1963 г. сентябрь — октябрь *т. XVIII, вып. 5(113)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А. Н. КОЛМОГОРОВА О СОХРАНЕНИИ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ПРИ МАЛОМ ИЗМЕНЕНИИ ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНА

В. И. Арнольд

СОДЕРЖАНИЕ

Одним из самых замечательных среди многочисленных математических достижений А. Н. Колмогорова является его работа 1954 г. по классической механике. Простая и новая идея, комбинация весьма классических и вполне современных методов, решение 200-летних проблем, ясная геометрическая картина и широкие горизонты — таковы достоинства этой работы. Недостатком же ее является то, что доказательства никогда не были полностью опубликованы.

В настоящей статье, написанной к 60-летнему юбилею А. Н. Колмогорова, предпринята попытка восполнить этот недостаток. Все основные идеи изложены в § 1; я надеюсь, что вдумчивый читатель сумеет восстановить по ним доказательства. Остальные параграфы написаны формально [1]): в § 2 даны формулировки теорем и лемм, в § 3 — доказательства, опирающиеся на технику § 4.

Предполагается, что читатель знаком с основами классической механики. Стоит отметить, однако, что рассматриваемые методы применимы не только к консервативным динамическим системам, но и к более общим системам дифференциальных уравнений (ср. [17], [14]).

§ 1. Введение

1.1. Интегрируемые и неинтегрируемые проблемы динамики. Мы будем рассматривать консервативные динамические системы с n степенями свободы,

[1]) Читателю должен помочь список обозначений, приведенный в конце § 4.

определяемые каноническими уравнениями движения

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad (p = (p_1, \ldots, p_n);\ q = (q_1, \ldots, q_n)) \tag{1}$$

с аналитической функцией Гамильтона $H(p, q)$. Классические методы динамики [1] позволяют исследовать лишь так называемые интегрируемые случаи.

Пример 1. Предположим, что фазовое пространство является прямым произведением n-мерного тора на область n-мерного евклидова пространства. Пусть $q \pmod{2\pi}$ — угловые координаты на торе, а p — в пространстве, и функция Гамильтона зависит только от p: $H = H(p)$. Уравнения Гамильтона (1) принимают вид

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{q} = \omega(p) \qquad \left(\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) = \frac{\partial H}{\partial p}\right)$$

и тотчас интегрируются. Каждый тор $p = \text{const}$ инвариантен; если частоты ω_i несоизмеримы (из $k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n = 0$ с целыми k_i следует $k_i = 0$), то движение называется *условно-периодическим* с n частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$; легко доказать, что траектория $p(t)$, $q(t)$ заполняет тор всюду плотно. Переменные p, q примера 1 называются *переменными действие — угол*.

К настоящему времени найдено довольно много интегрируемых задач. Решение всех таких задач с n степенями свободы основано на том, что существуют (и найдены) n однозначных первых интегралов в инволюции[1]).

Можно показать [2], что существование таких интегралов влечет за собой следующую картину поведения траекторий в $2n$-мерном фазовом пространстве p, q. Некоторое особое $(2n-1)$-мерное множество разбивает фазовое пространство на инвариантные области. Каждая из них расслоена на инвариантные n-мерные многообразия. Если область ограничена, то эти многообразия суть торы, несущие условно-периодические движения. В такой области можно ввести координаты действие — угол примера 1. Если n первых интегралов в инволюции уже найдены, то каноническое преобразование, вводящее переменные действие — угол, дается квадратурой.

Пример 2. Интегрируемые задачи: Задача двух тел. Задача о притяжении двумя неподвижными центрами. Движение свободной точки по геодезической на поверхности трехосного эллипсоида. Тяжелое симметричное твердое тело, закрепленное в точке на оси. Свободное твердое тело вне поля тяготения. Линейные колебания.

Неинтегрируемые[2]) задачи: Задача n тел, в том числе так называемая плоская ограниченная круговая задача трех тел. Движение свободной точки по геодезической на выпуклой поверхности. Тяжелое несимметричное твердое тело. Нелинейные колебания с $n > 1$ степенями свободы.

---

[1]) Функции $f(p, q)$ и $g(p, q)$ находятся в инволюции, если их скобка Пуассона $\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}\right)$ тождественно равна нулю.

[2]) Осторожнее сказать непроинтегрированные, так как доказательства неинтегрируемости сложны и проведены строго лишь в отдельных случаях (см. [1], [3]).

Нахождение интегрируемых случаев было в основном делом XIX века (Якоби, Лиувилль, Ковалевская и др.) Но с работами Пуанкаре стало ясно, что динамическая система общего вида неинтегрируема; интегралы не только неизвестны, но не существуют вовсе, так как траектории в целом не ложатся на инвариантные n-мерные многообразия.

1.2. Теория возмущений. Предположим, что система отличается от интегрируемой малыми «возмущениями»; в обозначениях примера 1

$$H(p, q) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q) + \ldots, \tag{2}$$

где ε мало и H_1 имеет период 2π по q. Согласно Пуанкаре [4], исследование этого случая есть основная проблема динамики. Как влияет возмущение εH_1 на поведение траекторий при $t \to \infty$? Сохраняются ли инвариантные торы? Остается ли траектория по крайней мере вблизи тора $p = \mathrm{const}$?

Сравнение интегрируемых и неинтегрируемых задач примера 2 показывает, какое значение эти вопросы имеют для механики. Полный ответ на них содержал бы, в частности, решение проблемы устойчивости планетной системы.

Для приближенного исследования траекторий при больших t в астрономии давно возник специальный аппарат теории возмущений. Если удается каноническим преобразованием $p, q \to p', q'$ привести H к виду

$$H(p, q) = H_0'(p') + \varepsilon^2 H_1'(p', q') + \ldots, \tag{3}$$

то в течение времени $t \sim \varepsilon^{-1}$ движение $p'(t)$, $q'(t)$ на величину $\sim \varepsilon$ будет отличаться от условно-периодического, описываемого $H_0'(p')$. Возвращаясь к p, q, мы получим для $p(t)$, $q(t)$ приближенные выражения с ошибкой порядка ε при $t \sim \varepsilon^{-1}$. Если требуется большая точность, можно сделать следующее приближение $p', q' \to p'', q''$, приводящее H к виду

$$H(p, q) = H_0''(p'') + \varepsilon^3 H_1''(p'', q'') + \ldots$$

Теперь ошибка будет $\sim \varepsilon^3 t$. Если последовательные приближения сходятся, то в пределе получится $H(p, q) = H_0^{\infty}(p^{\infty})$, т. е. система интегрируема: торы $p^{\infty}(p, q) = \mathrm{const}$ инвариантны и заполнены траекториями условно-периодических движений.

При проведении указанной программы мы наталкиваемся на две трудности.

1°. Малые знаменатели. Будем искать каноническое преобразование $p, q \to p', q'$ в виде $p = p' + \frac{\partial S}{\partial q}$, $q' = q + \frac{\partial S}{\partial p'}$, $S(p', q) = \sum_{k \neq 0} S_k(p') e^{i(kq)}$. Функция $H(p, q)$ в координатах p', q' запишется в виде

$$H_0(p) + \varepsilon \overline{H}_1(p) + \varepsilon \widetilde{H}_1(p, q) + \ldots =$$
$$= H_0(p') + \varepsilon \overline{H}_1(p') + \varepsilon \left[\frac{\partial H_0}{\partial p}\frac{\partial S}{\partial q} + \widetilde{H}_1\right] + \varepsilon^2 \ldots$$

Чтобы получить (3), нужно уничтожить зависящие от q члены порядка ε, т. е. нужно, чтобы $\left(\omega, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \widetilde{H}_1 = 0$ или

$$S_k(p') = \frac{i h_k(p')}{(\omega, k)}, \quad \text{где} \quad \widetilde{H}_1(p, q) = \sum_{k \neq 0} h_k(p) e^{i(k, q)}. \tag{4}$$

Знаменатель (ω, k) при некоторых «резонансных» значениях ω сколь угодно мал при подходящих k. Эти малые знаменатели (ω, k) ставят под сомнение законность наших формальных преобразований.

2°. Расходимость приближений. Есть случаи, когда ряды каждого приближения обрываются и потому сходятся. Такие случаи подробно исследовал Биркгоф [5]. Однако Зигель [3] показал, что все приближения вместе и в этом случае, как правило, расходятся. Из сходимости следовала бы описанная в примере 1 структура траекторий. В действительности же траектории возмущенной системы могут не лежать на инвариантных торах.

Предположим, что $\det\left|\frac{\partial\omega_i}{\partial p_j}\right| \not\equiv 0$. Тогда в любой окрестности любого инвариантного тора невозмущенной системы есть n-мерный тор, на котором все траектории через одно и то же время замыкаются. При малом возмущении это n-мерное многообразие замкнутых траекторий, вообще говоря, разрушается. Следовательно, ряды теории возмущений не будут, вообще говоря, сходиться ни в какой области фазового пространства.

Несмотря на длительные усилия Пуанкаре, Биркгофа, Зигеля и др., долгое время не удавалось использовать теорию возмущений для получения точных качественных выводов о поведении большинства траекторий при $t \to \infty$. Неинтегрируемые проблемы динамики казались недоступными средствам современной математики.

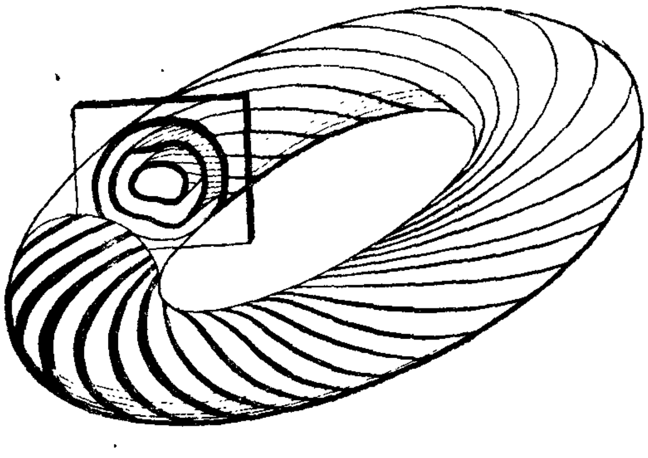

Рис. 1.

1.3. Теорема А. Н. Колмогорова. Существенный прогресс был достигнут лишь в 1954 г., когда А. Н. Колмогоров доказал [6], [7], *что если* $\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j}\right| \not\equiv 0$, *то при малом аналитическом возмущении большинство инвариантных торов не исчезает, а лишь немного деформируется.* Эти торы образуют нигде не плотное замкнутое множество, дополнение к которому имеет малую с ε меру.

О поведении траекторий в дополнении мало что известно. В случае системы с двумя степенями свободы фазовое пространство четырехмерно. Трехмерное инвариантное многообразие $H = \mathrm{const}$ разделяется двумерными инвариантными торами возмущенной системы. Дополнительная область имеет вид щелей, из которых траектории не могут выйти, так как они не могут пересекать инвариантные торы (см. рис. 1). При $n > 2$ инвариантные n-мерные торы не делят $(2n-1)$-мерный уровень энергии $H = \mathrm{const}$ и траектория из щели может a priori уходить даже в бесконечность.

Укажем несколько применений теоремы А. Н. Колмогорова и ее обобщений.

Пример 3[1]). Теорема применима к задаче о *движении точки по аналитической поверхности*, близкой к поверхности вращения или к трехосному эллипсоиду, а также позволяет установить *устойчивость движения планетоида* в плоской ограниченной круговой задаче трех тел.

Эта теорема неприменима, однако, в тех случаях, когда движение в невозмущенной системе описывается меньшим числом частот, чем в возмущенной (так называемое вырождение), так как в этих случаях $\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i\,\partial p_j}\right| = 0$. Не охватывается и так называемое предельное вырождение, имеющее место в теории колебаний при исследовании устойчивости положений равновесия и периодических движений. Работа [6] стимулировала ряд исследований в этом направлении [8], [9].

Пример 4. Доказана *устойчивость положений равновесия* и периодических движений в системах с двумя степенями свободы в так называемом общем эллиптическом случае [8], в частности, *устойчивость Лагранжева периодического решения* плоской ограниченной круговой задачи трех тел [9].

При возмущении вырожденной системы, совершающей движение с $k < n$ частотами, из семейств k-мерных торов возникают n-мерные инвариантные торы, заполненные условно-периодическими траекториями с k «быстрыми» и $n-k$ «медленными» частотами. Это явление было изучено в работах [10], [11], [12].

Пример 5. Доказана *вечная адиабатическая инвариантность* переменной действия в нелинейной колебательной системе с одной степенью свободы при медленном периодическом изменении функции Гамильтона. Доказано *вечное удержание заряженной частицы* в аксиально-симметричном магнитном поле [11]. В задаче n тел установлено, что если массы, эксцентриситеты и наклонения планет достаточно малы, то для большинства начальных условий движение условно-периодично и *большие оси орбит вечно остаются вблизи своих начальных значений* (в случае трех тел эксцентриситеты должны быть лишь ограничены сверху, но не обязательно очень малой константой) [12].

В последнее время появились важные работы Ю. Мозера [13], [14], который снял требование аналитичности функции Гамильтона, заменив его требованием существования нескольких сотен производных. Это продвижение очень существенно и довольно неожиданно. Мозер использует предложенный А. Н. Колмогоровым метод Ньютоновского типа в комбинации со сглаживанием, аналогичным введенному Нэшем [15].

1.4. Метод Ньютона. Основой доказательства А. Н. Колмогорова является следующий вариант теории возмущений. Предположим, что возмущение $\varepsilon H_1 + \ldots$ в (2) допускает оценку $|\varepsilon H_1 + \ldots| \leqslant M \ll 1$ при $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho$. Тогда коэффициенты h_k убывают в геометрической прогрессии как $Me^{-|k|\varrho}$. Как известно из теории диофантовых приближений, для большинства ω малые знаменатели (ω, k) допускают оценку снизу вида $|(\omega, k)| \geqslant K|k|^{-(n+1)}$. С помощью этой оценки для $\varepsilon^2 H_1' + \ldots$ получается

[1]) Мы ограничиваемся здесь примерами, подробно разобранными А. Н. Колмогоровым в его лекциях в Москве в 1957 г. и в Париже в 1956 г.

оценка вида $M^2\delta^{-\nu}$ при $|\operatorname{Im} q'|\leqslant\varrho-\delta$. Следующее приближение дает ошибку порядка M^4 и т. д.; каждый раз ошибка возводится в квадрат, что типично для Ньютоновского метода касательных [16]. Столь быстрая сходимость побеждает влияние малых знаменателей, и для большинства ω ряды сходятся. Для доказательства сходимости выбирается достаточно малое $\delta_1>0$, достаточно большое T, и при $M\leqslant\delta_1^T$ для s-го приближения устанавливаются неравенства $|H^{(s)}|\leqslant\delta_s^T=M_s$ при $|\operatorname{Im} q^{(s)}|\leqslant\varrho_s$, $\varrho_s>\varrho_\infty>0$, $\delta_{s+1}=\delta_s^{3/2}$ $(s=1,\ 2,\ \ldots)$.

А. Н. Колмогоров опубликовал лишь идею доказательства своей теоремы[1]). Подробное доказательство изложено ниже, но следует отметить, что ответственность за громоздкие детали предлагаемого доказательства несет только автор настоящей статьи. Эти детали, вероятно, весьма далеки от деталей первоначального доказательства. Наше изложение построено так, чтобы легко проходило обобщение на более сложные случаи [8] — [12]. Мы ограничиваемся аналитическим случаем и не используем достижений Мозера.

В предложенной А. Н. Колмогоровым конструкции каждый инвариантный тор возмущенной системы отыскивался с помощью своей системы последовательных приближений, которые строятся во все более и более узких окрестностях искомого тора. При этом в формуле (4) набор частот ω фиксируется заранее и от p не зависит.

В нашем доказательстве, возвращаясь к первоначальной идее теории возмущений, мы не фиксируем ω и в (4) рассматриваем ω как функцию $\omega(p')$. Чтобы не иметь дела с бесконечным числом малых знаменателей сразу, мы в каждом приближении ограничиваемся конечным числом N_s гармоник, относя каждый раз старшие гармоники к членам высшего порядка. Благодаря этому удается обойтись без моногенных функций Бореля при оценке меры дополнительной области.

1.5. Нерешенные задачи. Несомненно, развитые методы в ближайшее время будут приложены к разным конкретным задачам динамики, начиная с исследования лунных орбит и несимметричных волчков и кончая отысканием так называемых магнитных поверхностей. Я хочу остановиться на проблемах более принципиального характера (ср. также [20]).

1°. Зоны неустойчивости. Как ведут себя траектории, начинающиеся в «щелях» п. 1.3? Могут ли они при $n>2$ уходить далеко от тора $p=\mathrm{const}$? В частности, устойчивы ли положения равновесия и периодические решения общего эллиптического типа при числе степеней свободы $n>2$? Простейшая задача — каноническое отображение четырехмерного пространства.

При $n=2$ движение в зоне неустойчивости носит иной характер (см. [5], [21]). Грубой моделью может служить перекладывание частей $\Delta_1=[0,\ a)$, $\Delta_2=[a,\ b)$, $\Delta_3=[b,\ 1)$ отрезка $[0,\ 1)$ в порядке Δ_3, Δ_2, Δ_1.

2°. Большие возмущения. Условно-периодические движения прослежены только при очень малых значениях параметра возмущения ε.

---

[1]) Первое подробное изложение метода см. в [17].

Сохраняются ли они и при больших возмущениях? Имеется ли в задаче n тел при любых значениях масс множество положительной меры начальных условий ограниченных движений?

Самостоятельный интерес представляют модельные задачи: приведение к повороту аналитических отображений окружности на себя (см. [17]) и теория Флоке для линейных дифференциальных уравнений с условно-периодическими коэффициентами (см. [22], [23]).

3°. Динамические системы классической механики. *Динамической системой* называют однопараметрическую группу сохраняющих меру преобразований гладкого многообразия, заданную дифференциальными уравнениями ([5], [7]). Пусть канонические уравнения с функцией Гамильтона $H(p, q)$ имеют первые интегралы $F_1 = H, F_2, \ldots, F_k$ ($F_i(p, q)$ — однозначные функции). Тогда на каждом инвариантном многообразии M: $F = \mathrm{const}$ возникает динамическая система. Например, могут получаться геодезические потоки (см., например, [24]) и условно-периодические движения (ср. п. 1.1). В последнее время изучен ряд других систем ([25], [26]). Могут ли они встретиться в механике, в частности при $H = T + U$ (где T — кинетическая, U — потенциальная энергии)? Каким ограничениям подчинена топология многообразия M? Эти вопросы связаны с изучением канонических и контактных структур на многообразиях и требуют пересмотра теорем классической динамики с глобальной точки зрения (ср. [2]).

§ 2. Формулировки

2.1. Теорема 1. *Пусть функция Гамильтона $H(p, q)$ аналитична в области F: $p \in G$, $|\mathrm{Im}\, q| \leqslant \rho$ и имеет период 2π по $q = q_1, \ldots, q_n$. Пусть $H = H_0(p) + H_1(p, q)$, причем*[1]) *в области F*

$$\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j}\right| \neq 0. \tag{1}$$

Тогда для любого $\varkappa > 0$ существует $M = M(\varkappa, \rho, G, H_0) > 0$ такое, что если в области F выполнено неравенство

$$|H_1| \leqslant M, \tag{2}$$

то движение, определяемое каноническими уравнениями

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{3}$$

обладает следующими свойствами:

1°. *Существует разложение $\mathrm{Re}\, F = F_1 + F_2$, где F_1 инвариантно (т. е. вместе с точкой p, q содержит проходящую через нее траекторию $p(t)$, $q(t)$ движения (3)), а F_2 мало: $\mathrm{mes}\, F_2 \leqslant \varkappa\, \mathrm{mes}\, F$.*

---

[1]) Вместо (1) достаточно отличие от 0 определителя порядка $n+1$

$$\det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} & \dfrac{\partial H_0}{\partial p_i} \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial p_j} & 0 \end{vmatrix}.$$

2°. *F_1 состоит из инвариантных n-мерных аналитических торов I_ω, задаваемых параметрически уравнениями*

$$p = p_\omega + f_\omega(Q), \quad q = Q + g_\omega(Q), \tag{4}$$

где f_ω, g_ω — аналитические функции периода 2π по $Q = Q_1, \ldots, Q_n$, а ω — параметр, нумерующий торы I_ω.

3°. *Инвариантные торы I_ω мало отличаются от торов $p = p_\omega$:*

$$|f_\omega(Q)| < \varkappa, \quad |g_\omega(Q)| < \varkappa. \tag{5}$$

4°. *Движение* (3) *на торе I_ω условно-периодично с n частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$:*

$$\dot{Q} = \omega, \quad \text{где } \omega = \left.\frac{\partial H_0}{\partial p}\right|_{p_\omega}. \tag{6}$$

Теорема 1 доказывается в § 3 с помощью конструкции, доставляемой следующей индуктивной теоремой.

2.2. Теорема 2. *Рассмотрим функцию $H(p, q)$, области F, G, Ω и положительные числа D, M, Θ, θ, ϱ, β, γ, δ, $\varkappa$. Предположим, что*

1°. *В области F $(p \in G, |\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho \leqslant 1)$ функция*

$$H = H_0(p) + H_1(p, q)$$

аналитична и

$$|H_1| \leqslant M, \quad \theta|dp| \leqslant |dA| \leqslant \Theta|dp|, \quad 0 < \theta < 1 < \Theta < \infty,$$

где A — диффеоморфизм $p \to \omega = \frac{\partial H_0}{\partial p}$ области G на область Ω типа D (см. § 4, п. 4.1).

2°. *Выполнены неравенства*

$$\delta < \delta^{(5)}(n, \theta, \Theta, \varrho, \varkappa, D) =$$
$$= \min\{\delta^{(1)}(n;\ 0{,}5\theta;\ 2\Theta);\ \delta^{(2)}(n, \varkappa, \varrho);\ \delta^{(3)}(n, \theta, \Theta, \varkappa, D);\ (\delta^{(4)}(\varkappa, \theta)\}$$

где $\delta^{(1)}$ определено в 2.3,

$$\delta^{(2)} = \min\{10^{-4n}\varrho^{4n};\ 4^{-4n};\ \varkappa\}. \quad \delta^{(4)} = \varkappa(2 + \theta^{-1})^{-1},$$
$$\delta^{(3)} = \min\{e^{2n}(32n^2 + 100n)^{-2n};\quad (6 + 14\Theta)^{-1};\ 4^{-n-2}\varkappa\theta^n\Theta^{-n}D^{-1}n^{-1}\}.$$

3°. *Пусть $\beta = \delta^3$, $\gamma = \delta^{\frac{1}{4}n}$, $M = \delta^T$. $T = 8n + 24$. Положим еще $\delta_1 = \delta$, и для $s \geqslant 1$ введем*

$$\delta_{s+1} = \delta_{s-1}^{3/2}, \qquad \beta_s = \delta_s^3. \qquad \gamma_s = \delta_s^{\frac{1}{4}n}, \qquad M_s = \delta_s^T.$$

В предположениях 1°, 2°, 3° *существуют последовательность областей $F_0 = F$, F_1, F_2, ... вида F_s: $P_s \in G_s$, $|\operatorname{Im} Q_s| \leqslant \varrho_s$ и последовательность канонических диффеоморфизмов B_s: P_s, $Q_s \to P_{s-1}$, Q_{s-1} областей F_s в F_{s-1}, таких, что при $s \geqslant 1$*

1. $|B_s - E| < \beta_s$, $|dB_s| < 2\ dx_s$, $F_s \subset F_{s-1} - \beta_s$,

$$\varrho_s > \frac{\varrho}{3}.$$

2. *Для p, $q = B_1 B_2 \ldots B_s(P_s, Q_s)$ при P_s, $Q_s \in F_s$ имеем*

$$H(p, q) = H^{(s)}(P_s, Q_s) = H_0^{(s)}(P_s) + H_1^{(s)}(P_s, Q_s),$$

$$|H_1^{(s)}| \leqslant M_{s+1}, \quad \left|\frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial x_s}\right| < \delta_s \beta_{s+1}, \quad \left|\frac{\partial^2 H_1^{(s)}}{\partial x_s^2}\right| < \delta_s \quad (x_s = P_s,\ Q_s)$$

3. *Отображение* $A_s: P_s \to \frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P_s}$ *есть диффеоморфизм области* G_s, *причем*

$$\underline{\theta}\,|dP_s| \leqslant |dA_s| \leqslant \overline{\Theta}\,|dP_s|, \quad |A_s - A_{s-1}| < \beta_s\delta_s, \quad \text{где } \underline{\theta} = 0{,}5\theta,\ \overline{\Theta} = 2\Theta.$$

4. $\operatorname{mes}(G - G_s) \leqslant \varkappa \operatorname{mes} G$.

Доказательство теоремы 2 проведено в § 3 индуктивным построением B_s, F_s; каждый шаг основан на употреблении следующей леммы.

2.3. Индуктивная лемма. *Рассмотрим функцию* $H(p, q)$, *области* F, G, H *и положительные числа* Θ, θ, ϱ, β, γ, δ, M, K. *Предположим, что*

1°. *В области* $F\,(p \in G,\ |\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho)$ *функция*

$$H(p, q) = H_0(p) + H_1(p, q)$$

аналитична и

$$|H_1| \leqslant M, \quad \theta\,|dp| \leqslant |dA| \leqslant \Theta\,|dp|, \quad 0 < \theta < 1 < \Theta < \infty,$$

где A — *диффеоморфизм* $p \to \omega = \frac{\partial H_0}{\partial p}$ *области* G *на область* Ω.

2°. *Числа* β, γ, δ, K *удовлетворяют неравенствам*

$$\delta < \delta^{(1)}(n, \theta, \Theta) = \min\{\delta^0(n, 2\Theta);\ 2^{-1}n^{-1}\theta\},$$

$$10\delta < 2\gamma < \varrho \leqslant 1, \quad 3\beta < 2\delta, \quad 2\beta < K,$$

где $\delta^{(0)}$ *определено в* 2.4.

3°. $M < \delta^{\nu} K \beta^2$, *где* $\nu = 2n + 3$.

Тогда существуют область $F': P \in G_1 \subset G$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho' = \varrho - 3\gamma$ *и каноническое диффеоморфное преобразование* $B: P, Q \to p, q$ *области* F' *в* F *такие, что*

1. $|B - E| < \beta$, $|dB| < 2\,|dx|$, $F' \subset F - \beta$ $(x = P, Q)$.

2. $H(p, q) = \overline{H}(p) + H_2(P, Q)$, *где в области* $P, Q \in F'$

$$|H_2| < M' = M^2\delta^{-2\nu}\beta^{-2},$$

$$\left|\frac{\partial H_2}{\partial x}\right| < \frac{M'}{\beta}, \quad \left|\frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2}\right| < \frac{2M'}{\beta^2}.$$

3. *Отображение* $A': P \to \frac{\partial \overline{H}}{\partial p}$ *отображает* G_1 *диффеоморфно на* Ω_1 *и* $\theta'\,|dP| < |dA'| < \Theta'\,|dP|$, *где* $\theta' = \theta(1 - \delta)$, $\Theta' = \Theta(1 + \delta)$ *и* $|A' - A| < \beta\delta$, *в обозначениях* 2.4

$$\Omega_1 = \Omega_{KN} - d,$$

где

$$d = (5 + 7\Theta)\beta, \quad N = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{2M}.$$

4. $\operatorname{mes}(G - G_1) < \theta^{-n} \operatorname{mes}(\Omega - \overline{\Omega}_1)$, *где*

$$\overline{\Omega}_1 = \Omega_{KN} - \overline{d}, \quad \overline{d} = (6 + 7\Theta)\beta.$$

Доказательство проведено в § 3. Решающим моментом является использование следующей леммы.

2.4. Основная лемма. *Рассмотрим функцию* $H(p, q)$, *области* F, G, Ω *и положительные числа* Θ, θ, ϱ, β, γ, δ, M, K. *Предположим, что*

1°. *В области* $F\,(p \in G,\ |\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho)$ *функция*

$$H(p,\ q) = \overline{H}(p) + \widetilde{H}(p,\ q)$$

аналитична и

$$|\widetilde{H}(p,\ q)| \leqslant M,$$

$$\oint \widetilde{H}_1(p,\ q)\,dq = 0, \quad \theta\,|dp| \leqslant |dA| \leqslant \Theta\,|dp| \qquad (0 < \theta < 1 < \Theta < \infty),$$

где A — *диффеоморфизм* $p \to \omega$ *области* G *на область* Ω *точек* $\omega = \frac{\partial \overline{H}}{\partial p}$.

2°. *Числа* $\beta,\ \gamma,\ \delta,\ K$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\delta < \delta^{(0)}(n,\ \Theta) = \min\{L_1^{-1},\ L_2^{-1},\ L_3^{-1}\ \Theta^{-1};\ L_4^{-1}\},$$

$$10\delta < 2\gamma < \varrho \leqslant 1, \qquad 3\beta < 2\delta, \qquad 2\beta < K,$$

где $L_i(n)$ *определены в* 3.1.

3°. *Пусть* $M < \delta^{\nu} K \beta^2$, *где* $\nu = 2n + 3$.

Положим $N = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{M}$ *и* $G_{KN} = A^{-1}\Omega_{KN}$, *где* Ω_{KN} *состоит из тех* ω, *для которых* $|(\omega,\ k)| \geqslant K\,|k|^{-(n+1)}$ *при всех целых* k, $0 < |k| < N$.

Тогда в области $P \in G_{KN} - 2\beta$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - 2\gamma$ *существует диффеоморфизм* $B:\ P,\ Q \to p,\ q$ *такой, что*

1. $|B - E| < \beta$, $|dB| < 2\,|dx| \qquad (x = P,\ Q)$.
2. $H(p,\ q) = \overline{H}(P) + H_2(P,\ Q)$, *где* $(p,\ q) = B(P,\ Q)$ *и при* $P \in G_{KN} - 2\beta$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - 2\gamma$, $|H_2(P,\ Q)| < M^2 \delta^{-2\nu} \beta^{-2}$.

§ 3. Доказательства

3.1. Доказательство основной леммы. 1°. Каноническое преобразование с производящей функцией $Pq - S(P,\ q)$

$$p = P + S_q, \qquad Q = q + S_P \tag{1}$$

приводит $H(p,\ q)$ к виду

$$H(p,\ q) = \overline{H}(P) + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4(P,\ Q), \tag{2}$$

где

$$\Sigma_1 = (\omega(P),\ S_q) + [\widetilde{H}(P,\ q)]_N,$$

$$\Sigma_2 = \overline{H}(p) - \overline{H}(P) - \left(p - P,\ \frac{\partial \overline{H}}{\partial P}\right),$$

$$\Sigma_3 = \widetilde{H}(P,\ q) - [\widetilde{H}(P,\ q)]_N,$$

$$\Sigma_4 = \widetilde{H}(p,\ q) - \widetilde{H}(P,\ q),$$

$$\widetilde{H}(P,\ q) = \sum{}' h_k(P)\, e^{i(k,\ q)},$$

$$[\widetilde{H}(P,\ q)]_N = \sum_{0 < |k| < N} h_k(P)\, e^{i(k,\ q)}, \qquad \omega(P) = \frac{\partial \overline{H}(P)}{\partial P},$$

и переменные $p,\ q$ выражаются через $P,\ Q$ согласно (1).

2°. Чтобы $\Sigma_1 \equiv 0$, положим

$$S(P, q) = \sum_{0<|k|<N} S_k(P) e^{i(k, q)},$$

где

$$S_k(P) = \frac{ih_k(P)}{(\omega(P), k)}. \tag{3}$$

При $P \in G_{KN}$ имеем $|(\omega, k)| \geqslant K|k|^{-(n+1)}$ $(0<|k|<N)$. Из условия 1° леммы 2.4, согласно 2° А п. 4.2, вытекает $|h_k| \leqslant Me^{-|k|\rho}$. Значит по (8) 1° п. 4.2

$$|S_k(P)| \leqslant \frac{Me^{-|k|\rho}}{k} \frac{L_0}{\delta^{\nu_1}} e^{|k|\delta} = M \frac{L_0}{K\delta^{\nu_1}} e^{-|k|(\rho-\delta)},$$

где $\nu_1 = n+1$, $L_0 = \nu_1^{\nu_1} e^{-\nu_1}$, откуда, согласно 2° В п. 4.2, при $P \in G_{KN}$, $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho - 2\delta$,

$$|S(P, q)| < \frac{ML_5}{K\delta^{\nu_2}} \qquad (L_5 = 4^n L_0, \ \nu_2 = 2n+1).$$

3°. Ввиду $M < \delta^\nu K\beta^2$, $\delta < L_2^{-1}$ $(L_2 = 16nL_5, \ \nu = 2n+3)$ имеем $\frac{ML_5}{K\delta^{\nu_2}} < \frac{\beta^2}{16n}$. Согласно 3° п. 4.3 уравнения (1) определяют канонический диффеоморфизм B области

$$P \in G_{KN} - 2\beta, \ |\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - 5\delta < \varrho - 2\delta - 3\beta$$

(ибо $3\beta \leqslant 2\delta$), причем

$$|B - E| < \frac{ML_5}{K\beta\delta^{\nu_2}} < \beta, \qquad |dB| < 2|dx|, \qquad |P - p| < \frac{ML_5}{K\delta^{\nu_2+1}}$$
$$(x = P, \ Q).$$

4°. Величину Σ_2 оценим по формуле Тейлора (4° п. 4.2). Если

$$P \in G_{KN} - 2\beta, \ |\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - 5\delta,$$

то из $\left|\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial P_i \, \partial P_j}\right| \leqslant \Theta$ вытекает (ввиду $\delta < L_3^{-1}\Theta^{-1}$, $L_3 = 0{,}5L_5^2 n^2$)

$$|\Sigma_2| \leqslant \frac{M^2}{K^2} \frac{\Theta n^2 L_5^2}{2\delta^{2\nu_2+2}} < \frac{M^2}{K^2\delta^{2\nu_2+3}}.$$

5°. Оценка Σ_3 основана на С) 2° п. 4. 2. Так как $|h_k| \leqslant Me^{-|k|\rho}$, то при $P \in G$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - \gamma - \delta$, $N = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{M}$ имеем $\left(\text{ввиду } \delta < L_4^{-1}, \ L_4 = 2\left(\frac{2n}{e}\right)^n\right)$

$$|\Sigma_3| < \frac{M^2 L_4}{\delta^{\nu_1}} < \frac{M^2}{\delta^{\nu_1+1}}.$$

6°. Оценка Σ_4 получается из формулы Лагранжа (4° п. 4.2). Из

$$P \in G_{KN} - 2\beta, \qquad |\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - 5\delta$$

вытекает

$$|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho - 4\delta \ \text{и} \ |P - p| < \beta;$$

следовательно,

$$P + \lambda(p - P) \in G_{KN} - \beta \ (|\lambda| \leqslant 1)$$

и по Коши (3° п. 4.2)

$$\left|\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial P}\right| \leqslant \frac{M}{\beta}.$$

При $\delta < L_2^{-1}$, $L_2 = 16L_5 n$ будет

$$|\Sigma_4| \leqslant \frac{M^2 L_5 n}{K\beta\delta^{\nu_2+1}} < \frac{M^2}{K\beta\delta^{\nu_2+2}}.$$

7°. Соединяя оценки Σ_2, Σ_3, Σ_4 и используя условия $2\beta < K$, $\delta < L_1^{-1} = 12^{-1}$, $\gamma > 3\delta$, $\nu = 2n+3$, $\nu_1 = n+1$, $\nu_2 = 2n+1$, получаем при $P \in G_{KN} - 2\beta$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - 2\gamma < \varrho - 5\delta - \gamma$

$$|\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4| < M^2 \left[\frac{\delta^{-(2\nu_2+3)}}{K^2} + \delta^{-(\nu_1+1)} + \frac{\delta^{-(\nu_2+2)}}{K\beta}\right] < M^2\delta^{-2\nu}\beta^{-2},$$

что и требовалось доказать; константы L_i суть

$$L_1 = 12, \quad L_2 = 4^{n+2} n e^{-(n+1)} (n+1)^{n+1}, \quad L_3 = 2^{4n-1} n^2 e^{-(2n+2)} (n+1)^{2n+2},$$
$$L_4 = 2^{n+1} e^{-n} n^n.$$

3.2. Доказательство индуктивной леммы. 1°. Положим

$$H_1(p, q) = \overline{H}_1(p) + \widetilde{H}_1(p, q),$$

где

$$\oint \widetilde{H}_1(p, q)\, dq = 0.$$

Тогда

$$H(p, q) = \overline{H}(p) + \widetilde{H}_1(p, q),$$

где

$$\overline{H}(p) = H_0(p) + \overline{H}_1(p).$$

Рассмотрим отображение $A' : p \to \frac{\partial\overline{H}}{\partial p} = A(p) + \Delta(p)$. Согласно условиям 2°, 3° леммы 2.3 $M < \frac{\delta\theta}{2n}\beta^2$, $\delta < 1$, $\theta < 1$. Следовательно, по Коши (3° п. 4.2) при $p \in G - \beta$ имеем $|\Delta| < \frac{M}{\beta} < \beta\delta$, $|d\Delta| < \delta\theta\,|dp|$. Применим лемму о вариации частоты из 5° п. 4.3, положив $b = 3\beta$. Согласно 5° п. 4.3 A' отображает $G_1 = A'^{-1}\Omega_1$ диффеоморфно на $\Omega_1 = \Omega_{KN} - d$, где $d = (5+7\theta)\beta$, а $G_1 + 3\beta$ отображается в Ω_{KN}, причем выполнены заключения 3 и 4 индуктивной леммы.

2°. Применим к функции $H(p, q) = \overline{H}(p) + \widetilde{H}_1(p, q)$ в области F основную лемму. Так как ввиду 1° $|\widetilde{H}_1| \leqslant 2M$ и $0'|dp| < |dA'| < \Theta'|dp|$, то из условий индуктивной леммы следует применимость основной. Последняя доставляет в области $P \in G_{KN} - 2\beta$, $|\operatorname{Im} Q| < \varrho - 2\gamma$ диффеоморфизм $B : P, Q \to p, q$ и неравенство $|H_2(P, Q)| < M'$. Отсюда по Коши (3° п. 4.2) при $P \in G_{KN} - 3\beta$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - 3\gamma < \varrho - 2\gamma - \beta$ получаем оценки заключения 2 индуктивной леммы.

3°. Согласно 1° из $P, Q \in F' : P \in G_1$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - 3\gamma$ вытекает $P \in G_{KN} - 3\beta$. Но тогда, согласно 2°, справедливы заключения 1 и 2 индуктивной леммы, которая тем самым доказана полностью.

3.3. Доказательство теоремы 2. 1°. Положим $K=\varkappa\delta_1$. Покажем, что в условиях теоремы 2 применима индуктивная лемма. Действительно, из условия 1° теоремы 2 вытекает условие 1° индуктивной леммы. Из неравенства $\delta<\delta^{(5)}$ теоремы 2 вытекает $\delta<\delta^{(1)}$ индуктивной леммы. Далее, ввиду $\delta<\delta^{(2)}$ условие 2° индуктивной леммы выполнено полностью, ибо

$$\gamma<0{,}1\varrho;\ \gamma<4^{-1};$$

$$10\delta<10\delta^{1/2}\delta^{1/4n}<10\cdot 4^{-2n}\gamma<2\gamma,\qquad 3\delta^3<3\cdot 4^{-1}\delta<2\delta,\ 2\delta^3<\delta^2<\delta\varkappa=K.$$

Наконец, условие 3° вытекает из неравенства $8n+24=T>\nu+2+6=$ $=2n+11$.

2°. Из $\delta<\delta^{(2)}$ легко получаются при $s\geqslant 1$ неравенства

$$\delta_s+\delta_{s+1}+\ldots<2\delta_s,\qquad 3(\gamma_s+\gamma_{s+1}+\ldots)<6\gamma_s\leqslant 6\gamma_1<2\ \frac{\varrho}{3}. \tag{4}$$

Согласно (4), если положить $\theta_0=\theta$, $\Theta_0=\Theta$, $\varrho_0=\varrho$, $\theta_s=\theta_{s-1}(1-\delta_s)$, $\Theta_s=\Theta_{s+1}(1+\delta_s)$, $\varrho_s=\varrho_{s-1}-3\gamma_s$ $(s=1,\ 2,\ \ldots)$, то будут выполнены неравенства

$$\theta_s>\underline{\theta}=\frac{\theta}{2},\qquad \Theta_s<\bar{\Theta}=2\Theta,\qquad \varrho_s>\varrho_\infty=\frac{\varrho}{3}. \tag{5}$$

Легко проверить, что при $s\geqslant 1$ числа β_s, γ_s, δ_s, M_s, K удовлетворяют неравенствам условия 2° индуктивной леммы с константами θ_{s-1}, Θ_{s-1}, ϱ_{s-1}. Для $s=1$ это было установлено в п. 1°.

3°. Из $\delta<\delta^{(3)}$ вытекает ввиду неравенства 1° п. 4.2, что при $N_s=\dfrac{1}{\gamma_s}\ln\dfrac{1}{2M_s}$ справедливы неравенства

$$\delta_sN_s^n\leqslant\delta_s\left(\delta_s^{\frac{1}{4}n}\ln\delta_s^{-(T+1)}\right)^n\leqslant\delta_s\left(4n(T+1)e^{-1}\delta_s^{\frac{1}{2}n}\right)^n\leqslant\delta_s^{\frac{1}{2}}(4n(T+1)e^{-1})^n<1. \tag{6}$$

Далее, положим

$$\sigma_s=\sum_{N_{s-1}\leqslant m<N_s}m^{-2}.$$

Так как $\Sigma\sigma_s<2$, то из $\delta<\delta^{(3)}$ и (6) вытекают неравенства

$$\sum_{s=1}^{\infty}[K\sigma_s+(6+7\Theta_s)\beta_sN_s^n]<\sum_{s=1}^{\infty}[K\sigma_s+\delta_s]<4\delta_1<\varkappa\bar{D}^{-1}, \tag{7}$$

где

$$\bar{D}=\left(2\,\frac{\Theta}{\theta}\right)^nLD,\qquad L=n2^{n+2}.$$

4°. Пусть объекты

$$A_{s-1},\ F_{s-1},\ G_{s-1},\ H^{(s-1)}(P_{s-1},Q_{s-1}),\ \Omega_{s-1},\ \theta_{s-1},\ \Theta_{s-1},\ \varrho_{s-1} \tag{8_{s-1}}$$

и числа β_s, γ_s, δ_s, M_s, K удовлетворяют условиям индуктивной леммы. Тогда индуктивная лемма определяет объекты

$$A',\ B,\ F',\ G_1,\ \bar{H}(P)+H_2(P,Q),\ \Omega_1,\ \bar{\Omega}_1,\ \theta',\ \Theta',\ \varrho',$$

которые мы обозначим (сохраняя обозначения п. 2°) соответственно через

$$A_s,\ B_s,\ F_s,\ G_s,\ H^{(s)}(P_s,Q_s)=H_0^{(s)}(P_s)+H_1^{(s)}(P_s,Q_s),\ \Omega_s,\ \bar{\Omega}_s,\ \theta_s,\ \Theta_s,\ \varrho_s. \tag{8_s}$$

Из заключения 2 индуктивной леммы ввиду $T=8n+24$ получаем в F_s

$$|H_1^{(s)}| < M_s^2\delta_s^{-2\nu}\beta_s^{-2} = \delta_s^{2T-4n-12} = \delta_s^{\frac{3}{2}T} = \delta_{s+1}^T = M_{s+1}. \tag{9}$$

Из заключений 1, 2, 3 индуктивной леммы, имея в виду п. 2° и (9), мы приходим к выводу, что если объекты (8_{s-1}) и числа β_s, γ_s, δ_s, M_s, K удовлетворяют условиям индуктивной леммы, то им удовлетворяют и объекты (8_s) и числа β_{s+1}, γ_{s+1}, δ_{s+1}, M_{s+1}, K.

5°. Но согласно п. 1° объекты (8_0) (где $A_0=A$, $F_0=F$, $G_0=G$, $H^{(0)}=H$, $P_0=p$, $Q_0=q$) и числа β_1, γ_1 δ_1, M_1, K удовлетворяют условиям индуктивной леммы. Следовательно, ее можно применять неограниченно; в результате получаем объекты (8_s) при $s=1, 2, \ldots$ Заключения 1, 2 и 3 теоремы 2 вытекают из заключений 1, 2 и 3 индуктивной леммы ввиду (5). Впрочем, мы еще не доказали непустоту F_s. Она вытекает из заключения 4 теоремы 2, которое мы сейчас докажем.

6°. Из заключений 3 и 4 индуктивной леммы вытекает, что

$$\operatorname{mes}(G_{s-1}-G_s) \leqslant \underline{\theta}^{-n} \operatorname{mes}(\Omega_{s-1}-\overline{\Omega}_s), \tag{10}$$

где $\overline{\Omega}_s=(\Omega_{s-1})_{KN_s}-\overline{d}_s$, $\overline{d}_s=(6+7\Theta_s)\beta_s$ и Ω_{s-1} получено из Ω по формулам

$$\Omega_0=\Omega, \qquad \Omega_m=(\Omega_{m-1})_{KN_m}-d_m,$$

$$d_m=(5+7\Theta_s)\beta_s, \qquad N_m=\frac{1}{\gamma_m}\ln\frac{1}{2M_m}\ (m=1, 2, \ldots, s-1).$$

Так как $d_m>0$, $1<N_1<N_2<\ldots$, а область $\Omega=\Omega_0$ имеет тип D по условию 1° теоремы 2, то из арифметической леммы (3° п. 4.1) находим

$$\operatorname{mes}(\Omega_{s-1}-\Omega_s) \leqslant DL\,[K\sigma_s+(6+7\Theta_s)\beta_s N_s^n]\operatorname{mes}\Omega. \tag{11}$$

Но так как $\operatorname{mes}\Omega \leqslant \Theta^n \operatorname{mes} G$, из (10), (11), (7) вытекает

$$\operatorname{mes}(G-G_s)=$$

$$=\sum_{m=1} \operatorname{mes}(G_{m-1}-G_m) \leqslant \sum_{m=1}^{s}[K\sigma_m+(6+7\Theta_m)\beta_m N_m^n]\,\overline{D}\operatorname{mes}G \leqslant \varkappa \operatorname{mes} G. \tag{12}$$

Следовательно, справедливо заключение 4 теоремы 2, которая, таким образом, доказана полностью.

3.4. Доказательство теоремы 1. В этом доказательстве все переменные считаются действительными, если не оговорено противное.

1°. Ввиду неравенства (1) теоремы 1 для любого $\varkappa>0$ найдутся такие положительные числа θ, Θ, D, m, зависящие только от $\varkappa$, G, H_0, что область G представима в виде $G^{(1)}\bigcup\ldots\bigcup G^{(m)}\bigcup\ddot{G}$, где $\operatorname{mes}\overline{G}<\frac{\varkappa}{2}$, и каждая область $G^{(i)}$ отображением $A\colon p\longrightarrow\frac{\partial H_0}{\partial p}$ переводится диффеоморфно в область $\Omega^{(i)}$ типа D (см. 1° п. 4.1), причем в каждой из областей $G^{(i)}$ выполнены неравенства

$$\theta\,|dp| \leqslant |dA| \leqslant \Theta\,|dp| \qquad (0<\theta<1<\Theta<\infty).$$

2°. Если найти $M(\varkappa, \varrho, G^{(i)}, H_0)$ для каждой из областей $G^{(i)}$, то

$$M(\varkappa, \varrho, G, H_0)=\min_i M\left(\frac{\varkappa}{2m}, \varrho, G^{(i)}, H_0\right)$$

доставляет доказательство теоремы 1. Поэтому мы в дальнейшем предполагаем, что в области G выполнено условие 1° теоремы 2. Мы докажем теорему 1, положив $M=\delta_1^T$, $T=8n+24$, $\delta_1<\delta^{(5)}$ $(n, \theta, \Theta, \varrho, \varkappa, D)$, где константа $\delta^{(5)}$ определена в теореме 2. Ввиду (2) § 1 выполнены все условия теоремы 2, а значит и ее заключение.

3°. Сходимость. Теорема 2 дает последовательности F_s и B_s. Из $\beta_s=\delta_s^3<4^{-s}$ и заключения 1 теоремы 2 вытекают все условия леммы о сходимости из 1° п. 4.4. По этой лемме последовательность диффеоморфизмов $S_s=B_1B_2\ldots B_s\,(s=1, 2, \ldots)$ на компакте

$$F_\infty=\bigcap_{s\geqslant 0}F_s\quad\left(P_\infty\in G_\infty,\ |\operatorname{Im}G_\infty|\leqslant\varrho_\infty,\quad\text{где}\quad G_\infty=\bigcap_{s\geqslant 0}G_s,\ \varrho_\infty\geqslant\frac{\varrho}{3}\right)$$

сходится к некоторому отображению S_∞. Ввиду заключения 4 теоремы 2 $\operatorname{mes}G_\infty\geqslant(1-\varkappa)\operatorname{mes}G$. Но S_s — канонические преобразования, следовательно, S_s сохраняют меру и $\operatorname{mes}S_sF_\infty=\operatorname{mes}F_\infty$. Согласно 4° п. 4.4 отсюда вытекает, что

$$\operatorname{mes}S_\infty F_\infty\geqslant\lim_{s\to\infty}\operatorname{mes}S_sF_\infty=(2\pi)^n\operatorname{mes}G_\infty\geqslant(2\pi)^n(1-\varkappa)\operatorname{mes}G=(1-\varkappa)\operatorname{mes}F. \tag{13}$$

Положим $F^1=S_\infty F_\infty$ и докажем утверждения 1—4 теоремы 1.

4°. Инвариантность. Из заключения 3 теоремы 2 вытекает, что на G_∞ последовательность диффеоморфизмов A_s сходится к отображению A_∞, причем

$$|A_s-A_\infty|\leqslant\sum_{m=s+1}^{\infty}\beta_m\delta_m<\frac{1}{2}\beta_{s+1}. \tag{14}$$

Запишем канонические уравнения с функцией Гамильтона $H^{(s)}(P_s, Q_s)$ в виде

$$\dot{x}_s=X_s(x_s),\qquad\text{где}\qquad x_s=P_s,\ Q_s. \tag{15_s}$$

Преобразования S_s канонические, поэтому если $x_s(t)$ — решение уравнений (15_s), то $x(t)=S_sx(t)$ удовлетворяет (15_0) Покажем, что если для $x_\infty=P_\infty$, $Q_\infty\in F_\infty$ обозначить $X_\infty=0$, $A_\infty(P_\infty)$ и $x_\infty(t)$ есть решение уравнений (15_∞) с начальными условиями из F_∞, то $x_\infty(t)\in F_\infty$, а $S_\infty x_\infty(t)$ принадлежит F и удовлетворяет (15_0).

Мы воспользуемся леммой 3° п. 4.4. Положим для $x_s=P_s$, Q_s еще $\overline{X}_s(x_s)=0$, $A_s(P_s)$. По заключению 2 теоремы 2 в F_s имеем $|X_s-\overline{X}_s|<\frac{1}{2}\beta_{s+1}$. Ввиду (14), в F_∞ получается $|X_\infty-X_s|<\beta_{s+1}$. Далее, из заключений 2,3 теоремы 2 получаем

$$\left|\frac{\partial X_s}{\partial x_s}\right|<2n\delta_s+\overline{\Theta}<n+\overline{\Theta}.$$

Теперь лемма 3° п. 4.4 показывает, что $S_\infty x_\infty(t)$ удовлетворяет $(15_0)\equiv(3)$ § 2.

5°. Введем обозначение $p_\omega=A^{-1}A_\infty P_\infty$, где $P_\infty\in G_\infty$. Так как (см. 4°) $|AP_\infty-A_\infty P_\infty|<\beta_1$, то $|AP_\infty-Ap_\omega|<\beta_1$ и по лемме 4° п. 4.3 $|P_\infty-p_\omega|<\beta_1\theta^{-1}$. Далее согласно заключению леммы о сходимости из п. 3° имеем $|S_\infty-E|<2\beta_1$. Итак, для P_∞, $Q_\infty\in F_\infty$ имеем (ввиду условия

$\delta < \delta^{4)}$ теоремы 2)

$$|S_\infty(P_\infty, Q_\infty) - (p_\omega, Q_\infty)| < \beta_1(2+\theta^{-1}) < \varkappa. \tag{16}$$

6°. Уравнения $p, q = S_\infty(A_\infty^{-1}\omega, Q)$ при каждом фиксированном $P_\infty = A_\infty^{-1}\omega \in G_\infty$ могут быть записаны в виде (4) заключения 2 теоремы 1. Они определяют тор T_ω и координаты $Q = Q_\infty$ на нем. В 4° доказана инвариантность I_ω и равенство (6) заключения 4 теоремы 1. Аналитичность S_∞ по Q_∞ вытекает из равномерной сходимости S_s при каждом фиксированном $P_\infty \in G_\infty$ в комплексной области $|\operatorname{Im} Q_\infty| \leqslant \varrho_\infty$. Заключение 3 теоремы 1 вытекает из (16). Теорема 1 доказана полностью.

§ 4. Технические леммы

4.1. Арифметическая лемма. Эта лемма выражает несоизмеримость двух наугад взятых чисел.

1°. Области типа D. Пусть Ω — ограниченная область в пространстве ω, и граница Ω составлена из конечного числа кусков гладких многообразий. Легко видеть, что тогда существует постоянная $D > 0$ такая, что для любых $d_2 > d_1 > 0$

$$\operatorname{mes}[(\Omega - d_1)\diagdown(\Omega - d_2)] \leqslant D(d_2 - d_1)\operatorname{mes}\Omega. \tag{1}$$

Мы скажем, что Ω — область типа D.

Полосой Γ ширины h мы будем называть $\frac{h}{2}$-окрестность гиперплоскости. Например, неравенство $|(k, \omega)| \leqslant a$ определяет полосу Γ, и если $\max|k_i| \geqslant 1$, то ширина Γ не более $2a$. Легко видеть, что в n-мерном пространстве ω

$$\operatorname{mes}(\Omega \cap \Gamma) \leqslant Dnh\operatorname{mes}\Omega. \tag{2}$$

Пусть $\Omega' \subseteq \Omega$. Мы скажем, что Ω' **имеет в** Ω **тип** N, если $\Omega' = (\Omega - d)\diagdown\bigcup(\Gamma_i)$, где $d > 0$ и $\bigcup\Gamma_i$ — **объединение не более чем** N полос любой ширины. Очевидно, для $d_2 > d_1 > 0$

$$(\Omega' - d_1)\diagdown(\Omega' - d_2) \subseteq [(\Omega - d - d_1)\diagdown(\Omega - d - d_2)] \cup \{[(\bigcup\Gamma_i + d_2)\diagdown(\bigcup\Gamma_i + d_1)] \cap \Omega\},$$

поэтому из (1) и (2) вытекает

$$\operatorname{mes}[(\Omega' - d_1)\diagdown(\Omega' - d_2)] \leqslant D(1 + hN)(d_2 - d_1)\operatorname{mes}\Omega. \tag{3}$$

2°. Целые точки. Число разных векторов k с целыми координатами $k_1, \ldots, k_n$ в n-мерном пространстве, для которых $|k| = m \geqslant 1$, не превосходит $2^n m^{n-1}$. Число векторов с $|k| \leqslant m$ не превосходит $2^n m^n$.

Доказательства очевидны.

3°. Арифметическая лемма. Пусть Ω — область типа D. Обозначим через Ω_{KN} (где $K > 0$, $N > 1$) множество $\omega \in \Omega$, для которых

$$|(k, \omega)| \geqslant K|k|^{-\nu} \qquad (\nu = n+1) \tag{4}$$

при любых целочисленных векторах k, $0 < |k| < N$. Пусть $d_1, d_2, \ldots > 0$ и $1 < N_1 < N_2 < \ldots$ Введем области Ω_s соотношениями

$$\Omega_0 = \Omega, \quad \Omega_s = \Omega'_{s-1} - d_s, \quad \Omega'_{s-1} = (\Omega_{s-1})_{KN_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

Лемма. *При любом* $s \geqslant 1$ *и любом* $d > 0$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname{mes}[\Omega_{s-1}\diagdown(\Omega'_{s-1} - d)] \leqslant LD[K\sigma_s + dN_s^n]\operatorname{mes}\Omega, \tag{5}$$

где

$$\sigma_s = \sum_{N_{s-1} \leqslant m < N_s} m^{-2}, \quad N_0 = 1, \qquad L = 2^{n+2} n.$$

Доказательство. *Во-первых, убедимся, что*

$$\operatorname{mes}[\Omega_{s-1} \setminus \Omega'_{s-1}] \leqslant LDK\sigma_s \operatorname{mes} \Omega. \tag{6}$$

Действительно, (4) определяет полосу Γ_k ширины не более $2K|k|^{-\nu}$ по п. 1°. Полос Γ_k с $|k| = m$ по п. 2° не более $2^n m^{n-1}$. В соответствии с (2)

$$\sum_{|k|=m} \operatorname{mes}(\Omega \cap \Gamma_k) \leqslant LDKm^{-2} \operatorname{mes} \Omega.$$

Суммируя по m, $N_{s-1} \leqslant m < N_s$, получим (6). Далее, разных k с $|k| \leqslant m$ не более $2^n m^n$. Поэтому Ω'_{s-1} имеет в Ω тип $2^n N_s^n$ и, согласно (3),

$$\operatorname{mes}[\Omega'_{s-1} \setminus (\Omega'_{s-1} - d)] \leqslant d(1 + 2n2^n N_s^n) D \operatorname{mes} \Omega. \tag{7}$$

Из (6) и (7) сразу вытекает (5).

4.2. **Аналитические леммы.** Эти леммы позволяют оценивать коэффициенты Фурье и производные аналитических функций через сами функции и обратно.

1°. Неравенства. *При любых* $m > 0$, $\nu > 0$, $\delta > 0$

$$m^\nu \leqslant \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu \frac{e^{m\delta}}{\delta^\nu}, \qquad \ln \frac{1}{\delta} \leqslant \frac{\nu}{e} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\nu}}. \tag{8}$$

Действительно, функция $f(x) = x - \nu \ln x$ имеет минимум при $x = \nu$. Поэтому $\frac{e^x}{x^\nu} \geqslant \frac{e^\nu}{\nu^\nu}$. При $x = m\delta$, $x = |\ln \delta|$ получаем (8).

2°. Коэффициенты Фурье. *Пусть*

$$f(q) = \sum_k f_k e^{i(k,\, q)}.$$

Тогда

A) *Если при* $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho$ *всегда* $|f(q)| \leqslant M$, *то* $|f_k| \leqslant Me^{-|k|\rho}$.

B) *Если* $|f_k| \leqslant Me^{-|k|\rho}$, *то при* $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho - \delta$ (*где* $0 < \delta < \varrho < 1$) *будет*

$$|f(q)| < 4^n \delta^{-n} M.$$

Для доказательства A) в формуле

$$f_k = (2\pi)^{-n} \int f(q) e^{-i(k,\, q)} dq$$

нужно сдвинуть контур интегрирования на $i\varrho$. Доказательство B):

$$|f| \leqslant \sum_k Me^{-|k|\delta} = M\Big(1 + 2\sum_{m>0} e^{-m\delta}\Big)^n = M(1 + e^{-\delta})^n (1 - e^{-\delta})^{-n} < 4^n \delta^{-n} M,$$

так как $(1 + e^{-\delta})(1 - e^{-\delta})^{-1} < 4\delta^{-1}$ *при* $0 < \delta < 1$.

Введем обозначение

$$R_N f = \sum_{|k| \geqslant N} f_k e^{i(k,\, q)}.$$

C) *Если*

$$|f_k| \leqslant Me^{-|k|\rho} \text{ и } 2\delta < \gamma, \ \delta + \gamma < \varrho < 1,$$

то при

$$|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho - \delta - \gamma$$

будет

$$|R_N f| < \left(\frac{2n}{e}\right)^n \frac{M}{\delta^{n+1}} e^{-N\gamma}.$$

Действительно, учитывая 2° п. 4.1 и (8), находим

$$|R_N f| < M \sum_{m \geqslant N} (2m)^n e^{-m(\delta+\gamma)} <$$

$$< M \left(\frac{2n}{e\delta}\right)^n \sum_{m \geqslant N} e^{-m\gamma} < \left(\frac{2n}{e}\right)^n \frac{M}{\delta^n} \frac{e^{-N\gamma}}{1-e^{-\gamma}} < \left(\frac{2n}{e}\right)^n \frac{M}{\delta^{n+1}} e^{-N\gamma},$$

так как $1-e^{-\gamma} > \delta$ при $\gamma > 2\delta$, $\delta < 0{,}5$.

3°. Оценки Коши. *Если при $x \in U$ функция $f(x)$ аналитична и $|f(x)| \leqslant M$, то при $x \in U-\delta$*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant \frac{M}{\delta}, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| \leqslant \frac{2M}{\delta^2}.$$

Доказательство получается из интеграла Коши

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - x}.$$

4°. Формулы Лагранжа и Тейлора. *Если на отрезке ab пространства $x = x_1, \ldots, x_n$ функция $f(x)$ (вообще векторная: $f = f_1, \ldots, f_m$) допускает оценку $|df| \leqslant C|dx|$, то $|f(b)-f(a)| \leqslant C|b-a|$. В частности,*

$$|f(b)-f(a)| \leqslant cn|b-a|,$$

если $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leqslant c$. *Если же в области $|x_i - a_i| \leqslant |b_i - a_i|$ везде $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant \Theta$, то*

$$\left|f(b)-f(a)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_a, b-a\right)\right| \leqslant \frac{\Theta n^2}{2}|b-a|^2.$$

Для доказательства достаточно приращения записать в виде интегралов от производных.

4.3. Геометрические леммы. Эти леммы гарантируют однозначную обратимость замен переменных.

1°. ε-сдвиг. *Пусть U — замкнутая область в евклидовом пространстве R и A — непрерывное отображение U в R, причем $|Ax-x| < \varepsilon$. Тогда его образ AU содержит $U-\varepsilon$.*

Действительно, пусть $x_0 \in (U-\varepsilon) \setminus AU$. Тогда отображение

$$A^*x = x_0 + \varepsilon|Ax - x_0|^{-1}(Ax - x_0)$$

непрерывно при $|x-x_0| \leqslant \varepsilon$. Следовательно, степень $d(t)$ [27] отображения A^* сферы $S_{t\varepsilon}$: $|x-x_0| = t\varepsilon$ $(0 < t \leqslant 1)$ на сферу S_ε не зависит от t. Но $d(1) = 1$. Значит, $x_0 \in AU$.

2°. Обращение ε-сдвига. *Пусть в условиях 1° при $|dx| \neq 0$ всегда $|dA| \neq 0$. Тогда A есть диффеоморфизм области $U-4\varepsilon$.*

Действительно, пусть $x, y \in U-4\varepsilon$, $Ax = Ay = z$. Шар D радиуса 2ε с центром в середине отрезка xy лежит в $U-\varepsilon$. Образ $Axy \subset D$ отрезка xy есть замкнутая в z дуга, которую в D можно стянуть в z. Из п. 1° и $|dA| \neq 0$ вытекает, что отрезок xy можно стянуть в точку, оставляя концы на месте. Значит $x = y$.

3°. Каноническое преобразование. *Пусть* G *и* U — *области* n-*мерных евклидовых пространств* P *и* q. *Если функция* $S(P, q)$ *в* $G\times U$ *аналитична и* $|S|\leqslant M\leqslant\beta^2 16^{-1}n^{-1}$, *то соотношения* $p=P+S_q$, $Q=q+S_P$ *определяют канонический диффеоморфизм* B: $P, Q\to p, q$ *области* $P\in G-2\beta$, $Q\in U-3\beta$, *причем* $|B-E|\leqslant M\beta^{-1}$, $|dB|<2|dx|$ $(x=P, Q)$ *и* $|P-p|\leqslant M\delta^{-1}$ *при* $Q\in U-3\beta-\delta$.

Доказательство. При каждом $P\in G-\beta$ для отображения B_P: $q\to q+S_P$ по Коши (3° п. 4.2) имеем

$$|S_P, S_q|\leqslant M\beta^{-1}<0{,}2\beta,\quad |S_{PP}, S_{Pq}, S_{qq}|\leqslant 2M\beta^{-2}<4^{-1}n^{-1}.$$

Следовательно,

$$|B_P-E|\leqslant M\beta^{-1}<0{,}2\beta,\quad |dB_P|\neq 0.$$

По п. 2° B_P — диффеоморфизм области $q\in U-1{,}8\beta$, а по п. 1° ее образ содержит область $Q\in U-2\beta$. Поэтому при $P\in G-\beta$, $Q\in U-2\beta$ определено отображение B: $P, Q\to p, q=P+S_q, B_P^{-1}(Q)$ (где в S_q после дифференцирования подставлено $q=B_P^{-1}(Q)$). При $P\in G-2\beta$, $Q\in U-3\beta$ находим

$$|B-E|\leqslant M\beta^{-1}<0{,}2\beta,\quad |dB-dx|<0{,}5|dx|.$$

Теперь п. 3° вытекает из п. 2° и оценок Коши (3° п. 4.2).

4°. *Пусть* A — *отображение шара* $U_\varepsilon(x_0)$: $|x-x_0|\leqslant\varepsilon$ *и* $\theta|dx|\leqslant|dA|\leqslant\Theta|dx|$. *Тогда*

$$U_{\theta\varepsilon}(Ax_0)\subseteq AU_\varepsilon(x_0)\subseteq U_{\Theta\varepsilon}(Ax_0).$$

Действительно, правое неравенство следует из формулы Лагранжа (4° п. 4.2). Пусть $y(t)=y_0+ty$, где $y_0=Ax_0$, $0<t<\infty$. При малых t существует непрерывная ветвь $A^{-1}(y(t))\subseteq U_\varepsilon(x_0)$, где $A^{-1}(y_0)=x_0$. Пусть $\bar t$ — наибольшее t, при котором $A^{-1}(y(t))\subseteq U_\varepsilon(x_0)$; тогда $|A^{-1}(\bar y)-x_0|=\varepsilon$ в точке $\bar y=y(\bar t)$. Но по формуле Лагранжа (4° п. 4.2) имеем

$$|A^{-1}\bar y-A^{-1}y_0|\leqslant\theta^{-1}|\bar y-y_0|,$$

откуда $|\bar y-y_0|\geqslant\theta\varepsilon$, что и требовалось доказать.

5°. Лемма о вариации частоты. *Пусть* A — *диффеоморфизм области* G *пространства* p *на область* Ω *пространства* ω *и* $\theta|dp|\leqslant|dA|\leqslant\Theta|dp|$. *Далее, пусть* A' — *отображение области* $G-\beta$: $p\to A'(p)=A(p)+\Delta(p)$, *где* $|\Delta(p)|<\beta$, $|d\Delta|<\delta\theta|dp|$. *Пусть* Ω_0 — *подобласть* Ω *и* $\beta>0$, $b>0$, $0<\delta<1$. *Тогда существуют области* G', G_1, *такие, что*

1) $G\supseteq G-\beta\supseteq G'\supseteq G_1+b\supseteq G_1$,

2) A' — *диффеоморфизм* G', *и* $\theta'|dp|<|dA'|<\Theta'|dp|$, *где* $\theta'=\theta(1-\delta)$, $\Theta'=\Theta(1+\delta)$.

3) $A'G_1=\Omega_1=\Omega_0-d$, *где* $d=2\Theta b+(S+\Theta)\beta$, $A'(G_1+b)\subseteq\Omega_0$.

4) $\operatorname{mes}(G-G_1)\leqslant\theta^{-n}\operatorname{mes}(\Omega-\bar\Omega_1)$, *где* $\bar\Omega_1=\Omega_0-\bar d$, $\bar d=2\Theta b+(6+\Theta)\beta$.

Доказательство. При $\omega\in A(G-\beta)$, очевидно, $|A'A^{-1}-E|<\beta$ и $|dA'A^{-1}|>(1-\delta)|d\omega|$. Согласно п. 2° при $\omega\in A(G-\beta)-4\beta$ отображение $A'A^{-1}$ — диффеоморфизм, и согласно п. 1° имеем $A'A^{-1}[A(G-\beta)-4\beta]\supseteq A(G-\beta)-5\beta$. Следовательно, A' — диффеоморфизм в области $G''=A^{-1}[A(G-\beta)-4\beta]$, и $A'G''\supseteq A(G-\beta)-5\beta$. Но по п. 4° $A(G-\beta)\supseteq\Omega-\Theta\beta$, поэтому $A'G'' \supseteq \Omega' = \Omega - (5+\Theta)\ \beta$. Положим $G' = A'^{-1}\Omega'$, $G_1 = A'^{-1}\Omega_1$, где $\Omega_1 = \Omega_0 - d$, $d = 2\Theta b + (5+\Theta)\beta$. Тогда $\Omega_1 + 2\Theta b \subseteq \Omega'$ и по п. 4° имеем $G_1 + b \subseteq G'$. Справедливость заключений 2), 3) очевидна. Согласно п. 1° $AG_1 = AA'^{-1}\Omega_1 \supseteq \Omega_1 - \beta = \bar{\Omega}_1$, поэтому

$$\operatorname{mes}(G - G_1) = \int\limits_{\Omega - AG_1} \left(\det\left|\frac{\partial A}{\partial p}\right|\right)^{-1} d\omega \leqslant \theta^{-n}\operatorname{mes}(\Omega - AG_1) \leqslant \theta^{-n}\operatorname{mes}(\Omega - \bar{\Omega}_1).$$

4.4. Леммы о сходимости. 1°. *Пусть дана последовательность областей F_s с диффеоморфизмами B_s: $F_s \to F_{s-1}$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Предположим, что*

1) $|B_s - E| \leqslant d_s$,
2) $F_s \subseteq F_{s-1} - d_s$,
3) $|dB_s| \leqslant 2|dx|$,
4) $d_s \leqslant c4^{-s}$.

Тогда последовательность $S_s = B_1B_2 \ldots B_s$ $(s = 1, 2, 3 \ldots)$ равномерно сходится на $F_\infty = \bigcap F_s$ к непрерывному отображению S_∞, для которого $|S_\infty - E| \leqslant c$.

Доказательство. Пусть $x \in F_s$. Из 1) вытекает $|B_sx - x| \leqslant d_s$. Из 2) вытекает, что к отрезку x, B_sx и отображению S_{s-1} применима формула Лагранжа (4° п. 4.2). Из 3) следует $|dS_{s-1}| \leqslant 2^s|dx|$. Согласно 4)

$$|S_sx - S_{s-1}x| = |S_{s-1}B_sx - S_{s-1}x| \leqslant 2^sd_s \leqslant 2^{-s}c,$$

что и требовалось.

2°. *Пусть F означает d-окрестность отрезка $x = x_0 + vt$, где $0 \leqslant t \leqslant \frac{d}{\varepsilon}$. Пусть $X(x)$ — гладкое векторное поле в F, и $|X - v| \leqslant \varepsilon$. Обозначим через $x(t)$ решение уравнения $\frac{dx}{dt} = X(x)$ с начальным условием $x(0) = x_0$. Тогда $|x(t) - (x_0 + vt)| \leqslant d$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{d}{\varepsilon}$.*

Доказательство. Рассмотрим $y(t) = x(t) - (x_0 + vt)$. Пусть при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ всегда $|y(t)| < d$ и $|y(t_0)| = d$. Так как $\left|\frac{dy}{dt}\right| \leqslant \varepsilon$ при $t < t_0$, а $y(0) = 0$, то по формуле Лагранжа $|y(t_0)| \leqslant \varepsilon t_0$, откуда $t_0 \geqslant \frac{d}{\varepsilon}$, что и требовалось.

3°. *Пусть в условиях п. 1° в F_0 дано гладкое векторное поле $X_0(x)$, определяющее движение $S_0^t(x)$: $\frac{d}{dt}S_0^tx = X_0(S_0^tx)$, $S_0^0(x) = x$. Естественно возникают движения $S_s^t = S_s^{-1}S_0^tS_s$ и соответствующие поля X_s на F_s: $X_s(x) = \frac{d}{dt}(S_s^tx)\Big|_{t=0}$. Предположим, что*

5) *последовательность $X_s(x)$ сходится при $s \to \infty$, $x \in F_\infty$ к $X_\infty(x)$ и на F_∞ имеем $|X_s - X_\infty| \leqslant d_{s+1}$,*

6) *отрезок $x = x_0 + vt$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ принадлежит F_∞ и на этом отрезке $X_\infty = v$,*

7) *на F_s имеем $\left|\frac{\partial X_s}{\partial x}\right| \leqslant \Theta$, где постоянная Θ не зависит от s.*

В предположениях 1) — 7) *при* $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{1+\Theta}$ *будет*

$$S_0^t(S_\infty, x_0) = S_\infty(x_0 + vt) \subseteq F_0.$$

Доказательство. Покажем, что при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{1+\Theta}$

$$|S_s^t x_0 - (x_0 + vt)| \leqslant d_{s+1}. \tag{9}$$

Согласно 5) и 6) $|X_s - v| \leqslant d_{s+1}$ на отрезке $x_0 + vt$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{1+\Theta}\right)$. Согласно 2) d_{s+1}-окрестность этого отрезка принадлежит F_s. В этой окрестности по формуле Лагранжа (4° п. 4.2) из 7) получаем $|X_s - v| \leqslant (1+\Theta) d_{s+1}$. Полагая в п. 2° $d = d_{s+1}$ и $\varepsilon = (1+\Theta) d_{s+1}$, получим (9). Ввиду (9) и 2) отрезок $(x_0 + vt, S_s^t x_0)$ принадлежит области F_s. По формуле Лагранжа, ввиду 3) и 4), $|S_s S_s^t x - S_s(x_0 + vt)| \to 0$ при $s \to \infty$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{1+\Theta}$, что и требовалось (ибо $S_s S_s^t = S_s^t S_s$).

4°. Мера предела. *Пусть F — компакт, и S_s ($s = 1, 2, \ldots$) — последовательность непрерывных отображений F на F_s в евклидово пространство R, сходящаяся равномерно к отображению S_∞ на $S_\infty F$. Тогда*

$$\operatorname{mes} S_\infty F \geqslant \overline{\lim} \operatorname{mes} F_s.$$

Действительно, $\operatorname{mes}(S_\infty F + \delta) < \operatorname{mes} F + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ при $\delta < \delta(\varepsilon)$. В силу равномерной сходимости $F_0 \subseteq S_\infty F + \delta$ при $s > s(\delta)$, что и требовалось: $\operatorname{mes} F_s \leqslant \operatorname{mes}(S_\infty F + \delta) < \operatorname{mes} S_\infty F + \varepsilon$.

4.5. Обозначения. 1°. Функции. Все рассматриваемые функции предполагаются комплексно-аналитическими и действительными при действительных значениях аргументов. Рассматриваются n-мерные комплексные пространства канонически сопряженных переменных $p = p_1, \ldots, p_n$; $q = q_1, \ldots, q_n$ (обозначаемых также $x = x_1, \ldots, x_{2n} = p$, $q = p_1, \ldots, q_n$) и пространство частот $\omega = \omega_1, \ldots, \omega_n$. Нормой в этих пространствах служит максимум модулей координат. Рассматриваемые функции по q_i имеют период 2π и разлагаются в ряд Фурье

$$f(q) = \sum f_k e^{i(k, q)} = f_0 + \tilde{f}(q) = f_0 + \sum{}' f_k e^{i(k, q)} \qquad \left(\sum = \sum_{-\infty < k < +\infty}, \ \sum{}' = \sum_{k \neq 0}\right),$$

где $(k, q) = k_1 q_1 + \ldots + k_n q_n$ и k — вектор с целыми координатами k_i. В сопряженном к q пространстве номеров гармоник k нормой служит $|k| = |k_1| + \ldots + |k_n|$.

Мы пользуемся сокращенными обозначениями типа

$$f_p = \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial p_n} = f_{p_1}, \ \ldots, \ f_{p_n},$$

где $f(p)$ — числовая или векторная функция $f(p_1, \ldots, p_n)$.

2°. Области. Пусть U — компактная комплексная область, т. е. ограниченная область в комплексном числовом пространстве, рассматриваемая вместе с границей. Если $d > 0$, то через $U + d$, $U - d$ обозначаются d-окрестность области U и множество точек, входящих в U с d-окрестностью. $U_1 \bigcup U_2$ означает объединение, $U_1 \bigcap U_2$ — общую часть, $U_1 \setminus U_2$ — часть, входящую в U_1, но не входящую в U_2. $U_1 \subseteq U_2$ означает, что всякая точка x из $U_1 (x \in U_1)$ принадлежит $U_2 (x \in U_2)$. Через $\operatorname{Re} U$ обозначается пересечение области U с действительным пространством, Im — знак мнимой части. $\operatorname{mes} U$ означает лебегову меру [28] $\operatorname{Re} U$, даже если область U комплексная.

Буквой G обозначается компактная область в пространстве p, буквой Ω — в пространстве ω (оба комплексные). Через F обозначается область в пространстве $x = p, q$, определяемая условиями $p \in G$, $|\operatorname{Im} q| \leqslant \rho$. Точки q и $q + 2\pi k$ при этом отождествлены как в § 1, так что $\operatorname{mes} F = (2\pi)^n \operatorname{mes} G$.

3°. Отображения. Рассматриваемые отображения задаются аналитическими функциями. Диффеоморфным отображением или диффеоморфизмом компактной области U_1 на U_2 называется взаимно однозначное отображение, непрерывно дифференцируемое вместе со своим обратным в каждой точке U_1 (соответственно U_2). Дифференциал отображения A в точке x — это линейный оператор $dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx$.

Через A обозначается диффеоморфизм областей G и Ω; B и S — диффеоморфизмы областей F, являющиеся каноническими преобразованиями (см., например, [1]). E означает тождественное преобразование $x \to x$.

4°. Постоянные. Числа θ, Θ, ρ, $\varkappa$, D — положительные константы. Числа β, γ, δ, M, K — очень малые по сравнению с предыдущими положительные постоянные, причем $\gamma \gg \delta \gg \beta \gg M$.

Числа N — большие положительные.

Через L, ν, T обозначаются большие положительные абсолютные (т. е. зависящие лишь от числа степеней свободы n) постоянные.

Индекс s нумерует приближения.

§ 5. Добавление. О вращении тяжелого несимметричного твердого тела

Мы покажем, что из теоремы 1 § 2 вытекает устойчивость быстрого вращения тяжелого несимметричного твердого тела, закрепленного в произвольной точке O. Оказывается, *величина и угол наклона к горизонту вектора момента количества движения* **M** *вечно остаются вблизи своих начальных значений* (рис. 2). В частности, *если тело приведено в быстрое вращение вокруг большой или малой оси инерции*[1], *то вектор угловой скорости* Ω *в теле вечно будет оставаться вблизи этой оси*, а в пространстве будет медленно прецессировать вокруг направления силы тяжести. При этом величина угловой скорости Ω и угол наклона оси к горизонту вечно останутся вблизи своих начальных значений (рис. 3).

Говоря о быстром вращении, мы предполагаем, что потенциальная энергия тела в поле тяжести Π мала по сравнению с кинетической энергией вращения T. Нам будет удобнее рассматривать не $T \gg 1$, а $\Pi = \varepsilon U \ll 1$, т. е. движение в слабом поле тяготения (что математически, конечно, эквивалентно быстрому вращению). Полная энергия будет

$$H = T + \varepsilon U.$$

[1]) По отношению к закрепленной точке O. На рис. 2 и 3 тело заменено своим эллипсоидом инерции относительно O.

В качестве невозмущенного движения ($\varepsilon = 0$) мы рассмотрим движение в отсутствие силы тяжести, т. е. движение Эйлера — Пуансо.

5.1. Случай Эйлера — Пуансо. Твердое тело, закрепленное в неподвижной точке, является системой с 3 степенями свободы и 6-мерным фазовым пространством. При отсутствии силы тяжести имеется 4 независимых однозначных первых интеграла

$$T,\ M_x,\ M_y,\ M_z \tag{1}$$

(энергия и 3 компоненты вектора $\mathbf{M}$). Эти 4 функции точки фазового пространства не меняют своих значений при движении. Точки 6-мерного фазового пространства, в которых 4 функции принимают заданные значения (1), образуют, вообще говоря, двумерное многообразие V. Покажем, что *эти многообразия* $V(T, \mathbf{M})$ *являются торами.*

В самом деле, многообразие V инвариантно, поэтому вектор фазовой

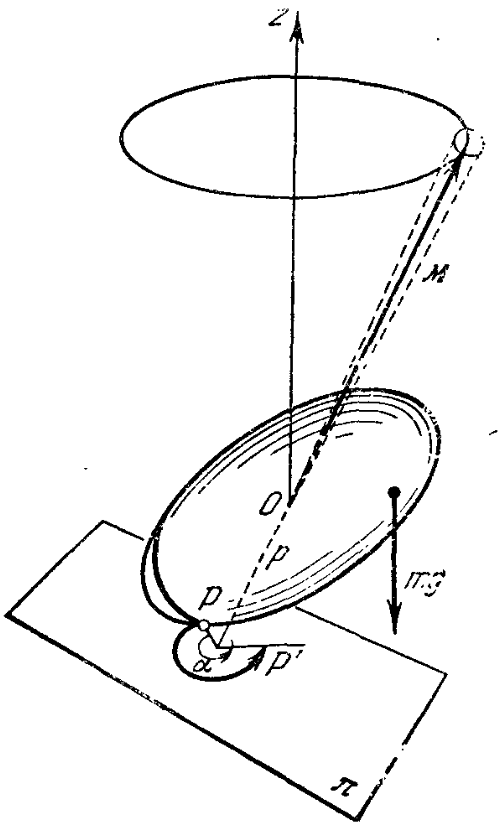

Рис. 2.

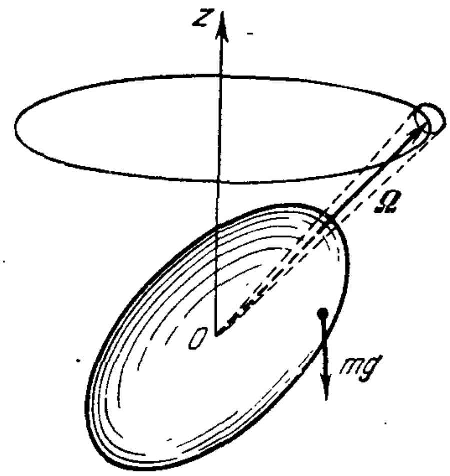

Рис. 3.

скорости в каждой точке V касается V; следовательно, V допускает векторное поле без особых точек. Очевидно, V ориентируемо и компактно. Единственное компактное двумерное ориентируемое многообразие, допускающее касательное векторное поле без особых точек, есть, как известно, тор.

Известно и легко показать (см. 5.2), что фазовая точка движется по тору V условно-периодически, с двумя частотами ω_1 и ω_2. Чтобы выяснить смысл частот ω_1 и ω_2, обратимся к картине движения, найденной Пуансо (см. рис. 2).

Эллипсоид инерции с центром в O при движении тела катится без скольжения по неподвижной плоскости π. Плоскость π перпендикулярна вектору $\mathbf{M}$ и отстоит от O на расстояние p, где

$$p^2 = \frac{2T}{M^2}, \qquad M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2. \tag{2}$$

Пусть вначале эллипсоид касается плоскости π в точке P. При качении точка касания меняется, описывая на эллипсоиде замкнутую кривую (полодию). Через некоторое время τ в соприкосновение с плоскостью снова придет исходная точка P. На плоскости π точкой касания будет уже не P, а P': эллипсоид повернется вокруг оси **M** на угол α.

Частоты ω_1 и ω_2 даются формулами

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau}, \quad \omega_2 = \frac{\alpha}{\tau}. \tag{3}$$

Величины ω_1 и ω_2 определяются значениями интегралов T и M^2, а их отношение $\alpha/2\pi$ зависит, очевидно, только от геометрических[1]) параметров

$$\alpha = \alpha(p, a, b, c),$$

где $a \geqslant b \geqslant c$ — главные полуоси эллипсоида инерции.

5.2. Приведение к задаче с двумя степенями свободы. Как в случае Эйлера — Пуансо, так и в присутствии силы тяжести число степеней свободы легко понизить с 3 до 2. Выберем в качестве обобщенных координат углы Эйлера φ, ϑ, ψ, приняв за неподвижную ось Oz вертикальную прямую, а за подвижные оси — главные оси эллипсоида инерции в закрепленной точке O. Функция Лагранжа

$$L = T(\dot\varphi, \dot\vartheta, \dot\psi; \vartheta, \psi) - \varepsilon U(\vartheta, \psi)$$

не содержит циклической координаты φ. Соответствующий импульс

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = M_z$$

сохраняется. Функцию

$$H = T(p_\vartheta, p_\psi; \vartheta, \psi; M_z) + \varepsilon U(\vartheta, \psi) \tag{4}$$

можно рассматривать как функцию Гамильтона системы с двумя степенями свободы ϑ, ψ, зависящую от параметра M_z. Мы зафиксируем значение M_z и в дальнейшем часто не будем указывать зависимость функций от этого параметра.

Рассмотрим сперва случай $\varepsilon = 0$ (случай Эйлера — Пуансо). Система интегрируема благодаря наличию двух первых интегралов

$$H = T = \mathrm{const}, \qquad M^2(p_\vartheta, p_\psi; \vartheta, \psi; M_z) = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Точки с одинаковыми значениями T и M^2 образуют в 4-мерном фазовом пространстве p_ϑ, p_ψ; ϑ, ψ двумерный[2]) инвариантный тор $V(T, M^2)$. Каждый такой тор соответствует определенному движению Эйлера — Пуансо; фазовая точка движется по нему условно-периодически с частотами (3).

Для интегрирования системы (4) при $\varepsilon = 0$ удобно ввести каноническим преобразованием

$$p_\vartheta, p_\psi; \vartheta, \psi \to I_1, I_2; w_1, w_2 \tag{6}$$

---

[1]) Величины p, a, b, c имеют, впрочем, размерность (масса)$^{-\frac{1}{2}}$ (длина)$^{-1}$.

[2]) *Исключение составляют лишь те значения* T *и* M^2, *при которых тело может* вращаться вокруг оси инерции, т. е. в (2) $p = a$, b или c.

переменные действие — угол[1]). Величины I_1 и I_2 зависят лишь от T и M^2, поэтому T можно представить в виде функции

$$T = H_0(I_1, I_2),$$

производные которой по I_1, I_2 равны частотам (3):

$$\omega_1 = \dot{w}_1 = \frac{\partial H_0}{\partial I_1}, \qquad \omega_2 = \dot{w}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial I_2}.$$

При наличии тяжести ($\varepsilon \neq 0$) функция (4) принимает вид

$$H = H_0(I_1, I_2) + \varepsilon U(I_1, I_2; w_1, w_2), \tag{7}$$

где «возмущение» εU имеет период 2π по w_1 и w_2.

5.3. Исследование системы с функцией Гамильтона (7). Функция (7) имеет вид (1) § 2. В 5.4 мы покажем, что выполнено условие невырожденности (2) § 2. Поэтому теорема 1 применима, и система с функцией Гамильтона (7) имеет при достаточно малых ε инвариантные торы, так что для большинства начальных условий движение условно-периодично.

Но так как система (7) имеет две степени свободы, можно утверждать большее. Рассмотрим отношение частот невозмущенной системы ω_1/ω_2. Как мы покажем в 5.4, при фиксированной энергии T это отношение $\frac{\alpha}{2\pi}$ меняется от тора к тору. Отсюда следует, что у возмущенной системы инвариантные торы имеются на каждом уровне энергии и в любой окрестности Δ любой точки фазового пространства, если $\varepsilon(\Delta)$ достаточно мало. Эти двумерные инвариантные торы делят трехмерный инвариантный уровень энергии (см. рис. 1). Поэтому даже для тех начальных условий, которые не попадают на инвариантный тор возмущенной системы, фазовая точка при движении все время остается зажатой между двумя такими близкими торами. Из утверждения 3° теоремы 1 вытекает, что при достаточно малых ε изменение $I_1(t)$, $I_2(t)$ за бесконечное время будет сколь угодно малым.

Но M^2 есть функция от I, I_2. Мы приходим к выводу, что *при быстром вращении несимметричного тяжелого твердого тела величина вектора момента количества движения* **M** *мало меняется в течение бесконечного промежутка времени.*

Более точно, справедлива следующая

Теорема. *Для любого* $\varkappa > 0$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что если* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *то при всех* t, $-\infty < t < +\infty$, *будет* $|M^2(t) - M^2(0)| < \varkappa$.

---

[1]) Каноническое преобразование (6) определяется формулами

$$p_\vartheta = \frac{\partial S}{\partial \vartheta}, \qquad p_\psi = \frac{\partial S}{\partial \psi}; \qquad w_1 = \frac{\partial S}{\partial I_1}, \qquad w_2 = \frac{\partial S}{\partial I_2},$$

где

$$S(I_1, I_2; \vartheta, \psi) = \int p_\vartheta \, d\vartheta + p_\psi \, d\psi. \tag{8}$$

Здесь интеграл берется по пути, лежащему на торе $V(T, M^2)$, и не зависит от пути интегрирования (в малом). $2\pi I_1$ и $2\pi I_2$ суть значения интеграла (8) по базисным циклам тора.

Ввиду точного сохранения компоненты M_z, мало меняется также наклон **M** к горизонту. Однако азимут вектора **M** уже не будет сохраняться, как в случае Эйлера — Пуансо. Вектор **M** совершает медленную прецессию вокруг вертикали, а тело вращается относительно **M** приблизительно по Пуансо (рис. 2).

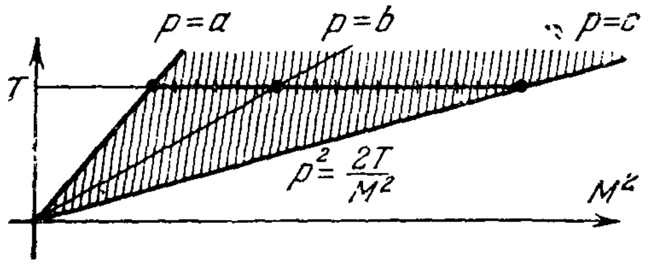

Рис. 4.

В 6-мерном фазовом пространстве $p_\varphi p_\vartheta p_\psi$; φ, ϑ, ψ найденным выше двумерным инвариантным торам соответствуют трехмерные инвариантные торы и условно-периодические движения с тремя частотами ω_1, ω_2, ω_3 (вращение, нутация, прецессия). Частота прецессии ω_3 мала вместе с ε, а при $\varepsilon=0$ трехмерные торы распадаются на двумерные торы V, рассмотренные в 5.1.

5.4. Проверка условий невырожденности. Нам осталось проверить выполнение условия (2) § 2, которое имеет вид (рис. 4):

$$\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i\,\partial I_j}\right| = \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(I_1, I_2)} = \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(\omega_1, \alpha)}\,\frac{\partial(\omega_1, \alpha)}{\partial(T, p)}\,\frac{\partial(T, p)}{\partial(I_1, I_2)} \neq 0. \tag{9}$$

Если $T\neq 0$ и эллипсоид инерции не шар $(a > c)$, то, очевидно,

$$\frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(\omega_1, \omega_2/\omega_1)} = \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(\omega_1, \alpha)} \neq 0, \quad \frac{\partial(T, p)}{\partial(I_1, I_2)} \neq 0. \tag{10}$$

Из соображения подобия ясно, что $\omega_1 = K(p)\sqrt{T}$, где $K = K(p;\, a,\, b,\, c) \neq 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial(\omega_1, \alpha)}{\partial(T, p)} = \frac{K}{2\sqrt{T}}\,\frac{d\alpha}{dp}. \tag{11}$$

Остается доказать, что отношение **частот** $\alpha(p)/2\pi$ ни при каких значениях главных полуосей $a \geqslant b \geqslant c > 0$. $a > c$ **не сводится** к постоянной.

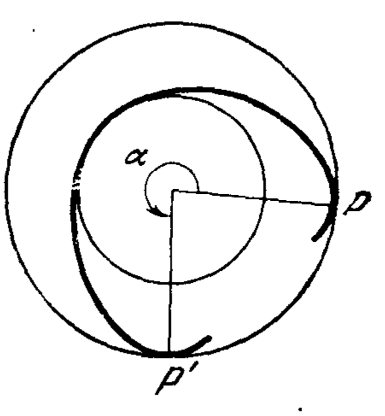

Рис. 5.

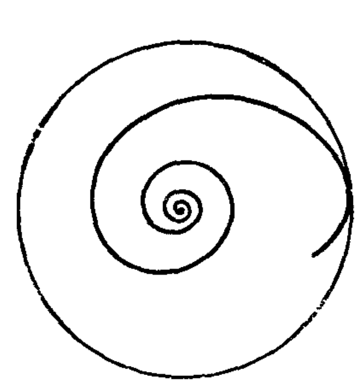

Рис. 6.

Для доказательства воспользуемся тем, что при повороте на угол α (см. рис. 2) кривая, описываемая точкой касания на плоскости π (герполодия; см. рис. 5), совмещается сама с собой. Легко сообразить, что если $a > c$, то

$$\lim_{p\to b} \alpha(p) = \infty. \tag{12}$$

В самом деле, при $p=b$ герполодия представляет собой спираль с бесконечным числом оборотов (рис. 6), откуда и вытекает (12).

Но $\alpha(p)\not\equiv\infty$, поэтому из (12) следует $\frac{d\alpha}{dp}\not\equiv 0$, откуда согласно (11) и (10) вытекает (9).

Таким образом, *при $a>c$ выполнено условие невырожденности* (9) *и сверх того отношение частот $\omega_2/\omega_1=\alpha/2\pi$ меняется вместе с p при фиксированном T* (см. рис. 4).

Мы исключили из рассмотрения случай $a=b=c$, но если $a=b=c$, то где бы ни был расположен центр тяжести, тело представляет собой симметричный волчок (случай Лагранжа).

Поступило в редакцию 15 января 1963.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Уиттекер, Аналитическая динамика, М.-Л., ОНТИ, 1937.

[2] В. И. Арнольд, Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики, Сиб. матем. журн. 4, № 2 (1963).

[3] К. Л. Зигель, О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона в окрестности положения равновесия, Математика 5, вып. 2 (1961), 129—156.

[4] H. Poincaré, Les metodes nouvelles de la mécanique céleste; I, II, III; Paris, 1892, 1893, 1899.

[5] Дж. Д. Биркгоф, Динамические системы, М.-Л., Гостехиздат, 1941.

[6] А. Н. Колмогоров, О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, ДАН 98, № 4 (1954), 527—530.

[7] А. Н. Колмогоров, Общая теория динамических систем и классическая механика, Международный математический конгресс в Амстердаме, М., **Физматгиз**, 1961, 187—208.

[8] В. И. Арнольд, Об устойчивости положений равновесия Гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае, ДАН **137**, № 2 (1961), 255—257.

[9] А. М. Леонтович, Об устойчивости Лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел, ДАН **143**, № 3 (1962), 525—528.

[10] В. И. Арнольд, О рождении условно-периодического движения из семейства периодических движений, ДАН 138, № 1 (1961), 13—15.

[11] В. И. Арнольд, О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона, ДАН **142**, № 4 (1962), 758—761.

[12] В. И. Арнольд, О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем, ДАН **145**, № 3 (1962), 487—490.

[13] Ю. Мозер, Новый метод построения решений нелинейных дифференциальных уравнений, Математика **6**, вып. 4 (1962), 3—10.

[14] Ю. Мозер, О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь, Математика **6**, вып. 5 (1962), 51—67.

[15] J. Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds, Ann. Math. (2), **63**, № 1 (1956), 20—63.

[16] Л. В. Канторович, Функциональный анализ и прикладная математика, УМН **3**, вып. 6 (1948), 89—185.

[17] В. И. Арнольд, Малые знаменатели I, Об отображениях окружности на себя, Изв. АН, сер. матем. **25**, № 1 (1961), 21—86.

[18] A. Stokes, Реферат А 2695, Math. Rev. **24**, № 5А (1962), 502—503.

[19] Дж. Литтльвуд, Математическая смесь, М., Физматгиз, 1962.

[20] В. И. Арнольд, Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике, Доклад на IV Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде, 1961.

[21] В. К. Мельников, О силовых линиях магнитного поля, ДАН **144**, № 4 (1962), 747—750.

[22] А. Е. Гельман, О приводимости одного класса систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, ДАН **116**, № 4 (1957), 535—537.

[23] Э. Г. Белага, О приводимости систем обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности условно-периодического движения, ДАН **143**, № 2 (1962), 255—258.

[24] Я. Г. Синай, Геодезические потоки на компактных поверхностях отрицательной кривизны, ДАН **136**, № 3 (1961), 549—552.

[25] L. Auslander, F. Hahn, L. Markus, Topological dynamics on nilmanifolds, Bull. Amer. Math. Soc. **67**, № 3 (1961), 289—299.

[26] L. Green, Spectra of nilflows, Bull. Amer. Math. Soc. **67**, № 4 (1961), 414—415.

[27] Г. Зейферт, В. Трельфаль, Топология, М.-Л., Гостехиздат, 1938.

[28] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, 2, Изд. МГУ, 1960.