos^2 c +$$
$$+ \sin a \sin c \cos B + \sin b \sin c \cos c \cos A,$$
$$\cos b = \cos b \cos^2 c + \sin a \sin c \cos B + \sin b \sin c \cos c \cos A.$$

Откуда имеем:

$$\cos b\,(1 - \cos^2 c) = \sin a \sin c \cos B + \sin b \sin c \cos c \cos A.$$

Сокращая обе части равенства на $\sin c$ получаем:

$$\cos b \sin c = \sin a \cos B + \sin b \cos c \cos A.$$

Переписывая иначе, получаем окончательно:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A.$$

в) Формулы, выражающие зависимость между тремя углами и двумя сторонами сферического треугольника, можно получить из только что выведенных формул, пользуясь соотношением между сторонами сферического треугольника и противолежащими углами:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \cos c \sin b \cos A,$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = m.$$

Из соединения этих двух соотношений пишем:

$$m \sin A \cos B = m \cos b \sin C - m \sin B \cos c \cos A.$$

Откуда окончательно:

$$\sin C \cos b = \sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c. \qquad (4)$$

Очевидно таких формул будет шесть и написать их можно, аналогично формулам (3), путем круговой перестановки.

На словах это соотношение между пятью элементами сферического треугольника можно формулировать так: *синус угла, умноженный на косинус прилежащей стороны, равняется синусу другого угла, прилежащего к той же стороне, умноженному на косинус третьего угла, плюс (обратно) косинус прилежащего угла, умноженный на синус третьего угла и на косинус стороны, противолежащей первому углу.*

Эта формула называется формулой синуса угла на косинус стороны.

г) Вывод формулы синуса угла на косинус стороны при помощи введения полярного треугольника.

Положим, что мы имеем для данного сферического треугольника полярный треугольник, имеющий углы $A_1 B_1 C_1$ и стороны $a_1 b_1 c_1$, тогда для этого полярного треугольника, применяя формулу синуса стороны на косинус угла, имеем:

$$\sin a_1 \cos B_1 = \sin c_1 \cos b_1 - \cos c_1 \sin b_1 \cos A_1.$$

От полярного треугольника перейдем теперь к основному, принимая во внимание соотношения:

$$a_1 + A = 180^\circ;\ B_1 + b = 180^\circ;\ c_1 + C = 180^\circ;$$

$$b_1 + B = 180^\circ;\ A_1 + a = 180^\circ;$$

$$\sin(180^\circ - A)\cos(180^\circ - b) = \sin(180^\circ - C)\cos(180^\circ - B) -$$

$$-\cos(180^\circ - C)\ \sin(180^\circ - B)\cos(180^\circ - a)$$

или

$$-\sin A \cos b = -\sin C \cos B - \cos C \sin B \cos a.$$

Меняя знаки у всех членов равенства на обратные, окончательно получаем:

$$\sin A \cos b = \sin C \cos B + \cos C \sin B \cos a.$$

§ 16. Формулы, обратные формулам косинуса стороны (формулы косинуса угла). Эти формулы определяют зависимость между тремя углами и одной стороной.

а) Вывод формулы при помощи полярного треугольника.

Построим полярный треугольник для данного треугольника и по отношению к нему напишем:

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1.$$

Переходя к данному сферическому треугольнику, будем иметь:

$$\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B)\cos(180^\circ - C) + \\ + \sin(180^\circ - B)\sin(180 - C)\cos(180^\circ - a).$$

После приведения тригонометрических функций получаем:

$$-\cos A = \cos B\cos C - \sin B\sin C\cos a$$

или

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a. \qquad (5)$$

Очевидно, тем же путем или круговой перестановкой получим:

$$\cos B = -\cos C\cos A + \sin C\sin A\cos b,$$

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos c.$$

В сферическом треугольнике *косинус угла равняется отрицательному произведению косинусов прочих двух углов, сложенному с произведением синусов тех же углов на косинус стороны, противолежащей первому углу.*

б) Вывод формулы косинуса угла из формулы косинуса стороны без помощи полярного треугольника (непосредственный).

Имеем систему равенств (1):

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A,$$

$$\cos b = \cos a\cos c + \sin a\sin c\cos B,$$

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C.$$

Значение $\cos c$ из третьего равенства подставим в первые два:

$$\cos a = \cos b(\cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C) + \\ + \sin b\sin c\cos A, \qquad (I)$$

$$\cos b = \cos a(\cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C) + \\ + \sin a\sin c\cos B. \qquad (II)$$

Из равенства (I) получаем:

$$\cos a = \cos^2 b\cos a + \sin a\sin b\cos b\cos C + \sin b\sin c\cos A,$$

$$\cos a(1 - \cos^2 b) = (\sin a\cos b\cos C + \sin c\cos A)\sin b,$$

$$\cos a\sin^2 b = (\sin a\cos b\cos C + \sin c\cos A)\sin b,$$

$$\cos a\sin b = \sin a\cos b\cos C + \sin c\cos A. \qquad (III)$$

Точно так же получим из равенства (II):

$$\cos b \sin a = \sin b \cos a \cos C + \sin c \cos B. \qquad \text{(IV)}$$

На основании соотношений $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = m$, вставляем в предшествующие формулы (III) и (IV) вместо:

$$\sin a = m \sin A; \quad \sin b = m \sin B; \quad \sin c = m \sin C;$$

получим:

$$m \cos a \sin B = m \sin A \cos b \cos C + m \sin C \cos A,$$
$$m \cos b \sin A = m \sin B \cos a \cos C + m \sin C \cos B.$$

Сокращая на m, получаем:

$$\cos a \sin B = \cos b \sin A \cos C + \sin C \cos A,$$
$$\cos b \sin A = \cos a \sin B \cos C + \sin C \cos B.$$

Значение $\cos b$ из второго равенства подставляем в первое равенство:

$$\cos b = \frac{\cos a \sin B \cos C + \sin C \cos B}{\sin A},$$

$$\cos a \sin B = \cos a \sin B \cos^2 C + \sin C \cos C \cos B +$$
$$+ \sin C \cos A,$$

$$\cos a \sin B (1 - \cos^2 C) = \sin C \cos C \cos B + \sin C \cos A,$$
$$\cos a \sin B \sin^2 C = \sin C \cos C \cos B + \sin C \cos A.$$

Сокращаем обе части равенства на $\sin C$:

$$\cos a \sin B \sin C = \cos B \cos C + \cos A.$$

Откуда получаем окончательно:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

в) Полученные формулы показывают, что стороны сферического треугольника могут быть определены по трем его углам:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A},$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Отсюда следует подтверждение, что с тремя данными углами существует только один сферический треугольник.

§ 17. Формулы четырех элементов (с котангенсами). Эти формулы связывают между собой две стороны сферического треугольника, угол между ними и один из прилежащих углов. Эти формулы иногда называются формулами с котангенсами.

а) Вывод на основе формулы пяти элементов и соотношения между сторонами сферического треугольника и противолежащими им углами:

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B,$$

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B.$$

Разделив почленно эти два равенства, получим:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\sin c \operatorname{ctg} a}{\sin B} - \frac{\cos c \cos B}{\sin B},$$

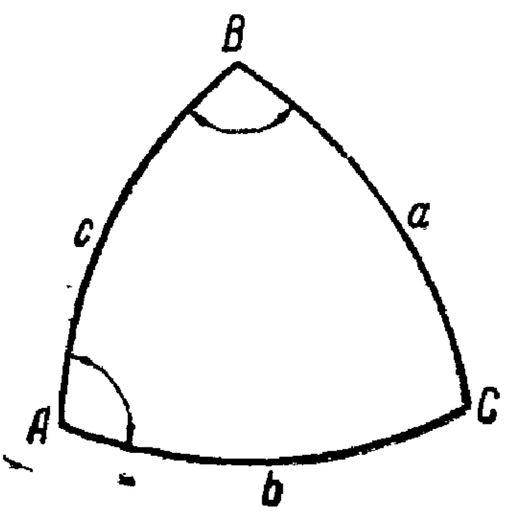
или

$$\operatorname{ctg} A \sin B = \sin c \operatorname{ctg} a - \cos c \cos B,$$

или окончательно:

$$\sin c \operatorname{ctg} a - \sin B \operatorname{ctg} A = \cos c \cos B. \qquad (6)$$

Таких формул будет шесть. Для того чтобы легче запомнить эти формулы, существует мнемоническое правило, предложенное шотландским математиком Непером. Обращает внимание, что формула связывает четыре элемента треугольника, лежащих рядом $AcBa$; из них всегда — два угла и две стороны; один угол всегда крайний, другой внутренний и одна сторона крайняя, другая внутренняя.



Черт. 17.

Непер предложил формулу читать так: *разность между произведением синуса средней стороны на котангенс крайней стороны и синуса среднего угла на котангенс крайнего угла равна произведению косинусов средних элементов* (черт. 17).

Рассматривая чертеж, видим, что кроме имеющейся комбинации $AcBa$, можно получить еще пять различных комбинаций из элементов двух углов и двух сторон, расположенных рядом между собою:

$$BaCb, \quad CbAc, \quad aCbA, \quad bAcB, \quad cBaC,$$

из которых по правилу Непера получим пять следующих формул:

$$\sin a \operatorname{ctg} b - \sin C \operatorname{ctg} B = \cos a \cos C,$$

$$\sin b \operatorname{ctg} c - \sin A \operatorname{ctg} C = \cos b \cos A,$$

$$\sin b \operatorname{ctg} a - \sin C \operatorname{ctg} A = \cos b \cos C,$$

$$\sin c \operatorname{ctg} b - \sin A \operatorname{ctg} B = \cos c \cos A,$$

$$\sin a \operatorname{ctg} c - \sin B \operatorname{ctg} C = \cos a \cos B.$$

Легко видеть, что первые две формулы получаются из формулы (6) и последние две из формулы $\sin b \operatorname{ctg} a - \sin C \operatorname{ctg} A = \cos b \cos C$ при помощи круговой перестановки букв.

б) Вывод формулы с котангенсами на основании формулы косинуса стороны:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Формула четырех элементов должна связывать две стороны, угол между ними и один из прилегающих углов: a, b, C, A.

В написанные две формулы входят все эти элементы, лишним является c, который и надо исключить.

Обе части второго равенства умножим на $\cos b$, получаем:

$$\cos b \cos c = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C.$$

Возьмем формулу (2):

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}; \quad \sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}.$$

Умножив обе части последнего равенства на произведение

$\sin b \cos A$, получим:

$$\sin b \sin c \cos A = \sin a \sin b \sin C \operatorname{ctg} A.$$

Если теперь найденные значения для $\cos b \cos c$ и для $\sin b \sin c \cos A$ подставить в формулу (1), то получим:

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \\ + \sin a \sin b \sin C \operatorname{ctg} A,$$

$$\cos a (1 - \cos^2 b) = \sin a \sin b \cos b \cos C + \\ + \sin a \sin b \sin C \operatorname{ctg} A.$$

Сократив обе части равенства на $\sin b$, имеем:

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin a \sin C \operatorname{ctg} A.$$

Разделив обе части равенства на $\sin a$, получим окончательно:

$$\sin b \operatorname{ctg} a - \sin C \operatorname{ctg} A = \cos b \cos C.$$

в) Эту формулу, выражающую зависимость между четырьмя элементами сферического треугольника, можно написать в таком виде. Разделив обе части формулы на произведение $\cos b \cos C$, получим:

$$\frac{\sin b \operatorname{ctg} a}{\cos b \cos C} - \frac{\sin C \operatorname{ctg} A}{\cos b \cos C} = 1,$$

$$\frac{\operatorname{ctg} a}{\operatorname{ctg} b} \frac{1}{\cos C} - \frac{\operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg} C} \frac{1}{\cos b} = 1.$$

Итак: *В сферическом треугольнике отношение котангенсов двух сторон, разделенное на косинус угла, заключенного между ними, минус отношение котангенсов двух углов, взятых в обратном порядке, разделенное на косинус стороны между вершинами этих углов, равно единице.*

§ 18. Вопросы и упражнения.

1. Подсчитайте, сколько основных формул сферической тригонометрии, связывающих четыре элемента треугольника; разделите их на две группы, из которых каждая группа формул может быть выведена при помощи полярного треугольника из другой группы формул.

2. Перечислите элементы сферического треугольника, которые могут входить в формулы, связывающие между собою три стороны

и один из углов. Сколько таких формул можно написать? Напишите их.

3. Перечислите элементы сферического треугольника, которые могут входить в формулы, связывающие две стороны с двумя противолежащими углами. Сколько таких формул можно написать? Напишите их.

4. Перечислите элементы сферического треугольника, которые могут входить в различные формулы, связывающие две стороны, угол между ними и угол, противолежащий одной из них. Сколько таких формул? Напишите их.

5. Перечислите элементы сферического треугольника, входящие в разные формулы, выражающие зависимость между одной из сторон и тремя углами. Сколько таких формул? Напишите их.

6. Из общего количества формул, связывающих четыре элемента треугольника, сколько независимых формул? Обоснуйте доказательством свой ответ.

7. Сколько формул, связывающих пять элементов треугольника? Напишите их.

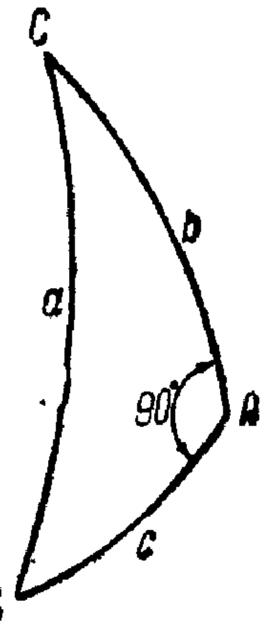
8. Возможен ли сферический треугольник при следующих значениях его элементов:

$$a = 35°30'23'', \quad b = 38°57'12'',$$
$$a = 41°15', \quad b = 20°18',$$
$$a = 20°32'32'', \quad b = 68°12'58'',$$
$$A = 25°26'17'', \quad B = 64°9'41'',$$
$$A = 43°2'6'', \quad B = 47°37'21'',$$
$$A = 35°12', \quad B = 46°18',$$
$$c = 80°14'41'', \quad A = 17°20'52'',$$
$$C = 100°30'16'', \quad a = 21°27'36''.$$

9. Приняв в основу данную вам формулу косинуса угла, выведите формулу косинуса стороны при помощи полярного треугольника.

III. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 19. Введение. Сферический треугольник определяется по трем данным его элементам; в прямоугольном сферическом треугольнике один элемент (прямой угол) известен, следовательно для его определения необходимо должны быть даны еще два элемента, по которым и будет отыскиваться какой-либо третий элемент. Таким образом, в формулу решения прямоугольного сферического треугольника должны входить три элемента: два данных и один искомый.



Черт. 18.

Число всевозможных случаев нахождения неизвестного элемента по двум данным, очевидно, будет равно числу сочетаний из пяти элементов (a, b, c, B, C) по три:

$$C_5^3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10.$$

Всех случаев решения прямоугольных сферических треугольников будет десять, а именно (черт. 18):

abc, abB, abC, acB, acC, aBC, bcB, bcC, bBC, cBC.

Таким образом, нам нужно найти десять формул для решения прямоугольных сферических треугольников.

§ 20. Сферическая теорема Пифагора. *Косинус гипотенузы равен произведению косинусов его катетов.*

а) Вывод формулы непосредственный.

Пусть ABC есть прямоугольный сферический треугольник с прямым углом A. Трехгранный угол, плоскими и линейными углами которого измеряются элементы данного сферического треугольника, будет $OABC$ (черт. 19).

Возьмем на ребре OB трехгранного угла $OABC$ какую-либо точку P и проведем через эту точку плоскость PTS, перпендикулярную к ребру OB. Получим тетраэдр $SOPT$, причем ребро тетраэдра ST будет тоже перпендикулярно к плоскости AOB, как линия пересечения двух перпендикулярных к этой плоскости плоскостей (плоскость OST перпендикулярна к плоскости AOB вследствие того, что угол A дан прямым). Вследствие этого плоские треугольники STP и STO имеют прямые углы при общей вершине T. Из соотношения сторон в этих прямоугольных треугольниках имеем:

$$\frac{OT}{OS} = \cos b;$$

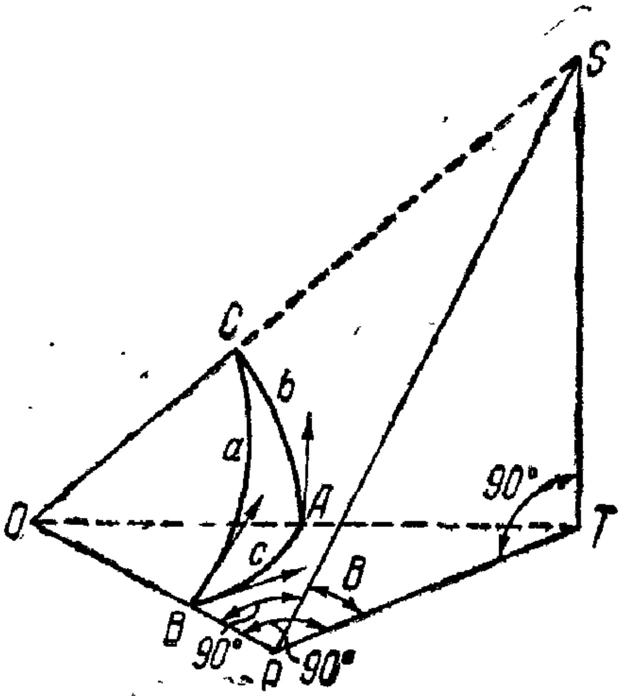
$$\frac{OP}{OT} = \cos c; \quad \frac{OP}{OS} = \cos a.$$

Подставляя эти отношения в тождество:

$$\frac{OP}{OS} = \frac{OT}{OS} \cdot \frac{OP}{OT},$$

получим окончательный результат:

$$\cos a = \cos b \ \cos c. \qquad (7)$$



Черт. 19.

б) Вывод сферической формулы Пифагора из основной формулы косинуса стороны.

Возьмем ту формулу косинуса стороны, которая содержит угол A:

$$\cos a = \cos b \ \cos c + \sin b \ \sin c \ \cos A.$$

В прямоугольном треугольнике $A = 90°$, $\cos A = 0$; поэтому

$$\cos a = \cos b \ \cos c.$$

Эта формула показывает, что в прямоугольном сферическом треугольнике число сторон, больших 90°, всегда четное, а меньших — нечетное. В самом деле, для того чтобы существовало соотношение $\cos a = \cos b \cos c$, необходимо при наличности знака $+$ в первой части равенства, чтобы были одинаковые знаки у обоих множителей во второй части, т. е. или каждая из трех сторон треугольника меньше $90°$, или две из них больше $90°$; при наличности же в первой части знака —, во второй части один из множителей будет обязательно отрицателен, что показывает необходимость иметь две стороны больше $90°$, а одну меньше $90°$.

§ 21. Синус катета в функции гипотенузы и противолежащего угла. *Синус каждого из катетов равен синусу гипотенузы, умноженному на синус противолежащего угла.*

а) Для непосредственного вывода формулы воспользуемся черт. 19:

$$\frac{ST}{SP} = \sin B; \quad \frac{SP}{SO} = \sin a; \quad \frac{ST}{SO} = \sin b.$$

Если затем в тождестве:

$$\frac{ST}{SP} = \frac{ST}{SO} : \frac{SP}{SO}$$

сделать соответствующие подстановки, то

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$$

или

$$\sin b = \sin a \sin B. \tag{8}$$

б) Эта же формула получается как частный случай из основных соотношений между сторонами сферического треугольника и противолежащими им углами:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b};$$

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin c},$$

где для прямоугольного треугольника, очевидно, следует положить $A = 90°$, $\sin A = 1$, т. е.:

$$\frac{1}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}; \quad \sin b = \sin a \sin B,$$

$$\frac{1}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin c}; \quad \sin c = \sin a \sin C.$$

§ 22. Тангенс катета в функции гипотенузы и угла, ему прилежащего. *Тангенс каждого катета равен произведению тангенса гипотенузы на косинус угла, ему прилежащего.*

а) Вывод формулы непосредственный.

Руководствуясь черт. 19, имеем такие соотношения:

$$\frac{PT}{PO}=\operatorname{tg} c;\quad \frac{PS}{PO}=\operatorname{tg} a;\quad \frac{PT}{PS}=\cos B.$$

Напишем тождество:

$$\frac{PT}{PO}=\frac{PS}{PO}\,\frac{PT}{PS},$$

откуда

$$\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a\,\cos B. \qquad (9)$$

б) Вывод формулы из основной формулы.

Берем основные формулы синуса стороны на косинус прилежащего угла:

$$\sin b\,\cos A=\sin c\,\cos a-\cos c\,\sin a\,\cos B,$$

$$\sin c\,\cos A=\sin b\,\cos a-\cos b\,\sin a\,\cos C.$$

Принимая во внимание, что для прямоугольного треугольника $\cos A=0$, имеем следующие соотношения:

$$\sin c\,\cos a=\sin a\,\cos c\,\cos B,$$

$$\sin b\,\cos a=\sin a\,\cos b\,\cos C.$$

Разделив обе части первого равенства на произведение $\sin a\,\cos c$, а второго — на произведение $\cos b\,\sin a$, получим:

$$\operatorname{tg} c\,\operatorname{ctg} a=\cos B,\quad \operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a\,\cos B,$$

$$\operatorname{tg} b\,\operatorname{ctg} a=\cos C,\quad \operatorname{tg} b=\operatorname{tg} a\,\cos C.$$

§ 23. Тангенс катета в функции другого катета и угла, ему противолежащего. *Тангенс одного из катетов равен произведению синуса другого катета на тангенс противолежащего угла.*

а) Вывод непосредственный.

Из тетраэдра $SOPT$ (черт. 19) имеем:

$$\frac{TS}{TO}=\operatorname{tg} b;\quad \frac{TP}{TO}=\sin c;\quad \frac{TS}{TP}=\operatorname{tg} B.$$

Напишем тождество:

$$\frac{TS}{TO}=\frac{TP}{TO}\,\frac{TS}{TP},$$

откуда

$$\operatorname{tg} b=\sin c\ \operatorname{tg} B. \tag{10}$$

б) Вывод формулы из основной формулы.

Напишем такие формулы с котангенсами, в которых угол A входит во вторую часть формул:

$$\operatorname{ctg} b\ \sin c=\operatorname{ctg} B\ \sin A+\cos A\ \cos c,$$

$$\operatorname{ctg} c\ \sin b=\operatorname{ctg} C\ \sin A+\cos A\ \cos b.$$

Полагая $A=90^\circ$, $\sin A=1$, $\cos A=0$, получим:

$$\operatorname{ctg} b\ \sin c=\operatorname{ctg} B,\quad \operatorname{tg} b=\sin c\ \operatorname{tg} B,$$

$$\operatorname{ctg} c\ \sin b=\operatorname{ctg} C,\quad \operatorname{tg} c=\sin b\ \operatorname{tg} C.$$

в) Эти формулы показывают, что в прямоугольном сферическом треугольнике катет и противолежащий ему угол находятся всегда в одной четверти, т. е. если $b \gtreqless 90^\circ$, то и $B \gtreqless 90^\circ$; точно так же: если $c \gtreqless 90^\circ$, то и $C \gtreqless 90^\circ$. Это заключение вытекает из того условия, по которому мы рассматриваем сферические треугольники только те, у которых стороны и углы меньше 180°. Поэтому $\sin b$ и $\sin c$ постоянно положительны, а отсюда для существования предыдущих соотношений необходимо, чтобы $\operatorname{tg} b$ и $\operatorname{tg} B$, а также $\operatorname{tg} c$ и $\operatorname{tg} C$ имели одинаковые знаки.

§ 24. Косинус гипотенузы в функции косых углов. *Произведение котангенсов углов, прилежащих к гипотенузе, равно косинусу гипотенузы.*

а) Вывод на основании формул прямоугольного сферического треугольника.

Возьмем предшествующие формулы:

$$\operatorname{tg} b=\sin c\ \operatorname{tg} B,$$

$$\operatorname{tg} c=\sin b\ \operatorname{tg} C.$$

Перемножим их почленно:

$$\operatorname{tg} b\ \operatorname{tg} c=\sin c\ \sin b\ \operatorname{tg} B\ \operatorname{tg} C,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} B\ \operatorname{ctg} C=\frac{\sin b}{\operatorname{tg} b}\,\frac{\sin c}{\operatorname{tg} c}=\cos b\ \cos c.$$

Но на основании равенства $\cos b \cos c = \cos a$ (сферическая формула Пифагора) имеем окончательно:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C. \qquad (11)$$

б) Вывод формулы из основной формулы.

Возьмем основную формулу косинуса угла:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

но $\cos A = 0$, поэтому имеем:

$$\cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a.$$

Разделив обе части равенства на произведение $\sin B \sin C$, получим окончательно:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C.$$

§ 25. Косинус угла в функции противолежащей стороны и другого угла. *Косинус одного из углов равен произведению косинуса противолежащей стороны на синус другого угла.*

а) Вывод из формул прямоугольного сферического треугольника.

Возьмем формулы, связывающие в сферическом треугольнике катет, гипотенузу и прилежащий к катету угол:

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B,$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C,$$

откуда

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a} = \frac{\sin c}{\cos c} \, \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sin c}{\sin a} \, \frac{\cos a}{\cos c}.$$

На основании предшествующих формул имеем:

$$\frac{\sin c}{\sin a} = \sin C,$$

$$\frac{\cos a}{\cos c} = \cos b.$$

Делая соответствующие подстановки, будем иметь окончательно:

$$\cos B = \sin C \cos b. \qquad (12)$$

Точно так же из формулы: $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$ получим:

$$\cos C = \sin B \cos c.$$

б) Вывод из основной формулы.

Возьмем формулы косинусов углов B и C:

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

Полагая $\cos A = 0$, $\sin A = 1$, будем иметь:

$$\cos B = \sin C \cos b,$$

$$\cos C = \sin B \cos c.$$

§ 26. Мнемоническое правило Непера. Перепишем выведенные формулы для решения прямоугольных сферических треугольников, опуская те из них, которые выражают повторение одного и того же случая.

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

$$\sin b = \sin a \sin B,$$

$$\cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c, \quad \text{очевидное следствие} \quad (9)$$

$$\sin c = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B, \quad \text{очевидное следствие} \quad (10)$$

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C,$$

$$\cos B = \cos b \sin C.$$

Сделаем так, чтобы в левых частях написанных равенств везде были косинусы, для чего везде вместо катетов введем дополнительные им дуги до 90°:

$$\cos a = \sin (90° - b) \sin (90° - c),$$

? $$\cos (90° - b) = \sin a \sin B,$$

$$\cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} (90° - c),$$

$$\cos (90° - c) = \operatorname{ctg} (90° - b) \operatorname{ctg} B,$$

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C,$$

$$\cos B = \sin (90° - b) \sin C.$$

Рассматривая эти формулы, замечаем, что в левой части везде стоят косинусы, а в правой части — произведения или синусов, или котангенсов.

Непер предложил следующее правило, дающее возможность легко написать все формулы для решения прямоугольных сферических треугольников (черт. 18).

Если три части треугольника лежат рядом, то косинус средней части равняется произведению котангенсов крайних частей; если же части лежат не рядом, то косинус отдельно лежащей части равен произведению синусов частей, лежащих рядом, причем катеты должны быть заменены их дополнениями до 90° и прямой угол не должен считаться отделяющей частью, т. е. катеты считаются лежащими рядом.

§ 27. Связь между величинами сторон и углов прямоугольного сферического треугольника.

а) Для связи гипотенузы и катетов имеется сферическая формула Пифагора: $\cos a = \cos b \cos c$.

1) Положим, что каждый из катетов меньше 90°, тогда $\cos b$ и $\cos c$ положительны, а значит и $\cos a$ положителен и $a < 90°$.

2) Если каждый из катетов больше 90°, то $\cos b$ и $\cos c$ оба отрицательны, а поэтому $\cos a$ положителен и $a < 90°$.

3) Если один из катетов больше 90°, а другой меньше 90°, то один косинус катета будет положителен, а другой отрицателен, поэтому $\cos a$ будет отрицателен и $a > 90°$.

Для удобства высказываний условимся называть два элемента треугольника однородными, если оба больше или меньше 90°, и разнородными в том случае, когда один из них больше, а другой меньше 90°. При таком условии имеем следующее соотношение между величинами катетов и гипотенузы сферического треугольника:

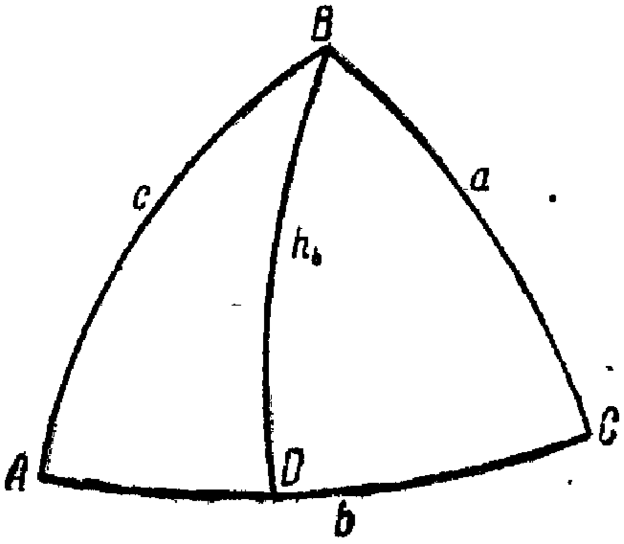
если катеты прямоугольного сферического треугольника однородны, гипотенуза меньше 90°; если же катеты разнородны, гипотенуза больше 90°.

б) Для связи гипотенузы с прилежащими к ней углами имеется формула $\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$. Применим к этой формуле такие же рассуждения, как и к предшествующей формуле $\cos a = \cos b \cos c$; будем иметь следующее соотношение между гипотенузой и прилежащими к ней углами:

если прилежащие к гипотенузе углы однородны, то гипотенуза меньше 90°; если же эти углы разнородны, то гипотенуза больше 90°.

в) Для связи одного катета и двух косвенных углов имеем соотношение: $\cos B = \cos b \sin C$; $\sin C$ постоянно в этой формуле положителен вне зависимости от того, тупой или острый угол C, поэтому знак $\cos B$ будет такой же, какой и у $\cos b$. Отсюда вытекает, что любой катет сферического треугольника и противоположный ему угол всегда однородны.

г) Выведенные соотношения между величинами сторон и углов прямоугольного сферического треугольника помогут в дальнейшем, при определении элементов прямоугольного треугольника по их синусам, выбрать, какое из двух значений элементов является действительным.



Черт. 20.

§ 28. О высоте сферического треугольника.

а) *Высотою сферического треугольника называется дуга большого круга, проведенная через вершину треугольника перпендикулярно противоположной стороне* (черт. 20).

Из прямоугольных сферических треугольников ABD и BCD имеем:

$$\sin h_b = \sin c \sin A = \sin a \sin C,$$

т. е. синус высоты сферического треугольника равняется синусу боковой стороны, умноженному на синус угла, противолежащего высоте и примыкающего к этой стороне.

б) Из этой формулы между прочим видно, что соответственные высоты двух взаимнополярных треугольников или равны, или дополняют друг друга до 180°. В самом деле, напишем формулу высоты $\sin h_{b1} = \sin c_1 \sin A_1 = \sin a_1 \sin C_1$ полярного треугольника, построенного для данного. Выражая элементы правой части этой формулы через элементы основного треугольника, будем иметь:

$$\sin_{b1} = \sin(180° - a) \sin(180° - C) = \sin a \sin C,$$

т. е.

$$\sin h_b = \sin h_{b1},$$

а это может быть только в том случае, если $h_b = h_{b_1}$ или если $h_b = 180° - h_{b_1}$.

в) Напишем формулы для высот h_b и h_a:

$$\sin h_b = \sin c \ \sin A,$$

$$\sin h_a = \sin b \ \sin C.$$

Умножим обе части первого равенства на $\sin b$ и обе части второго равенства на $\sin a$:

$$\sin b \ \sin h_b = \sin b \ \sin c \ \sin A,$$

$$\sin a \ \sin h_a = \sin a \ \sin b \ \sin C.$$

Ввиду того, что $\sin c \ \sin A = \sin a \ \sin C$, приходим к заключению, что правые части равенств равны. Поэтому

$$\sin b \ \sin h_b = \sin a \ \sin h_a, \tag{13}$$

т. е. *во всяком сферическом треугольнике произведение синуса стороны на косинус соответственной высоты есть величина постоянная.*

§ 29. Вопросы и упражнения.

1. Пользуясь правилом Непера, написать формулы, связывающие следующие элементы прямоугольного сферического треугольника:

a, B, C; c, a, B; a, b, c; b, c, B; c, a, C; C, B, c.

2. Сферический треугольник, в котором одна из сторон равняется 90°, называется прямосторонним сферическим треугольником. Вывести с помощью полярного треугольника все десять формул для решения прямосторонних сферических треугольников.

3. Вывести, базируясь на формулах для решения прямоугольных сферических треугольников, основную формулу сферической тригонометрии косинуса стороны.

4. Основываясь на существующей связи между величинами углов и сторон прямоугольного сферического треугольника, сказать, возможен ли прямоугольный сферический треугольник, имеющий элементы:

$a = 150° 20'$; $b = 110° 15'$; $c = 130° 40'$;
$a = 71° 24' 30''$; $b = 140° 52' 40''$; $c = 114° 15' 54''$;
$b = 33° 7' 37''$; $B = 60° 22' 25''$; $C = 36° 10' 38''$.

5. Вычислить высоту сферического треугольника h_b, имеющего $a = 16° 6' 22''$, $c = 61° 33' 4''$, $A = 15° 38' 7''$, $C = 121° 19' 47''$. Проверить верность данных величин.

IV. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

§ 20. **Введение.** Ввиду того, что для решения прямоугольных сферических треугольников необходимо, кроме прямого угла, знать какие-либо еще два элемента, при решении их могут встретиться следующие шесть случаев. Решить треугольник: 1) по двум катетам, 2) по гипотенузе и катету, 3) катету и противолежащему углу, 4) катету и прилежащему углу, 5) гипотенузе и прилежащему углу, 6) по двум углам.

Для нахождения неизвестных элементов треугольника по его данным полезно сделать сначала чертеж сферического треугольника, отметить на нем данные элементы и, пользуясь правилом Непера, написать формулу, связывающую отыскиваемый элемент с данными. При этом, чтобы избегнуть ошибок от лишних вычислений, надлежит искомые величины определять только через данные. Для того чтобы меньше пользоваться таблицами и облегчить работу, следует разработать схему вычислений, которая улучшает технику вычисления и дает возможность другому лицу легко разобраться в работе. Решение прямоугольных сферических треугольников надлежит контролировать с помощью формулы, связывающей все три вычисленные элемента. Для этих контрольных вычислений логарифмы будут уже определены при вычислении искомых величин.

Полезно также заметить тем, которые еще недостаточно хорошо усвоили технику работы с логарифмами, что по логарифмам можно вычислять не только положительное количество, но и абсолютную величину отрицательного количества, причем должно отмечать логарифмы отрицательных чисел особыми значками, обыкновенно буквою **n**. Если при сложении таких логарифмов отрицательных множителей или делителей будет четное количество, то окончательный результат будет положительный, в случае же нечетного их количества — отрицательный.

§ 31. Решение сферического треугольника по двум данным катетам (черт. 21). Дано: b, c. Найти: a, B, C.

По правилу Непера, пишем необходимые для решения треугольника формулы:

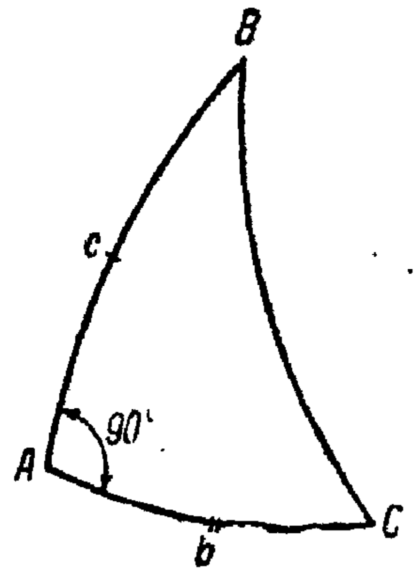
для определения a: $\cos a = \sin(90^\circ - b)\sin(90^\circ - c)$,
для определения B: $\cos(90^\circ - c) = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg}(90^\circ - b)$,
для определения C: $\cos(90^\circ - b) = \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg}(90^\circ - c)$.

Отсюда формулами для решения треугольника будут:

$$\cos a = \cos b \cos c;$$

$$\sin c = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c};$$

$$\sin b = \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} c, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$



Черт. 21.

Искомые величины определяются по косинусу и тангенсу, поэтому задача всегда возможна и притом имеет одно решение.

Для контроля вычислений берем формулу, связывающую вычисленные три элемента:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C.$$

Схема вычислений

Дано: $b = 150^\circ 52' 40''$,
$c = 114^\circ 15' 54''$.

1) lg cos b	9,94 116n	2) lg tg b	9.74 653 n
4) lg cos c	9,61 379 n	5) comp lg sin c	0.04 018
7) lg cos a	9,55 495	8) lg tg B	9.78 671 n
13) a	68°58′6″	14) B	148°32′10″

6) lg tg c	0.34 603 n
3) comp lg sin b	0.31 231
9) lg tg C	0.65 834 n
15) C	102°23′10″

Контроль вычислений

10) $\lg \operatorname{ctg} B = 0 - \lg \operatorname{tg} B$	0.21 329
11) $\lg \operatorname{ctg} C = 0 - \lg \operatorname{tg} C$	9.34 166
12) $\lg \cos a$	9.55 495

§ 32. Решение сферического треугольника по катету и гипотенузе.

Дано: a, b. Найти: c, B, C.

а) Руководствуясь правилом Непера, имеем:

для определения c: $\cos a = \sin(90^\circ - b)\sin(90^\circ - c)$,

$$\cos a = \cos b \cos c;$$

для определения B: $\cos(90^\circ - b) = \sin B \sin a$.

$$\sin b = \sin B \sin a;$$

для определения C: $\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg}(90^\circ - b)$,

$$\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b.$$

Отсюда неизвестные элементы определяются следующими формулами:

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \qquad (I)$$

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \qquad (II)$$

$$\cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}. \qquad (III)$$

Для стороны c из формулы (I) получится одно решение. Для угла B из формулы (II) получатся две величины: одна $< 90^\circ$, а другая $> 90^\circ$. Из двух решений надо выбрать такое, чтобы B и b находились в одной четверти (см. § 27). Для угла C из формулы (III) получится одно решение.

Теперь посмотрим, при всех ли значениях гипотенузы и катета сферический треугольник возможен.

Для того чтобы сферический треугольник был возможен, необходимо, чтобы $\cos c$, $\sin B$ и $\cos C$ [в формулах (I), (II), (III)] были меньше единицы, а для этого необходимо и достаточно, чтобы гипотенуза a заключалась по величине между катетом и дополнением его до 180°.

В самом деле, из формулы $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$ видим, что требование $\sin B < 1$ ведет к требованию, чтобы $\sin b < \sin a$, а также чтобы $\sin (180° - b) < \sin a$; обе части неравенства числа положительные, так как b и a меньше 180°. Для того чтобы эти неравенства существовали, необходимо должно быть: при $a < 90°$, $b < a < 180° - b$, а при $a > 90°$, $b > a > 180° - b$.

Заметим, что при этом же условии $\cos c$ и $\cos C$ постоянно будут меньше единицы.

Контрольной формулой для вычислений будет служить формула, связывающая все три вычисленные элемента c, B и C.

По правилу Непера будем иметь:

$$\cos C = \sin B \sin (90° - c); \quad \cos C = \sin B \cos c.$$

Схема вычислений

Дано: $a = 80°0'25''$,
$b = 47°38'36''$.

1) $\lg \cos a$	9.23 937	5) $\lg \sin b$	9.86 862
4) comp $\lg \cos b$	0.17 150	2) comp $\lg \sin a$	0.00 664
7) $\lg \cos c$	9.41 087	8) $\lg \sin B$	9.87 526
13) c	75°4′30″	14) B	48°37′11″

6) $\lg \operatorname{tg} b$	0.04 012
3) comp $\lg \operatorname{tg} a$	9.24 601
9) $\lg \cos C$	9.28 613
15) C	78°51′25″

Контроль вычислений

10) $\lg \sin B$	9.87 526
11) $\lg \cos c$	9.41 087
12) $\lg \cos C$	9.28 613

Как известно, для углов, близких к 90°, синус, а для углов, близких к 0°, косинус изменяются очень медленно. Поэтому изменяются очень медленно и их логарифмы. Так, при изменении угла от 80 до 90° мантисса логарифма синуса меняется только на 0,006.

В этих случаях определение элементов сферического треугольника будет неточным. Для повышения точности выгоднее употреблять другие формулы, дающие возможность определять неизвестные элементы по их тангенсам.

Из прямолинейной тригонометрии знаем:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos c}{1+\cos c}}.$$

На основании сферической формулы Пифагора (7) имеем: $\cos c=\frac{\cos a}{\cos b}$. Делая подстановку в предшествующую формулу, получаем:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos b-\cos a}{\cos b+\cos a}}=$$

$$=\sqrt{\frac{-2\sin\frac{b+a}{2}\sin\frac{b-a}{2}}{2\cos\frac{b+a}{2}\cos\frac{b-a}{2}}}=\sqrt{-\operatorname{tg}\frac{b+a}{2}\operatorname{tg}\frac{b-a}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}. \qquad (14)$$

Радикал берется со знаком $+$, так как $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ будет величиной постоянно положительной ввиду того, что c постоянно меньше 180°.

Для определения угла B берем такое соотношение:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}}.$$

В этой формуле меняем B на $90°+B$; получим:

$$\operatorname{tg}\left(45°+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin B}{1-\sin B}}.$$

Выражая $\sin B$ через $\frac{\sin b}{\sin a}$ [см. § 21, формулу (8)], получим:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}}=\pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}}. \tag{15}$$

Так как B по величине должно находиться в одной четверти с b, то постоянно можно выяснить, будет ли $45^\circ+\frac{B}{2}$ больше или меньше 90°, а отсюда узнать и знак перед радикалом.

Для определения угла C берем формулу.

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}.$$

В эту формулу вместо $\cos C$ подставляем отношение $\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$ [см. § 22, формулу (9)]:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}}=\sqrt{\frac{\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\sin b}{\cos b}}{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{\sin a\cos b+\sin b\cos a}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}. \tag{16}$$

Так как $0<C<180^\circ$, то радикал берется со знаком $+$.

Схема вычислений

Дано: $a = 86°42'40''$,
$b = 75°43'20''$.

1) $a+b$,	$162°26'$	3) $a-b$;	$10°59'20''$
2) $\frac{a+b}{2}$,	$81°13'$	4) $\frac{a-b}{2}$.	$5°29'40''$

5) $\lg \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}$	0.81 104	6) $\lg \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}$	0.81 104
7) $\lg \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}$	8.98 314	8) $\operatorname{comp} \lg \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}$	1.01 686
9) $2 \lg \operatorname{tg} \frac{c}{2}$	9.79 418	13) $2 \lg \operatorname{tg}\left(45° + \frac{B}{2}\right)$	1.82 780
		14) $\lg \operatorname{tg}\left(45° + \frac{B}{2}\right)$	0.91 390
10) $\lg \operatorname{tg} \frac{c}{2}$	9.89 709	15) $45° + \frac{B}{2}$	$83°2'53''$
11) $\frac{c}{2}$	$38°16'27'',5$	16) $\frac{B}{2}$	$38°2'53''$
21) c	$76°32'55''$	17) B	$76°5'46''$

18) $\lg \sin (a-b)$	9.28 017
19) $\operatorname{comp} \lg \sin (a+b)$	9.74 974
20) $2 \lg \operatorname{tg} \frac{C}{2}$	9.80 043
21) $\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2}$	9.90 022
22) $\frac{C}{2}$	$38°28'30''$
23) C	$75°57'$

Контроль вычислений

24) $\lg \cos C$	9.35 373 (взято по логарифму)
25) $\lg \sin B$	9.98 708
26) $\lg \cos c$	9.36 665
27) $\lg \cos C$	9.35 373 (получено сложением)

§ 33. Решение сферического треугольника по катету и противолежащему углу.

Дано: b, B. Найти: a, c, C.

а) По правилу Непера получаем:

для определения a: $\cos(90^\circ - b) = \sin B \sin a$,

$$\sin b = \sin B \sin a;$$

для определения c: $\cos(90^\circ - c) = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg}(90^\circ - b)$,

$$\sin c = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b;$$

для определения C: $\cos B = \sin(90^\circ - b) \sin C$,

$$\cos B = \cos b \sin C.$$

Отсюда неизвестные элементы определяются следующими формулами:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}; \quad \sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}; \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

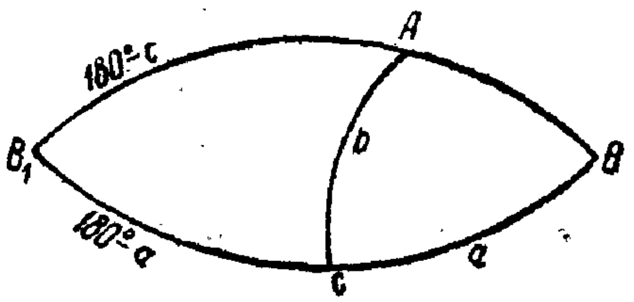
Для контроля берем формулу, связывающую определяемые элементы.

По правилу Непера, имеем:

$$\cos(90^\circ - c) = \sin a \sin C;$$

$$\sin c = \sin a \sin C.$$

Для возможности сферического треугольника необходимо, чтобы $\sin a$, $\sin c$ и $\sin C$ были положительны и меньше единицы. Для этого необходимо, чтобы b и B оба были одновременно или больше 90°, или оба меньше 90° и величина B заключалась бы между b и 90°. В самом деле, для того чтобы $\sin a < 1$, надо, чтобы $\sin b$ был меньше $\sin B$, или, так как b и B должны находиться в одной четверти (см. § 23), то при $b < 90^\circ$ должно быть неравенство $b < B < 90^\circ$, а при $b > 90^\circ$ должно быть неравенство $90^\circ < B > b$.



Черт. 22.

Если задача возможна, то получается два решения, что прямо видно из черт. 22.

Имеется два прямоугольных сферических треугольника, имеющих длинные катет b и противолежащий угол B. Геометрически этот второй треугольник получим, если продолжим стороны данного сферического треугольника c и a до пересечения в точке B_1. Угол B_1 будет равен углу B, противолежащий ему катет общий с данным треугольником.

Схема вычислений

Дано: $b = 38°27'50''$,
$B = 56°0'34''$.

1)	$\lg \sin b$	9.79 380	2)	$\lg \operatorname{tg} b$	9.90 004
4)	$\operatorname{comp} \lg \sin B$	0.08 138	5)	$\operatorname{comp} \lg \operatorname{tg} B$	9.82 883
7)	$\lg \sin a$	9.87 518	8)	$\lg \sin c$	9.72 887
13)	a_1	48°36'30''	15)	c_1	32°23'15''
14)	a_2	131°23'30''	16)	c_2	147°36'45''

6)	$\lg \cos B$	9.74 745
3)	$\operatorname{comp} \lg \cos b$	0.10 624
9)	$\lg \sin C$	9 85 369
17)	C_1	45°33'37''
18)	C_2	134°26'23''

Контроль вычислений

10)	$\lg \sin a$	9.87 518
11)	$\lg \sin C$	9.85 369
12)	$\lg \sin c$	9.72 887

б) Искомые элементы в этой задаче можно определить и по тангенсам. Для определения a напишем такое соотношение:

$$\operatorname{tg}\left(45° + \frac{a}{2}\right) =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(90° + a)}{1 + \cos(90° + a)}} = \pm\sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}},$$

но $\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$ [см. § 21, формулу (8)], поэтому:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sin b}{\sin B}}{1-\frac{\sin b}{\sin B}}} = \pm\sqrt{\frac{\sin B + \sin b}{\sin B - \sin b}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2\sin\frac{B+b}{2}\cos\frac{B-b}{2}}{2\cos\frac{B+b}{2}\sin\frac{B-b}{2}}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}}}. \qquad (17)$$

Для определения c напишем такое соотношение:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{c}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(90^\circ + c)}{1+\cos(90^\circ + c)}} = \pm\sqrt{\frac{1+\sin c}{1-\sin c}},$$

но $\sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}$ [см. § 23, формулу (10)], поэтому:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{c}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}}{1-\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}}} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} b}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin b}{\cos b}}{\frac{\sin B}{\cos B} - \frac{\sin b}{\cos b}}} = \pm\sqrt{\frac{\sin B\cos b + \sin b\cos B}{\sin B\cos b - \sin b\cos B}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{c}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}}. \qquad (18)$$

Для определения C пишем соотношение:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{C}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(90^\circ + C)}{1+\cos(90^\circ - C)}} = \pm\sqrt{\frac{1+\sin C}{1-\sin C}},$$

но $\sin C = \frac{\cos B}{\cos b}$ [см. § 25, формулу (12)], поэтому:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{C}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{\cos B}{\cos b}}{1-\frac{\cos B}{\cos b}}} = \pm\sqrt{\frac{\cos b + \cos B}{\cos b - \cos B}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{2\cos\frac{b+B}{2}\cos\frac{b-B}{2}}{-2\sin\frac{b+B}{2}\sin\frac{b-B}{2}}} = \pm\sqrt{-\operatorname{ctg}\frac{b+B}{2}\operatorname{ctg}\frac{b-B}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{C}{2}\right) = \pm\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{B+b}{2}\operatorname{ctg}\frac{B-b}{2}}. \qquad (19)$$

Перед каждым из радикалов нужно взять $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли определяемая при посредстве его величина: $45^\circ + \frac{a}{2}$, $45^\circ + \frac{c}{2}$ и $45^\circ + \frac{C}{2}$ меньше или больше 90°.

Заметим, что в (17), (18) и (19) под радикалами будут стоять положительные количества в силу условий возможности.

Схема вычислений

Дано: $b = 38^\circ 27' 50''$,
$B = 50^\circ 0' 34''$.

1) $B+b$	$94^\circ 28' 24''$	3) $B-b$	$17^\circ 32' 44''$
2) $\frac{B+b}{2}$	$47^\circ 14' 12''$	4) $\frac{B-b}{2}$	$8^\circ 46' 22''$

Вычисление a		Вычисление C	
5) $\lg \operatorname{tg}\frac{B+b}{2}$	0.03 394	6) $\lg \operatorname{ctg}\frac{B+b}{2}$	9.96 606
7) $\operatorname{comp}\lg \operatorname{tg}\frac{B-b}{2}$	0.81 157	8) $\lg \operatorname{ctg}\frac{B-b}{2}$	0.81 157
9) $2\lg \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right)$	0.84 551	15) $2\lg \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{C}{2}\right)$	0.77 763
10) $\lg \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right)$	0.42 275	16) $\lg \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{C}{2}\right)$	0.38 881
11) $45^\circ + \frac{a}{2}$	$69^\circ 18' 15''$	17) $45^\circ + \frac{C}{2}$	$67^\circ 46' 48''$
12) $\frac{a}{2}$	$24^\circ 18' 15''$	18) $\frac{C}{2}$	$22^\circ 46' 48''$
13) a_1	$48^\circ 36' 30''$	19) C_1	$45^\circ 33' 37''$
14) a_2	$131^\circ 23' 30''$	20) C_2	$134^\circ 26' 23''$

Вычисление c

$\lg\sin(B+b)$	9.99 868
$\operatorname{comp}\lg\sin(B-b)$	0.52 077
$2\lg\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{c}{2}\right)$	0.51 945
$\lg\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{c}{2}\right)$	0.25 972
$45^\circ+\frac{c}{2}$	61°11′38″
$\frac{c}{2}$	16°11′38″
c_1	32°23′16″
c_2	147°36′44″

Контроль вычислений

$\lg\sin c$	9.72 886 (получено по логарифму)
$\lg\sin a$	9.87 518
$\lg\sin C$	9.85 368
$\lg\sin c$	9.72 886 (получено сложением)

§ 34. Решение сферического треугольника по катету и прилежащему к нему углу.

Дано: b, C. Найти: a, c, B.

По правилу Непера, имеем следующие соотношения:

для определения a: $\cos C=\operatorname{ctg}(90^\circ-b)\operatorname{ctg}a$,

$$\cos C=\operatorname{tg}b\operatorname{ctg}a;$$

для определения c: $\cos(90^\circ-b)=\operatorname{ctg}(90^\circ-c)\operatorname{ctg}C$,

$$\sin b=\operatorname{tg}c\operatorname{ctg}C;$$

для определения B: $\cos B=\sin(90^\circ-b)\sin C$,

$$\cos B=\cos b\sin C,$$

откуда получаем для определения неизвестных элементов следующие три формулы:

$$\operatorname{tg}a=\frac{\operatorname{tg}b}{\cos C},\tag{I}$$

$$\operatorname{tg}c=\sin b\operatorname{tg}C,\tag{II}$$

$$\cos B=\cos b\sin C.\tag{III}$$

Элементы a и c определяются по тангенсам и имеют поэтому по одному значению. Угол B определяется по косинусу и тоже поэтому имеет одно значение; что же касается знака косинуса B, то он имеет такой же знак, какой имеет косинус b. Поэтому приходим к заключению, что треугольник постоянно возможен и задача имеет одно решение.

Для контроля вычислений берем формулу, связывающую искомые элементы:

$$\cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}.$$

Схема вычислений

Дано: $b = 37°52'9''$,
$C = 45°34'35''$.

1)	$\lg \operatorname{tg} b$	9.89 077	2)	$\lg \sin b$	9.78 807
4)	$\operatorname{comp} \lg \cos C$	0.15 493	5)	$\lg \operatorname{tg} C$	0.00 874
7)	$\lg \operatorname{tg} a$	0.04 570	8)	$\lg \operatorname{tg} c$	9.79 681
13)	a	48°0'32''	14)	c	32°3'38''

3)	$\lg \cos b$	9.89 730
6)	$\lg \sin C$	9.85 381
9)	$\lg \cos B$	9.75 111
15)	B	55°40'57''

Контроль вычислений.

10)	$\lg \operatorname{tg} c$	9.79 681
11)	$\operatorname{comp} \lg \operatorname{tg} a$	9.95 430
12)	$\lg \cos B$	9.75 111

§ 35. Решение сферического треугольника по гипотенузе и прилежащему к ней углу.

Дано: a, C. Найти: b, c; B.

Базируясь на правиле Непера, напишем формулы:

для определения b: $\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} (90° - b)$,

$$\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b;$$

для определения c: $\cos (90° - c) = \sin a \sin C$,

$$\sin c = \sin a \sin C;$$

для определения B: $\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$.

Итак, для решения треугольника имеем три формулы:

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C, \tag{I}$$

$$\sin c = \sin a \sin C, \tag{II}$$

$$\operatorname{ctg} B = \cos a \operatorname{tg} C. \tag{III}$$

Для контроля вычислений имеем формулу:

$$\cos (90^\circ - c) = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} (90^\circ - b), \quad \sin c = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b.$$

Формула (II) определяет c по синусу; величину для c из двух ее значений выбирают такую, чтобы она была в одной четверти с C. Формулы (I) и (III) определяют b и B по тангенсам и поэтому дают для них по одному значению; эти два элемента b и B постоянно должны находиться в одной четверти. Таким образом, треугольник всегда возможен и имеет одно решение.

Сторона c определяется по синусу; в случае, когда c близка к 90°, по этой формуле она определяется неточно. В этом случае бывает выгоднее определять c по тангенсу, для чего сначала вычисляют угол B, а затем уже c по формуле:

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B.$$

Схема вычислений

Дано: $a = 110^\circ 46' 20''$,
$C = 153^\circ 58' 28''$.

1) lg sin a	9.97 081	2) lg tg a	0.42 101n
4) lg sin C	9.64 224	5) lg cos C	9.95 356n
7) lg sin c	9.61 305	8) lg tg b	0.37 457
c	$155^\circ 46' 55''$	b	$67^\circ 6' 53''$

3) lg cos a	9.54 981n
6) lg tg C	9.68 867n
9) lg ctg B	9.23 848
B	$80^\circ 10' 31''$

Контроль вычислений

10) lg ctg B	9.23 848
11) lg tg b	0.37 457
12) lg sin c	9.61 305

§ 36. Решение сферического треугольника по двум углам, отличным от прямого.

Дано: B, C. Найти: b, c, a.

а) Пользуясь правилом Непера, имеем:

для определения b: $\cos B = \sin(90° - b)\sin C$,

$$\cos B = \cos b \sin C;$$

для определения c: $\cos C = \sin(90° - c)\sin B$,

$$\cos C = \cos c \sin B;$$

для определения a: $\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$.

Отсюда получаем для решения треугольника следующие три формулы:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C, \tag{I}$$

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \tag{II}$$

$$\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}. \tag{III}$$

Контрольной формулой вычислений будет служить сферическая формула Пифагора:

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Решение будет иметь одно значение, так как все элементы треугольника определяются по косинусам.

Треугольник возможен тогда, когда сумма данных углов будет заключаться между 90° и 270°, а разность их между $-90°$ и $+90°$.

В самом деле: вообразим для данного сферического прямоугольного треугольника полярный, у него будут стороны: 90°, $180° - B$ и $180° - C$.

Зная, что сумма сторон сферического треугольника должна быть меньше 360° и каждая из них меньше суммы двух других, имеем четыре следующих неравенства:

1) $450° - (B + C) < 360°$, $\quad 90° < B + C$;

2) $90° < 360° - (B + C)$, $\quad 270° > B + C$;

3) $180° - B < 270° - C$, $\quad -90° < B - C$;

4) $180° - C < 270° - B$, $\quad 90° > B - C$.

Соединяя первое неравенство со вторым, а третье — с четвертым, получим:

$$90^\circ < B + C < 270^\circ, \qquad -90^\circ < B - C < 90^\circ.$$

Схема вычислений

Дано: $B = 80^\circ 10' 32''$,
$C = 154^\circ 58' 28''$.

$\lg \operatorname{ctg} B$	9.23 849
$\lg \operatorname{ctg} C$	0.31 133n
$\lg \cos a$	9.54 982n
a	$110^\circ 46' 22''$

$\lg \cos B$	9.23 207
$\operatorname{comp} \lg \sin C$	0.35 776
$\lg \cos b$	9.58 983
b	$67^\circ 6' 53''$

$\lg \cos C$	9.95 357n
$\operatorname{comp} \lg \sin B$	0.00 642
$\lg \cos c$	9.95 999n
c	$155^\circ 46' 50''$

Контроль вычислений

$\lg \cos b$	9.53 983
$\lg \cos c$	9.95 999n
$\lg \cos a$	9.54 982n

б) Искомые элементы треугольника можно определить и через тангенсы.

Для определения a возьмем формулу из прямолинейной тригонометрии:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}},$$

но

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

ввиду этого имеем:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C}}{1 + \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C}}} = \sqrt{\frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C}{\sin B \sin C + \cos B \cos C}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos (B + C)}{\cos (B - C)}}. \qquad (20)$$

Для определения b пишем формулу тангенса половинной дуги:

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}},$$

но

$$\cos b=\frac{\cos B}{\sin C}\ [\text{см. § 25, формулу (12)}].$$

Тогда имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\cos(90^\circ-C)-\cos B}{\cos(90^\circ-C)+\cos B}}=$$

$$=\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}+45^\circ\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-45^\circ\right)}. \qquad (21)$$

Таким же способом выведем:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{C-B}{2}+45^\circ\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C+B}{2}-45^\circ\right)}.$$

Заметим, что мнимых решений не будет, так как количества, стоящие под знаком радикалов, положительны. Это вытекает из условий возможности самого треугольника:

$$90^\circ<B+C<270^\circ, \qquad -90^\circ<B-C<90^\circ.$$

Схема вычислений

Дано: $B=102^\circ1'47''$,

$C=15^\circ49'29''$.

1) $B+C$	$117^\circ51'16''$	6) $\frac{B-C}{2}+45^\circ$	$88^\circ6'9''$
2) $\frac{B+C}{2}$	$58^\circ55'38''$	7) $C-B$	$-86^\circ12'18''$
3) $\frac{B+C}{2}-45^\circ$	$13^\circ55'38''$	8) $\frac{C-B}{2}$	$-43^\circ6'9''$
4) $B-C$	$86^\circ12'18''$	9) $\frac{C-B}{2}+45^\circ$	$2^\circ6'9''$
5) $\frac{B-C}{2}$	$43^\circ6'9''$		

Вычисление b			Вычисление c		
10)	$\lg \operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}+45^\circ\right)$	1.47 978	17)	$\lg \operatorname{tg}\left(\frac{C-B}{2}+45^\circ\right)$	8.52 020
11)	$\lg \operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-45^\circ\right)$	9.39 439	12)	$\lg \operatorname{tg}\left(\frac{C+B}{2}-45^\circ\right)$	9.39 439
13)	$2 \lg \operatorname{tg} \frac{b}{2}$	0.87 417	18)	$2 \lg \operatorname{tg} \frac{c}{2}$	7.91 459
14)	$\lg \operatorname{tg} \frac{b}{2}$	0.43 709	19)	$\lg \operatorname{tg} \frac{c}{2}$	8.95 730
15)	$\frac{b}{2}$	69°55′19″	20)	$\frac{c}{2}$	5°10′45″
16)	b	139°50′38″	21)	c	10°21′30″

Вычисление a

22)	$\lg - \cos(B+C)$	9.66 953
23)	$\operatorname{comp} \lg \cos(B-C)$	1.17 923
24)	$2 \lg \operatorname{tg} \frac{a}{2}$	0.84 876
25)	$\lg \operatorname{tg} \frac{a}{2}$	0.42 438
26)	$\frac{a}{2}$	69°22′30″
27)	a	138°45′0″

Контроль вычислений

$\lg \cos a$	9.87 613n (взято по логарифму)
$\lg \cos b$	9.88 326
$\lg \cos c$	9.99 287
$\lg \cos a$	9.87 613n (получено сложением)

§ 37. Вопросы и упражнения.

1. Составьте схемы вычислений для каждого случая решения прямоугольного сферического треугольника.

2. Исследуйте, при каких данных сферический прямоугольный треугольник возможен в каждом отдельном случае решения и сколько при этом получается решений.

8. Решите сферические прямоугольные треугольники по следующим данным:

$b = 48°54'54''$, $c = 12°16'42''$. *Отв.* $a = 50°2'53''$, $B = 79°29'44''$, $C = 16°6'22''$.

$b = 51°2'48''$, $B = 80°14'41''$. *Отв.* $a = 52°5'54''$, $c = 12°16'42''$, $C = 15°38'7''$.

$a = 56°15'42''$, $C = 41°5'6''$. *Отв.* $b = 48°27'21''$, $c = 33°7'37''$, $B = 64°9'41''$.

$a = 60°22'25''$, $c = 33°7'37''$. *Отв.* $b = 53°49'22''$, $C = 38°57'12''$, $B = 68°12'58''$.

$c = 31°19'47''$, $B = 52°5'54''$. *Отв.* $a = 44°44'18''$, $b = 33°44'18''$, $C = 47°37'21''$.

$B = 77°43'18''$, $C = 52°5'54''$. *Отв.* $a = 80°14'41''$, $b = 74°21'53''$, $c = 51°2'48''$.

V. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОСОУГОЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 38. Формулы, выражающие углы сферического треугольника в функциях его сторон. а) Возьмем основную формулу сферического треугольника косинуса стороны:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

из нее получим:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

откуда, подставляя полученное значение для $\cos A$ в формулу:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},$$

имеем:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{2 \sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \sin \frac{b-c+a}{2} \sin \frac{a+c-b}{2}}{2 \sin b \sin c}}.$$

Обозначим сумму сторон треугольника через $2p$:

$$a + b + c = 2p.$$

Отсюда

$$a + b - c = 2(p-c); \quad a - b + c = 2(p-b);$$

$$b + c - a = 2(p-a).$$

Принимая во внимание эти обозначения, имеем:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin b \sin c}}. \qquad (22)$$

Тем же путем или круговой перестановкой получим:

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin c\sin a}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}.$$

Эти формулы, позволяющие определять углы сферического треугольника по синусу, если даны его стороны, применяются тогда, когда определяемый угол заметно удаляется от 180°.

Если же вычисляемый угол по своей величине приближается к 180°, применяются формулы, выражающие углы при посредстве косинуса.

Возьмем формулу:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$$

Подставляя вместо $\cos A$ его значение, полученное из основной формулы косинуса стороны, получим:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin b\sin c+\cos a-\cos b\cos c}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\cos a-\cos(b+c)}{2\sin b\sin c}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\sin\frac{b+c+a}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\sin\frac{b+c+a}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin c}}.$$

Принимая прежние обозначения, получим:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}},\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin c\sin a}},\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}.\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

Разделив почленно формулы синуса половинного угла на формулы косинуса половинного угла, получим:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}, \quad \text{(a)} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin p\sin(p-b)}}, \quad \text{(b)} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}. \quad \text{(c)} \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Последние формулы, определяющие углы треугольника по тангенсам, возможно применять во всех случаях.

Так как определяемый угол должен по условию быть меньше 180°, то тангенс половины этого угла будет постоянно положительной величиной, а поэтому перед радикалами везде берется только один знак $+$.

Ввиду того, что под корнем все множители являются положительными величинами, то мнимости не будет. В самом деле: 1) $a+b+c<360°$, $p<180°$; 2) $a+b>c$, $a+b+c>2c$, $2p>2c$, $p>c$, $p-c>0$. Точно так же можно убедиться, что $p-a>0$ и $p-b>0$.

Формулы эти относятся к так называемым формулам второго порядка, в отличие от формул, содержащих целые элементы треугольника, которые называются формулами первого порядка.

Если приходится в треугольнике определять все три угла, то полезно бывает, в целях сокращения вычислительных работ, формулы тангенса половинного угла преобразовать следующим образом.

Умножив числитель и знаменатель подкоренного количества в формуле (24a) на $\sin(p-a)$, в формуле (24b) на $\sin(p-b)$ и в формуле (24c) на $\sin(p-c)$, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{\sin(p-a)}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{\sin(p-b)}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{\sin(p-c)}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}},$$

Обозначая общий множитель через M, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{M}{\sin(p-a)},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{M}{\sin(p-b)},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}\frac{M}{\sin(p-c)}.$$

Коэффициент M имеет геометрическое значение; он представляет собою тангенс радиуса окружности, вписанной в данный сферический треугольник.

Обратимся к черт. 9; принимая во внимание сделанные на чертеже обозначения, имеем:

$$\begin{array}{r} x+y=a \\ +\ y+z=b \\ z+x=c \\ \hline x+y+z=\frac{a+b+c}{2}=p. \end{array}$$

Вычитая почленно из последнего равенства каждое равенство из первых трех, будем иметь: $z=p-a$, $x=p-b$, $y=p-c$. Возьмем треугольник OAK. На основании правила Непера получим:

$$\sin z=\operatorname{ctg}(90^\circ-r)\operatorname{ctg}\frac{A}{2},\quad \sin(p-a)=\operatorname{tg}r\operatorname{ctg}\frac{A}{2},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{tg}r}{\sin(p-a)}.$$

Сравнивая полученное равенство с ранее выведенной формулой $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{M}{\sin(p-a)}$, видим, что множитель M равен $\operatorname{tg}r$, где r есть радиус вписанного круга в данный сферический треугольник.

б) Обратим здесь внимание на интересные соотношения между элементами сферического треугольника, вытекающие как следствие из только что приведенных формул:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}.$$

Перемножим почленно эти формулы:

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin^2 b\sin^2 c}},$$

откуда

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{2\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin a\sin b\sin c}. \quad (25)$$

Так как вторая часть равенства симметрична относительно сторон a, b, c, то подтверждается еще раз, что

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

Возьмем формулы:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin p\sin(p-b)}}.$$

Перемножив эти формулы почленно, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\sin(p-c)}{\sin p}. \quad (26)$$

Точно так же можно получить:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\sin(p-a)}{\sin p},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-b)}{\sin p}.$$

Эти соотношения, будучи логарифмическими, могут служить контрольными формулами при вычислении треугольников.

§ 39. Формулы, выражающие стороны сферического треугольника в функциях его углов. а) Возьмем основную формулу сферической тригонометрии, выражающую соотношение между тремя углами треугольника и одной из его сторон:

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a,$$

откуда получаем:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Придадим этой формуле логарифмический вид, для чего напишем вспомогательную формулу плоской тригонометрии:

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}},$$

откуда после подстановки имеем:

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin B \sin C - \cos A - \cos B \cos C}{2 \sin B \sin C}} =$$

$$= \sqrt{\frac{-\cos(B + C) - \cos A}{2 \sin B \sin C}} = \sqrt{\frac{-[\cos(B + C) + \cos A]}{2 \sin B \sin C}} =$$

$$= \sqrt{\frac{-2 \cos\frac{B + C + A}{2} \cos\frac{B + C - A}{2}}{2 \sin B \sin C}}.$$

Обозначая $\frac{A + B + C}{2}$ через P, видим, что

$$\frac{B + C - A}{2} = P - A, \quad \frac{A - B + C}{2} = P - B, \quad \frac{A + B - C}{2} = P - C.$$

Делая соответствующие подстановки в предшествующую формулу, получим:

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P - A)}{\sin B \sin C}}. \tag{27}$$

Точно так же получим:

$$\sin\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P - B)}{\sin C \sin A}},$$

$$\sin\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P - C)}{\sin A \sin B}}.$$

Эти формулы выгодно применять при сторонах треугольника, достаточно далеких от 180°. При сторонах же треугольника, близких к 180°, выгодно определять их по формуле косинуса половинной стороны.

Возьмем формулу плоской тригонометрии:

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin B\sin C+\cos A+\cos B\cos C}{2\sin B\sin C}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cos A+\cos(B-C)}{2\sin B\sin C}}=\sqrt{\frac{2\cos\frac{B-C+A}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{2\sin B\sin C}},$$

откуда, вводя соответствующие обозначения, получим:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\sin C}},\\ \cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(P-C)\cos(P-A)}{\sin C\sin A}},\\ \cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)}{\sin A\sin B}}.\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

Разделив почленно формулы синуса половинной стороны на формулы косинуса половинной стороны, получим:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}},\\ \operatorname{tg}\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-B)}{\cos(P-C)\cos(P-A)}},\\ \operatorname{tg}\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)}{\cos(P-A)\cos(P-B)}}.\end{aligned}\right\}\qquad(29)$$

Последние формулы можно применять всегда вне зависимости от величины определяемых сторон треугольника.

Перед радикалами этих формул берется знак $+$ на том основании, что первая часть их всегда положительна, так как каждая сторона сферического треугольника менее 180° и, следовательно, половина ее меньше 90°.

Мнимости при вычислении по этим формулам не будет, так как все множители, входящие под радикалы, положительны. Действительно, из соотношения $540 > A+B+C > 180^\circ$ (см. § 6) имеем: $270^\circ > \frac{A+B+C}{2} > 90^\circ$, $270^\circ > P > 90^\circ$.

Отсюда выводим, что $\cos P$ постоянно отрицателен, а поэтому множитель под радикалом $-\cos P$ постоянно положителен. $P-A$, $P-B$, $P-C$ — величины меньше 90°. Возьмем соотношение $B+C-A < 180^\circ$ (см. § 6), $B+C+A < 180^\circ + 2A$, $\frac{B+C+A}{2} < 90^\circ + A$, $P < 90^\circ + A$, $P-A < 90^\circ$.

Иногда формулы тангенса половинной стороны изображают в другом виде, более удобном для вычислений.

Помножим числитель и знаменатель подкоренных количеств первой формулы на $\cos(P-A)$, второй — на $\cos(P-B)$ и третьей — на $\cos(P-C)$:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{a}{2} &= \cos(P-A)\sqrt{\frac{-\cos P}{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}},\\
\operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \cos(P-B)\sqrt{\frac{-\cos P}{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}},\\
\operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \cos(P-C)\sqrt{\frac{-\cos B}{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}}.
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Обозначая общий множитель через K:

$$\sqrt{\frac{-\cos P}{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}} = K,$$

будем иметь:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = K\cos(P-A),$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = K\cos(P-B),$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = K\cos(P-C).$$

б) Вывод формулы тангенса половинной стороны при помощи полярного треугольника.

Вообразим для данного сферического треугольника полярный со сторонами a_1, b_1, c_1 и углами A_1, B_1, C_1.

Для этого полярного треугольника по формулам (22) и (23) имеем:

$$\sin\frac{A_1}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p_1-b_1)\sin(p_1-c_1)}{\sin b_1\sin c_1}},$$

$$\cos\frac{A_1}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_1\sin(p_1-a_1)}{\sin b_1\sin c_1}}.$$

Принимаем во внимание, что

$$A_1=180^\circ-a,\quad \frac{A_1}{2}=90^\circ-\frac{a}{2};$$

$$p_1=\frac{a_1+b_1+c_1}{2}=\frac{180^\circ-A+180^\circ-B+180^\circ-C}{2}=$$

$$=270^\circ-\frac{A+B+C}{2}=270^\circ-P;$$

$$p_1-a_1=270^\circ-P-180^\circ+A=90^\circ-(P-A);$$

$$p_1-b_1=90^\circ-(P-B),$$

$$p_1-c_1=90^\circ-(P-C).$$

Подставляя эти выражения в формулы $\sin\frac{A_1}{2}$ и $\cos\frac{A_1}{2}$, получим:

$$\sin\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin[90^\circ-(P-B)]\sin[90^\circ-(P-C)]}{\sin(180^\circ-B)\sin(180^\circ-C)}},$$

$$\cos\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin(270^\circ-P)\sin[90^\circ-(P-A)]}{\sin(180^\circ-B)\sin(180^\circ-C)}},$$

откуда имеем:

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\sin C}},$$

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C}}.$$

Деля почленно вторую формулу на первую, получаем окончательно:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}}.$$

§ 40. Формулы, выражающие стороны сферического треугольника в функции его углов и эксцесса. Напишем формулы второго порядка, выражающие стороны треугольника в функции его углов:

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C}},$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\sin C}}.$$

Выразим величины P, $P-A$, $P-B$, $P-C$ в функции углов его и эксцесса. Пользуясь тем, что $A+B+C-180^\circ=\mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E}$ есть эксцесс треугольника, получим:

$$\frac{A+B+C}{2}=P=90^\circ+\frac{\mathfrak{E}}{2};\quad P-A=90^\circ-\left(A-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right),$$

$$P-B=90^\circ-\left(B-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right);\quad P-C=90^\circ-\left(C-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right).$$

Эти величины подставляем в выражения для $\sin\frac{a}{2}$ и $\cos\frac{a}{2}$; получаем:

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}\sin\left(A-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}{\sin B\sin C}},\tag{31}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}{\sin B\sin C}}.\tag{32}$$

Разделив эти формулы одну на другую почленно, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}\sin\left(A-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}}.\tag{33}$$

Точно так же выведем, что

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}\sin\left(B-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}{\sin\left(C-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(A-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}\sin\left(C-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}}.$$

При применении этих формул мнимости не получится, так как все множители, стоящие под корнем, постоянно положительны. В самом деле: 1) Возьмем соотношение $540 > A + B + C > 180^\circ$ (см. § 6), $360^\circ > A + B + C - 180^\circ > 0^\circ$, $180^\circ > \frac{\mathfrak{E}}{2} > 0$. Ввиду последнего неравенства $\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}$ постоянно положителен. 2) Возьмем соотношение $B + C - A < 180^\circ$ (см. § 6):

$$B + C + A < 180^\circ + 2A,\ B + C + A - 180^\circ < 2A,$$

$$\frac{\mathfrak{E}}{2} < A,\ A - \frac{\mathfrak{E}}{2} > 0,$$

т. е. количество $A - \frac{\mathfrak{E}}{2}$ постоянно положительно и меньше 180°; поэтому $\sin\left(A - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)$ постоянно положителен.

Если приходится вычислять все углы треугольника, то формулы выгодно для сокращения вычислительной работы преобразовать следующим образом.

Помножим числитель и знаменатель подкоренного количества в формуле для $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ на $\sin\left(A - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)$, в формуле для $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ на $\sin\left(B - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)$ и в формуле для $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ на $\sin\left(C - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)$, тогда получим:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{a}{2} &= \sin\left(A - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sqrt{\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}}{\sin\left(A - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(B - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(C - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}},\\
\operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \sin\left(B - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sqrt{\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}}{\sin\left(A - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(B - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(C - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}},\\
\operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \sin\left(C - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sqrt{\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}}{\sin\left(A - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(B - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(C - \frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}}.
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Обозначив общий множитель в этих последних формулах через N, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=N\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right),\quad \operatorname{tg}\frac{b}{2}=N\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=N\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где

$$N=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}.$$

Эти формулы легко запоминаются и очень точно определяют искомые величины.

Интересно, что множитель N имеет геометрическое значение.

Возьмем сферический треугольник ABC, из середин его сторон проведем к ним перпендикуляры, в пересечении которых получится центр описанного около треугольника круга (черт. 10).

Как видно из чертежа:

$$A=y+z, \tag{a}$$

$$B=x+z, \tag{b}$$

$$\frac{C=x+y,}{A+B+C=2x+2y+2z}, \tag{c}$$

$$x+y+z=\frac{A+B+C}{2}=\frac{1}{2}(180^\circ+\varepsilon)=90^\circ+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{d}$$

Вычитая из равенства (d) почленно равенство (a), равенство (b) и равенство (c), получим:

$$x=90^\circ+\frac{\varepsilon}{2}-A=90^\circ-\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$y=90^\circ+\frac{\varepsilon}{2}-B=90^\circ-\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$z=90^\circ+\frac{\varepsilon}{2}-C=90^\circ-\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Из треугольника BOL по правилу Непера получим:

$$\cos x = \operatorname{ctg} R \operatorname{ctg}\left(90^\circ - \frac{a}{2}\right), \quad \cos\left[90^\circ - \left(A - \frac{b}{2}\right)\right] = \operatorname{ctg} R \operatorname{tg}\frac{a}{2},$$

$$\sin\left(A - \frac{b}{2}\right) = \operatorname{ctg} R \operatorname{tg}\frac{a}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \operatorname{tg} R \sin\left(A - \frac{b}{2}\right).$$

Сравнивая эту формулу с ранее выведенной:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = N \sin\left(A - \frac{b}{2}\right),$$

приходим к заключению, что

$$N = \operatorname{tg} R,$$

т. е. *коэффициент N представляет собой величину тангенса радиуса круга, описанного около данного сферического треугольника.*

§ 41. Формулы Деламбра. Они представляют зависимость между шестью элементами сферического треугольника и решают две задачи: решить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам и решить треугольник по двум сторонам и заключенному между ними углу.

Эти формулы второго порядка:

$$\sin\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \cos\frac{C}{2}, \tag{35}$$

$$\sin\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \cos\frac{C}{2}, \tag{36}$$

$$\cos\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \sin\frac{C}{2}, \tag{37}$$

$$\cos\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \sin\frac{C}{2}. \tag{38}$$

Заметим, что в каждое из этих четырех уравнений входят или три синуса, или три косинуса.

Для доказательства формул Деламбра напишем следующую формулу плоской тригонометрии:

$$\sin\frac{A\pm B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\pm\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

Из системы равенств (22) и (23):

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}};$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin c\sin a}},\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin c\sin a}};$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}},\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}.$$

Вносим эти выражения в формулу $\sin\frac{A\pm B}{2}$; получим:

$$\sin\frac{A\pm B}{2}=$$

$$=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}\pm\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}.$$

Замечая, что

$$\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}=\cos\frac{C}{2},$$

имеем:

$$\sin\frac{A\pm B}{2}=\frac{\sin(p-b)\pm\sin(p-a)}{\sin c}\cos\frac{C}{2}.$$

Рассмотрим это равенство сначала с верхним знаком, а потом с нижним; заменяя сумму синусов произведениями, получим сначала первую формулу:

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin c}2\sin\frac{p-b+p-a}{2}\cos\frac{p-b-p+a}{2}=$$

$$=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin c}2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}=$$

$$=\frac{\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}.$$

Вторую формулу Деламбра получим аналогичным путем, рассматривая то же самое равенство со знаком —:

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2}.$$

Третья и четвертая формулы выводятся на основе равенства:

$$\cos\frac{A\pm B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\mp\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

при помощи таких же преобразований, как и при выводе двух первых формул, но можно их вывести и иначе.

Применим первую формулу Деламбра к полярному треугольнику, построенному для данного; будем иметь:

$$\sin\frac{A_1+B_1}{2}=\frac{\cos\frac{a_1-b_1}{2}}{\cos\frac{c_1}{2}}\cos\frac{C_1}{2}.$$

Переходя к элементам данного сферического треугольника, получаем:

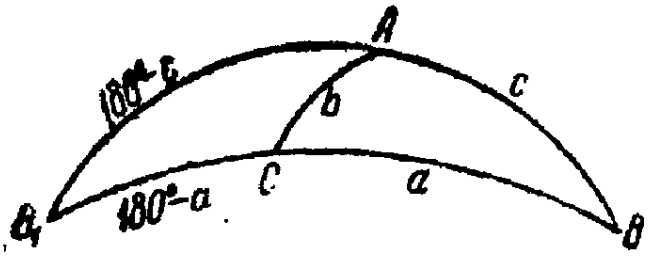
$$\sin\frac{180^\circ-a+180-b}{2}=\frac{\cos\dfrac{180^\circ-A-180^\circ+B}{2}}{\cos\dfrac{180^\circ-C}{2}}\cos\frac{180^\circ-c}{2}$$

или после упрощения получаем четвертую формулу Деламбра:

$$\sin\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}\sin\frac{c}{2};$$

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\dfrac{a+b}{2}}{\sin\dfrac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}.$$

Наконец, применим вторую формулу Деламбра к треугольнику, сопряженному с данным по стороне b (черт. 23), т. е. заменим c на $180^\circ-c$, C на $180^\circ-C$, a на $180^\circ-a$ и A на $180^\circ-A$, оставляя неизменными B и b.



Черт. 23.

$$\sin\frac{180^\circ-A-B}{2}=\frac{\sin\dfrac{180^\circ-a-b}{2}}{\sin\dfrac{180^\circ-c}{2}}\cos\frac{180^\circ-C}{2}.$$

После упрощения получим третью формулу Деламбра:

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}.$$

При условии, что каждый из элементов сферического треугольника меньше 180°, можно вывести из уравнений Деламбра так называемое свойство однородности сферического треугольника, заключающееся в том, что если $a+b\lesseqgtr 180^\circ$, то и $A+B\lesseqgtr 180^\circ$.

Для вывода этого свойства возьмем третье уравнение Деламбра:

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}.$$

В этом уравнении $\sin\frac{C}{2}$ *и* $\cos\frac{c}{2}$ всегда положительны; следовательно, для того чтобы существовало равенство, необходимо, чтобы косинус полусуммы сторон и косинус полусуммы углов имели одинаковые знаки, т. е. если $\frac{a+b}{2}\lesseqgtr 90^\circ$, то и $\frac{A+B}{2}\lesseqgtr 90^\circ$, или если $a+b\gtreqless 180^\circ$, то и $A+B\gtreqless 180^\circ$.

§ 42. Формулы «аналогии Непера». а) Эти формулы *выводятся непосредственно* из формул Деламбра и употребляются, между прочим, при решении сферических треугольников, когда даны две стороны и угол между ними и когда даны два угла и прилежащая к ним сторона.

Разделив почленно первую формулу Деламбра на третью и вторую на четвертую, получим первые две пропорции Непера:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}, \tag{39}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}. \tag{40}$$

Делением четвертой формулы на третью и второй на первую получим остальные две аналогии Непера:

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}, \tag{41}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}. \tag{42}$$

Методом круговой перестановки букв получаются такие же пропорции Непера для других сочетаний сторон и углов треугольника, например:

$$\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}\operatorname{tg}\frac{a}{2}$$

и т. д.

Мы видим, что аналогии Непера представляют соотношение между пятью элементами сферического треугольника, тогда как в уравнениях Деламбра их входит шесть.

б) Разделив последние две формулы аналогии Непера одна на другую почленно, получим так называемую проверочную формулу Гаусса, служащую для контроля вычислений, производимых по формулам Деламбра и аналогиям Непера:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}. \tag{43}$$

Интересно, что эту проверочную формулу Гаусса можно получить как следствие преобразования простой пропорции в треугольнике синусов сторон синусам противолежащих им углов:

$$\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{\sin A}{\sin B}.$$

На основании производной пропорции: *сумма двух членов первого отношения так относится к их разности, как сумма членов второго отношения к их разности*, имеем:

$$\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B},$$

откуда

$$\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}.$$

Отсюда имеем окончательно:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

в) Непосредственный вывод аналогий Непера (без перехода от формул Деламбра).

Воспользуемся соотношением плоской тригонометрии:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}.$$

Умножаем вторую часть этого равенства на $\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$, отчего, конечно, оно не нарушится:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

Но мы знаем [см. § 38, система формул (26)], что

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\sin(p-b)}{\sin p},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\sin(p-a)}{\sin p},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\sin(p-c)}{\sin p}.$$

Поэтому, делая соответствующие подстановки, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\frac{\sin(p-b)}{\sin p}+\frac{\sin(p-a)}{\sin p}}{1-\frac{\sin(p-c)}{\sin p}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=$$

$$=\frac{\sin(p-b)+\sin(p-a)}{\sin p-\sin(p-c)}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{2\sin\frac{2p-a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{2p-c}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

Но $2p = a + b + c$, поэтому имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

—первую пропорцию Непера.

Также получим вторую аналогию Непера из соотношения:

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2} - \operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}.$$

Остальные две аналогии Непера выводим из первых двух при помощи полярных треугольников.

Так, первая пропорция Непера по отношению к полярному треугольнику, построенному для данного сферического треугольника, напишется так:

$$\operatorname{tg}\frac{A_1+B_1}{2} = \frac{\cos\frac{a_1-b_1}{2}}{\cos\frac{a_1+b_1}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C_1}{2}.$$

Переходя к данному сферическому треугольнику, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{180^\circ - a + 180^\circ - b}{2} = \frac{\cos\frac{180^\circ - A - 180^\circ + B}{2}}{\cos\frac{180^\circ - A + 180^\circ - B}{2}}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ - c}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

— третья пропорция Непера.

Точно так же из второй аналогии Непера при помощи полярного треугольника получим четвертую аналогию Непера.

§ 43. Формулы, определяющие избыток сферического треугольника (эксцесс). а) Формулы избытка сферического треугольника в функции его стороны. Эти формулы выведены Каньоли.

Возьмем две формулы для синуса половины стороны, выраженной в функции его углов и эксцессов (см. § 40):

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\mathcal{E}}{2}\sin\left(A-\frac{\mathcal{E}}{2}\right)}{\sin B\sin C}},$$

$$\sin\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\mathcal{E}}{2}\sin\left(B-\frac{\mathcal{E}}{2}\right)}{\sin A\sin C}}.$$

Перемножим почленно эти два равенства:

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}=\frac{\sin\frac{\mathcal{E}}{2}}{\sin C}\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\mathcal{E}}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\mathcal{E}}{2}\right)}{\sin A\sin B}},$$

а так как радикал в этом равенстве, согласно формуле (32), равен $\cos\frac{c}{2}$, то имеем:

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}=\frac{\sin\frac{\mathcal{E}}{2}}{\sin C}\cos\frac{c}{2},$$

откуда

$$\sin\frac{\mathcal{E}}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin C. \qquad (44)$$

Это — первая формула Каньоли.

При помощи метода круговой перестановки букв получаем еще два решения для $\sin\frac{\mathcal{E}}{2}$:

$$\sin\frac{\mathcal{E}}{2}=\frac{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\sin A,$$

$$\sin\frac{\mathcal{E}}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\sin B.$$

Заменяя в первой из этих формул $\sin C$ через

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{2\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin a\sin b},$$

получаем:

$$\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\,\frac{2\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\cos\frac{c}{2}\,4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}}$$

или окончательно:

$$\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}. \qquad (45)$$

Это — вторая формула Каньоли.

б) Формула, определяющая эксцесс сферического треугольника по тангенсу. Эта формула впервые выведена Люилье.

Напишем формулы Деламбра, в которые входят синус и косинус полусуммы двух углов:

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2},$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}.$$

При помощи эксцесса сферического треугольника исключим из этих уравнений полусумму углов, зная, что

$$A+B+C-180^\circ=\mathfrak{E},\quad A+B=180^\circ+\mathfrak{E}-C,$$

$$\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C-\mathfrak{E}}{2}.$$

Будем иметь

$$\cos\frac{C-\mathfrak{E}}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{C-\mathfrak{E}}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}.$$

Перенося функции углов в левую, а функции сторон в правую часть равенств, получим пропорции в таком виде:

$$\frac{\cos\frac{C-\mathfrak{E}}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},\qquad \frac{\sin\frac{C-\mathfrak{E}}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Составим из этих пропорций производные:

$$\frac{\cos\frac{C-\mathfrak{E}}{2}-\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C-\mathfrak{E}}{2}+\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{C-\mathfrak{E}}{2}-\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{C-\mathfrak{E}}{2}+\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}}.$$

Заметим, что полученные формулы для каких угодно аргументов x и y могут быть преобразованы в следующий вид:

$$\frac{\cos x-\cos y}{\cos x+\cos y}=\frac{-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=-\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\operatorname{tg}\frac{x-y}{2},$$

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{x+y}{2}\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}.$$

Преобразовываем полученные пропорции:

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\mathcal{E}}{4}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\mathcal{E}}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{a-b+c}{4}\operatorname{tg}\frac{a+b-c}{4},$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\mathcal{E}}{4}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\mathcal{E}}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{a+b+c}{4}\operatorname{tg}\frac{a+b-c}{4}.$$

Или, замечая, что

$$a+b+c=2p,\quad a+b-c=2(p-c),\quad a-b+c=$$

$$=2(p-b),\quad b+c-a=2(p-a),$$

получим:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\mathcal{E}}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\mathcal{E}}{4}=\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2},$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\mathcal{E}}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\mathcal{E}}{4}=\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}.$$

Перемножая оба равенства почленно, получаем:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\mathcal{E}}{4}=\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2},$$

откуда окончательно получаем формулу Люилье:

$$\operatorname{tg}\frac{\mathcal{E}}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}. \tag{46}$$

Знак перед корнем берется $+$, так как $\frac{\mathcal{E}}{4}$ всегда меньше 90°.

В самом деле:

$$540^\circ > A+B+C > 180^\circ,\quad 360^\circ > A+B+C-180^\circ > 0,$$

$$90^\circ > \frac{\mathcal{E}}{4} > 0.$$

в) Формула, определяющая эксцесс сферического треугольника в зависимости от двух сторон и угла между ними.

Напишем формулы тангенса половины стороны сферического треугольника:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}\sin\left(A-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}\sin\left(B-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}}.$$

Перемножив почленно эти равенства, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}}{\sin\left(C-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}}{\sin C\cos\frac{\mathfrak{E}}{2}-\cos C\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sin C\operatorname{ctg}\frac{\mathfrak{E}}{2}-\cos C},$$

$$\sin C\operatorname{ctg}\frac{\mathfrak{E}}{2}-\cos C=\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2},$$

откуда получаем:

$$\operatorname{ctg}\frac{\mathfrak{E}}{2}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2}+\cos C}{\sin C}.$$

Для того чтобы сделать эту формулу логарифмической, вводят вспомогательный угол, положив

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2}=\sin C\operatorname{ctg}\varphi.$$

Тогда имеем окончательно:

$$\operatorname{ctg}\frac{\mathfrak{E}}{2}=\frac{\sin(C+\varphi)}{\sin\varphi\sin C}. \qquad (47)$$

г) Определение эксцесса сферического треугольника с малыми сторонами.

Часто при геодезических работах приходится вычислять эксцесс сферических треугольников, стороны которых весьма малы по сравнению с радиусом земного шара. В градусной величине стороны таких треугольников будут выражаться только минутами, в некоторых случаях даже секундами, а сам сферический треугольник будет очень близок к плоскому треугольнику. В таком треугольнике на практике измеряются все три угла, но получить эксцесс простым вычитанием из суммы углов 180° нельзя, потому что ошибки в измерении углов сплошь да рядом превышают величину самого эксцесса. Вычисление же в этом случае эксцесса по выведенным выше формулам приводит к необходимости оперировать с весьма малыми дугами, подыскание для которых тригонометрических величин весьма хлопотливо и не ведет к надежному результату.

Возьмем формулу Каньоли:

$$\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin C.$$

В этой формуле a, b и c выражают угловые величины сторон треугольника. Допустим, что линейные величины этих сторон будут соответственно равны α, β и γ.

Тогда имеем (см. § 3):

$$a\sin 1''=\frac{\alpha}{R},\quad b\sin 1''=\frac{\beta}{R},\quad c\sin 1''=\frac{\gamma}{R};$$

$$\sin a=\frac{\alpha}{R},\quad \sin b=\frac{\beta}{R},\quad \sin c=\frac{\gamma}{R}$$

или

$$\sin\frac{a}{2}=\frac{\alpha}{2R},\quad \sin\frac{b}{2}=\frac{\beta}{2R},\quad \cos\frac{c}{2}=1.$$

Делая теперь подстановку полученных величин в формулу Каньоли, получим:

$$\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}=\frac{\alpha\beta\sin C}{4R^2}.$$

По малости $\mathfrak{E}$ можем написать $\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}=\frac{\mathfrak{E}}{2}\sin 1''$. Тогда получим:

$$\frac{\mathfrak{E}}{2}\sin 1''=\frac{\alpha\beta\sin C}{4R^2},\quad \mathfrak{E}''=\frac{\alpha\beta\sin C}{2R^2\sin 1''}. \tag{48}$$

Эта формула обычно применяется в геодезии для вычисления сферических избытков треугольников тригонометрических сетей, но только вместо R берется выражение для большой полуоси земного сфероида с поправкой за широту.

В последней формуле можно заменить β через $a\frac{\sin B}{\sin A}$ выражением, взятым из формулы:

$$\frac{\beta}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}.$$

Тогда для $\mathfrak{E}$ будем иметь такую формулу:

$$\mathfrak{E}''=\frac{a^2\sin B\sin C}{2R^2\sin A\sin 1''}. \tag{49}$$

Первая формула применяется тогда, когда в треугольнике известны две стороны и угол между ними, а вторая — тогда, когда даны три угла и одна сторона. Так как величины сферического избытка в рассматриваемых треугольниках очень малы, то пользуясь выведенными приближенными формулами, получаем достаточно точный результат.

Для прямоугольного сферического треугольника, в котором даны гипотенуза a и один из прилежащих углов B, формулу эксцесса можно представить в другой форме.

Возьмем формулу Каньоли:

$$\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{b}{2}}\sin B.$$

Вследствие малых величин $\mathfrak{E}$ и сторон треугольника a, b и c можно написать:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{E}''\sin 1''=\frac{1}{2}a''\sin 1''\frac{1}{2}c''\sin 1''\sin B,$$

$$\mathfrak{E}''=\frac{1}{2}a''c''\sin 1''\sin B.$$

Из этого равенства исключим c'', для чего по правилу Непера напишем:

$$\cos B=\operatorname{tg}c\operatorname{tg}a,\quad \operatorname{tg}c=\cos B\operatorname{ctg}a,\quad c''\sin 1''=a\sin 1''\cos B.$$

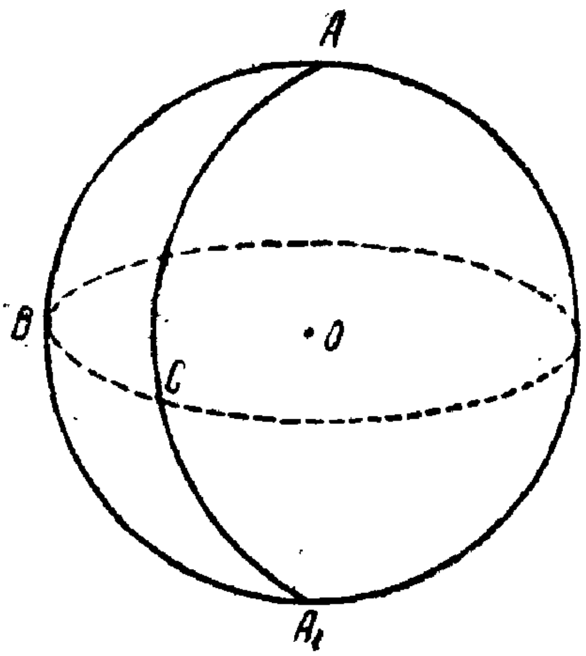
Подставив найденную величину $c'' \sin 1''$ в предыдущую формулу эксцесса, получим:

$$\mathscr{E}'' = \frac{1}{2} a^2 \sin 1'' \sin B \cos B = a^2 \sin 2B \sin 1''.$$

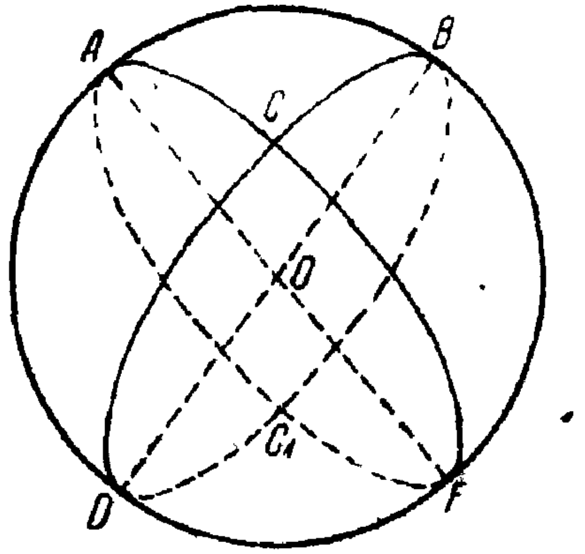
Если же взять линейную величину гипотенузы, получим:

$$\mathscr{E}'' = \frac{a^2 \sin 2B}{4R^2 \sin 1''}. \tag{50}$$

§ 44. Определение площади двуугольника и сферического треугольника. Определение площади двуугольника.



Черт. 24.



Черт. 25.

Положим, что ABA_1C — сферический двуугольник, образованный двумя дугами больших кругов, проходящих через один и тот же диаметр AA_1 (черт. 24). Угол A, составленный этими двумя полуокружностями, называется углом двуугольника. Очевидно, поверхность S двуугольника будет составлять такую же часть от всей поверхности шара, какую угол A составляет от $360°$, т. е.

$$\frac{S}{4\pi R^2} = \frac{A}{360°}, \quad S = \frac{A°}{90°} \pi R^2. \tag{51}$$

Площадь двуугольника равна площади большого круга сферы, умноженной на отношение угла двуугольника к прямому углу.

Последняя формула нужна будет при выводе площади сферического треугольника.

Положим, что имеем сферический треугольник ABC (черт. 25) и нужно найти его площадь. Для этого построим для каждого угла данного сферического треугольника соответствующий ему двуугольник; так, для угла A двуугольник $ABFC$, для угла B двуугольник $BADC$ и, наконец, для угла C двуугольник CAC_1B. На основании формулы площади двуугольника напишем:

$$ABC + ACD = \pi R^2 \frac{B^\circ}{90^\circ},$$

$$ABC + CBF = \pi R^2 \frac{A^\circ}{90^\circ},$$

$$ABC + ABC_1 = \pi R^2 \frac{C^\circ}{90^\circ}.$$

В каждую из левых частей равенств входят два сферических треугольника, составляющие один треугольник. Сложив все три равенства по частям, получим:

$$ABC + ACD + ABC + CBF + ABC + ABC_1 = \\ = \frac{\pi R^2}{90^\circ}(A + B + C).$$

В левой части вместо треугольника ABC_1 поставим равновеликий ему симметричный треугольник CDF; получим:

$$2ABC + ABC + ACD + CBF + CDF = \frac{\pi R^2}{90^\circ}(A + B + C).$$

В левой части равенства последние четыре члена в сумме, как видно из чертежа, образуют поверхность полушара $2\pi R^2$, поэтому предыдущее равенство перепишется так:

$$2ABC + 2\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{90^\circ}(A + B + C),$$

$$2ABC = \pi R^2 \frac{A^\circ + B^\circ + C^\circ}{90^\circ} - 2\pi R^2,$$

$$ABC = \pi R^2 \frac{A^\circ + B^\circ + C^\circ}{180^\circ} - \pi R^2 = \frac{\pi R^2 (A^\circ + B^\circ + C^\circ - 180)}{180^\circ},$$

$$\text{площ. } ABC = \frac{\pi R^2 \times \varepsilon^\circ}{180^\circ}.$$

Площадь сферического треугольника равняется площади большого круга, умноженной на отношение эксцесса к 180°.

$$ABC = \frac{\pi R^2 \mathcal{E}}{180^\circ} = \frac{R^2 \times \mathcal{E}'' \times \pi}{180 \times 60 \times 60},$$

но $\frac{\pi}{180 \times 60 \times 60}$ есть длина дуги в одну секунду при радиусе, равном единице, которую можем с достаточным приближением считать равной $\sin 1''$; тогда $ABC = R^2 \times \mathcal{E}'' \times \sin 1''$[1]).

Из последнего выражения для площади сферического треугольника видно, что если брать разные сферические треугольники на одном и том же шаре, то поверхности их будут относиться, как сферические избытки, и тот из них будет больше, у которого сферический избыток больше. При равных сферических избытках треугольники на одном и том же шаре равновелики.

Если известна плащадь сферического треугольника, то легко найти величину избытка его. Из последней формулы имеем:

$$\mathcal{E}'' = \frac{\triangle ABC}{R^2 \times \sin 1''}, \tag{52}$$

т. е. *избыток сферического треугольника равен площади треугольника, разделенной на произведение квадрата радиуса и* $\sin 1''$.

§ 45. Вопросы и упражиеиия.

1. Написать все девять формул, выражающих углы сферического треугольника в функции его сторон. В каких случаях выгодно при вычислениях иметь каждую из этих формул? Исследовать формулы в отношении знака перед радикалом и их мнимости.

2. Вывести формулу радиуса круга, вписанного в даиный сферический треугольник; формулу $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ выразить в фуикции этого радиуса и одиой из сторон треугольника.

---

1) *Если положить* $R = 1$, *то выйдет:*

$$S = \mathcal{E} \sin 1'',$$

т. е. *при радиусе сферы, равном единице, поверхность сферического треугольника равна его сферическому избытку.*

3. Вывести непосредственным методом все девять формул, выражающих стороны треугольника в функции его углов. Исследовать формулы. Взяв формулу $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ за исходную, вывести методом полярного треугольника формулу $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

4. Вывести формулы, выражающие стороны сферического треугольника в функции его углов и эксцесса. Как выражается радиус круга, описанного около сферического треугольника?

5. Вывести третью и четвертую формулы Деламбра (см. § 41) непосредственным методом (без помощи полярного треугольника).

6. Вывести проверочную формулу Гаусса.

7. Какие элементы сферического треугольника необходимо иметь для того, чтобы определить его площадь?

8. В чем заключаются формулы Каньоли и Люилье, и когда они применяются?

VI. РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 46. Введение. Для того чтобы найти все возможные случаи решения косоугольных треугольников, надо иметь в виду, что сферический треугольник вполне определяется, если из шести его элементов даны три. Поэтому общее число различных случаев решения треугольников будет равно числу возможных сочетаний из шести элементов по три:

$$C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20.$$

Вот они: abc, abA, abB, abC, acA, acB, acC, aAB, aAC, aBC, bcA, bcB, bcC, bAB, bAC, bBC, cAB, cAC, cBC, ABC.

Из этих двадцати случаев решения треугольников некоторые имеют один и тот же геометрический смысл. Отбрасывая повторные, найдем следующие шесть основных случаев.

Решить сферический треугольник:

1) по трем сторонам a, b, c;

2) по трем углам A, B, C;

3) по двум сторонам и углу между ними a, b, C;

4) по двум углам и стороне между ними A, B, c;

5) по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них a, b, B;

6) по двум углам и стороне, противолежащей одному из них A, B, b.

§ 47. Решение сферического треугольника по трем сторонам. Дано: a, b, c. Найти: A, B, C.

Вычисление производится по формулам (24):

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{M}{\sin(p-a)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{M}{\sin(p-b)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{M}{\sin(p-c)},$$

где

$$M=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}.$$

Что же касается проверки вычислений, то для этой цели может служить формула:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{M}{\sin p},$$

которая получается почленным перемножением предыдущих формул.

Для проверки же вычислений можно найти эксцесс сферического треугольника по формуле Люилье:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

Для возможности задачи необходимо, чтобы синусы, входящие под радикал, были больше нуля, для чего должны быть выполнены неравенства: $p<180°$, $p-a>0°$, $p-b>0°$, $p-c>0°$, или $a+b+c<360°$, $c+b>a$, $a+c>b$, $a+b>c$, т. е. для возможности задачи необходимо только соблюдение тех условий, которые вообще должны существовать во взаимных отношениях сторон каждого сферического треугольника.

Задача допускает одно вполне определенное решение, так как искомые элементы определяются посредством тангенсов определяемых аргументов $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$, меньших 90°.

Схема вычислений

Дано: $a = 60°31'42''$
$b = 117°28'19''$
$c = 78°42'23''$

Рассматривая данные величины, видим, что задание удовлетворяет условиям возможности сферического треугольника, а поэтому решение задачи возможно.

1)	$2p$	$256°42'26''$
2)	p	$128°21'13''$
3)	$p-a$	$67°49'31''$
4)	$p-b$	$10°52'54''$
5)	$p-c$	$49°38'48''$
6)	$\frac{p}{2}$	$64°10'36''.5$
7)	$\frac{p-a}{2}$	$33°54'45''.5$
8)	$\frac{p-b}{2}$	$5°26'27''$
9)	$\frac{p-c}{2}$	$24°49'24''$
10)	$\lg\sin(p-a)$	9.96 663
11)	$\lg\sin(p-b)$	9.27 595
12)	$\lg\sin(p-c)$	9.88 199
13)	$\operatorname{comp}\lg\sin p$	0.10 558
14)	$2\lg M$	9.23 016
15)	$\lg M$	9.61 508
16)	$\lg\frac{M}{\sin p}$	9.72 066
17)	$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}$	9.64 845
18)	$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}$	0.33 912
19)	$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}$	9.73 309
20)	$\lg\frac{M}{\sin p}$	9.72 066

21)	$\frac{A}{2}$	$23°59'36''$
22)	$\frac{B}{2}$	$65°23'29''$
23)	$\frac{C}{2}$	$28°24'26''$
24)	A	$47°59'12''$
25)	B	$130°46'58''$
26)	C	$56°48'52''$
27)	Σ	$235°35'2''$
28)	$\mathcal{E}$	$55°35'2''$
29)	$\lg\operatorname{tg}\frac{p}{2}$	0.31 522
30)	$\lg\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}$	9.82 755
31)	$\lg\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}$	8.97 885
32)	$\lg\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}$	9.66 518
33)	$2\lg\operatorname{tg}\frac{\mathcal{E}}{4}$	8.78 680
34)	$\lg\operatorname{tg}\frac{\mathcal{E}}{4}$	9.39 340
35)	$\frac{\mathcal{E}}{4}$	$13°53'45''.5$
36)	$\mathcal{E}$	$55°35'2''$

§ 48. Решение сферического треугольника по трем его углам. Дано: A, B, C. Найти: a, b, c.

Задачу можно решить при помощи полярного треугольника и тем свести ее к предшествующему случаю. В полярном треугольнике, если углы A, B, C искомого треугольника даны, стороны будут известны: $a_1 = 180° - A$, $b_1 = 180° - B$, $c_1 = 180° - C$. Углы полярного треугольника A_1, B_1, C_1 вычисляем по формулам решения первого случая и затем получаем стороны искомого: $a = 180° - A$, $b = 180° - B_1$, $c = 180° - C_1$.

Решим задачу непосредственным определением искомых элементов, для чего воспользуемся формулами, определяющими стороны в функциях углов. Работу можно вести:

1) либо пользуясь системой формул:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{a}{2} &= K\cos(P-A), \\ \operatorname{tg}\frac{b}{2} &= K\cos(P-B), \\ \operatorname{tg}\frac{c}{2} &= K\cos(P-C), \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

где

$$K = \sqrt{\frac{-\cos P}{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}}.$$

Контрольную для вычислений формулу получим простым почленным перемножением формул (30):

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} = K^3\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C).$$

Подставляя вместо K^2 выражения $\frac{-\cos P}{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}$, получим контрольную формулу:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} = K(-\cos P);$$

2) либо пользуясь системой формул:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{a}{2} &= N\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \operatorname{tg}\frac{b}{2} &= N\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \operatorname{tg}\frac{c}{2} &= N\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

где

$$N = \sqrt{\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}}{\sin\left(A-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)}}.$$

Контрольную для вычислений формулу получим, перемножая почленно формулы второй системы:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} = N^3\sin\left(A-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right).$$

Подставляя вместо N^2 его значение

$$\frac{\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}}{\sin\left(A-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)},$$

получим контрольную для этого случая формулу:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} = N\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}.$$

При решении задачи получается одно определенное решение.

Задача возможна будет, если данные ее отвечают следующим условиям:

1) каждый данный угол должен быть меньше 180°;

2) сумма углов треугольника должна находиться между 180° и 540°;

3) избыток сферического треугольника $\mathfrak{E}$ должен быть больше нуля и меньше 360°;

4) сумма двух углов без третьего должна быть меньше 180° или, что то же, разность между каждым углом и половиною избытка сферического треугольника должна быть больше 0°.

Схема вычислений

а) По первой системе формул.

Дано: $A = 47^\circ\ 59'\ 12''$
$B = 130^\circ\ 46'\ 58''$
$C = 56^\circ\ 48'\ 52''$

1) $2P$	$235^\circ\ 35'\ 2''$	6)	$\lg(-\cos P)$	9.66 863
2) P	$117^\circ\ 47'\ 31''$	7)	$\operatorname{comp}\lg\cos(P-A)$	0.46 191
3) $P-A$	$69^\circ\ 48'\ 19''$	8)	$\operatorname{comp}\lg\cos(P-B)$	0.01 125
4) $P-B$	$-\ 12^\circ\ 59'\ 27''$	9)	$\operatorname{comp}\lg\cos(P-C)$	0.31 412
5) $P-C$	$60^\circ\ 58'\ 39''$	10)	$2\lg K$	0.45 593
		11)	$\lg K$	0.22 796
		12)	$\lg K(-\cos P)$	9.89 659

13)	$\lg\operatorname{tg}\frac{a}{2}$	9.76 605
14)	$\lg\operatorname{tg}\frac{b}{2}$	0.21 670
15)	$\lg\operatorname{tg}\frac{c}{2}$	9.91 384
16)	$\lg K(-\cos P)$	9.89 659

17) $\frac{a}{2}$	$30^\circ\ 15'\ 50''.5$	18) a	$60^\circ\ 31'\ 41''$
19) $\frac{b}{2}$	$58^\circ\ 44'\ 9''$	20) b	$117^\circ\ 28'\ 18''$
21) $\frac{c}{2}$	$39^\circ\ 21'\ 13''$	22) c	$78^\circ\ 42'\ 26''$

б) По второй системе формул.

Используем данные из предшествующей задачи, т. е.

$$A = 47^\circ\ 59'\ 12''$$
$$B = 130^\circ\ 46'\ 58''$$
$$C = 56^\circ\ 48'\ 52''$$

1) Σ	$235°35'2''$
2) $\mathfrak{E}$	$55°35'2''$
3) $\frac{\mathfrak{E}}{2}$	$27°47'31''$
4) $A-\frac{\mathfrak{E}}{2}$	$20°11'41''$
5) $B-\frac{\mathfrak{E}}{2}$	$102°59'27''$
6) $C-\frac{\mathfrak{E}}{2}$	$29°1'21''$

13)	$\lg N \sin\frac{\mathfrak{E}}{2}$	9.89 659
12)	$\lg N$	0.22 796
7)	$\lg \sin\frac{\mathfrak{E}}{2}$	9.66 863
8)	$\operatorname{comp}\lg\sin\left(A-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)$	0.46 191
9)	$\operatorname{comp}\lg\sin\left(B-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)$	0.01 126
10)	$\operatorname{comp}\lg\sin\left(C-\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)$	0.31 412
11)	$2\lg N$	0.45 593

14) $\lg\operatorname{tg}\frac{a}{2}$	9.76 605	18) $\frac{a}{2}$	$30°15'50''.5$
15) $\lg\operatorname{tg}\frac{b}{2}$	0.21 670	19) $\frac{b}{2}$	$58°44'9''$
16) $\lg\operatorname{tg}\frac{c}{2}$	9.91 384	20) $\frac{c}{2}$	$39°21'13''$
17) $\lg N\times\sin\frac{\mathfrak{E}}{2}$	9.89 659	21) a	$60°31'41''$
		22) b	$117°28'18''$
		23) c	$78°42'26''$

Если требуется вычислить не все три стороны, а только одну, то вычисление иногда ведут и по нелогарифмической формуле:

$$\cos b=\frac{\cos B+\cos A\cos C}{\sin A\sin B}=\frac{r}{K}.$$

Вычисление ведется по такой схеме:

1)	$\lg\cos A$	8)	$\cos A\cos C$
3)	$\lg\cos C$	9)	$\cos B$
5)	$\lg\cos A\cos C$	10)	r
2)	$\lg\sin A$	11)	$\lg r$
4)	$\lg\sin C$	12)	$\operatorname{comp}.\lg K$
6)	$\lg\sin A\sin C$ ($\lg K$)	13)	$\lg\cos b$
7)	$\lg\cos B$	14)	b

§ 49. Решение сферического треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Дано: a, b, C. Найти A, B, c.

Решить задачу можно двумя методами: 1) самым простым — по формулам Непера и 2) методом введения вспомогательного угла в основную формулу сферической тригонометрии.

I. Первый метод решения задачи

Возьмем аналогии Непера и из них определим:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\,\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}.$$

Применяя эти формулы, вычислим $\frac{A+B}{2}=m$, $\frac{A-B}{2}=n$; складывая и вычитая почленно эти равенства, получим искомые углы:

$$A=m+n,$$

$$B=m-n.$$

Правильность вычисления углов контролируется при помощи формулы Гаусса:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}.$$

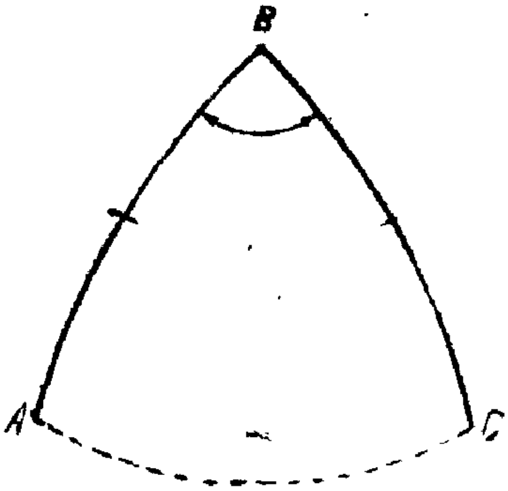
Для определения стороны c возьмем две другие аналогии

Непера и из каждой из них определим $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.$$

Гарантией правильности вычисления c служит получение одного и того же логарифма $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, вычисленного по двум формулам.



Черт. 26.

Из всех этих формул получаются действительные и вполне определенные значения для искомых величин в предположении, конечно, что данные величины заключаются между 0° и 180°. В этом также легко убедиться и геометрически (черт. 26). Если даны две стороны и угол между ними, то для построения треугольника необходимо только провести через точки A и C, не лежащие на концах диаметра, дугу большого круга, которую, как известно, через эти точки можно провести только одну.

Схема вычислений

Дано: $a = 40°28'36''$
$b = 110°18'32''$
$C = 56°40'54''$

1)	a	40°28'36"	7)	$\frac{C}{2}$	28°20'27"
2)	b	110°18'32"			
3)	$a+b$	150°47'8"	20)	$\frac{A+B}{2}$	80°34'53"
5)	$a-b$	− 69°49'56"			
4)	$\frac{a+b}{2}$	75°23'34"	21)	$\frac{A-B}{2}$	− 47°38'22"
6)	$\frac{a-b}{2}$	− 34°54'58"	22)	A	32°56'31"
			23)	B	128°13'15"

8)	$\lg \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$	0.26 812	9)	$\lg \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$	0.26 812
10)	$\lg \cos \frac{a-b}{2}$	9.91 381	11)	$\lg \sin \frac{a-b}{2}$	9.75 762n
12)	comp. $\lg \cos \frac{a+b}{2}$	0.59 827	13)	comp. $\lg \sin \frac{a+b}{2}$	0.01 427
14)	$\lg \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$	0.78 020	17)	$\lg \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}$	0.04 007*n*
15)	$\lg \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}$	9.84 387*n*	18)	$\lg \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}$	0.58 400
16)	Σ	0.62 407*n*	19)	Σ	0.62 407*n*
24)	$\lg \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}$	0.58 400	25)	$\lg \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}$	9.84 387*n*
26)	$\lg \cos \frac{A+B}{2}$	9.21 390	27)	$\lg \sin \frac{A+B}{2}$	9.99 410
28)	comp. $\lg \cos \frac{A-B}{2}$	0.17 148	29)	comp. $\lg \sin \frac{A-B}{2}$	0.13 141*n*
30)	$\lg \operatorname{tg} \frac{c}{2}$	9.96 938	31)	$\lg \operatorname{tg} \frac{c}{2}$	9.96 938
			32)	$\frac{c}{2}$	42°58′55″
			33)	c	85°57′50″

II. Второй метод решения

(Метод введения вспомогательного угла)

Возьмем основную формулу косинуса стороны:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Сделаем эту формулу логарифмической. Во второй ее части вынесем за скобку $\cos a$, получим:

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \sin b \operatorname{tg} a \cos C).$$

Теперь положим, что

$$\operatorname{tg} a \cos C = \operatorname{tg} \varphi,$$

тогда формула примет вид:

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \operatorname{tg}\varphi \sin b) =$$

$$= \frac{\cos a\,(\cos b \cos\varphi + \sin b \sin\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}. \quad \text{(II)}$$

Итак, имея две формулы (I) и (II), легко определить c.

Точно таким же образом получим и формулы для определения углов из основной формулы сферической тригонометрии четырех элементов:

$$\sin b \operatorname{ctg} a - \sin C \operatorname{ctg} A = \cos b \cos C.$$

Откуда имеем:

$$\operatorname{ctg} A \sin C = \sin b \operatorname{ctg} a - \cos b \cos C.$$

Но мы положили, что $\operatorname{tg} a \cos C = \operatorname{tg}\varphi$, откуда $\operatorname{ctg} a = \cos C \operatorname{ctg}\varphi$. Подставляя вместо $\operatorname{ctg} a$ его значение $\cos C \operatorname{ctg}\varphi$, формулу перепишем так:

$$\operatorname{ctg} A \sin c =$$

$$= \sin b \cos C \operatorname{ctg}\varphi - \cos b \cos C = \cos C\,(\sin b \operatorname{ctg}\varphi - \cos b) =$$

$$= \frac{\cos C\,(\sin b \cos\varphi - \cos b \sin\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\cos C \sin(b-\varphi)}{\sin\varphi},$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos C \sin(b-\varphi)}{\sin\varphi \sin C} = \frac{\sin(b-\varphi)}{\operatorname{tg} C \sin\varphi},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin\varphi \operatorname{tg} C}{\sin(b-\varphi)}. \quad \text{(III)}$$

Формул (I) и (III) вполне достаточно для того, чтобы определить A.

Для того чтобы определить B, составляем формулу четырех элементов:

$$\operatorname{ctg} B \sin C = \operatorname{ctg} b \sin a - \cos a \cos C.$$

Полагаем, что

$$\operatorname{ctg} b = \cos C \operatorname{ctg} \psi, \quad \operatorname{tg} \psi = \cos C \operatorname{tg} b. \tag{IV}$$

$\operatorname{ctg} B \sin C =$

$$\cos C \sin a \operatorname{ctg} \psi - \cos a \cos C = \cos C (\sin a \operatorname{ctg} \psi - \cos a) =$$

$$= \frac{\cos C (\sin a \cos \psi - \cos a \sin \psi)}{\sin \psi} = \frac{\cos C \sin (a - \psi)}{\sin \psi},$$

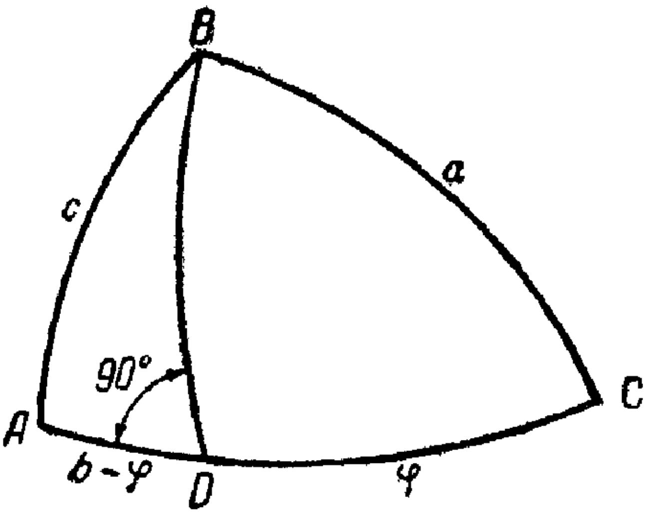
откуда получаем окончательно:

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin \psi \operatorname{tg} C}{\sin (a - \psi)}. \tag{V}$$

Применяя формулы (IV) и (V), определяем угол B.

Проверкою в вычислениях может служить соотношение:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$



Черт. 27.

Интересно здесь отметить, что введение вспомогательного угла равносильно разложению вычисляемого треугольника ABC на два прямоугольных треугольника дугою большого круга BD, проведенного через вершину треугольника B перпендикулярно к противоположной стороне AC (черт. 27).

Обозначим отрезок стороны треугольника DC через φ, тогда DA будет равна $b - \varphi$.

Из прямоугольного треугольника CBD имеем:

$$\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} \varphi$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos C \operatorname{tg} a.$$

Мы получили прямо из прямоугольного сферического треугольника CBD формулу (I).

Теперь рассмотрим прямоугольный сферический треугольник ABD; из него на основании сферической формулы Пифагора имеем:

$$\cos c = \cos (b - \varphi) \cos BD;$$

$\cos BD$ определяем из прямоугольного сферического треугольника DBC:

$$\cos a = \cos \varphi \cos BD, \quad \cos BD = \frac{\cos a}{\cos \varphi}.$$

Подставляя найденное значение $\cos BD$ в предшествующую формулу, получим формулу (II):

$$\cos c = \frac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Наконец, из прямоугольного сферического треугольника ABD имеем:

$$\sin (b - \varphi) = \operatorname{ctg} A \operatorname{tg} BD,$$

и из прямоугольного сферического треугольника CBD имеем:

$$\sin \varphi = \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} BD.$$

Определим $\operatorname{tg} BD$ из последнего соотношения и вставим полученное значение в первую формулу:

$$\operatorname{tg} BD = \frac{\sin \varphi}{\operatorname{ctg} C},$$

$$\sin (b - \varphi) = \frac{\operatorname{ctg} A \sin \varphi}{\operatorname{ctg} C}.$$

Откуда получаем:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} C}{\sin (b - \varphi)}.$$

Итак, из прямоугольных сферических треугольников получили и формулу (III).

Схема вычислений

Дано: $a = 38°15'6''$
$b = 75°10'8''$
$C = 52°14'16''$

1)	lg tg a	9.89 673
3)	lg cos C	9.78 702
4)	lg tg φ	9.68 375
5)	φ	25°46′16″
6)	$b - \varphi$	49°23′52″
2)	lg cos a	9.89 503
7)	lg cos $(b - \varphi)$	9.81 345
8)	comp. lg cos φ	0.04 550
9)	lg cos c	9.75 398
10)	c	55°25′20″
11)	lg sin φ	9.63 826
12)	lg tg C	0.11 091
13)	comp. lg sin $(b - \varphi)$	0.11 962
14)	lg tg A	9.86 879
15)	A	36°28′25″

16)	lg tg b	0.59 718
17)	lg cos C	9.78 702
18)	lg tg ψ	0.36 420
19)	ψ	66°37′13″
20)	$a - \psi$	—28°22′7″
21)	lg sin ψ	9.96 279
22)	lg tg C	0.11 091
23)	comp. lg sin $(a - \psi)$	0.32 318n
24)	lg tg B	0.39 688n
25)	B	111°50′59″

Контроль вычислений

26)	lg sin a	9.79 177
27)	comp. lg sin A	0.22 589
32)	Σ	0.01 766
28)	lg sin b	9.98 528
29)	comp. lg sin B	0.03 238
33)	Σ	0.01 766

30)	lg sin c	9.91 559
31)	comp. lg sin C	0.10 207
34)	Σ	0.01 766

§ 50. Решение сферического треугольника по двум углам и стороне между ними.

Дано: A, B, c. Найти: a, b, C.

Эту задачу можно решить тремя методами: I) методом введения полярного треугольника; II) по формулам аналогий Непера; III) с помощью введения вспомогательного угла.

I. Первый метод решения задачи

Эту задачу можем решить при помощи полярного треугольника.

Если в треугольнике даны A, B, c, то в его полярном треугольнике будут известны $a_1 = 180° - A$, $b_1 = 180° - B$ и $C_1 = 180° - c$. Решая полярный треугольник по схемам, разработанным в предыдущем параграфе, получим A_1, B_1, c_1.

Переходя же теперь от полярного треугольника к данному, будем иметь искомые элементы $a = 180° - A_1$, $b = 180 - B_1$, $C = 180° - c_1$.

II. Второй метод решения задачи

Для того чтобы решить задачу непосредственно, возьмем следующие формулы из аналогий Непера:

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}.$$

Из них находим:

$$\frac{a+b}{2} = m, \frac{a-b}{2} = n.$$

Складывая и вычитая полученные равенства будем иметь:

$$a = m + n, \quad b = m - n.$$

Схема вычислений

Дано: $A = 59°32'16''$
$B = 77°18'20''$
$c = 34°29'34''$

6) $\lg \operatorname{tg} \frac{c}{2}$	9.49 197
8) $\lg \cos \frac{A-B}{2}$	9.99 476
11) comp. $\lg \cos \frac{A+B}{2}$	0.43 442
14) $\lg \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}$	9.92 115
10) $\lg \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}$	9.19 393 n
16) Σ	9.11 513 n
18) $\frac{a+b}{2}$	39°49'37''
19) $\frac{a-b}{2}$	−2°57'4''
20) a	36°52'33''
21) b	42°46'41''
22) $\lg \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$	0.40 287
24) $\lg \cos \frac{a+b}{2}$	9.88 535
26) comp. $\lg \cos \frac{a-b}{2}$	0.00 058
28) $\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2}$	0.28 880

1) $\frac{c}{2}$	17°14'47''
2) $A+B$	136°50'36''
3) $A-B$	−17°46'4''
4) $\frac{A+B}{2}$	68°25'8''
5) $\frac{A-B}{2}$	8°53'2''
7) $\lg \operatorname{tg} \frac{c}{2}$	9.49 197
9) $\lg \sin \frac{A-B}{2}$	9.18 874 n
12) comp. $\lg \sin \frac{A+B}{2}$	0.03 155
15) $\lg \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}$	8.71 226 n
13) $\lg \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$	0.40 287
17) Σ	9.11 513 n
23) $\lg \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}$	9.19 398 n
25) $\lg \sin \frac{a+b}{2}$	9.80 651
27) comp $\lg \sin \frac{a-b}{2}$	1.28 831 n
29) $\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2}$	0.28 880

30) $\frac{C}{2}$	27°13'2''
32) C	54°26'4''

Контролем правильности вычислений при определении сторон a и b служит формула Гаусса:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

Для определения угла C возьмем остальные две аналогии Непера:

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}.$$

Контролем правильности вычислений при определении угла C служит получение одного и того же логарифма для $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, вычисленного по двум приведенным формулам.

При решении задачи всегда получаются действительные и вполне определенные значения для искомых элементов при условии, конечно, чтобы величина каждого из данных элементов заключалась между 0° и 180°. Задача всегда возможна и допускает только одно решение. В последнем также легко убедиться и геометрически: имея данные A, B, c, возможно построить только один вполне определенный сферический треугольник.

III. Третий метод решения задачи

Возьмем основную формулу сферической тригонометрии, определяющую косинус угла:

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c.$$

и приведем ее к логарифмическому виду, для чего вынесем в правой части ее $\cos A$ за скобку, получим:

$$\cos C = \cos A\,(\sin B \operatorname{tg} A \cos c - \cos B).$$

Положим, что

$$\operatorname{tg} A \cos c = \operatorname{ctg}\varphi, \qquad \mathrm{I}$$

тогда

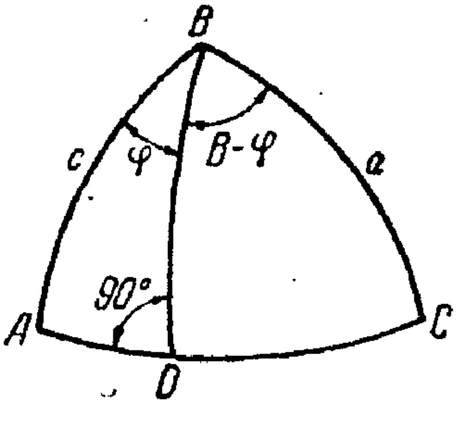
$$\cos C = \cos A\,(\sin B \operatorname{ctg}\varphi - \cos B) =$$

$$= \frac{\cos A}{\sin\varphi}(\sin B\cos\varphi - \cos B\sin\varphi) =$$

$$= \frac{\cos A \sin(B-\varphi)}{\sin\varphi}. \qquad \text{(II)}$$

Формул (I) и (II) вполне достаточно, чтобы определить угол C.

В этой формуле вспомогательная величина φ имеет геометрическое значение, именно, если из вершины сферического треугольника B (черт. 28) опустим высоту на сторону CA (проведем дугу большого круга через вершину B перпендикулярно к CA), то угол, образуемый этой высотой со стороной c, и будет φ.



Черт. 28.

В самом деле, из прямоугольного сферического треугольника ABD, на основании правила Непера, можно написать:

$$\cos c = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg}\varphi;$$

откуда

$$\cos c \operatorname{tg} A = \operatorname{ctg}\varphi,$$

т. е. получится формула (I). Из того же треугольника имеем:

$$\cos A = \cos BD \sin\varphi.$$

Из треугольника CBD пишем:

$$\cos C = \cos BD \sin(B-\varphi)$$

Решив совместно эти два уравнения, получим:

$$\cos C = \frac{\cos A}{\sin \varphi} \sin (B - \varphi).$$

Это есть формула (II).

Итак, и в этом случае, вводя вспомогательный угол, мы решаем сферический треугольник разбивкою его на два прямоугольных сферических треугольника.

Методом введения вспомогательного угла выгодно бывает решать задачу, когда требуется определить в треугольнике только один элемент.

Этим методом можно вычислить и стороны треугольника a и b. Для этого возьмем формулы четырех элементов (см. § 17):

$$\sin c \operatorname{ctg} b = \cos A \cos c + \sin A \operatorname{ctg} B,$$

$$\sin c \operatorname{ctg} a = \cos B \cos c + \sin B \operatorname{ctg} A.$$

Как видим, каждое из этих уравнений представляет собою уравнение с одним неизвестным элементом, поэтому для их решения нужно только их преобразовать в логарифмический вид:

$$\sin c \operatorname{ctg} b = \sin A (\cos c \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B).$$

Положим $\cos c \operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} \psi$ (III), тогда будем иметь:

$$\sin c \operatorname{ctg} b = \sin A (\operatorname{ctg} \psi + \operatorname{ctg} B) = \frac{\sin A \sin (B + \psi)}{\sin B \sin \psi}$$

или

$$\operatorname{ctg} b = \frac{\sin A \sin (B + \psi)}{\sin B \sin \psi \sin c}. \qquad \text{(IV)}$$

Формул (III) и (IV) вполне достаточно для того, чтобы вычислить сторону b.

Для вычисления стороны c соответственно получаем формулы:

$$\cos c \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} \Theta, \qquad \text{(V)}$$

$$\operatorname{ctg} c = \frac{\sin B \sin (\Theta + A)}{\sin A \sin \Theta \sin c}. \qquad \text{(VI)}$$

Схема вычислений

Данные прежние: $A = 59°32'16''$

$B = 77°18'20''$

$c = 34°29'34''$

1) $\lg \cos c$	9.91 603	2) $\lg \cos A$	9.70 498
3) $\lg \operatorname{tg} A$	0.23 051	7) $\lg \sin (B - \varphi)$	9.82 377
4) $\lg \operatorname{ctg} \varphi$	0.14 654	8) comp. $\lg \sin \varphi$	0.23 592
5) φ	$35°30'42''$	9) $\lg \cos C$	9.76 467
6) $B - \varphi$	$41°47'38''$	10) C	$54°26'$

11) $\lg \cos c$	9.91 603	14) $\lg \sin A$	9.93 548
13) $\lg \operatorname{ctg} A$	9.76 949	19) $\lg \sin (B + \psi)$	9.79 469
15) $\lg \operatorname{ctg} \psi$	9.68 552	20) comp. $\lg \sin B$	0.01 075
16) ψ	$64°8'16''$	17) comp. $\lg \sin \psi$	0.04 584
18) $B + \psi$	$141°26'36''$	12) comp. $\lg \sin c$	0.24 695
		21) $\lg \operatorname{ctg} b$	0.03 371
		22) b	$42°46'41''$

Контроль вычислений

$\lg \sin b$	9.83 197	$\lg \sin c$	9.75 305
comp. $\lg \sin B$	0.01 075	comp. $\lg \sin C$	0.08 967
Σ	9.84 272	Σ	9.84 272

§ 51. Решение сферического треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.

Дано: a, b, A. Найти: C, B, c.

Эту задачу решим двумя методами: I) применением формул аналогий Непера и II) разложением данного сферического треугольника на два прямоугольных сферических треугольника

1. Первый метод решения задачи

Прежде всего определяем по формуле синусов угол B:

$$\sin B = \sin A \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Другой же угол C и сторона c определяются по формулам, вытекающим из аналогий Непера:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A-B}{2}\,\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\,\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\,\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.$$

Контролем вычислений служит получение одних и тех же величин для C и для c, вычисленных по два раза по двум различным формулам. Кроме того, можно предварительно проверить правильность вычисления угла B посредством формулы Гаусса:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}.$$

При определении угла B по формуле синусов может встретиться три случая: а) $\sin B > 1$, в этом случае, конечно, задача невозможна; б) $\sin B = 1$, в этом случае искомый треугольник будет прямоугольный, и задача имеет одно решение; в) $\sin B < 1$, в этом случае для угла B найдутся два значения: одно меньшее $90°$, а другое большее $90°$, и задача будет иметь два решения.

Кроме этого, на основании теоремы: во всяком сферическом треугольнике против большей стороны лежит и больший угол, и обратно, заключаем, что искомый угол должен удовлетворять еще дополнительному условию, чтобы разности $A - B$ и $a - b$ имели одинаковые знаки. Если это условие не выполнено, то сферический треугольник невозможен, если же оно выполнено одним или двумя полученными значениями для угла B, то получится одно или два решения треугольника. В самом деле, при каждом определенном значении для угла B, удовлетворяющем предыдущему условию, мы по формулам Непера как для угла C, так и для стороны c получим единственные и вполне определенные значения.

Так как разности $A - B$ и $a - b$ имеют одинаковые знаки и существует, кроме того, соотношение: если $A + B \lesseqgtr 180°$, то и $a + b \lesseqgtr 180°$ (см. § 41), то имеем: $0° < \operatorname{tg}\frac{C}{2} < 90°$; $0° < \operatorname{tg}\frac{c}{2} < 90°$ или $C < 180°$, $c < 180°$. Отсюда ясно, что определяя угол C и сторону c по тангенсу $\frac{C}{2}$ и $\frac{c}{2}$, мы получим для каждого значения B определенные величины.

Что задача имеет два решения видно и геометрически: если из точки C, взятой на шаровой поверхности, радиусом, равным a, опишем окружность, то последняя может пересечь некоторую дугу большого круга AK в двух точках B и B'; если же теперь через вершину C и три точки A, B и B' проведем дуги больших кругов, то этим образуем два сферических треугольника ABC и $AB'C$, имеющие одни и те же данные a, b, A. Дуга окружности радиуса a может только коснуться дуги AK; в этом случае будет построен только один треугольник, и он будет прямоугольный. Наконец, дуга окружности радиуса a может совсем не пересечь окружности AK; в этом случае задача невозможна, аналитически эту невозможность видим из того, что получаем $\sin B > 1$.

Схема вычислений

Дано: $a = 57°41'13''$

$b = 76°34'42''$

$A = 40°23'28''$

1)	$\lg\sin b$	9.98 797	11)	$A+B_1$	88°37′8″
2)	$\lg\sin A$	9.81 158	12)	$A-B_1$	— 7°50′12″
3)	comp. $\lg\sin a$	0.07 307	13)	$\frac{A+B_1}{2}$	44°18′34″
4)	$\lg\sin B$	9.87 262			
5)	B_1	48°13′40″	14)	$\frac{A-B_1}{2}$	— 3°55′6″
6)	B_2	131°46′20″			
7)	$a+b$	134°15′55″	15)	$A+B_2$	172°9′48″
8)	$a-b$	— 18°53′29″	16)	$A-B_2$	— 91°22′52″
9)	$\frac{a+b}{2}$	67°7′57″.5	17)	$\frac{A+B_2}{2}$	86°4′54″
10)	$\frac{a-b}{2}$	— 9°26′44″.5	18)	$\frac{A-B_2}{2}$	— 45°41′26″

19) Ввиду того, что $a-b<0$, $A-B_1<0$, $A-B_2<0$, оба решения задачи возможны.

Контроль вычислений угла B

26)	Σ	9.21 060n
20)	$\lg\operatorname{tg}\frac{A+B_1}{2}$	9.98 953
21)	$\lg\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$	9.22 107n
22)	$\lg\operatorname{tg}\frac{A+B_2}{2}$	1.16 434
28)	Σ	0.38 541n

27)	Σ	9.21 060n
23)	$\lg\operatorname{tg}\frac{A-B_1}{2}$	8.83 565n
21)	$\lg\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$	0.37 495
25)	$\lg\operatorname{tg}\frac{A-B_2}{2}$	0.01 046n
29)	Σ	0.38 541n

Вычисление угла C

38)	$\lg \operatorname{tg} \frac{C_1}{2}$	0.41 504	39)	$\lg \operatorname{tg} \frac{C_1}{2}$	0.41 504
30)	$\lg \operatorname{ctg} \frac{A-B_1}{2}$	1.16 434n	31)	$\lg \operatorname{ctg} \frac{A+B_1}{2}$	0.01 047
32)	$\lg \sin \frac{a-b}{2}$	9.21 515n	33)	$\lg \cos \frac{a-b}{2}$	9.99 407
34) comp.	$\lg \sin \frac{a+b}{2}$	0.03 555	35) comp.	$\lg \cos \frac{a+b}{2}$	0.41 050
36)	$\lg \operatorname{ctg} \frac{A-B_2}{2}$	9.98 953n	37)	$\lg \operatorname{ctg} \frac{A+B_2}{2}$	8.83 566
40)	$\lg \operatorname{tg} \frac{C_2}{2}$	9.24 023	41)	$\lg \operatorname{tg} \frac{C_2}{2}$	9.24 023

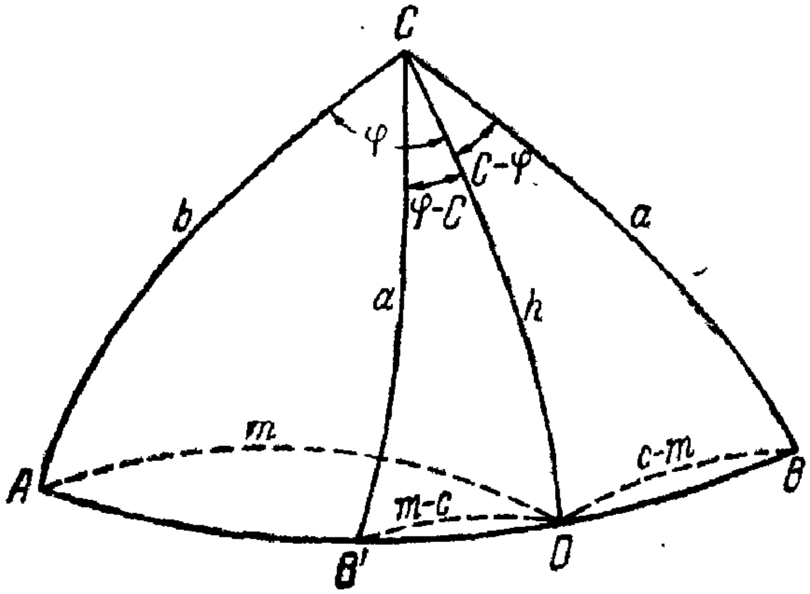
Вычисление стороны c

52)	$\lg \operatorname{tg} \frac{c_1}{2}$	0.23 063	53)	$\lg \operatorname{tg} \frac{c_1}{2}$	0.23 063
42)	$\lg \sin \frac{A+B_1}{2}$	9.84 419	43)	$\lg \cos \frac{A+B_1}{2}$	9.85 465
44) comp.	$\lg \sin \frac{A-B_1}{2}$	1.16 536n	45) comp.	$\lg \cos \frac{A-B_1}{2}$	0.00 102
46)	$\lg \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}$	9.22 108n	47)	$\lg \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}$	0.37 496
48)	$\lg \sin \frac{A+B_2}{2}$	9.99 898	49)	$\lg \cos \frac{A+B_2}{2}$	8.83 464
50) comp.	$\lg \sin \frac{A-B_2}{2}$	0.14 535n	51) comp.	$\lg \cos \frac{A-B_2}{2}$	0.15 581
54)	$\lg \operatorname{tg} \frac{c_2}{2}$	9.36 541	55)	$\lg \operatorname{tg} \frac{c_2}{2}$	9.36 541

56) $\frac{C_1}{2}$	$68°57'56''$	60) $\frac{c_1}{2}$	$59°32'39''$
57) $\frac{C_2}{2}$	$9°51'48''.5$	61) $\frac{c_2}{2}$	$13°3'34''$
58) C_1	$137°55'52''$	62) c_1	$119°5'18''$
59) C_2	$19°43'37''$	63) c_2	$26°7'8''$

II. Второй метод решения задачи

Решим эту же задачу при помощи разложения данного сферического треугольника на два прямоугольных сферических треугольника (черт. 29). Опустим из вершины C треугольника высоту CD на его основание AB или AB_1. Обозначим угол между стороной b и высотой через φ; тогда



Черт. 29.

в зависимости, с каким из двух треугольников (ACB или ACB_1) будем иметь дело, угол между этой высотой и другой стороной a будет иметь величину или $C-\varphi$, или $\varphi-C$. Отрезок стороны AB треугольника от вершины A до подошвы высоты обозначим через m; тогда отрезок от вершины B или B_1 до подошвы высоты будет обозначаться или $c-m$, или $m-c$. Высоту треугольника обозначим через h.

Вспомогательные величины m, φ и h определяются следующими формулами, взятыми из соответствующих прямоугольных треугольников:

$$1)\ \operatorname{tg} m = \cos A \operatorname{tg} b,$$

$$2)\ \sin h = \sin A \sin b,$$

$$3)\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos b}.$$

Правильность вычислений m, h и φ можно проверить формулами: $\cos b = \cos m \cos h$ и $\sin a \sin \varphi = \sin A \sin m$.

После определения величин m, h и φ искомые элементы треугольника определяются по формулам:

4) $\sin B = \frac{\sin h}{\sin a}$, 5) $\cos(C-\varphi) = \frac{\operatorname{tg} h}{\operatorname{tg} a}$, 6) $\cos(c-m) = \frac{\cos a}{\cos h}$.

Контрольной формулой вычисления B, C и c может служить соотношение:

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B.$$

Схема вычислений

Данные прежние: $a = 57°41'13''$
$b = 76°34'42''$
$A = 40°23'28''$

Вычисление m

1)	$\lg\cos A$	9.88 175
4)	$\lg\operatorname{tg} b$	0.62 227
8)	$\lg\operatorname{tg} m$	0.50 402
9)	m	72°36'13"

Вычисление h

2)	$\lg\sin A$	9.81 158
5)	$\lg\sin b$	9.98 797
11)	$\lg\sin h$	9.79 955
12)	h	39°4'20"

Контроль вычисления h и m

6)	$\lg\cos b$	9.36 570
10)	$\lg\cos m$	9.47 564
13)	$\lg\cos h$	9.89 006
14)	$\lg\cos b$	9.36 570

Вычисление φ

3)	$\lg\operatorname{ctg} A$	0.07 018
7)	comp. $\lg\cos b$	0.63 430
15)	$\lg\operatorname{tg}\varphi$	0.70 448
16)	φ	78°49'45"

Контроль вычисления φ

18) $\sin h$	9.79 955		19) $\sin A$	9.81 158
17) $\sin\varphi$	9.99 169		20) $\sin m$	9.97 966
21) Σ	9.79 124		22) Σ	9.79 124

Вычисление B

23)	$\lg\sin h$	9.79 955
26)	comp. $\lg\sin a$	0.07 307
29)	$\lg\sin B$	9.87 262
30)	B_1	48°13'40"
31)	B_2	131°46'20"

Вычисление C

24)	$\lg\operatorname{tg} h$	9.90 949
27)	comp. $\lg\operatorname{tg} a$	0.80 106
32)	$\lg\cos(C-\varphi)$	9.71 055
33)	$C-\varphi$	59°6'8"
34)	$C_1 = \varphi + (C-\varphi)$	137°55'52"
35)	$C_2 = \varphi + (C-\varphi)$	19°43'37"

Вычисление c

28)	$\lg \cos a$	9.72 798
25)	comp. $\lg \cos h$	0.10 995
6)	$\lg \cos (c - m)$	9.83 793
37)	$c - m$	46°29′5″
38)	c_1	119°5′18″
39)	c_2	26°7′8″

Контроль вычислений B, C и c

44)	Σ	9.81 406	45)	Σ	9.51 629
40)	$\lg \sin b$	9.98 797	41)	$\lg \sin b$	9.98 797
42)	$\lg \sin C_1$	9.82 609	43)	$\lg \sin C_2$	9.52 832
46)	$\lg \sin c_1$	9.94 145	47)	$\lg \sin c_2$	9.64 367
48)	$\lg \sin B_1$	9.87 262	49)	$\lg \sin B_2$	9.87 262
50)	Σ	9.81 407	51)	Σ	9.51 629

§ 52. Решение сферического треугольника по двум углам и стороне, лежащей против одного из них.

Дано: A, B, a, Найти: C, b, c.

Задачу можно решить тремя методами: I) посредством полярного треугольника, II) методом непосредственного вычисления при помощи аналогий Непера и III) посредством разложения данного сферического треугольника на два прямоугольных.

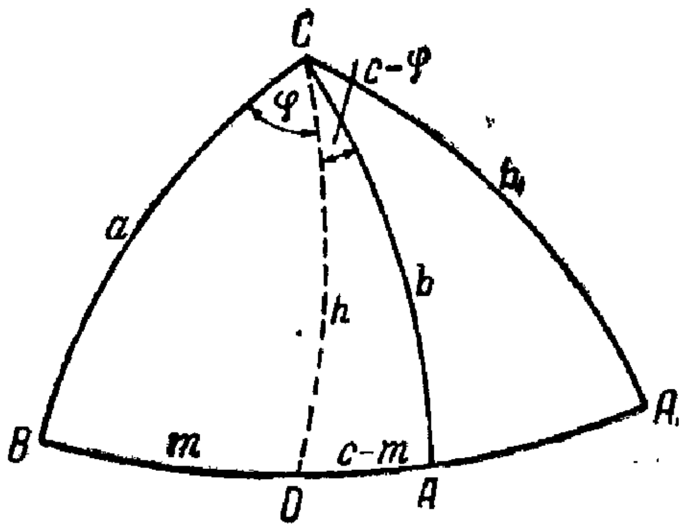
I. Первый метод решения

Построим для данного сферического треугольника полярный. Если в данном треугольнике даны элементы A, B, a, то в полярном треугольнике будут известны: $a_1 = 180° - A$, $b_1 = 180° - B$, $A_1 = 180° - a$, т. е. задача будет по отношению полярного треугольника сведена к предыдущему случаю.

Решая полярный треугольник по схемам, разработанным в предыдущем параграфе, получим в общем случае по два значения для B_1, C_1, c_1; в соответствии с этим будем иметь и по два значения для элементов основного треугольника $C = 180° - c_1$, $c = 180° - C_1$, $b = 180° - B_1$.

II. Второй метод решения

Сторона b определяется из формулы: $\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}$; если $\lg \sin b < 0$, то b вполне определяется и имеет значения: одно меньше 90°, другое больше 90°. Для того чтобы убедиться, подходят ли эти значения b для вычисляемого треугольника, следует рассмотреть разности $A - B$ и $a - b$, они должны иметь одинаковые знаки. В соответствии с этим для b могут быть приняты два значения, одно значение и ни одного значения. В зависимости от этого и элементы C и c могут иметь по два значения. Что задача может иметь два решения, объясняется и графически.



Черт. 30.

Построив данный угол B (черт. 30) и отложив от его вершины сторону a, получим вершину C. Получив вычислением два значения для b, опишем радиусами, равными им, окружности, которые в пересечении с другой стороной угла B дадут точки A и A_1. Итак, двум решениям задачи соответствуют два сферических треугольника ABC и A_1BC.

Прежде всего определяем по формуле синусов b:

$$\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}.$$

Правильность вычисления проверяется формулой:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}.$$

Затем, угол C и сторона c, как и в предыдущем случае, определяются по аналогиям Непера:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A-B}{2}\,\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\,\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\,\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.$$

Гарантией правильности вычислений C и c служит получение для каждого из этих элементов по два одинаковых значения, вычисленных по двум различным формулам.

Схема вычислений

Дано: $A=60°57'33''$
$B=72°40'32''$
$a=57°17'28''$

1)	$\lg\sin B$	9.97 984	10)	$\frac{A-B}{2}$	$-5°51'29''.5$
2)	$\lg\sin a$	9.92 502	11)	$a+b_1$	$124°2'15''$
3)	comp. $\lg\sin A$	0.05 835	12)	$a-b_1$	$-9°27'19''$
4)	$\lg\sin b$	9.96 321	13)	$\frac{a+b_1}{2}$	$2°1'7''.5$
5)	b_1	$66°44'47''$	14)	$\frac{a-b_1}{2}$	$-4°43'39''.5$
6)	b_2	$113°15'13''$	15)	$a+b_2$	$170°32'41''$
7)	$A+B$	$133°38'5''$	16)	$a-b_2$	$-55°57'45''$
8)	$A-B$	$-11°32'59''$	17)	$\frac{a+b_2}{2}$	$85°16'20''.5$
9)	$\frac{A+B}{2}$	$66°49'2''.5$	18)	$\frac{a-b_2}{2}$	$-27°58'52''.5$

Контроль вычислений

19) $\lg \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$	0.36 831	21) $\lg \operatorname{tg} \frac{a+b_1}{2}$	0.27 467
20) $\lg \operatorname{tg} \frac{a-b_1}{2}$	8.91 752	22) $\lg \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}$	9.01 116
23) Σ	9.28 583	24) Σ	9.28 583
43) $\lg \operatorname{tg} \frac{C_2}{2}$	0.66 167	44) $\lg \operatorname{tg} \frac{C_2}{2}$	0.66 166
25) comp. $\lg \cos \frac{a+b_2}{2}$	1.08 397	26) comp. $\lg \sin \frac{a+b_2}{2}$	0.00 148
28) $\lg \cos \frac{a-b_2}{2}$	9.94 601	29) $\lg \sin \frac{a-b_2}{2}$	9.67 134*n*
31) $\lg \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2}$	9.63 169	34) $\lg \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2}$	0.98 884*n*
37) $\lg \cos \frac{a-b_1}{2}$	9.99 852	38) $\lg \sin \frac{a-b_1}{2}$	8.91 603*n*
40) comp. $\lg \cos \frac{a+b_1}{2}$	0.32 866	41) comp. $\lg \sin \frac{a+b_1}{2}$	0.05 399
45) $\lg \operatorname{tg} \frac{C_1}{2}$	9.95 886	46) $\lg \operatorname{tg} \frac{C_1}{2}$	9.95 886
47) $\lg \operatorname{tg} \frac{c_2}{2}$	0.67 989	48) $\lg \operatorname{tg} \frac{c_2}{2}$	0.67 989
27) $\lg \operatorname{tg} \frac{a+b_2}{2}$	1.08 249	30) $\lg \operatorname{tg} \frac{a-b_2}{2}$	9.72 533*n*
32) $\lg \cos \frac{A+B}{2}$	9.59 513	33) $\lg \sin \frac{A+B}{2}$	9.96 344
35) comp. $\lg \cos \frac{A-B}{2}$	0.00 227	36) comp. $\lg \sin \frac{A-B}{2}$	0.99 112*n*
42) $\lg \operatorname{tg} \frac{a+b_1}{2}$	0.27 467	39) $\lg \operatorname{tg} \frac{a-b_1}{2}$	8.91 751*n*
49) $\lg \operatorname{tg} \frac{c_1}{2}$	9.87 207	50) $\lg \operatorname{tg} \frac{c_1}{2}$	9.87 207

$\frac{C_1}{2}$	42°17′25″	$\frac{C_2}{2}$	77°42′20″	$\frac{c_1}{2}$	36°40′50″	$\frac{c_2}{2}$	78°11′45″
C_1	84°34′50″	C_2	155°24′40″	c_1	73°21′40″	c_2	156°23′30″

III. Третий метод решения

Опустим из вершины сферического треугольника C (черт. 30) высоту и введем обозначения, указанные на чертеже. Вспомогательные величины φ, m и h определяются формулами, полученными из прямоугольного треугольника BDC:

$$1)\ \operatorname{tg} m = \operatorname{tg} a \cos B, \quad 2)\ \sin h = \sin a \sin B,$$

$$3)\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg} B}{\cos a}.$$

Искомые величины C, a, b определяются формулами, полученными из прямоугольного сферического треугольника:

$$4)\ \sin(C-\varphi) = \frac{\cos A}{\cos h} \quad 5)\ \sin b = \frac{\sin h}{\sin A},$$

$$6)\ \sin(c-m) = \operatorname{ctg} A \operatorname{tg} h.$$

Схема вычислений

Данные прежние: $A = 60°57'33''$
$B = 72°40'32''$
$a = 57°17'28''$

Вычисление m		Вычисление h		Контроль вычисления m и h	
1) $\lg\operatorname{tg} a$	0.19 233	3) $\lg\sin a$	9.92 502	9) $\lg\cos a$	9.73 269
2) $\lg\cos B$	9.47 390	4) $\lg\sin B$	9.97 984	10) $\lg\cos h$	9.77 498
				11) $\lg\cos m$	9 95 771
5) $\lg\operatorname{tg} m$	9.66 623	6) $\lg\sin h$	9.90 486		
7) m	24°52'35''	8) h	53°26'31''	12) $\lg\cos a$	9.73.269

Вычисление φ		Контроль вычисления φ			
13) $\lg\operatorname{ctg} B$	9.49 406	17) $\lg\sin m$	9.62 393	20) $\lg\sin h$	9.70 485
24) comp. $\lg\cos a$	0.26 731	18) $\lg\sin b$	9.97 984	21) $\lg\sin\varphi$	9.69 892
15) $\lg\operatorname{tg}\varphi$	9.76 137	19) Σ	9.60 377	22) Σ	9.60 377
16) φ	29°59'46''				

Вычисление b

23)	$\lg \sin h$	9.90 485
24)	comp. $\lg \sin A$	0.05 835
25)	$\lg \sin b$	9.96 320
26)	b_1	66°44′47″
27)	b_2	113°15′13″

Вычисление c

28)	$\lg \operatorname{tg} h$	0.12 987
29)	$\lg \operatorname{ctg} A$	9.74 448
30)	$\lg \sin (c-m)$	9.87 435
31)	$(c-m)_1$	48°29′5″
32)	$(c-m)_2$	131°30′55″

33) $c_1 = m + (c-m)_1 = 73°21'40''$
34) $c_2 = m + (c-m)_2 = 156°23'30''$

Вычисление C

35)	$\lg \cos A$	9.68 613
36)	comp. $\lg \cos h$	0.22 502
37)	$\lg \sin (C-\varphi)$	9.91 115
38)	$(C-\varphi)_1$	54°35′6″
39)	$(C-\varphi)_2$	125°24′54″

40) $C_1 = \varphi + (C-\varphi)_1 = 84°34'52''$
41) $C_2 = \varphi + (C-\varphi)_2 = 155°24'40''$

Контроль вычислений b, c, C.

42)	$\lg \sin b$	9.96 320	45)	$\lg \sin c$	9.98 142
43)	$\lg \sin C$	9.99 806	46)	$\lg \sin B$	9.97 984
44)	Σ	9.96 126	47)	Σ	9.96 126

§ 53. Общее заключение о решении сферических треугольников. Искомые элементы сферического треугольника определяются через различные тригонометрические функции.

а) Когда искомый элемент определяется через синус, то решение возможно только тогда, когда этот синус не превышает по абсолютной величине единицу. В этом случае решений бывает два, так как положительному синусу отвечают две величины: одна меньшая 90°, а другая, являющаяся дополнением этой величины до 180°.

б) Если искомый элемент определяется по косинусу, то для возможности решения необходимо, чтобы этот косинус находился в пределах от $+1$ до -1. В случае возможности решения оно будет единственным, так как положительному и отрицательному косинусу в первой и во второй четверти соответствуют по одному вполне определенному аргументу.

в) Когда неизвестный элемент определяется тангенсом или котангенсом, то решение всегда возможно, так как эти функции принимают значения от $+\infty$ до $-\infty$. Вместе с тем, в этом случае решение будет только одно, так как при отрицательном или положительном значении тангенса и котангенса последним соответствует только по одному аргументу.

Прежде чем приступить к вычислению треугольника, необходимо проверить, удовлетворяют ли данные величины необходимым условиям существования треугольника. По мере же получения искомых величин необходимо каждый раз убеждаться в том, что эти полученные величины вместе с данными удовлетворяют всем свойствам сферического треугольника. Те из полученных решений, которые не будут выполнять свойства сферического треугольника, должны быть отброшены.

Напомним условия, необходимые для существования всякого сферического треугольника.

1) Сумма углов сферического треугольника должна быть больше 180°.

2) Сумма двух углов без третьего должна быть меньше 180°.

3) Если сумма двух углов больше, равна, меньше 180°, то и сумма двух противоположных им сторон должна быть больше, равна, меньше 180°.

4) Сумма трех сторон треугольника меньше 360°.

5) Сумма двух сторон должна быть больше третьей.

6) Если разность двух сторон больше, равна, меньше 0, то и разность двух противоположных им углов больше, равна, меньше 0.

Может случиться, что по данной формуле получим два решения, но ни одно из них не будет пригодно для искомого треугольника, т. е. в данном случае задача будет невозможна. Рассмотрим, например, такую задачу: решить сферический треугольник по двум сторонам $a = 49°$, $b = 81°$ и углу $A = 151°$. Находим угол B по формуле:

$$\sin B = \sin A \frac{\sin b}{\sin a}.$$

$\lg \sin b$	9.99 462
comp. $\lg \sin a$	0.12 222
$\lg \sin A$	9.68 557
$\lg \sin B$	9.80 241

Ввиду того, что $\lg \sin B < 0$, решение возможно, и для B получаем два значения: $B_1 = 39°23'$ и $B_2 = 140°47'$. Но ни одно решение непригодно. По заданию мы имеем, что $a+b<180°$, а поэтому необходимо должны требовать, чтобы $A+B<180°$. Полученные значения для B_1 и B_2 этому неравенству не удовлетворяют.

54. Вопросы и упражнения.

1. Перечислите все различные случаи решения косоугольных треугольников.

2. Напишите для каждого случая формулы, необходимые для определения искомых элементов треугольника.

3. В чем заключается метод решения сферических треугольников посредством полярных треугольников? Перечислите случаи решения сферических треугольников, к которым этот метод применим.

4. В чем заключается сущность метода решения треугольников посредством введения вспомогательного угла? Поясните этот метод на примере. В чем заключается геометрическое значение вводимых в формулу при этом методе вспомогательных элементов?

5. Составьте схемы непосредственного вычисления искомых элементов сферического треугольника для каждого случая его решения.

6. Исследуйте каждый случай решения в направлении определения условий, возможных для вычисления значений искомых величии, количества их и пригодности для решения задачи.

Решите сферический треугольник по следующим данным:

	Данные			Ответы		
	a	b	c	A	B	C
7.	5°22′ 1″	56° 15′ 42″	60°22′ 25″	4° 3′ 17″	38°57′ 12″	138° 54′ 54″
8.	17°35′ 7″	41° 44′ 18″	56°52′ 23″	16° 32′ 20″	41°32′ 39″	127° 54′ 6″
9.	35°30′ 23″	38° 57′ 12″	56°15′ 42″	43° 2′ 6″	47°37′ 21″	102° 16′ 42″
10.	50° 2′ 53″	58° 40′ 13″	74°53′ 17″	52° 5′ 54″	61°33′ 4″	9[illegible]° 25′ 2″
	a	b	C	A	B	c
11.	15°38′ 7″	16° 6′ 22″	80° 2′ 18″	50° 2′ 53″	52° 5′ 54″	20° 15′ 35″
12.	22°35′ 52″	40° 9′ 20″	129°57′ 7″	20°35′ 37″	36°10′ 38″	56° 52′ 23″
13.	40° 9′ 20″	56° 52′ 23″	115°50′ 19″	36°10′ 38″	50° 2′ 53″	79° 29′ 44″
14.	4° 6′ 43″	50° 2′ 53″	118°26′ 56″	4°34′ 58″	58°40′ 13″	52° 5′ 54″
	a	b	A	B	C	c
15.	6°39′ 54″	36° 10′ 38″	8°40′ 9″	50° 2′ 53″	123° 7′ 37″	40° 9′ 20″
16.	29° 6′ 11″	56° 15′ 42″	21°34′ 29″	38°57′ 12″	132°22′ 39″	77° 43′ 18″
17.	40° 0′ 10″	50° 10′ 30″	121°36′ 20″	42°15′ 14″	34°15′ 3″	40° 0′ 10″
18.	52° 5′ 54″	66° 6′ 4″	56°52′ 23″	56°52′ 23″	76° 0′ 32″	68° 12′ 58″

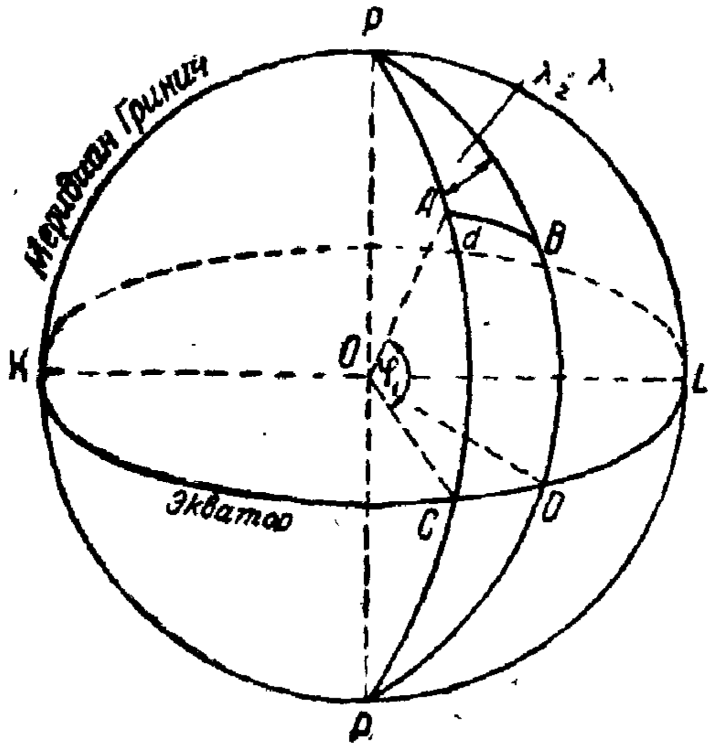
19. Определить кратчайшее расстояние между двумя точками A и B земной поверхности, зная их широту и долготу.

Даны широты двух точек: $\varphi_1 = 29°9'12''$, $\varphi_2 = 47°51'24''$.

Даны долготы этих же точек: $\lambda_1 = 6°33'48''$, $\lambda_2 = 52°0'18''$.

Примем земную поверхность за шаровую с радиусом, равным 6 367 *км*.

Пусть A и B будут две точки на сферической поверхности, кратчайшее расстояние между которыми надо определить (черт. 31).



Черт. 31.

Задача сводится к определению длины большого круга между точками A и B.

На чертеже PP_1 ось земного шара, KCL — экватор, PKL — меридиан Гринич, от которого отсчитываются долготы. Долгота точки A будет измеряться двугранным углом между меридианом Гринич и меридианом, проходящим через данную точку. Если долгота точки $A = \lambda_1$, а точки $B = \lambda_2$, то в сферическом треугольнике APB угол при вершине P будет равен: $\lambda_2 - \lambda_1$.

Широта точки A представляет угол, образованный радиусом AO с плоскостью экватора; этот угол измеряется по меридиану дугою CA. Широта точки B измеряется дугой меридиана DB. Если широта точки $A = \varphi_1$, а широта точки $B = \varphi_2$, то в сферическом треугольнике APB сторона $PA = 90° - \varphi_1$, сторона $PB = 90° - \varphi_2$

Обозначая искомое расстояние через d, определяем его при помощи формулы Альбатегиия:

$$\cos d = \cos(90° - \varphi_1)\cos(90° - \varphi_2) + $$
$$+ \sin(90° - \varphi_1)\sin(90° - \varphi_2)\cos(\lambda_2 - \lambda_1),$$
$$\cos d = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1). \qquad (53)$$

С помощью введения вспомогательного угла придадим этой формуле логарифмический вид:

$$\cos d = \sin\varphi_2 [\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1 \operatorname{ctg}\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)].$$

Пусть $\operatorname{ctg}\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) = \operatorname{tg}\Theta;$ (I)

тогда получим:

$$\cos d = \sin\varphi_2(\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1 \operatorname{tg}\Theta) = \frac{\sin\varphi_2 \sin(\varphi_1 + \Theta)}{\cos\Theta}. \qquad (II)$$

Формул (I) и (II) достаточно, чтобы задачу решить.. d будет выражено в угловых единицах. Если необходимо определить длину расстояния в частях радиуса, то пользуются формулой:

$$x = R \cdot d'' \sin 1'', \quad \text{где } \lg \sin 1'' = 4.68\,557 - 10.$$

1)	$\lambda_2 - \lambda_1$	45°26′30″
2)	$\lg\cos(\lambda_2 - \lambda_1)$	9.84 611
3)	$\lg \operatorname{ctg} \varphi_2$	9.95 662
5)	$\lg \operatorname{tg} \theta$	9.84 611
6)	θ	32°24′46″

7)	$\varphi_1 + \theta$	57°34′8″
4)	$\lg \sin \varphi_2$	9.87 009
8)	$\lg \sin(\varphi_1 + \theta)$	9.92 636
9)	$\text{comp.} \lg \cos \theta$	0.07 355
10)	$\lg \cos d$	9.87 000
11)	d	42°9′25″
12)	d''	151765″

13)	$\lg d''$	5.18 117
14)	$\lg R$	3.80 396
15)	$\lg \sin 1''$	4.68 557 — 10
16)	$\lg x$	3.67 067
17)	x	4 678.1 *км*

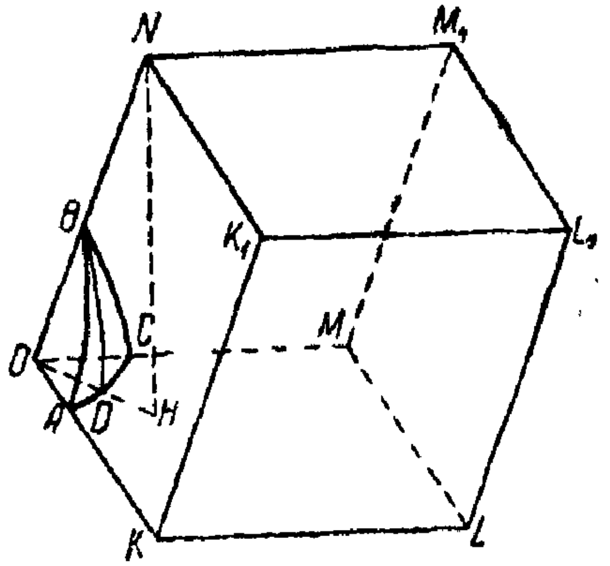
20. Найти кратчайшее расстояние от Берлина (Новая обсерватория: $\lambda = 13°23'44''$, $\varphi = 52°30'17''$) до Парижа (Национальная обсерватория: $\lambda = 2°20'15''$, $\varphi = 48°50'11''$).

Отв. 878.3 *км.*

21. Определить объем наклонного параллелепипеда в функции трех смежных ребер и углов, образуемых ими.

Положим, что ребро $OM = m$, $ON = n$ и $OK = k$ (черт. 32). Пусть вершина O будет центром шаровой поверхности радиуса, равного единице, тогда ребра OM, ON и OK в пересечении со сферой дадут вершины сферического треугольника ABC, сторонами которого будут измеряться углы, образованные попарно взятыми ребрами.

Объем параллелепипеда V равняется площади $OMLK$, умноженной на высоту NH.



Черт. 32.

Пл. $OMLK = OM \cdot OK \cdot \sin MOK = mk \sin b$.

Высота $NH = ON \sin NOH = n \sin BD$, где BD есть высота сферического треугольника; $\sin BD = \sin BC \sin BCD = \sin a \sin C$. Поэтому $MH = n \sin a \sin C$. Откуда

$$V = mnk \sin a \sin b \sin C. \qquad \text{(a)}$$

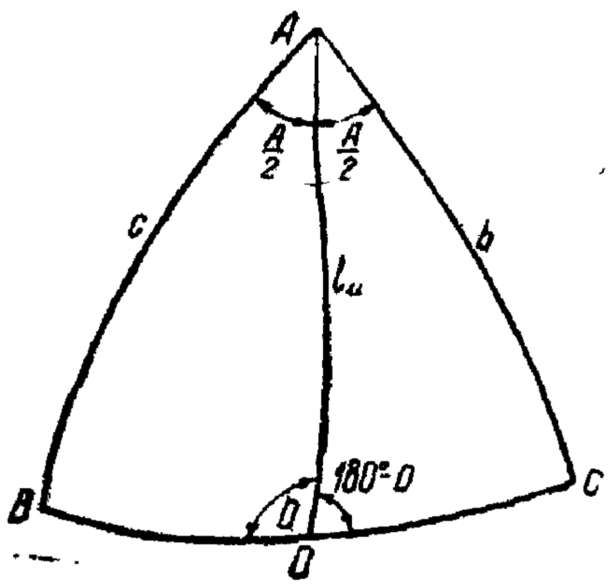
Вместо $\sin C$ в эту формулу подставим его значение, выраженное в функции сторон:

$$\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}} =$$

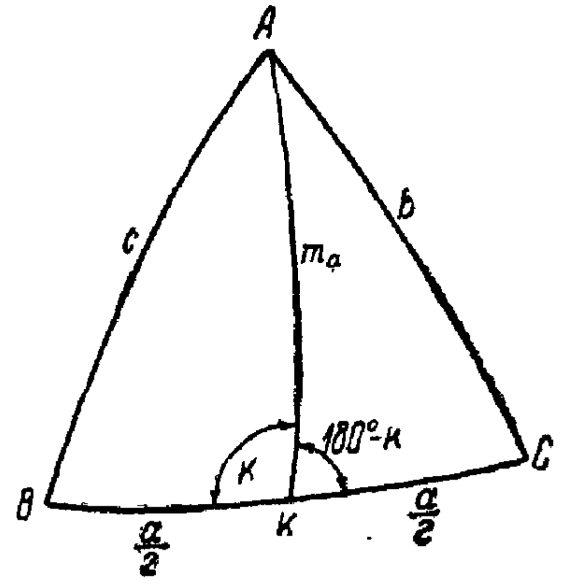
$$= \frac{2\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin a\sin b}.$$

Подставляя в формулу (a) вместо $\sin C$ найденное для него значение, имеем окончательно:

$$V = 2mnk\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}. \qquad (54)$$



Черт. 33.



Черт. 34.

22. Вывести формулу биссектрисы угла сферического треугольника.

Биссектрисой угла сферического треугольника называется дуга большого круга, проходящая через вершину угла и делящая его пополам (черт. 33).

На чертеже AD биссектриса угла.

$$\textit{Отв.}\ \operatorname{ctg} l_a = \frac{\sin(b+c)}{2\cos\frac{A}{2}\sin b\sin c}. \qquad (55)$$

23. Вывести формулу медианы сферического треугольника.

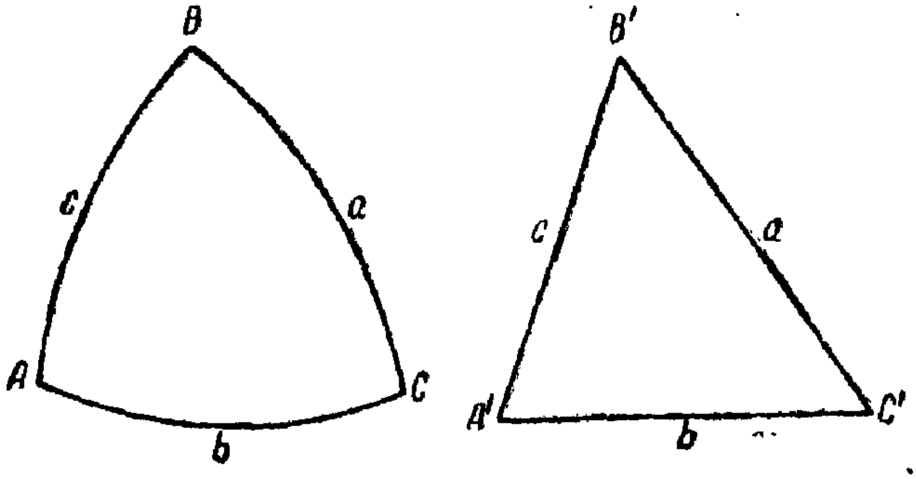
Медианой сферического треугольника называется отрезок дуги большого круга, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (черт. 34).

На чертеже m_a — медиана сферического треугольника.

$$\textit{Отв.}\ \cos m_a = \frac{\cos b+\cos c}{2\cos\frac{a}{2}}. \qquad (56)$$

VII. ВЫЧИСЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА, СТОРОНЫ КОТОРОГО ВЕСЬМА МАЛЫ ПО СРАВНЕНИЮ С РАДИУСОМ СФЕРЫ

§ 55. Теорема Лежандра. Сферический треугольник с малыми относительно радиуса шара сторонами можно с достаточным приближением вычислять как плоский, имеющий по величине те же стороны, а углы, равные углам сферического треугольника, каждый из которых уменьшен на треть эксцесса.



Черт. 35.

Обозначим через A, B и C углы и через a, b и c стороны сферического треугольника на шаре радиуса R; полупериметр $\frac{a+b+c}{2}$ обозначим через p. Если радиус шара примем равным единице, при каковом условии выводились все формулы сферической тригонометрии, то элементы нашего треугольника будут: A, B, C, $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, и полупериметр будет $\frac{p}{2R}$.

Построим по трем сторонам сферического треугольника ABC плоский треугольник $A'B'C'$ и посмотрим, насколько плоские углы A', B', C' отличаются от сферических A, B, C (черт. 35).

Для упрощения вывода формулы сначала предположим, что радиус сферы равен единице, а в конце наших вычислительных выкладок введем в формулу R, отличный от единицы. Метод вывода формулы возьмем такой, при котором возможно воспользоваться для непосредственного перехода от формул сферической тригонометрии к формулам плоской тригонометрии.

Напишем синус и косинус половинных углов для данного сферического и плоского треугольников:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}};\quad \cos\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}};\quad \sin\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Известно, что

$$\sin\frac{A-A'}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A'}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A'}{2}.$$

Подставим в последнюю формулу предыдущие значения синусов и косинусов половинных углов, тогда получим:

$$\sin\frac{A-A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)p(p-a)}{bc\sin b\sin c}}-$$

$$-\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)\sin p\sin(p-a)}{bc\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{bc\sin b\sin c}}\times$$

$$\times\left\{\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{(p-b)(p-c)}}-\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{p(p-a)}}\right\}.$$

Обозначая площадь плоского треугольника через

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

будем иметь:

$$\sin\frac{A-A'}{2}=\frac{S}{bc\sqrt{\frac{\sin b}{b}}\sqrt{\frac{\sin c}{c}}}\left\{\sqrt{\frac{\sin(p-b)}{p-b}\cdot\frac{\sin(p-c)}{p-c}}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{\sin p}{p}\cdot\frac{\sin(p-a)}{p-a}}\right\}. \qquad (a)$$

Вследствие того, что стороны треугольников малы по сравнению с радиусом шара, синусы их можно разложить в ряды и ограничиться небольшим числом членов разложения.

$\sin x$ разлагается в ряд следующим образом:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$$

Разделив обе части этого равенства на x и извлекая из них квадратный корень, имеем:

$$\sqrt{\frac{\sin x}{x}} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \ldots} = \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \ldots\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Воспользовавшись формулой разложения по биному Ньютона и отбрасывая в этом разложении величины четвертого порядка, получим:

$$\sqrt{\frac{\sin x}{x}} = \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2 \times 6} + \frac{x^4}{8 \times 6} - \ldots \approx 1 - \frac{x^2}{12}.$$

Примем это во внимание и подставим в уравнение, определяющее $\sin\frac{A-A'}{2}$, вместо $\sqrt{\frac{\sin b}{b}}$, $\sqrt{\frac{\sin c}{c}}$, $\sqrt{\frac{\sin p}{p}}$ и т. д. приближенные их значения:

$$\sin\frac{A-A'}{2} = \frac{S}{bc\left(1 - \frac{b^2}{12}\right)\left(1 - \frac{c^2}{12}\right)}\left\{\left[1 - \frac{(p-b)^2}{12}\right]\left[1 - \frac{(p-c)^2}{12}\right] - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{p^2}{12}\right)\left[1 - \frac{(p-a)^2}{12}\right]\right\},$$

$$\left(1 - \frac{b^2}{12}\right)\left(1 - \frac{c^2}{12}\right) = 1 - \frac{b^2}{12} - \frac{c^2}{12} + \frac{b^2c^2}{144},$$

$$\left[1 - \frac{(p-b)^2}{12}\right]\left[1 - \frac{(p-c)^2}{12}\right] =$$

$$= 1 - \frac{(p-b)^2}{12} - \frac{(p-c)^2}{12} + \frac{(p-b)^2(p-c)^2}{144}.$$

Подставляя полученные значения в предшествующую формулу и отбрасывая члены четвертого порядка, получим:

$$\sin\frac{A-A'}{2} = \frac{S}{bc}\left[1 - \frac{(p-b)^2}{12} - \frac{(p-c)^2}{12} - 1 + \frac{p^2}{12} + \frac{(p-a)^2}{12}\right]$$

или

$$\sin\frac{A-A'}{2}=\frac{S}{12bc}[p^2+(p-a)^2-(p-b)^2-(p-c)^2],$$

$$p^2-(p-b)^2-(p-c)^2+(p-a)^2=$$

$$=[p^2-(p-b)^2]+[(p-a)^2-(p-c)^2]=$$

$$=(2p-b)\,b+(2p-a-c)\,(c-a)=(a+c)\,b+b\,(c-a)=2bc.$$

Итак, имеем:

$$\sin\frac{A-A'}{2}=\frac{S2bc}{12bc};\quad \sin\frac{A-A'}{2}=\frac{S}{6}.$$

Заменяя по малости $\sin\frac{A-A'}{2}$ дугою и вводя теперь во вторую часть равенства радиус R, который раньше нами при выводе формулы был намеренно опущен для упрощения вывода:

$$\frac{A-A'}{2}\sin 1''=\frac{S}{6R^2}$$

или

$$A-A'=\frac{S}{3R^2\sin 1''};$$

точно так же получим:

$$B-B'=\frac{S}{3R^2\sin 1''},$$

$$C-C'=\frac{S}{3R^2\sin 1''}.$$

Сложив последние три равенства почленно, получим:

$$A+B+C-(A'+B'+C')=\frac{S}{R^2\sin 1''},$$

но

$$A+B+C=180^\circ+\mathfrak{E},\quad A'+B'+C'=180^\circ.$$

На основании этого, имеем:

$$\mathfrak{E}''=\frac{S}{R^2\sin 1''}. \tag{57}$$

Поэтому

$$A - A' = \frac{\mathscr{E}''}{3}, \quad A' = A - \frac{\mathscr{E}''}{3},$$

$$B - B' = \frac{\mathscr{E}''}{3}, \quad B' = B - \frac{\mathscr{E}''}{3},$$

$$C - C' = \frac{\mathscr{E}''}{3}, \quad C' = C - \frac{\mathscr{E}''}{3}.$$

Отсюда вытекает заключение, что если имеется сферический треугольник и плоский со сторонами сферического, то у последнего каждый угол будет меньше соответствующего угла сферического треугольника на одну треть избытка. Поэтому, вместо вычисления сферического треугольника с малыми относительно радиуса сферы сторонами, можно вычислять плоский треугольник, имеющий стороны по величине такие же, как и стороны сферического, а углы, равные углам сферического, уменьшенным на одну треть эксцесса. Конечно, при этом необходимо иметь в виду степень приближения полученных результатов. Заметим, что применение формулы Лежандра для треугольников со сторонами до 200 *км* на сфере земной поверхности дает точность вычисления углов до 0,01″.

Если сферический треугольник на земной поверхности имеет стороны, не превышающие по длине 7 *км*, то избыток его совершенно не принимается во внимание, так как его значение не превышает 0,01″.

§ 56. Применение теоремы Лежандра к различным случаям решения сферических треугольников.

1) Даны три стороны сферического треугольника: a, b c.

Вычислим углы A', B' и C' по формулам: $\operatorname{tg}\frac{A'}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ и площадь $S' = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; тогда избыток сферического треугольника $\mathscr{E}'' = \frac{1}{R^2 \sin 1''}$, после чего получаем углы A, B и C сферического треугольника по формулам:

$$A = A' + \frac{\mathscr{E}}{3}, \quad B = B' + \frac{\mathscr{E}}{3}, \quad C = C'' + \frac{\mathscr{E}}{3}.$$

2) Даны: сторона a и два прилежащих угла B и C.

Площадь плоского треугольника $A'B'C'$ будет вычисляться по формуле $S' = \frac{a^2 \sin B' \sin C'}{2 \sin (B' + C')}$. Ввиду того, что углы плоского треугольника B' и C' неизвестны, принимаем приближенно, что $S' = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}$, поэтому эксцесс в данном случае будет определяться формулой:

$$\mathfrak{E} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2R^2 \sin (B + C) \sin 1''}.$$

Зная эксцесс $\mathfrak{E}$, найдем угол:

$$A = (180^\circ - \mathfrak{E}) - (B + C).$$

Углы плоского треугольника будут определены: $A' = A - \frac{\mathfrak{E}}{3}$, $B' = B - \frac{\mathfrak{E}}{3}$.

Таким образом, задача сводится к решению плоского треугольника по двум углам A', B' и стороне a.

3) Даны две стороны a, b и угол, заключенный между ними, C.

Площадь плоского треугольника $S' = \frac{ab \sin C'}{2}$. Ввиду неизвестности угла C' берем площадь S' приближенно: $S = \frac{1}{2} ab \sin C$. Принимая во внимание, что $C' = C - \frac{S}{3R^2}$, мы видим, что это сделать можем, так как от замены $\sin C'$ через $\sin C$ происходит ошибка порядка R^{-2}. Поэтому $\mathfrak{E}$ вычисляем по формуле: $\mathfrak{E} = \frac{ab \sin C}{2R^2 \sin 1''}$, после чего определяем угол плоского треугольника $C' = C - \frac{\mathfrak{E}}{3}$. Плоский треугольник, имея стороны a, b и угол C', вполне определен, решая его, получим c, A' и B'; углы сферического треугольника A и B определяются по формулам: $A = A' + \frac{\mathfrak{E}}{3}$, $B = B' + \frac{\mathfrak{E}}{3}$.

4) Даны стороны a, b и угол A.

Для вычисления площади плоского треугольника $A'B'C'$ имеем формулу: $S' = \frac{1}{2} ab \sin C' = \frac{1}{2} ab \sin (A' + B')$; ставя в этой формуле $\sin (A + B)$ вместо $\sin (A' + B')$, делаем допустимую погрешность порядка $\frac{1}{R^2}$; получим $S' = \frac{1}{2} ab \sin(A+B)$. Для этой формулы угол B вычисляем по приближенной формуле: $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$, что считаем возможным потому, что угол B вычисляется здесь исключительно для определения эксцесса. $\mathscr{E}$ определяется по формуле: $\mathscr{E} = \frac{ab \sin(A+B)}{2R^2 \sin 1''}$, после чего получаем $A' = A - \frac{\mathscr{E}}{3}$ и тем сводим задачу к вычислению плоского треугольника $A'B'C'$ по элементам a, b, A'; находим сторону c и углы B' и C', затем углы сферического треугольника B и C.

5) Даны два угла A и B и сторона a.

Площадь плоского треугольника определяем по приближенной формуле:

$$S' = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{a^2 \sin B \sin(A+B)}{2 \sin A},$$

$$\mathscr{E}'' = \frac{a^2 \sin B \sin(A+B)}{2R^2 \sin A \sin 1''}.$$

Найдем: $A' = A - \frac{\mathscr{E}}{3}$, $B' = B - \frac{\mathscr{E}}{3}$ и задачу сведем к решению плоского треугольника по его элементам A', B' и a.

Схема вычисления сферического треугольника с малыми сторонами

Предположим, что сферический треугольник дан на поверхности земного сфероида его элементами: $a = 89\,245$ м, $b = 145\,248$ м и $C = 72°31'48''{,}1$, $\varphi_{ср} = 59°45'$.

Если сферический треугольник, как в данном случае, занимает небольшую часть поверхности сфероида, то ее можно принять за часть поверхности шара, радиус которого равен среднему геометрическому из радиусов кривизны главных сечений в средней точке рассматриваемой части поверхности сфероида. По исследованиям проф. Груннерта $R_{ср} = \sqrt{MN}$, где M есть радиус кривизны меридиана в точке с широтою, среднею из широт трех вершин треугольника, а N — радиус кривизны вертикала в той же точке. Формулу для вычисления эксцесса: $\mathscr{E} = \frac{ab \sin C}{2R^2 \sin 1''}$ для земного сфероида представим несколько иначе: обозначая $\frac{1}{\sin 1''} = \rho''$ и подставляя MN вместо R^2, будем иметь:

$$\mathscr{E}'' = \frac{\rho}{M} \frac{\rho}{N} \frac{1}{2\rho} ab \sin C.$$

Для $\frac{\rho}{M}$ и $\frac{\rho}{N}$ составлены таблицы по широте различными авторами; например, таблицы Шарнгорста для сфероида Бесселя, Витковского — для сфероида Кларка, Кремлякова — для сфероида Вальбека.

Обозначим $\frac{\rho}{M}\frac{\rho}{N}\frac{1}{2\rho}$ через k, получим: $\mathfrak{E} = k\,ab\sin C$.

Вследствие малой величины $\mathfrak{E}$ вычисление его производим при помощи четырехзначных логарифмических таблиц.

Из таблиц Шарнгорста для широты 58°45′ получаем:

1) $\lg\frac{\rho}{M}$	8.5695
2) $\lg\frac{\rho}{N}$	8.5087
3) $\lg\frac{1}{2\rho}$	4.3855
4) $\lg k$	1.4027

Вычисление углов плоского треугольника производим по формуле Мольвейде:

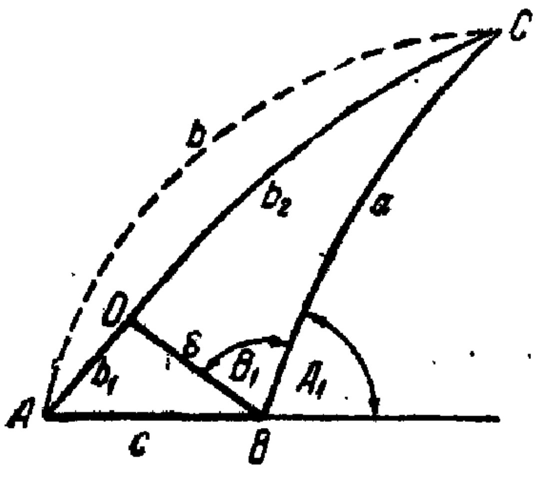
$$\operatorname{tg}\frac{A'-B'}{2} = \frac{(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C'}{2}}{a+b}.$$

5)	$\lg k$	1.4027
6)	$\lg a$	4.9506
7)	$\lg b$	5.1621
8)	$\lg\sin C$	9.9795
9)	$\lg\mathfrak{E}$	1.4949
10)	$\mathfrak{E}''$	3″.12
11)	$C' = C - \frac{\mathfrak{E}}{3}$	72°31′47″.06
12)	$\frac{C'}{2}$	36°15′53″.53
13)	$A' + B'$	107°28′12″.94
14)	$b - a$	56 003
15)	$b + a$	234 493

16)	$\lg(b-a)$	4.7482113
17)	$\lg\operatorname{ctg}\frac{C'}{2}$	0.1345232
18)	$\operatorname{comp.}\lg(a+b)$	4.6 298 701
19)	$\lg\operatorname{tg}\frac{B'-A'}{2}$	9.5126046
20)	$\frac{B'-A'}{2}$	18°1′56″.35
21)	$\frac{B'+A'}{2}$	55°44′6″.47
22)	B'	74°46′2″.82
23)	A'	35°42′10″12
24)	C'	72°31′74″.06
25)	$A' + B' + C'$	180°
26)	$A = A' + \frac{\mathfrak{E}}{3}$	35°42′11″16
27)	$B = B' + \frac{\mathfrak{E}}{3}$	71°46′3″.86

§ 57. Элементарные сферические треугольники. Элементарными сферическими треугольниками называются такие, в которых элементы являются малыми величинами.

Такие треугольники встречаются двух типов: 1) треугольники, в которых все три стороны — величины малые; такие треугольники, как мы видели в предшествующем параграфе, решаются как плоские и 2) треугольники, в которых угол C и противолежащая ему сторона AB являются элементами малыми. Такие треугольники решать как плоские, конечно, нельзя, однако к решению их могут быть применены приближенные упрощенные формулы, сильно облегчающие вычисления и дающие достаточно точный результат.



Черт. 36.

Условимся малый угол и малую сторону треугольника считать величинами первого порядка.

Разобьем данный сферический треугольник на два элементарных прямоугольных треугольника, опуская из вершины B на сторону AC перпендикуляр BD; получим два треугольника: ABD со сторонами c, b_1 и σ и треугольник BDC со сторонами σ, b_2 и a (черт. 36).

Треугольник ABD, имеющий три стороны малые, решаем как плоский, употребляя следующие формулы:

$$AD = b_1 = c\cos A,$$

$$BD = \sigma = c\sin A,$$

$$\angle ABD = 90^\circ - A.$$

К решению же второго треугольника BDC применим следующие упрощенные формулы:

а) В элементарном прямоугольном треугольнике гипотенуза равна с точностью до членов первого порядка большому катету. Возьмем формулу прямоугольного треугольника:

$$\operatorname{tg} b_2 = \operatorname{tg} a \cos C.$$

Отнимая от обеих частей равенства и прибавляя к ним по $\operatorname{tg} a$, получим:

$$\operatorname{tg} b_2 - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} a (\cos C - 1),$$

$$\operatorname{tg} b_2 + \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} a (\cos C + 1).$$

Делим почленно эти равенства:

$$\frac{\operatorname{tg} b_2 - \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b_2 + \operatorname{tg} a} = \frac{\cos C - 1}{\cos C + 1},$$

$$\frac{\sin (b_2 - a)}{\sin (b_2 + a)} = \frac{-\sin^2 \frac{C}{2}}{\cos^2 \frac{C}{2}} = -\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}.$$

Так как угол C мал по заданию, то $\cos C$ близок к единице и катет b_2 мало отличается от гипотенузы a; поэтому можно $\sin (b_2 - a)$ заменить через $(b_2 - a)$ и $\sin (b_2 + a)$ — через $\sin 2a$; после такой замены получим:

$$b_2 - a = -\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \sin 2a.$$

Чтобы получить $b_2 - a$ в секундах дуги, правую часть равенства надо разделить на $\sin 1''$:

$$(b_2 - a)'' = \frac{-\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \sin 2a}{\sin 1''};$$

выражая $\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}$ через $\frac{C^2}{4} \sin^2 1''$, получим:

$$(a - b_2)'' = \frac{C^2}{4} \sin 1'' \sin 2a,$$

т. е. гипотенуза a равна катету b_2 с точностью до членов первого порядка.

б) Из того же элементарного треугольника DBC имеем:

$$\sin \sigma = \sin a \sin C.$$

Ввиду малости σ и C можно $\sin \sigma$ заменить через σ и $\sin C$ через C:

$$\sigma = C \sin a.$$

Заменяя a через величину катета b_2, получаем с той же точностью

$$\sigma = C \sin b_2.$$

Пользуясь выведенными формулами для двух элементарных прямоугольных сферических треугольников, получим легко формулы для решения элементарных сферических треугольников общего случая:

$$b - a = c \cos A,$$

$$\sigma = c \sin A = C \sin a = C \sin b_2.$$

Для вычисления избытка сферического треугольника получим следующую приближенную формулу:

$$\mathcal{E} = A + B + C - 180°.$$

Обозначая внешний угол треугольника ABC через A_1, имеем:

$$180° - B = A_1,$$

$$\mathcal{E} = C - (A_1 - A),$$

$$A_1 - A = 180° - B - A = 180° - (B_1 + 90 - A) - A = 90° - B_1,$$

откуда $\mathcal{E} = C - (90° - B)$; в этой формуле $90° - B_1$ заменим следующим образом:

$$\cos B_1 = \cos b_2 \sin C,$$

$$\sin (90° - B_1) = \cos b_2 \sin C.$$

Ввиду того, что, как показывает формула, B_1 отличается от $90°$ на малую величину порядка C_1, можно заменить синусы малых углов самими углами:

$$90° - B_1 = C \cos b_2.$$

Поэтому

$$\mathcal{E} = C - C \cos b_2 = C (1 - \cos b_2) = C (1 - \cos a) = 2C \sin^2 \frac{a}{2}. \qquad (58)$$

Заменяя C через $c \dfrac{\sin A}{\sin a}$, получим вторую приближенную формулу для вычисления избытка элементарного сферического треугольника:

$$\mathcal{E} = c \sin A \operatorname{tg} \frac{a}{2} = a \sin B \operatorname{tg} \frac{b}{2}. \qquad (59)$$

Заметим, что полученные формулы для вычисления избытка сферического треугольника ABC служат точными формулами для получения избытка треугольника BDC; отсюда следует заключение, что, пренебрегая в выведенных приближенных формулах эксцесса величинами второго порядка, мы пренебрегаем избытком элементарного сферического треугольника ABD.

Схема вычислений

Дано: $C = 4'$
$c = 3'$
$A = 40°$

Перпендикуляр BD.			Сторона a			Сторона b		
1)	$\lg c$	2.25 527	8)	$\lg BD$	2.06 334	2)	$\lg c$	2.25 527
4)	$\lg \sin A$	9.80 807	9)	$\lg C$	2.38 021	6)	$\lg \cos A$	9.88 425
7)	$\lg BD$	2.06 334	10)	$\lg \sin a$	9.68 313	12)	$\lg (b-a)$	2.13 952
						13)	$b-a$	137″. 2
	BD	115″7	11)	a	28°49′21″	14)	b	28°51′38″.9

Эксцесс $\mathcal{E}$		
15)	$\lg 2C$	2.68 124
16)	$2 \lg \sin \frac{a}{2}$	8.79 198
17)	$\lg \mathcal{E}''$	1.47 322

Контроль вычислений		
3)	$\lg c$	2.25 527
5)	$\lg \sin A$	9.80 807
18)	$\lg \operatorname{tg} \frac{b}{2}$	9.40 988
19)	$\lg \mathcal{E}''$	1.17 322

20) $\mathcal{E}'' = 29''7$

21) $B = 180° + \mathcal{E} - (A + C) = 139°56'29''.7$

VIII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 58. Дифференциальные формулы сферической тригонометрии. Эти формулы рассматривают зависимость между малыми изменениями величин различных элементов сферических треугольников. Эти формулы достаточно просто выводятся путем дифференцирования основных формул, выведенных для сферического треугольника.

а) Возьмем основную формулу сферической тригонометрии Альбатегния:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Продифференцировав обе части формулы, получим:

$$-\sin a\, da = -\sin b \cos c\, db - \sin c \cos b\, dc +$$
$$+ \cos b \sin c \cos A\, db + \cos c \sin b \cos A\, dc -$$
$$- \sin b \sin c \sin A\, dA = -(\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A)\, db -$$
$$-(\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A)\, dc - \sin b \sin c \sin A\, dA.$$

Зная, что

$$\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A = \sin a \cos C,$$

$$\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A = \sin a \cos B,$$

будем иметь:

$$\sin a\, da = \sin a \cos C\, db + \sin a \cos B\, dc + \sin b \sin c \sin A\, dA.$$

Разделим обе части полученного равенства на $\sin a$:

$$da = \cos C\, db + \cos B\, dc + \frac{\sin b \sin c \sin A}{\sin a}\, dA.$$

Заменяя в последнем равенстве $\frac{\sin A}{\sin a}$ через $\frac{\sin B}{\sin b}$, получаем окончательно;

$$da = \cos C\, db + \cos B\, dc - \sin c \sin B\, dA. \tag{60}$$

При помощи метода круговой перестановки букв напишем еще две дифференциальные формулы:

$$db = \cos A\, dc + \cos C\, da + \sin a \sin C\, dB,$$

$$dc = \cos B\, da + \cos A\, db + \sin b \sin A\, dC.$$

б) Возьмем основную формулу сферической тригонометрии $\cos A$:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

и продифференцируем ее:

$$-\sin A\, dA =$$
$$= \sin B \cos C\, dB + \sin C \cos B\, dC + \cos B \sin C \cos a\, dB +$$
$$+ \cos C \sin B \cos a\, dC - \sin a \sin B \sin C\, da =$$
$$= (\sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a)\, dB +$$
$$+ (\sin C \cos B + \cos C \sin B \cos a)\, dC - \sin a \sin B \sin C\, da.$$

Принимая во внимание, что

$$\sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a = \sin A \cos c,$$

$$\sin C \cos B + \cos C \sin B \cos a = \sin A \cos b,$$

получим:

$$-\sin A\, dA = \sin A \cos c\, dB + \sin A \cos b\, dC -$$
$$- \sin a \sin B \sin C\, da.$$

Разделив оба члена равенства на $-\sin A$, получим:

$$dA = \frac{\sin a \sin B \sin C}{\sin A} da - \cos c\, dB - \cos b\, dC.$$

Так как $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a}$, то получим окончательно:

$$\begin{aligned} dA &= \sin b \sin C\, da - \cos b\, dC - \cos c\, dB, \\ dB &= \sin c \sin A\, db - \cos c\, dA - \cos a\, dC, \\ dC &= \sin a \sin B\, dc - \cos a\, dB - \cos b\, dA. \end{aligned} \tag{61}$$

Формулы (61) можно получить переходом к полярному треугольнику из формул (60). При этом преобразовании только надо принять во внимание, что на основании зависимости между элементами взаимнополярных треугольников:

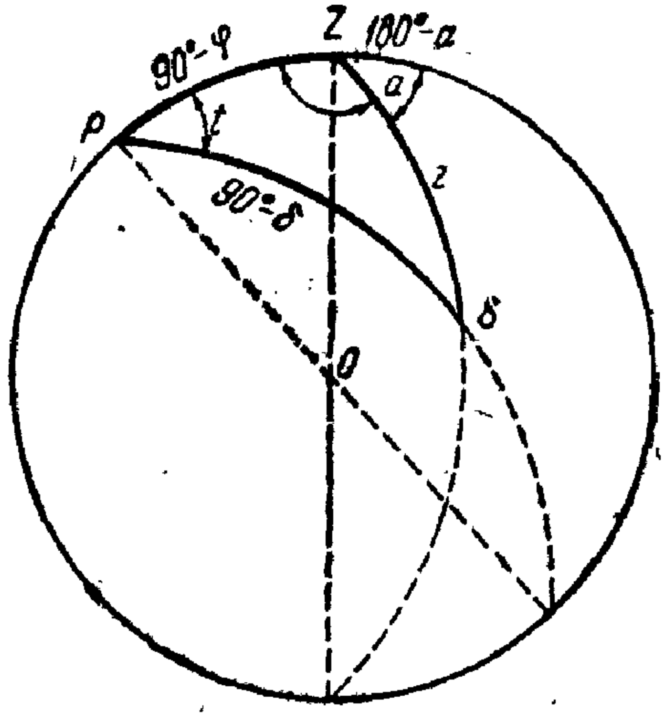
$$a = \pi - A_1, \quad A = \pi - a_1$$

и т. д.; положительному приращению элементов одного треугольника соответствует отрицательное приращение элементов полярного треугольника, и наоборот.

в) Для того чтобы получить зависимость между изменениями четырех элементов треугольника a, b, A и B, дифференцируем формулу:

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a,$$

$$\cos A \sin b\, dA + \cos b \sin A\, db = \cos B \sin a\, dB + \cos a \sin B\, da. \quad (62)$$



Черт. 37.

г) Часто встречается случай, когда две стороны в сферическом треугольнике остаются неизменными в то время, когда все остальные элементы треугольника взаимно могут изменяться.

Полагаем, например, что a и b являются величинами постоянными. Тогда из системы формул (60) получим частные случаи их:

$$\left.\begin{aligned} dc &= -\sin c \operatorname{tg} B\, dA, \\ dc &= \frac{-\sin a \sin C}{\cos A}\, dB = -\operatorname{tg} A \sin c\, dB, \\ dc &= \sin b \sin A\, dC = \sin a \sin B\, dC. \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

Применим только что выведенные формулы к определению зависимости между изменениями зенитного расстояния и часового угла светила (черт. 37). Для этого рассмотрим на небесном своде (который при астрономических вычислениях принимают за поверхность шара с бесконечно большим радиусом) сферический треугольник с вершинами: полюса P, зенита Z и светила σ. Углы этого треугольника будут: угол при полюсе t, часовой угол светила; при точке зенита угол будет равен дополнению азимута до 180°, т. е. $180°-a$: угол при точке σ называется параллактическим, обозначим его буквой q. Стороны, противоположные углам, будут: зенитное расстояние светила, полярное расстояние его, равное дополнению до 90° склонения светила δ, и, наконец, дополнение до 90° широты места φ. Таким образом, элементами сферического треугольника будут:

Углы: t, $180°-a$, q.

Стороны: z, $90°-\sigma$, $90°-\varphi$.

Из этих элементов две стороны $90°-\varphi$ и $90°-\sigma$ остаются неизменными при видимом суточном движении светил на небесной сфере, остальные элементы изменяются.

Поэтому в данном случае применим формулу:

$$dc = \sin a \sin B \sin C.$$

Эта формула в применении к рассматриваемому сферическому треугольнику напишется так:

$$dz = \sin(90° - \varphi) \sin a \, dt,$$

$$dz = \cos\varphi \sin a \, dt. \qquad (64)$$

Эта формула часто применяется в сферической астрономии.