

Владимир Игоревич  
АРНОЛЬД

ИЗБРАННОЕ-60



ФАЗИС  
Москва 1997

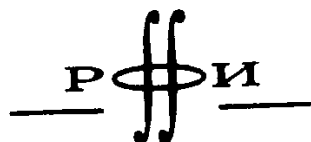
УДК 51

**Владимир Игоревич Арнольд**

**Избранное—60**

М.: ФАЗИС, 1997. XLVIII + 770 с.

ISBN 5-7036-0034-0



*Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 97-01-14152*

ISBN 5-7036-0034-0

© ФАЗИС, 1997

# Оглавление

<b>Жизнеописание</b> . . . . .	IX
<b>Карьера</b> . . . . .	XI
<b>Список работ</b> . . . . .	XIII
<b>Направления исследований</b> . . . . .	XXXIX
<b>Основные результаты</b> . . . . .	XLIII
<b>Избранные работы по математике</b> . . . . .	1
1. О функциях трех переменных . . . . .	3
2. Некоторые вопросы приближения и представления функций . . . . .	7
3. Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае . . . . .	19
4. О рождении условно периодического движения из семейства периодических движений . . . . .	25
5. О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона . . . . .	31
6. О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем . . . . .	39
7. Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области . . . . .	47
8. Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики . . . . .	55
9. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы . . . . .	61
10. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы . . . . .	69
11. О римановой кривизне групп диффеоморфизмов . . . . .	75
12. Об одном топологическом свойстве глобально канонических отображений классической механики . . . . .	81
13. О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости . . . . .	87

14. Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости . . . . .	91
15. Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем . . . . .	95
16. О характеристическом классе, входящем в условия квантования . . . . .	103
17. О косах алгебраических функций и когомологиях ласточкиных хвостов . . . . .	125
18. Замечания об особенностях конечной коразмерности в комплексных динамических системах . . . . .	129
19. Кольцо когомологий группы крашенных кос . . . . .	139
20. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела и идеальной жидкости . . . . .	143
21. Об одномерных когомологиях алгебры Ли бездивергентных векторных полей и о числах вращения динамических систем . . . . .	147
22. О классах когомологий алгебраических функций, сохраняющихся при преобразованиях Чирнгауэна . . . . .	151
23. О матрицах, зависящих от параметров . . . . .	155
24. О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм . . . . .	175
25. Моды и квазимоды . . . . .	189
26. Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей . . . . .	203
27. Критические точки функций и классификация каустик . . . . .	213
28. Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения . . . . .	215
29. Критические точки гладких функций и их нормальные формы: общий обзор . . . . .	237
30. Спектральная последовательность для приведения функций к нормальной форме . . . . .	265
31. Бифуркации инвариантных многообразий дифференциальных уравнений и нормальные формы окрестностей эллиптических кривых . . . . .	269
32. Эволюция волновых фронтов и эквивариантная лемма Морса . . . . .	289
33. Предисловие к книге «Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений» . . . . .	319

34. Несколько замечаний об антидинамо-теореме . . . . .	323
35. Некоторые нелинейные задачи . . . . .	335
36. Рост магнитного поля в трехмерном стационарном потоке несжимаемой жидкости . . . . .	345
37. Исчезающие перегибы . . . . .	351
38. Обратимые системы . . . . .	355
39. Первые шаги симплектической топологии . . . . .	365
40. Контактная структура, релаксационные колебания и особые точки неявных дифференциальных уравнений . . . . .	391
41. О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями . . . . .	397
42. Замечания о квазикристаллической симметрии . . . . .	413
43. О некоторых задачах симплектической топологии . . . . .	425
44. Разветвленное накрытие $CP^2 \rightarrow S^4$ , гиперболичность и проективная топология . . . . .	431
45. Предисловие к русскому переводу книги Дж. Бруса и П. Джиблина «Кривые и особенности» . . . . .	449
46. Пространства функций с умеренными особенностями . . . . .	455
47. Некоторые нерешенные задачи теории дифференциальных уравнений и математической физики . . . . .	471
48. $A$ -градуированные алгебры и непрерывные дроби . . . . .	473
49. Введение к книге «Особенности каустик и волновых фронтов» . . . . .	483
50. Динамика сложности пересечений . . . . .	489
51. Предисловие к третьему изданию книги «Теория катастроф»	501
52. Числа Спрингера и пространства морсификаций . . . . .	505
53. О топологических свойствах лагранжевых проекций в симплектической геометрии каустик . . . . .	525
54. О некоторых задачах теории динамических систем . . . . .	533
55. Математические задачи в классической физике . . . . .	553
56. О задачах, разрешимых и неразрешимых аналитически и геометрически . . . . .	577
57. Замечания о собственных числах и векторах эрмитовых матриц, фазе Берри, адиабатических связностях и квантовом эффекте Холла . . . . .	583
58. Замечания об экстремальных точках плоских кривых . . . . .	605

59. Топологическая классификация вещественных тригонометрических многочленов и многогранник циклических змей . . . . .	619
<b>Избранные работы о математике</b> . . . . .	<b>627</b>
60. Несколько слов об Андрее Николаевиче Колмогорове . . . . .	629
61. Математический тривиум . . . . .	631
62. ЯБ и математика . . . . .	645
63. Об А. Н. Колмогорове . . . . .	653
64. Для чего мы изучаем математику? Что об этом думают сами математики . . . . .	679
65. Выживет ли российская математика? . . . . .	695
66. Выживет ли математика? Заметки о математическом конгрессе в Цюрихе . . . . .	703
67. Интервью с Владимиром Арнольдом . . . . .	713
68. От суперпозиций до теории КАМ . . . . .	727
69. Предисловие ко второму изданию книги «Лекции по уравнениям с частными производными» . . . . .	741
70. Об эпиграфе к «Евгению Онегину» . . . . .	745
<b>Комментарии</b> . . . . .	<b>747</b>
<b>Иллюстрации</b> . . . . .	<b>749</b>
<b>Список работ</b> . . . . .	<b>751</b>
<b>Избранное</b> . . . . .	<b>752</b>
<b>От издателя</b> . . . . .	<b>768</b>

# Жизнеописание





## Карьера

Фамилия: Арнольд  
Имя, отчество: Владимир Игоревич  
Место рождения: Одесса, СССР  
Дата рождения: 12 июня 1937 г.  
Гражданство: Россия

## Образование

- 1954–1961: Студент, аспирант механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова
- 1959: Дипломная работа «Об отображениях окружности на себя»
- 1961: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук «О представлениях непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных» (защищена в Институте прикладной математики, г. Москва)
- 1963: Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук «Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике» (защищена в Институте прикладной математики, г. Москва)

## Должности

- 1961–1965: Ассистент, доцент механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова
- 1965–1986: Профессор механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова
- С 1986: Главный научный сотрудник Математического института АН СССР (с 1991 — РАН) им. В. А. Стеклова

С 1993: Профессор Центра математических исследований теории принятия решений (CEREMADE), университет Париж-Дофин, Франция

#### Членство в академиях и обществах

- 1976: Почетный член Лондонского математического общества  
1983: Иностраный член Национальной Академии наук США  
1984: Иностраный член Парижской Академии наук  
1984: Член-корреспондент Академии наук СССР  
1987: Член Американской Академии искусств и наук  
1988: Иностраный член Лондонского Королевского общества  
1989: Иностраный член Accademia dei Lincei в Риме  
1990: Действительный член Академии наук СССР  
(с 1991 — Российской Академии наук)  
1991: Действительный член Российской Академии естественных наук  
1991: Член Европейской Академии  
1995–1998: Вице-президент Международного математического союза  
С 1996: Президент Московского математического общества

#### Почетные докторские степени

- 1979: Университет Пьера и Марии Кюри (Париж)  
1988: Университет Варвика (Ковентри)  
1991: Университет Утрехта  
1991: Университет Болоньи  
1994: Complutense (Мадрид)

#### Премии в области математики

- 1958: Премия Московского математического общества  
1965: Ленинская премия (вместе с А. Н. Колмогоровым)  
1982: Крафоордская премия Королевской Шведской Академии наук  
(одновременно с Л. Ниренбергом)  
1994: Харвиеская премия Техниона (Хайфа)

## Список работ

1957

- [57-1] О представимости функций двух переменных в виде  $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$ . *Успехи матем. наук*, 1957, 12(2), 119–121.
- [57-2] О функциях трех переменных. *Докл. АН СССР*, 1957, 114(4), 679–681. (См. также [97-3], 3–6)
- [57-3] В школьном математическом кружке при МГУ: вариация кривой. *Матем. просвещение*, 1957, 2, 241–245.

1958

- [58-1] О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. *Матем. просвещение*, 1958, 3, 41–61.
- [58-2] В школьном математическом кружке при МГУ: гармонические функции. *Матем. просвещение*, 1958, 3, 241–250.

1959

- [59-1] О представлении непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных. *Матем. сборник*, 1959, 48(1), 3–74. (Исправления см. в [62-4])

1960

- [60-1] Некоторые вопросы приближения и представления функций. В кн: *Proc. Internat. Congress Math. (Edinburgh, 1958)*. — New York: Cambridge Univ. Press, 1960, 339–348. (Рус. яз.) (См. также [97-3], 7–17)
- [60-2] Семинар А. Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958/59 гг.). *Успехи матем. наук*, 1960, 15(1), 247–250. (Совм. с Л. Д. Мешалкиным)
- [60-3] Об аналитических отображениях окружности на себя. *Успехи матем. наук*, 1960, 15(2), 212–214.

1961

- [61-1] Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1961, 25(1), 21–86.  
(Исправления см. в [64-3])
- [61-2] Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае. *Докл. АН СССР*, 1961, 137(2), 255–257.  
(См. также [97-3], 19–23)
- [61-3] О рождении условно периодического движения из семейства периодических движений. *Докл. АН СССР*, 1961, 138(1), 13–15.  
(См. также [97-3], 25–29)
- [61-4] Несколько замечаний о потоках линейных элементов и реперов. *Докл. АН СССР*, 1961, 138(2), 255–257.
- [61-5] Признак номографируемости с помощью прямолинейного абака Декарта. *Успехи матем. наук*, 1961, 16(4), 133–135.
- [61-6] Замечания о числах вращения. *Сиб. матем. журн.*, 1961, 2(6), 807–813.

1962

- [62-1] О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона. *Докл. АН СССР*, 1962, 142(4), 758–761.  
(См. также [97-3], 31–37)
- [62-2] О малых возмущениях автоморфизмов тора. *Докл. АН СССР*, 1962, 144(4), 695–698. (Совм. с Я. Г. Синаем)
- [62-3] О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем. *Докл. АН СССР*, 1962, 145(3), 487–490.  
(См. также [97-3], 39–45)
- [62-4] Письмо в редакцию. *Матем. сборник*, 1962, 56(3), 392.  
(См. также [59-1])

1963

- [63-1] Динамические системы и представления групп на Стокгольмском математическом конгрессе. *Успехи матем. наук*, 1963, 18(2), 189–196.  
(Совм. с А. А. Кирилловым и Я. Г. Синаем)
- [63-2] Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. *Успехи матем. наук*, 1963, 18(5), 13–40.
- [63-3] Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике. В кн.: Проблемы движения искусственных небесных тел. Доклады на конференции по общим и прикладным вопро-

сам теоретической астрономии (Москва, 20–25 ноября 1961 г.). — М.: Изд-во АН СССР, 1963, 7–17.

- [63-4] Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *Успехи матем. наук*, 1963, 18(6), 91–192. (Исправления см. в [68-1])
- [63-5] Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. *Докл. АН СССР*, 1963, 148(1), 9–12. (Совм. с А. Л. Крыловым)  
(См. также [97-3], 47–53)
- [63-6] Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики. *Сиб. матем. журн.*, 1963, 4(2), 471–474.  
(См. также [97-3], 55–60)

## 1964

- [64-1] О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы. *Докл. АН СССР*, 1964, 156(1), 9–12.  
(См. также [97-3], 61–67)
- [64-2] О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы. *Успехи матем. наук*, 1964, 19(5), 181.
- [64-3] Исправления к работе В. Арнольда «Малые знаменатели. I». *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1964, 28(2), 479–480.  
(См. также [61-1])
- [64-4] Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике. В кн.: Труды Четвертого Всесоюзного математического съезда (Ленинград, 3–12 июля 1961 г.). Т. 2. — Л.: Наука, 1964, 403–409.

## 1965

- [65-1] Устойчивость и неустойчивость в классической механике. В кн.: Вторая летняя матем. школа. Ч. 2. — Киев: Наукова думка, 1965, 85–119.
- [65-2] Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы. *Докл. АН СССР*, 1965, 161(1), 9–12.  
(См. также [97-3], 69–74)
- [65-3] Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости. *Докл. АН СССР*, 1965, 162(5), 975–978.
- [65-4] Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости. *Прикл. матем. и механ.*, 1965, 29(5), 846–851.

- [65-5] Sur la courbure de Riemann des groupes de difféomorphismes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, **260**(22), 5668–5671. (Франц. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 75–80)
- [65-6] Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, **261**(1), 17–20. (Франц. яз.)
- [65-7] Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, **261**(19), 3719–3722. (Франц. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 81–86)
- [65-8] Предисловие к кн.: Дж. Милнор. Теория Морса. Пер. с англ. и под ред. В. И. Арнольда. — М.: Мир, 1965, 5–7. (Изд. 2-е, стереотип.: Волгоград: Платон, 1996)

## 1966

- [66-1] О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости. *Прикл. матем. и механ.*, 1966, **30**(1), 183–185.  
(См. также [97-3], 87–90)
- [66-2] Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости. *Изв. вузов, сер. математика* (Изд-во Казанск. ун-та), 1966, **5**, 3–5.  
(См. также [97-3], 91–94)
- [66-3] Поправки к статье Дж. Милнора «Дифференциальная топология» [*Успехи матем. наук*, 1965, **20**(6), 41–54]. *Успехи матем. наук*, 1966, **21**(1), 237.
- [66-4] Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), 1966, **16**(1), 319–361. (Франц. яз.)
- [66-5] Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problèmes de stabilité non linéaires. *J. de Mécanique* (Paris), 1966, **5**(1), 29–43. (Франц. яз.)

## 1967

- [67-1] О характеристическом классе, входящем в условия квантования. *Функц. анализ и его прилож.*, 1967, **1**(1), 1–14.  
(См. также [97-3], 103–124)
- [67-2] Замечание о подготовительной теореме Вейерштрасса. *Функц. анализ и его прилож.*, 1967, **1**(3), 1–8.
- [67-3] Об особенностях гладких отображений. *Успехи матем. наук*, 1967, **22**(5), 174.
- [67-4] Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique. — Paris: Gauthier-Villars, 1967, II+243 p. (Monographies Internationales de Mathématiques

Modernes, 9) (Совм. с А. Avez) (Франц. яз.)  
(На англ. яз. см. [68-7]. На рус. яз. см. [79-8], [80-4], [81-5])

1968

- [68-1] Письмо в редакцию. *Успехи матем. наук*, 1968, **23**(6), 216.  
(См. также [63-4])
- [68-2] Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. В кн.: Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966). — М.: Мир, 1968, 387–392.  
(См. также [97-3], 95–101)
- [68-3] Замечание о ветвлении гиперэллиптических интегралов как функций параметров. *Функц. анализ и его прилож.*, 1968, **2**(3), 1–3.
- [68-4] Особенности гладких отображений. *Успехи матем. наук*, 1968, **23**(1), 3–44.
- [68-5] О косах алгебраических функций и когомологиях ласточкиных хвостов. *Успехи матем. наук*, 1968, **23**(4), 247–248.  
(См. также [97-3], 125–127)
- [68-6] Предисловие к кн.: Особенности дифференцируемых отображений. Пер. с англ. и франц. Под ред. В. И. Арнольда. — М.: Мир, 1968, 5–7.
- [68-7] Ergodic Problems of Classical Mechanics. — New York – Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc., 1968, IX + 286 p. (Совм. с А. Avez) (Англ. яз.)  
(На франц. яз. см. [67-4]. На рус. яз. см. [79-8], [80-4], [81-5])

1969

- [69-1] Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ч. 1. — М.: МГУ, Мех.-мат. фак-т, 1969, 113 с.
- [69-2] Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ч. 2. — М.: МГУ, Мех.-мат. фак-т, 1969, 75 с.
- [69-3] Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ч. 3. — М.: МГУ, Мех.-мат. фак-т, 1969, 41 с.
- [69-4] Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела и идеальной жидкости. *Успехи матем. наук*, 1969, **24**(3), 225–226.  
(См. также [97-3], 143–146)
- [69-5] Замечания об особенностях конечной коразмерности в комплексных динамических системах. *Функц. анализ и его прилож.*, 1969, **3**(1), 1–6.  
(См. также [97-3], 129–137)
- [69-6] Об одномерных когомологиях алгебры Ли бездивергентных векторных полей и о числах вращения динамических систем. *Функц. анализ и его прилож.*, 1969, **3**(4), 77–78.  
(См. также [97-3], 147–150)

- [69-7] Кольцо когомологий группы крашенных кос. *Матем. заметки*, 1969, 5(2), 227–231.  
(См. также [97-3], 139–142)

1970

- [70-1] Тривиальные задачи. В кн.: Труды V международной конференции по нелинейным колебаниям (Киев, 1969). Т. I. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970, 630–631.
- [70-2] О классах когомологий алгебраических функций, сохраняющихся при преобразованиях Чирнгаузена. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, 4(1), 84–85.  
(См. также [97-3], 151–154)
- [70-3] О локальных задачах анализа. *Вестник МГУ, сер. I, матем., механ.*, 1970, 25(2), 52–56.
- [70-4] Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости и проблемы топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений. *Успехи матем. наук*, 1970, 25(2), 265–266.
- [70-5] О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций. *Успехи матем. наук*, 1970, 25(4), 169–170.
- [70-6] О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций. I. *Тр. Моск. матем. об-ва*, 1970, 21, 27–46.
- [70-7] Топологические инварианты алгебраических функций. II. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, 4(2), 1–9.
- [70-8] Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, 4(3), 1–9.
- [70-9] Предисловие к кн.: Ф. Фам. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. Пер. с франц. Под ред. В. И. Арнольда. — М.: Мир, 1970, 5–6.

1971

- [71-1] Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971, 240 с.
- [71-2] Комментарии к кн.: А. Пуанкаре. Избранные труды. В 3-х томах. Т. I. Новые методы небесной механики. — М.: Наука, 1971, 747–752.  
(Совм. с В. М. Алексеевым)



- [71-3] Предисловие к кн.: Дж. Милнор. Особые точки комплексных гиперповерхностей. Пер. с англ. Под ред. В. И. Арнольда. — М.: Мир, 1971, 5–6.
- [71-4] Галина Николаевна Тюринна (некролог). *Успехи матем. наук*, 1971, **26**(1), 207–211. (Совм. с И. М. Гельфандом, Ю. И. Маниным, Б. Г. Мойшензоном, С. П. Новиковым, И. Р. Шафаревичем)
- [71-5] Иван Георгиевич Петровский (к семидесятилетию со дня рождения). *Успехи матем. наук*, 1971, **26**(2), 3–24. (Совм. с П. С. Александровым, И. М. Гельфандом, А. Н. Колмогоровым, С. П. Новиковым, О. А. Олейник)
- [71-6] О матрицах, зависящих от параметров. *Успехи матем. наук*, 1971, **26**(2), 101–114.  
(См. также [97-3], 155–173)
- [71-7] О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм. *Функц. анализ и его прилож.*, 1971, **5**(3), 1–9.  
(См. также [97-3], 175–187)
- [71-8] О расположении овалов вещественных алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных многообразий и арифметике квадратичных форм. *Успехи матем. наук*, 1971, **26**(4), 230.

## 1972

- [72-1] Версальные семейства и бифуркации дифференциальных уравнений. В кн.: Девятая летняя математическая школа. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972, 42–49.
- [72-2] Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей. *Прикл. матем. и механ.*, 1972, **36**(2), 255–262.  
(См. также [97-3], 203–212)
- [72-3] Моды и квазимоды. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(2), 12–20.  
(См. также [97-3], 189–202)
- [72-4] Интегралы быстро осциллирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(3), 61–62.
- [72-5] Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  и лагранжевы особенности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(4), 3–25.
- [72-6] Лекции о бифуркациях и версальных семействах. *Успехи матем. наук*, 1972, **27**(5), 119–184.
- [72-7] Комментарии к раб.: А. Пуанкаре. Об одной геометрической теореме. В кн: А. Пуанкаре. Избранные труды. В 3-х томах. Т. II. Новые

методы небесной механики. Топология. Теория чисел. — М.: Наука, 1972, 987–989.

## 1973

- [73-1] Бифуркации критических точек функций. *Успехи матем. наук*, 1973, 28(2), 221.
- [73-2] Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера. *Успехи матем. наук*, 1973, 28(5), 17–44.
- [73-3] Топология действительных алгебраических кривых (работы И. Г. Петровского и их развитие). *Успехи матем. наук*, 1973, 28(5), 260–262.
- [73-4] Классификация унимодальных критических точек функций. *Функц. анализ и его прилож.*, 1973, 7(3), 75–76.

## 1974

- [74-1] Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974, 432 с.
- [74-2] Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек. *Успехи матем. наук*, 1974, 29(2), 11–49.
- [74-3] Критические точки функций и классификация каустик. *Успехи матем. наук*, 1974, 29(3), 243–244.  
(См. также [97-3], 213–214)
- [74-4] Контактные многообразия, лежандровы отображения и особенности волновых фронтов. *Успехи матем. наук*, 1974, 29(4), 153–154.
- [74-5] Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения. В кн.: Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 21 мая – 3 июня 1973 г.). — Ереван: АН Арм. ССР, 1974, 229–256.  
(См. также [97-3], 215–236)

## 1975

- [75-1] Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 2-е, стереотип. — М.: Наука, 1975, 240 с.
- [75-2] Классификация бимодальных критических точек функций. *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, 9(1), 49–50.
- [75-3] Спектральная последовательность для приведения функций к нормальной форме. *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, 9(3), 81–82.  
(См. также [97-3], 265–268)
- [75-4] Critical points of smooth functions. Proc. Internat. Congress Math. (Vancouver, 1974). V. 1. — Montreal: Canad. Math. Congress. 1975. 19–39.

(Англ. яз.)

(На рус. яз. см. [75-5], а также [97-3], 237–264)

[75-5] Критические точки гладких функций и их нормальные формы. *Успехи матем. наук*, 1975, **30**(5), 3–65.

(Главу I см. также [75-4] (на англ. яз.) и [97-3], 237–264)

[75-6] О первой Всесоюзной математической олимпиаде студентов. *Успехи матем. наук*, 1975, **30**(4), 281–288. (Совм. с А. А. Кирилловым, В. М. Тихомировым, М. А. Шубиным)

1976

[76-1] Версальные семейства и бифуркации дифференциальных уравнений. В кн.: *Девятая летняя матем. школа* (Кацивели, 1971). — Киев: Наукова думка, 1976, 42–49.

[76-2] Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: *Труды семинара С. Л. Соболева. I*. — Новосибирск, 1976, 5–15.

(На англ. яз. см. в кн.: *Singularities. Part 1* (Arcata, CA, 1981). — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Sympos. Pure Math., 40))

[76-3] Спектральные последовательности для приведения функций к нормальным формам. В кн.: *Задачи механики и математической физики*. — М.: Наука, 1976, 7–20.

(На англ. яз. см. *Selecta Math. Sov.*, 1981, **1**(1), 3–18)

[76-4] Бифуркации инвариантных многообразий дифференциальных уравнений и нормальные формы окрестностей эллиптических кривых. *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, **10**(4), 1–12.

(См. также [97-3], 269–287)

[76-5] О теории огибающих. *Успехи матем. наук*, 1976, **31**(3), 248–249.

[76-6] Региональная математическая школа в Сыктывкаре. *Успехи матем. наук*, 1976, **31**(4), 301. (Совм. с А. М. Вершиком, Д. Б. Фуксом, Я. М. Элиашбергом)

[76-7] Local normal forms of functions. *Invent. Math.*, 1976, **35**(1), 87–109. (Англ. яз.)

[76-8] Wave front evolution and equivariant Morse lemma. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1976, **29**(6), 557–582. (Англ. яз.)

(На рус. яз. см. [97-3], 289–318. Исправления см. в [77-8])

[76-9] Superposition of algebraic functions. In: *Mathematical developments arising from Hilbert problems* (1974). — Providence, RI: AMS, 1976, 45–46. (Proc. Sympos. Pure Math., 28) (Совм. с I. Shimura) (Англ. яз.)

[76-10] The *A–D–E* classifications. In: *Mathematical developments arising from Hilbert problems* (1974). — Providence, RI: AMS, 1976, p. 46. (Proc. Sympos. Pure Math., 28) (Англ. яз.)

- [76-11] Real algebraic geometry (the 16th Hilbert problem). In: Mathematical developments arising from Hilbert problems (1974). — Providence, RI: AMS, 1976, 50–51. (Proc. Sympos. Pure Math., 28) (Англ. яз.)
- [76-12] Study of singularities. In: Mathematical developments arising from Hilbert problems (1974). — Providence, RI: AMS, 1976, 57–59. (Proc. Sympos. Pure Math., 28) (Совм. с R. Thom) (Англ. яз.)
- [76-13] Dynamical systems and differential equations. In: Mathematical developments arising from Hilbert problems (1974). — Providence, RI: AMS, 1976, 59–62. (Proc. Sympos. Pure Math., 28) (Совм. с R. Thom и S. Smale) (Англ. яз.)
- [76-14] Fixed points of symplectic diffeomorphisms. In: Mathematical developments arising from Hilbert problems (1974). — Providence, RI: AMS, 1976, p. 66. (Proc. Sympos. Pure Math., 28) (Англ. яз.)
- [76-15] Partial differential equations: What is a mathematical equivalent to physical «turbulence»? In: Mathematical developments arising from Hilbert problems (1974). — Providence, RI: AMS, 1976, 67–68. (Proc. Sympos. Pure Math., 28) (Англ. яз.)

## 1977

- [77-1] Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонанса и версальные деформации эквивариантных векторных полей. *Функц. анализ и его прилож.*, 1977, 11(2), 1–10.
- [77-2] Некоторые задачи теории дифференциальных уравнений. В кн.: Нерешенные задачи механики и математики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977, 3–9.
- [77-3] Гипотеза о сигнатуре квадратичной формы квазиоднородной особенности. Дополнение 2 к статье С. М. Гусейн-Заде «Группы монодромии изолированных особенностей гиперповерхностей». *Успехи матем. наук*, 1977, 32(2), 60–61.
- [77-4] Бифуркации инвариантных многообразий обыкновенных дифференциальных уравнений и строение окрестностей эллиптических кривых на комплексных поверхностях. *Успехи матем. наук*, 1977, 32(3), 213.
- [77-5] О современном развитии работ И. Г. Петровского по топологии действительных алгебраических многообразий. *Успехи матем. наук*, 1977, 32(3), 215–216.
- [77-6] Обзор по теории бифуркаций. *Успехи матем. наук*, 1977, 32(4), 240.
- [77-7] Бифуркации дискретных динамических систем. Препринт. — Владивосток: ДВНЦ АН СССР, Институт автоматизации и процессов управления, 1977, 24 с. (Совм. с А. П. Шапиро)
- [77-8] Correction: «Wave front evolution and equivariant Morse lemma». *Comm. Pure Appl. Math.*, 1977, 30(6), 823. (Англ. яз.)  
(См. также [76-8] и [97-3], 289–318)

- [77-9] Предисловие к кн.: Т. Брёкер, Л. Ландер. Дифференцируемые ростки и катастрофы. Пер. с англ. Под ред. В. И. Арнольда. — М.: Мир, 1977, с. 5. (Современная математика. Вводные курсы) (Изд. 2-е, стереотип.: Волгоград: Платон, 1997)
- [77-10] Предисловие к кн.: М. Голубицкий, В. Гийемин. Устойчивые отображения и их особенности. Пер. с англ. Под ред. В. И. Арнольда. — М.: Мир, 1977, с. 5.

## 1978

- [78-1] Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978, 304 с.  
(Предисловие к этой книге см. также в [97-3], 319–322)
- [78-2] Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского–Олейник и смешанные структуры Ходжа. *Функц. анализ и его прилож.*, 1978, **12**(1), 1–14.
- [78-3] Индекс особой точки векторного поля, неравенство Петровского–Олейник и смешанные структуры Ходжа. *Успехи матем. наук*, 1978, **33**(2), 179.
- [78-4] Неравенства Петровского–Олейник и индекс особой точки векторного поля. *Успехи матем. наук*, 1978, **33**(2), 225.
- [78-5] Заседания семинара им. И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики. *Успехи матем. наук*, 1978, **33**(2), 225–231.
- [78-6] Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $F_4$  и особенности эволют. *Успехи матем. наук*, 1978, **33**(5), 91–105.

## 1979

- [79-1] Математические методы классической механики. Изд. 2-е, стереотип. — М.: Наука, 1979, 432 с.
- [79-2] Устойчивые колебания с гармонической по пространству и периодической по времени потенциальной энергией. *Прикл. матем. и механ.*, 1979, **43**(2), 360–363.
- [79-3] Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями, и особые проекции гладких поверхностей. *Успехи матем. наук*, 1979, **34**(2), 3–38.
- [79-4] Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер. 1, матем., механ.*, 1979, **6**, 7–17. (Совм. с О. А. Олейник)
- [79-5] Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонансов. В кн.: Нелинейные волны. Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. — М.: Наука, 1979, 116–130.
- [79-6] Краевые особенности. *Успехи матем. наук*, 1979, **34**(5), 211.

- [79-7] Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с квадраками (по Ю. Мозеру). *Успехи матем. наук*, 1979, **34**(5), 214.
- [79-8] Эргодические проблемы классической механики. I. Динамические системы и теория приближений. — Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1979, 143–214. (Совм. с А. Аvezом)  
(См. также [67-4], [68-7])
- [79-9] Теория катастроф. *Природа*, 1979, **10**, 54–63.

## 1980

- [80-1] Статистика целочисленных выпуклых многоугольников. *Функц. анализ и его прилож.*, 1980, **14**(2), 1–3.
- [80-2] Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. I. *Функц. анализ и его прилож.*, 1980, **14**(3), 1–13.
- [80-3] Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. II. *Функц. анализ и его прилож.*, 1980, **14**(4), 8–17.
- [80-4] Эргодические проблемы классической механики. II. Дифференциальные уравнения и функциональный анализ. — Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1980. (Совм. с А. Аvezом)  
(См. также [67-4], [68-7])
- [80-5] On some problems in singularity theory. In: *Geometry and Analysis. Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi.* — Bangalore: Indian Acad. Sci., 1980, 1–9. (Англ. яз.)  
(См. также *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 1981, **90**(1), 1–9)

## 1981

- [81-1] Заметание каустики ребром возврата движущегося фронта. *Успехи матем. наук*, 1981, **36**(4), 233.
- [81-2] Лагранжевы многообразия с особенностями, асимптотические лучи и раскрытый ласточкин хвост. *Функц. анализ и его прилож.*, 1981, **15**(4), 1–14.
- [81-3] Магнитное поле в движущейся проводящей жидкости. *Успехи матем. наук*, 1981, **36**(5), 220–221. (Совм. с Я. Б. Зельдовичем, А. А. Рузмайкиным, Д. Д. Соколовым)
- [81-4] Магнитное поле в стационарном течении с растяжениями в римановом пространстве. *Журнал эксп. и теор. физики*, 1981, **81**(6), 2052–2058. (Совм. с Я. Б. Зельдовичем, А. А. Рузмайкиным, Д. Д. Соколовым)
- [81-5] Эргодические проблемы классической механики. III. Дискретные и непрерывные динамические системы. — Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1981, 42–92. (Совм. с А. Аvezом)  
(См. также [67-4], [68-7])

- [81-6] Крупномасштабная структура Вселенной. I. Общие свойства. Одномерная и двумерная модели. — М.: Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981, 32 с. (Препринт № 100) (Совм. с Я. Б. Зельдовичем и С. Ф. Шандариным)  
(На англ. яз. см. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 1982, 20(1-2), 111-130)
- [81-7] Владимир Михайлович Алексеев (некролог). *Успехи матем. наук*, 1981, 36(4), 177-182. (Совм. с Д. В. Аносовым, М. И. Зеликиным, А. Н. Колмогоровым, О. В. Локуциевским, Ю. С. Осиповым, Я. Г. Синаем, В. М. Тихомировым, М. В. Якобсоном)
- [81-8] Singularity theory. — Cambridge - New York: Cambridge University Press, 1981, 266 p. (London Math. Soc. Lecture Note Series, 53) (Англ. яз.)
- [81-9] Теория катастроф. — М.: Знание, 1981, 64 с. (Математика, кибернетика, 9)
- [81-10] Элементы крупномасштабной структуры Вселенной. *Успехи матем. наук*, 1981, 36(3), 244-245. (Совм. с Я. Б. Зельдовичем и С. Ф. Шандариным)

## 1982

- [82-1] Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982, 304 с. (Совм. с А. Н. Варченко и С. М. Гусейн-Заде)
- [82-2] Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. *Успехи матем. наук*, 1982, 37(2), 179.
- [82-3] Перестройки особенностей потенциальных потоков в бесстолкновительной среде и метаморфозы каустик в трехмерном пространстве. *Тр. семинара им. И. Г. Петровского*, 1982, 8, 21-57.
- [82-4] Стационарное магнитное поле в периодическом потоке. *Докл. АН СССР*, 1982, 266(6), 1357-1361. (Совм. с Я. Б. Зельдовичем, А. А. Рuzмайкиным, Д. Д. Соколовым)
- [82-5] Несколько замечаний об антидинамо-теореме. *Вестник МГУ, сер. 1, матем., механ.*, 1982, 6, 50-57.  
(См. также [97-3], 323-333)
- [82-6] О ньютоновском потенциале гиперболических слоев. *Тр. Тбилисского ун-та, сер. матем., механ., астрон.*, 1982, 232/233(13-14), 23-29.  
(На англ. яз. см. *Selecta Math. Sov.*, 1985, 4(2), 103-106)
- [82-7] Singularities of Legendre varieties, of evolvents and of fronts at an obstacle. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 1982, 2(3-4), 301-309. (Англ. яз.)
- [82-8] On some nonlinear problems. In: Crafoord Prize in mathematics, 1982. Crafoord lectures. — Stockholm: The Royal Swedish Academy of Sci-

ences, 1982, 1–7. (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 335–344)

- [82-9] Асимптотические лучи в симплектической геометрии. *Успехи матем. наук*, 1982, **37**(2), 182–183.
- [82-10] О ньютоновском притяжении скоплений пылевидных частиц. *Успехи матем. наук*, 1982, **37**(4), 125.

## 1983

- [83-1] Теория катастроф. Изд. 2-е, доп. — М.: Изд-во МГУ, 1983, 80 с. (Новые идеи в естествознании)
- [83-2] Особенности в вариационном исчислении. В кн: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 22. — М.: ВИНТИ, 1983, 3–55.
- [83-3] Особенности систем лучей. *Успехи матем. наук*, 1983, **38**(2), 77–147.
- [83-4] Эволюция магнитного поля под действием переноса и диффузии. *Успехи матем. наук*, 1983, **38**(2), 226–227.
- [83-5] Замечания о теории возмущений для задач типа Матье. *Успехи матем. наук*, 1983, **38**(4), 189–203.
- [83-6] Магнитные аналоги теорем Ньютона и Айвори. *Успехи матем. наук*, 1983, **38**(5), 145–146.
- [83-7] Рост магнитного поля в трехмерном стационарном потоке несжимаемой жидкости. *Вестник МГУ, сер. 1, матем., механ.*, 1983, **3**, 43–46. (Совм. с Е. И. Коркиной)  
(См. также [97-3], 345–349)
- [83-8] Особенности, бифуркации и катастрофы. *Успехи физ. наук*, 1983, **141**(4), 569–590.
- [83-9] Проблемы границ математического исследования. В кн.: Очерки развития математики в СССР. Под ред. И. З. Штокало. — Киев: Наукова думка, 1983, 421–426.
- [83-10] Some algebro-geometrical aspects of the Newton attraction theory. In: Arithmetic and Geometry. Papers dedicated to I. R. Shafarevich. V. II: Geometry. — Basel: Birkhäuser, 1983, 1–3. (Progr. Math., 36) (Англ. яз.)

## 1984

- [84-1] Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. — М.: Наука, 1984, 336 с. (Совм. с А. Н. Варченко и С. М. Гусейн-Заде)
- [84-2] Особенности в вариационном исчислении. *Успехи матем. наук*, 1984, **39**(5), 256.
- [84-3] Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1984, 272 с.



- [84-4] Несколько замечаний об эллиптических координатах. *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*, 1984, **133**, 38–50.
- [84-5] Исчезающие перегибы. *Функц. анализ и его прилож.*, 1984, **18**(2), 51–52.  
(См. также [97-3], 351–354)
- [84-6] Об эволюции магнитного поля под действием переноса и диффузии. В кн.: *Некоторые вопросы современного анализа. Сборник памяти В. М. Алексеева*. Под ред. В. М. Тихомирова. — М.: Изд-во МГУ, 1984, 8–21.
- [84-7] Экспоненциальное разбегание траекторий и его гидродинамические приложения. В кн.: *Н. Е. Кочин и развитие механики*. — М.: Наука, 1984, 185–193.
- [84-8] Комментарии к работе: Г. Вейль. Асимптотический закон распределения частот собственных колебаний упругих тел произвольной формы. В кн.: *Г. Вейль. Избранные труды*. — М.: Наука, 1984, 446–449. (Классики науки) (Совм. с А. Н. Паршиным)
- [84-9] Комментарии к работе: Г. Вейль. Об объеме труб. В кн.: *Г. Вейль. Избранные труды*. — М.: Наука, 1984, 479–482. (Классики науки)
- [84-10] Яков Борисович Зельдович (к семидесятилетию со дня рождения). *Успехи физ. наук*, 1984, **142**(3), 531–532. (Совм. с Г. И. Баренблаттом, В. Л. Гинзбургом, Б. Б. Кадомцевым, П. Л. Капицей, Л. Б. Окунем, Л. П. Питаевским, Р. З. Сагдеевым, Р. А. Сюняевым, Л. Д. Фаддеевым, В. Я. Френкелем, Ю. Б. Харитоном)
- [84-11] Singularities of functions, wave fronts, caustics and multidimensional integrals. In: *Mathematical Physics Reviews*. V. 4. — Chur: Harwood Acad. Publ., 1984, 1–92. (Soviet Sci. Rev. Sect. C: Math. Phys. Rev., 4) (Совм. с А. Н. Варченко, А. Б. Гивенталем, А. Г. Хованским) (Англ. яз.)
- [84-12] Reversible systems. In: *Nonlinear and Turbulent Processes in Physics* (Kiev, 1983). Editor: R. Z. Sagdeev. V. 3. — Chur: Harwood Acad. Publ., 1984, 1161–1174. (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [85-11] и [97-3], 355–363)
- [84-13] Singularities of ray systems. In: *Proc. of the Internat. Congress Math.* (Warsaw, August 16–24, 1983). V. 1. — Warsaw, 1984, 27–49. (Англ. яз.)
- [84-14] Appendix A to the paper: В. А. Маломед, М. И. Трибелский «Bifurcations in distributed kinetic systems with aperiodic instability». *Physica D*, 1984, **14**(1), 85–86. (Англ. яз.)

1985

- [85-1] Обыкновенные дифференциальные уравнения. В кн.: *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*. Т. 1: *Динамические системы – 1*. — М.: ВИНТИ, 1985, 7–149. (Совм. с Ю. С. Ильяшенко)

- [85-2] Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3: Динамические системы – 3. — М.: ВИНТИ, 1985, 304 с. (Совм. с В. В. Козловым и А. И. Нейштадтом)
- [85-3] Симплектическая геометрия. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4: Динамические системы – 4. — М.: ВИНТИ, 1985, 5–139. (Совм. с А. Б. Гивенталем)
- [85-4] Классическая механика. В кн.: А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985, 433–444.
- [85-5] Суперпозиции. В кн.: А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985, 444–451.
- [85-6] Комментарии к кн.: А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985.
- [85-7] Теоремы Штурма и симплектическая геометрия. *Функц. анализ и его прилож.*, 1985, 19(4), 1–10.
- [85-8] Неявные дифференциальные уравнения, контактные структуры и релаксационные колебания. *Успехи матем. наук*, 1985, 40(5), 188.
- [85-9] Отображение периодов и пуассоновы структуры. *Успехи матем. наук*, 1985, 40(5), 236.
- [85-10] Нормальные формы пуассоновых структур и других степеней форм объема. *Тр. семинара им. И. Г. Петровского*, 1985, 10, 1–15.
- [85-11] Обратимые системы. В кн.: Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике. Ч. 2. Под ред. А. С. Давыдова и В. М. Чернусенко. — Киев: Наукова думка, 1985, 15–21.  
(См. также [97-3], 355–363. На англ. яз. см. [84-12])
- [85-12] Ольга Арсеньевна Олейник (к шестидесятилетию со дня рождения). *Успехи матем. наук*, 1985, 40(5), 279–283. (Совм. с М. И. Вишиком, И. М. Гельфандом, Ю. В. Егоровым, А. С. Калашниковым, А. Н. Колмогоровым, С. П. Новиковым, С. Л. Соболевым)

1986

- [86-1] Теория бифуркаций. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5: Динамические системы – 5. — М.: ВИНТИ, 1986, 5–218. (Совм. с В. С. Афраймовичем, Ю. С. Ильяшенко и Л. П. Шильниковым)
- [86-2] Теория катастроф. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5: Динамические системы – 5. — М.: ВИНТИ, 1986, 219–277.
- [86-3] Гиперболические многочлены и отображения Вандермонда. *Функц. анализ и его прилож.*, 1986, 20(2), 52–53.

- [86-4] Особенности границ пространств дифференциальных уравнений. *Успехи матем. наук*, 1986, 41(4), 152–154.
- [86-5] Первые шаги симплектической топологии. *Успехи матем. наук*, 1986, 41(6), 3–18.  
(См. также [97-3], 365–389)
- [86-6] Теория катастроф и новые возможности применения математики. В кн.: Математизация современной науки: предпосылки, проблемы, перспективы. Труды симпозиума в Пущино (1983). — М.: Центральный совет философских семинаров при Президиуме АН СССР, 1986, 81–87.
- [86-7] Предисловие к кн.: И. Г. Петровский. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. — М.: Наука, 1986, с. 4. (Совм. с Н. Н. Боголюбовым, А. Н. Колмогоровым, О. А. Олейник, С. Л. Соболевым, А. Н. Тихоновым)
- [86-8] Предисловие к кн.: Ф. Гриффитс. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. Пер. с англ. Под ред. В. И. Арнольда. — М.: Мир, 1986, 5–6.
- [86-9] Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения. *Квант*, 1986, 2, 13–20.
- [86-10] Владимир Абрамович Рохлин (некролог). *Успехи матем. наук*, 1986, 41(3), 159–163. (Совм. с А. М. Вершиком, О. Я. Виро, А. Н. Колмогоровым, С. П. Новиковым, Я. Г. Синаем, Д. Б. Фуксом)
- [86-11] Oscillations and bifurcations in reversible systems. In: *Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics*. Editor: R. Z. Sagdeev. — Moscow: Mir Publ., 1986, 31–64. (Совм. с М. Б. Севрюком) (Англ. яз.)

1987

- [87-1] Особенности границ пространств дифференциальных уравнений. *Успехи матем. наук*, 1987, 42(2), 261.
- [87-2] Квазикристаллы, разбиения Пенроуза, марковские разбиения, стохастическая паутина и теория особенностей. *Успехи матем. наук*, 1987, 42(4), 139.
- [87-3] Теоремы Штурма и симплектическая геометрия. *Успехи матем. наук*, 1987, 42(5), 196.
- [87-4] Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги анализа и теория катастроф от эвольвент до квазикристаллов. *Успехи матем. наук*, 1987, 42(5), 197.
- [87-5] Выпуклые оболочки и повышение производительности систем при пульсирующей нагрузке. *Сиб. матем. журн.*, 1987, 28(4), 27–31.
- [87-6] Контактная структура, релаксационные колебания и особые точки неявных дифференциальных уравнений. В кн.: Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях. Воронеж: Изд-во ВГУ,

- 1987, 3–8. (Новое в глобальном анализе, 7)  
(См. также [97-3], 391–396)
- [87-7] Замечания о пуассоновых структурах на плоскости и других степенях форм объема. *Тр. семинара им. И. Г. Петровского*, 1987, 12, 37–46.
- [87-8] Трехсотлетие математического естествознания и небесной механики. *Природа*, 1987, 8, 5–15.
- [87-9] Второй закон Кеплера и топология абелевых интегралов. *Квант*, 1987, 12, 17–21.
- [87-10] Ольга Арсеньевна Олейник (к шестидесятилетию со дня рождения). *Тр. семинара им. И. Г. Петровского*, 1987, 12, 3–21. (Совм. с М. И. Вишиком, Ю. В. Егоровым, А. С. Калашниковым, С. П. Новиковым, С. Л. Соболевым)

## 1988

- [88-1] Особенности. I. Локальная и глобальная теория. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 6: Динамические системы – 6. — М.: ВИНТИ, 1988, 256 с. (Совм. с В. А. Васильевым, В. В. Горюновым, О. В. Ляшко)
- [88-2] О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями. *Матем. заметки*, 1988, 44(1), 3–18.  
(См. также [97-3], 397–412)
- [88-3] Разветвленное накрытие  $\mathbb{C}P^2 \rightarrow S^4$ , гиперболичность и проективная топология. *Сиб. матем. журн.*, 1988, 29(5), 36–47.  
(См. также [97-3], 431–448)
- [88-4] Remarks on quasicrystallic symmetries. In: Progress in Chaotic Dynamics. *Physica D*, 1988, 33(1–3), 21–25. (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [89-7] и [97-3], 413–423)
- [88-5] On the interior scattering of waves, defined by hyperbolic variational principles. *J. Geom. Phys.*, 1988, 5(3), 305–315. (Англ. яз.)
- [88-6] On some problems in symplectic topology. In: Topology and Geometry. Rohlin Seminar. Editor: O. Ya. Viro. — Berlin – New York: Springer, 1988, 1–5. (Lecture Notes in Math., 1346) (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 425–429)
- [88-7] Предисловие к кн.: Дж. Брус, П. Джиблин. Кривые и особенности. Геометрическое введение в теорию особенностей. Пер. с англ. Под ред. В. И. Арнольда. — М.: Мир, 1988, 5–9. (Современная математика. Вводные курсы)  
(См. также [97-3], 449–453)
- [88-8] А. Н. Колмогоров в воспоминаниях учеников. *Квант*, 1988, 11/12, 34.

- [88-9] Несколько слов об Андрее Николаевиче Колмогорове. *Успехи матем. наук*, 1988, **43**(6), 37.  
(См. также [97-3], 629–630)
- [88-10] Борис Валерианович Чириков (к шестидесятилетию со дня рождения) *Успехи физ. наук*, 1988, **155**(3), 543–544. (Совм. с Л. М. Барковым, С. Т. Беляевым, Г. И. Димовым, Б. Б. Кадомцевым, Э. П. Кругляковым, И. Н. Мешковым, Д. Д. Рютовым, В. А. Сидоровым, А. Н. Скринским)
- [88-11] Памяти Якова Борисовича Зельдовича. *Успехи физ. наук*, 1988, **155**(4), 729–730. (Совм. с А. П. Александровым, А. С. Боровиком-Романовым, Е. П. Велиховым, С. С. Герштейном, В. Л. Гинзбургом, В. И. Гольданским, Ю. М. Каганом, Б. Б. Кадомцевым, А. А. Овчинниковым, Л. Б. Окунем, Л. П. Питаевским, А. М. Прохоровым, Р. З. Сагдеевым, А. Д. Сахаровым, Р. А. Сюняевым, И. М. Халатниковым, Ю. Б. Харитоновым)
- [88-12] Математика с человеческим лицом. *Природа*, 1988, **3**, 117–119.

1989

- [89-1] Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1989, 472 с.
- [89-2] Особенности. II. Классификация и приложения. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 39: Динамические системы — 8. — М.: ВИНТИ, 1989, 256 с. (Совм. с В. А. Васильевым, В. В. Горюновым, О. В. Ляшко)
- [89-3] Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. — М.: Наука, 1989, 96 с. (Современная математика для студентов, 1)
- [89-4] Пространства функций с умеренными особенностями. *Функц. анализ и его прилож.*, 1989, **23**(3), 1–10.  
(См. также [97-3], 455–469)
- [89-5] Некоторые нерешенные задачи теории дифференциальных уравнений и математической физики. *Успехи матем. наук*, 1989, **44**(4), 191–192.  
(См. также [97-3], 471–472)
- [89-6] «Начала» Ньютона 300 лет спустя. *Успехи матем. наук*, 1989, **44**(6), 167. (Совм. с В. А. Васильевым)
- [89-7] Замечания о квазикристаллической симметрии. Дополнение Б к кн.: Ф. Клейн. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. — М.: Наука, 1989, 291–300.  
(См. также [97-3], 413–423. На англ. яз. см. [88-4])
- [89-8] Топологическое доказательство трансцендентности абелевых интегралов в «Математических началах натуральной философии» Ньютона. *Ист.-матем. исслед.*, 1989, **31**, 7–17.

- [89-9] Теория катастроф. *Наука и жизнь*, 1989, 10, 12–19.
- [89-10] Искать таланты! *Известия*, 1989, № 23 (22 января), с. 2. (Совм. с А. Александровым и Р. Сагдеевым)
- [89-11] Сто задач. — М.: Изд-во МФТИ, 1989.
- [89-12] Bifurcations and singularities in mathematics and mechanics. In: *Theoretical and Applied Mechanics (XVII IUTAM Congress, Grenoble, 1988)*. — Amsterdam – New York: North-Holland, 1989, 1–25. (Англ. яз.)
- [89-13] Contact geometry and wave propagation. In: *Monographies de L'Enseignement Mathématique*, 34. — Genève: Univ. de Genève, 1989, 56 p. (Série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale, 9) (Англ. яз.)  
(См. также *Enseign. Math.* (2), 1990, 36(3–4), 215–266)
- [89-14]  $A$ -graded algebras and continued fractions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1989, 42(7), 993–1000. (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 473–482)
- [89-15] A. N. Kolmogorov. Obituary. *Physics Today*, 1989, 42(10), 148–150. (Англ. яз.)
- [89-16] Дмитрий Андреевич Гудков (к семидесятилетию со дня рождения). *Успехи матем. наук*, 1989, 44(1), 223–225. (Совм. с О. Я. Виро, Е. А. Леонтович-Андроновой, В. В. Никулиным, С. П. Новиковым, О. А. Олейник, Г. М. Полотовским, В. М. Харламовым)
- [89-17] Newton's «Principia» read 300 years later. *Notices Amer. Math. Soc.*, 1989, 36(9), 1148–1154. (Совм. с В. А. Васильевым) (Англ. яз.)  
(См. также *Current Science*, 1991, 61(2), 89–95. Дополнения см. в [90-7])
- [89-18] Cardiac arrhythmias and circle mappings. In: Izrail M. Gel'fand: *Collected Papers*. Editors: S. G. Gindikin, V. W. Guillemin, A. A. Kirillov, B. Kostant, S. Sternberg. V. III. — Berlin: Springer, 1989, 1019–1024. (Англ. яз.) (См. также *Chaos*, 1991, 1(1), 20–24)

## 1990

- [90-1] Теория катастроф. Изд. 3-е, доп. — М.: Наука, 1990, 128 с.  
(Предисловие к этой книге см. также в [97-3], 501–503)
- [90-2] *Singularities of Caustics and Wave Fronts*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1990, XIV + 259 p. (Math. and its Appl., Soviet Series, 62). (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [96-1])
- [90-3] Dynamics of complexity of intersections. *Boletim Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 1990, 21(1), 1–10. (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 489–499)

- [90-4] Contact geometry: the geometrical method of Gibbs's thermodynamics. In: Proceedings of the Gibbs Symposium (Yale Univ., May 15–17, 1989). — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 163–179. (Англ. яз.)
- [90-5] Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnold. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Sov. Math., 1) (Англ. яз.)
- [90-6] Dynamics of intersections. In: Analysis, et cetera. Proceedings of a Conference in Honour of J. Moser. Editors: P. Rabinowitz, E. Zehnder. — Boston, MA: Academic Press, 1990, 77–84. (Англ. яз.)
- [90-7] Addendum to: "Newton's «Principia» read 300 years later". *Notices Amer. Math. Soc.*, 1990, **37**(2), 144. (Совм. с В. А. Васильевым) (Англ. яз.) (См. также [89-17])
- [90-8] Вячеслав Алексеевич Олейников (некролог). *Успехи матем. наук*, 1990, **45**(1), 163–165. (Совм. с А. Г. Витушкиным, Е. А. Гориным, В. Я. Лином, Ю. В. Нестеренко, В. М. Тихомировым, П. Л. Ульяновым, А. Б. Шидловским, М. А. Шубиным)

## 1991

- [91-1] Математический тривиум. *Успехи матем. наук*, 1991, **46**(1), 225–232. (См. также [97-3], 631–643)
- [91-2] Топологические и эргодические свойства замкнутых 1-форм с несоизмеримыми периодами. *Функц. анализ и его прилож.*, 1991, **25**(2), 1–12.
- [91-3] Работы И. Г. Петровского и современная математика. *Успехи матем. наук*, 1991, **46**(6), 136. (Совм. с В. П. Масловым и О. А. Олейник)
- [91-4] Михаил Васильевич Федорюк (некролог). *Успехи матем. наук*, 1991, **46**(2), 205–207. (Совм. с Б. Р. Вайнбергом, Л. Д. Кудрявцевым, В. П. Масловым, Е. Ф. Мищенко, В. П. Мясниковым, С. П. Новиковым, О. А. Олейник)
- [91-5] Михаил Васильевич Федорюк (некролог). *Диф. уравнения*, 1991, **27**(5), 914–915. (Совм. с Б. Р. Вайнбергом, В. А. Ильиным, Л. Д. Кудрявцевым, В. Б. Лидским, В. П. Масловым, Е. Ф. Мищенко, В. Ю. Приходько)
- [91-6] Bernoulli–Euler updown numbers associated with function singularities, their combinatorics and arithmetics. *Duke Math. J.*, 1991, **63**(2), 537–555. (Англ. яз.)
- [91-7] The Theory of Singularities and Its Applications. — Rome: Accademia Nazionale dei Lincei; Pisa: Scuola Normale Superiore, 1991, 72 p. (Lezioni Fermiane) (Англ. яз.)
- [91-8] Supplement 2 in: S. N. Gurbatov, A. N. Malakhov, A. I. Saichev. Non-linear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays,

particles. Translated from Russian. — Manchester: Manchester University Press, 1991, X + 308 p. (Nonlinear Science: Theory and Applications) (Совм. с Ю. М. Барышниковым и И. А. Богаевским) (Англ. яз.)

- [91-9] Kolmogorov's hydrodynamic attractors. In: Turbulence and stochastic processes: Kolmogorov's ideas 50 years on. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1991, **434**(1890), 19–22. (Англ. яз.)

## 1992

- [92-1] Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера. *Успехи матем. наук*, 1992, **47**(1), 3–45.
- [92-2] Сравнения для чисел Эйлера, Бернулли и Спрингера групп Кокстера. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1992, **56**(5), 1129–1133.
- [92-3] Полиинтегрируемые потоки. *Алгебра и анализ*, 1992, **4**(6), 54–62.
- [92-4] Springer numbers and morsification spaces. *J. Algebraic Geom.*, 1992, **1**(2), 197–214. (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 505–524)
- [92-5] Topological methods in hydrodynamics. In: Annual Review of Fluid Mechanics. V. 24. — Palo Alto, CA: Annual Reviews, 1992, 145–166. (Совм. с Б. А. Хесиным) (Англ. яз.)
- [92-6] ЯБ и математика. *Природа*, 1992, **2**, 105–108.  
(См. также [97-3], 645–651; расширенный вариант см. в [93-10])
- [92-7] Дмитрий Андреевич Гудков (некролог). *Успехи матем. наук*, 1992, **47**(6), 195–198. (Совм. с А. М. Вершиком, О. Л. Виро, А. Б. Корчагиным, Е. А. Леонтович-Андроновой, С. П. Новиковым, О. А. Олейник, Г. М. Полотовским, Г. А. Уткиным, Е. И. Шустинным)
- [92-8] Интервью: M. Audin, P. Iglésias. Questions à V. I. Arnold. *Gazette des Mathématiciens*, 1992, **52**, 5–12. (Франц. яз.)

## 1993

- [93-1] Математический тривиум – II. *Успехи матем. наук*, 1993, **48**(1), 211–222.
- [93-2] Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnold and M. Monastyrsky. — London: Chapman & Hall, 1993, 251–274. (Англ. яз.)
- [93-3] Bounds for Milnor numbers of intersections in holomorphic dynamical systems. In: Topological Methods in Modern Mathematics (Stony Brook, NY, 1991). — Houston, TX: Publish or Perish, 1993, 379–390. (Англ. яз.)
- [93-4] Послесловие к кн.: Henri Poincaré. New Methods of Celestial Mechanics. V. 1. — New York: American Institute of Physics, 1993. (History of Modern Physics and Astronomy, 13) (Англ. яз.)



- [93-5] Об А. Н. Колмогорове. В кн.: Колмогоров в воспоминаниях. Под ред. А. Н. Ширяева. — М.: Наука, 1993, 144–172.  
(См. также [97-3], 653–677. На англ. яз. см. в кн.: Golden Years of Moscow Mathematics. Editors: S. Zdravkovska, P. L. Duren. — Providence, RI: AMS & LMS, 1993, 129–153. (History of Mathematics, 6))
- [93-6] Николай Николаевич Ченцов (некролог). *Успехи матем. наук*, 1993, 48(2), 165–168. (Совм. с Н. С. Бахваловым, К. В. Брушлинским, И. М. Гельфандом, Р. Л. Добрушиным, А. В. Забродиним, Э. А. Ибрагимовым, С. П. Курдюмовым, С. П. Новиковым, Д. Е. Охоцимским, Ю. В. Прохоровым, Ю. Б. Радвогиным, Я. Г. Синаем, Р. З. Хасьминским, А. С. Холево, А. Н. Ширяевым, Т. М. Энеевым)
- [93-7] Will Russian mathematics survive? *Notices Amer. Math. Soc.*, 1993, 40(2), 104–107. (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 695–702)
- [93-8] Для чего мы изучаем математику? *Квант*, 1993, 1/2, 5–15.  
(См. также [97-3], 679–694)
- [93-9] Sur les propriétés topologiques des projections lagrangiennes en géométrie symplectique des caustiques. — CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Cahiers de Mathématiques de la Décision, 9320, 14.06.1993, 9 p. (Франц. яз.)  
(См. также *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 1995, 8(1), 109–119. На рус. яз. см. [97-3], 525–532)
- [93-10] ЯБ и математика. В кн.: Знакомый незнакомый Зельдович в воспоминаниях друзей, коллег, учеников. Под ред. С. С. Герштейна и Р. А. Сюняева. — М.: Наука, 1993, 212–219.  
(См. также [92-6] и [97-3], 645–651)

1994

- [94-1] О топологических свойствах лежандровых проекций в контактной геометрии волновых фронтов. *Алгебра и анализ*, 1994, 6(3), 1–16.
- [94-2] Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, 4(2), 209–225. (Франц. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 533–551)
- [94-3] Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden, L. Sirovich. — New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math., 100) (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 553–575)
- [94-4] Topological Invariants of Plane Curves and Caustics. Dean Jacqueline V. Lewis Memorial Lectures, Rutgers University. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994, VIII + 60 p. (University Lecture Series, 5) (Англ. яз.)

- [94-5] Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. In: Singularities and Bifurcations. Editor: V. I. Arnold. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994, 33–91. (Advances in Sov. Math., 21) (Англ. яз.)
- [94-6] The Vassiliev theory of discriminants and knots. In: Proc. First European Congress Math. (Paris, 1992), Invited lectures, Part 1, V. I. — Basel: Birkhäuser, 1994, 3–29. (Progr. Math., 119) (Англ. яз.)
- [94-7] Анатолий Моисеевич Вершик (к шестидесятилетию со дня рождения). *Успехи матем. наук*, 1994, **49**(3), 195–197. (Совм. с М. Ш. Бирманом, И. М. Гельфандом, И. А. Ибрагимовым, С. В. Керовым, А. А. Кирилловым, О. А. Ладыженской, Г. А. Леоновым, А. А. Лодкиным, С. П. Новиковым, Я. Г. Синаем, М. З. Соломяком, Л. Д. Фаддеевым)
- [94-8] Выживет ли математика? Заметки о математическом конгрессе в Цюрихе. *Эврика*, 1994, 7 сентября, **14**(20).  
(См. также [97-3], 703–712. Расширенный вариант на англ. яз. см. в *Math. Intelligencer*, 1995, **17**(3), 6–10)
- [94-9] En todo matemático hay un ángel y un demonio. *El País*, 1994, 29 junio. (Исп. яз.)
- [94-10] Why mathematics? *Quantum*, 1994. (Англ. яз.)
- [94-11] Remarks on the enumeration of plane curves. In: Advances in Sov. Math., Gudkov memorial volume. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. (Англ. яз.)  
(См. также в кн.: Topology of Real Algebraic Varieties and Related Topics. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996, 17–32)
- [94-12] Symplectic geometry and topology. — CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Cahiers de Mathématiques de la Décision, **9410**, 24.02.1994, 68 p. (Англ. яз.)
- [94-13] Problèmes résolubles et problèmes irrésolubles analytiques et géométriques. In: Passion des Formes. Dynamique Qualitative Sémiophysique et Intelligibilité. Dédié à R. Thom. — Fontenay-St Cloud: ENS Éditions, 1994, 411–417. (Франц. яз.)  
(См. также в кн.: Formes et Dynamique, Renaissance d'un Paradigme. Hommage à René Thom. — Paris: Eshel, 1995. На рус. яз. см. [97-3], 577–582)

1995

- [95-1] Лекции по уравнениям с частными производными. — М.: Изд-во Матем. колледжа Независимого Моск. ун-та, 1995, 146 с.
- [95-2] Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов. *Успехи матем. наук*, 1995, **50**(1), 3–68.
- [95-3] Инварианты и перестройки фронтов на плоскости. В кн.: Особенности гладких отображений с дополнительными структурами. Под ред.

- В. И. Арнольда. Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН, т. 209, 1995, 14–64.
- [95-4] Some remarks on symplectic monodromy of Milnor fibrations. In: The Floer Memorial Volume. — Basel: Birkhäuser, 1995, 99–103. (Progr. Math., 133) (Англ. яз.)
- [95-5] Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect. *Selecta Math.* (N.S.), 1995, 1(1), 1–19. (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 583–604)
- [95-6] Nombres d'Euler, de Bernoulli et de Springer pour les groupes de Coxeter et les espaces de morsification: le calcul des serpents. Univ. Bordeaux I, Talence, 1995. (Leçons de Mathématiques d'Aujourd'hui) (Франц. яз.)
- [95-7] Людвиг Дмитриевич Фаддеев (к шестидесятилетию со дня рождения) *Успехи матем. наук*, 1995, 50(3), 171–175. (Совм. с Ю. С. Осиповым, А. А. Гончаром, С. П. Новиковым, Г. И. Марчуком, П. П. Кулчишом, В. С. Владимировым, Е. Ф. Мищенко)
- [95-8] Проективная топология. *Квант*, 1995.
- [95-9] Предисловие к кн.: М. Атья. Геометрия и физика узлов. Пер. с англ. — М.: Мир, 1995, 5–6.

## 1996

- [96-1] Особенности каустик и волновых фронтов. — М.: ФАЗИС, 1996, X + 334 с.  
(Введение к этой книге см. также в [97-3], 483–488. На англ. яз. см. [90-2])
- [96-2] Топологические проблемы теории распространения волн. *Успехи матем. наук*, 1996, 51(1), 3–50.
- [96-3] Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер. *Функц. анализ и его прилож.*, 1996, 30(1), 1–17.
- [96-4] Remarks on the extactic points of plane curves. In: The Gelfand Mathematical Seminars, 1993–1995. Editors: I. M. Gelfand, J. Lepowski, M. Smirnov. — Boston: Birkhäuser, 1996, 11–22. (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 605–618)
- [96-5] An interview with Vladimir Arnold by S. H. Lui. *Hong Kong Math. Soc. Newsletter*, 1996, 2, 2–8. (Англ. яз.)  
(См. также *Notices Amer. Math. Soc.*, 1997, 44(4), 432–438. На рус. яз. см. [97-3], 713–726)
- [96-6] Dynamical systems. — CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Cahiers de Mathématiques de la Décision, 9605, 1996, 17 p. (Англ. яз.)
- [96-7] Singularity theory. — CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Cahiers de Mathématiques de la Décision, 9609, 1996, 20 p. (Англ. яз.)

- [96-8] Topological classification of real trigonometric polynomials and cyclic serpents polyhedron. In: Arnold–Gelfand Seminar. — Boston: Birkhäuser, 1996. (Англ. яз.)  
(На рус. яз. см. [97-3], 619–625)
- [96-9] Предисловие к кн.: Международный конгресс математиков в Киото 1990 г. Избранные доклады. Пер. с англ. Под ред. А. И. Овсеевича и В. М. Тихомирова. — М.: Мир, 1996, 5–6.
- [96-10] On the number of flattening points on space curves. In: Ya. G. Sinai's Moscow Seminar on Dynamical Systems. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996, 11–22. (Англ. яз.)
- [96-11] Almost sign-preserving trigonometric polynomials. Preprint, 1996.
- [96-12] Топологическая теорема Максвелла о мультипольном представлении сферических функций. *Успехи матем. наук*, 1996, 51(6), 227.

## 1997

- [97-1] От суперпозиций до теории КАМ. В кн.: [97-3], 727–740.
- [97-2] Об эпиграфе к «Евгению Онегину». *Изв. РАН. Сер. языка и лит-ры*, 1997, 56(2), 63.  
(См. также [97-3], 745–746)
- [97-3] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное – 60. — М.: ФАЗИС, 1997, XLVIII + 770 с.
- [97-4] Топологические методы в гидродинамике. — М.: ФАЗИС, 1997. (Совм. с Б. А. Хесиным)
- [97-5] Лекции по уравнениям с частными производными. Изд. 2-е, дополн. — М.: ФАЗИС, 1997.  
(Предисловие к этой книге см. также в [97-3], 741–743)

# Направления исследований

## Распределение работ по темам

### Динамические системы

КАМ (гамильтоновы системы): [61-2], [62-1], [62-3], [63-2], [63-4], [64-1], [68-1], [68-2], [82-8], [85-2], [85-4], [89-5], [94-3]

КАМ (негамильтоновы системы): [61-1], [61-3], [64-3], [65-2], [76-4], [83-5], [84-12], [85-11], [86-11], [89-5], [89-18], [94-3]

эргодическая теория: [61-4], [61-6], [62-2], [63-5], [67-4], [68-7], [69-6], [74-5], [79-8], [80-4], [81-5], [87-2], [88-4], [89-7]

ОДУ, общая теория: [71-1], [75-1], [77-2], [78-1], [84-3], [84-7], [85-1], [85-8], [87-6], [89-12], [93-2], [93-3], [94-2], [94-13], [96-10]

теория бифуркаций: [61-1], [64-3], [69-5], [71-6], [72-6], [76-4], [76-8], [77-1], [77-8], [78-1], [83-5], [84-12], [85-11], [86-1], [86-4], [86-11], [89-12]

пересечения: [90-3], [90-6], [93-3]

псевдопериодические потоки: [87-2], [88-4], [89-5], [89-7], [91-2], [92-3], [93-2], [94-2]

приложения: [62-1], [62-3], [63-2], [63-4], [68-1], [79-2], [87-5], [89-18]

### Топология

суперпозиции: [57-1], [57-2], [59-1], [61-5], [62-4], [70-2], [70-6], [70-7], [85-5]

косы: [68-3], [68-5], [69-7], [70-2], [70-6], [70-7]

вещественные алгебраические кривые: [71-5], [73-3], [77-5], [78-2], [79-4], [88-3], [92-8]

монодромия: [68-3], [72-3], [88-3], [89-8], [89-17], [90-7], [95-4], [95-5]

кобордизмы: [80-2], [80-3], [83-6], [94-5]

вещественные кривые: [93-9], [94-4], [94-5], [94-6], [94-11], [95-3]

## Особенности

общая теория: [67-2], [68-4], [76-2], [78-2], [79-3], [80-5], [82-1], [82-8], [84-1], [84-5], [84-11], [86-3], [86-4], [87-2], [87-9], [88-1], [89-2], [89-12], [90-5], [91-7], [93-2], [93-3], [94-3]

функции: [72-4], [72-5], [73-2], [73-4], [74-2], [74-3], [75-2], [75-3], [75-4], [75-5], [76-3], [76-7], [76-8], [77-8], [78-6], [82-1], [84-11], [89-4], [91-6], [92-4]

катастрофы: [79-9], [81-9], [83-1], [83-8], [86-2], [86-6], [87-5], [89-9], [90-1]

## Симплектическая геометрия

общая теория: [63-6], [69-4], [74-1], [79-1], [82-1], [84-4], [85-3], [85-7], [85-9], [87-7], [89-1], [89-17], [90-5], [90-7], [94-13], [95-1], [97-2]

особенности: [72-4], [72-5], [74-3], [81-1], [81-2], [82-1], [82-3], [82-9], [83-2], [84-2], [84-11], [90-2], [96-1]

контактная геометрия: [76-8], [77-8], [78-6], [80-2], [80-3], [82-1], [82-7], [82-9], [83-2], [83-3], [84-2], [84-11], [84-13], [85-8], [87-6], [89-13], [90-2], [90-4], [94-1], [96-1]

топология: [65-6], [65-7], [66-1], [67-1], [72-7], [80-2], [80-3], [86-5], [88-6], [89-4], [93-9], [94-1], [94-12], [95-2], [95-3], [95-4], [95-6]

## Дифференциальные уравнения с частными производными

гидродинамика: [65-3], [65-4], [65-5], [65-6], [66-1], [66-2], [66-4], [66-5], [69-4], [72-2], [84-7], [91-9], [92-5], [97-3]

магнитогидродинамика: [74-5], [81-3], [81-4], [82-4], [82-5], [83-4], [83-7], [84-6], [92-5], [97-3]

космология: [81-6], [81-10], [82-3], [89-5]

теория потенциала: [82-6], [82-10], [83-6], [83-10], [89-17], [90-7]

гиперболические уравнения: [88-2], [88-3], [88-5], [90-2], [96-1]

собственные векторы: [72-3], [74-1], [79-1], [89-1], [95-5]

## Разное

геометрия: [61-4], [63-5], [65-5], [66-4], [67-1], [69-6], [71-7], [72-7], [76-4], [76-5], [76-8], [77-8], [78-2], [78-6], [79-3], [79-4], [80-1], [81-9], [83-1], [83-3], [84-4], [84-5], [84-11], [84-13], [85-3], [86-3], [87-2], [88-4], [89-3], [89-5], [89-7], [90-1], [90-2], [90-5], [91-7], [92-4], [93-9], [94-1], [95-2], [96-1], [96-10]

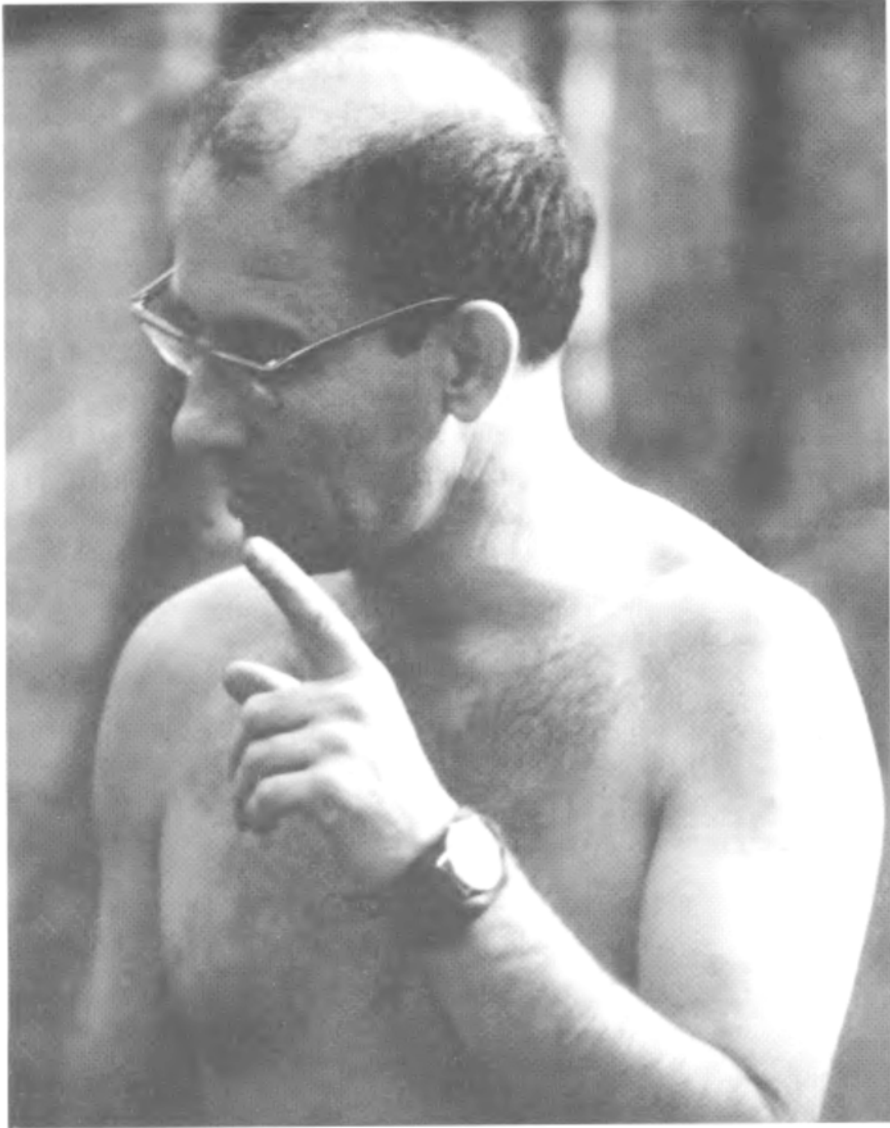
алгебра и теория чисел: [68-5], [69-7], [70-7], [71-4], [71-7], [74-3], [86-3], [89-14], [91-6], [92-2], [92-4], [93-3], [95-6]

комбинаторика: [91-6], [92-1], [92-2], [92-4], [95-6]

логика и основания математики: [70-3], [70-4], [70-8], [94-2], [94-13]

история математики: [87-8], [87-9], [88-8], [88-9], [89-3], [89-8], [89-15], [89-17], [90-7], [91-9], [92-6], [92-8], [93-5], [93-7], [93-8], [93-10], [94-8]

образование: [78-1], [88-12], [89-11], [91-1], [92-6], [92-8], [93-1], [93-10], [94-8], [94-9], [94-10], [95-1], [97-2]





# Основные результаты

## Тринадцатая проблема Гильберта

а) Отрицательный ответ [57-2] на вопрос Гильберта (относящийся к топологии) о суперпозиции функций. Полученный результат заключается в том, что пространства  $C^0([0, 1]^2)$  достаточно для покрытия пространства  $C^0([0, 1]^3)$  с помощью суперпозиций. Предшествующие результаты:  $C^0([0, 1]^3)$  покрывает  $C^0([0, 1]^n)$  (А. Н. Колмогоров), но  $C^p([0, 1]^{n-1})$  не покрывает  $C^p([0, 1]^n)$  при  $p \geq 1$  (А. Г. Витушкин).

б) Открытие [70-2] топологических препятствий для представимости алгебраической функции от  $N$  переменных в виде *полной* суперпозиции алгебраических функций от  $N - 1$  переменной (в терминах когомологий кос). Обзор: [85-5].

## Малые знаменатели («теория КАМ»)

а) Решение [61-2] проблемы Биркгофа об устойчивости неподвижной точки в общем эллиптическом случае.

б) Доказательство [62-1] теоремы об адиабатической инвариантности на бесконечных интервалах времени.

в) Доказательство [63-4], [68-1] вырожденной теоремы КАМ (из которой вытекает существование квазипериодических движений планетного типа в планетных системах с достаточно малыми планетами).

г) Открытие [64-1] универсального механизма неустойчивости, названного физиками «диффузией Арнольда».

д) Основание [65-2] теории эволюции при переходе через резонансы в многочастотных системах.

е) Формулировка [61-1], [64-3] гипотез о сопряженности повороту (одна из них была позже доказана М. Р. Эрманом, некоторые другие — см. [94-2] — близки к результатам Ж.-К. Йоккоса, но до сих пор не доказаны). Обзоры: [74-1], [79-1], [85-2], [89-1].

## Гидродинамическая устойчивость

- а) Доказательство [66-2] теоремы о нелинейной устойчивости для двумерных потоков с выпуклыми профилями скоростей («метод Арнольда»).
- б) Открытие [66-4] связи между гидродинамической устойчивостью и проблемами турбулентности, с одной стороны, и геометрией бесконечномерных групп Ли, с другой (и в особенности вычисление отрицательной кривизны группы диффеоморфизмов, из которого следует практическая невозможность долгосрочного динамического прогноза погоды).
- в) Классификация [65-6] топологических типов стационарных потоков идеальной жидкости [и предсказание существования хаотических зон в потоках «АВС» (Arnold–Beltrami–Childress), подтвержденного численно М. Эно].
- г) Открытие [72-2] влияния растяжения частиц на развитие неустойчивостей (позже исследованного М. М. Вишиком и С. Фридлендером). Обзоры: [92-5], [97-3].

## Теория особенностей

- а) Открытие [72-5] связи между теорией критических точек функций и теорией групп Кокстера, что привело к классификации общих каустик, волновых фронтов, фокальных множеств и особенностей преобразований Лежандра, а также к асимптотикам осциллирующих интегралов, обобщающих функции Эйри.
- б) Создание [72-4] теории лагранжевых особенностей и позже [74-1] — теории лежандровых особенностей в контактной геометрии.
- в) Начало [78-6] теории краевых особенностей (связанных с группами Кокстера и алгебрами Ли  $B$ ,  $C$ ,  $F$ ).
- г) Оценка снизу [93-9], [94-1] числа лагранжевых и лежандровых особенностей, рождающихся при общей деформации стандартного лагранжева или лежандрова коллапса.

## Топология

а) Формулировка [65-7] «гипотез Арнольда», положивших начало симплектической топологии (и их доказательство для точных симплектоморфизмов тора, близких к тождественному преобразованию).

б) Введение [67-1] характеристического класса, входящего в условия квантования (и названного в [67-1] «классом Маслова»).

в) Вычисление [80-2], [80-3] групп лагранжевых и лежандровых кобордизмов кривых.

г) Создание [94-5] теории топологических инвариантов кривых на плоскости и волновых фронтов.

## Теория кос

а) Открытие [68-5] связи между теорией кос, с одной стороны, и алгебраической геометрией и теорией особенностей, с другой.

б) Вычисление [69-7] колец когомологий групп крашенных кос (и формулировка гипотез, позже доказанных Э. Брискорном, об общих конфигурациях гиперплоскостей).

в) Исследование [70-6] колец когомологий пространств конфигураций корней многочленов и групп кос (эти кольца С. Смейл и В. А. Васильев позже использовали в теории сложности).

г) Построение [70-2] характеристических классов, сохраняющихся при преобразованиях Чирнгаузена.

## Вещественная алгебраическая геометрия

а) Открытие [71-7] связи между шестнадцатой проблемой Гильберта об овалах вещественных алгебраических кривых и четырехмерной топологией.

б) Доказательство [73-3], [78-2] «неравенств Арнольда» и «сравнений Арнольда», налагающих ограничения на топологические свойства вещественных алгебраических многообразий данной степени в вещественном проективном пространстве. Обзор: [79-4].

## Магнитогидродинамика

- а) Введение [74-5] асимптотического инварианта Хопфа, обобщающего коэффициент зацепления в пространстве замкнутых кривых на бездивергентные векторные поля.
- б) Построение [81-4] стационарного кинематического динамо на трехмерных многообразиях.
- в) Открытие [83-7] эффекта динамо в потоках «АВС» (совместно с Е. И. Коркиной). Обзоры: [92-5], [97-3].

Гиперболические дифференциальные уравнения  
с частными производными

- а) Открытие [88-2] рассеяния лучей на особенностях дисперсионного соотношения в гиперболических вариационных системах.
- б) Классификация [88-5] особенностей гиперповерхностей Френеля в вариационных гиперболических системах общего положения.
- в) Исследование [90-2] перестроек волновых фронтов при типичных эволюциях волн в неоднородной среде. Обзоры: [90-2], [96-1].

## Разное

- а) Создание [69-5] локальной качественной теории *динамических систем с комплексным временем*.
- б) Формализация [63-6] *интегрируемости по Лиувиллю* в теории гамильтоновых систем (и доказательство *глобального* варианта теоремы Лиувилля).
- в) Основание [63-5] *эргодической теории с комплексным временем* (и ее приложения к гипергеометрическому уравнению и к эргодической теории свободных групп).
- г) Открытие [69-4] *гамильтоновой структуры уравнений Эйлера* движения твердого тела и идеальной жидкости.
- д) Определение [71-6] *«нормальной формы Арнольда»* для матриц, которая регуляризует жорданову нормальную форму и делает последнюю применимой в *численной линейной алгебре* (вычисление обычной жордановой нормальной формы — некорректная задача).

е) Гипотезы ([70-3], [70-4], [94-2] и [94-13]) об *аналитической и геометрической неразрешимости* задач о локальной устойчивости, интегрируемости и полной интегрируемости; определения аналитической и геометрической неразрешимости и неинтегрируемости [90-5].

ж) Исследования ([72-3] и [95-5]) *слоений собственных функций* в вещественных и комплексных эрмитовых системах (с приложениями к *расходимости коротковолновых асимптотических разложений*, к теории фаз Берри, к квантовому эффекту Холла и к комбинаторике).

з) Введение [75-3] *спектральных последовательностей* в вычисление рядов Тейлора формальной локальной алгебры.

и) Формулировка [74-5] гипотез о *спиральности бездивергентных векторных полей* (позднее частично доказанных Фридманом и Хе).

к) Открытие [76-4] *теории окрестностей голоморфных подмногообразий*, параллельной теориям Биркгофа, Пуанкаре, Зигеля и КАМ для динамических систем (и доказательство теорем о сходимости, расходимости, бифуркациях и нормальных формах в этой теории).

л) Предсказание [78-1] бифуркаций в *теории резонанса 1 : 4* (позднее многократно подтвержденных численно и частично доказанных).

м) Создание [79-3] *теории сворачивания инвариантов* с ее приложениями к *классификации проекций поверхностей из точек общего положения в трехмерном пространстве на плоскость*, т.е. *видимых контуров*.

н) Описание [82-3] особенностей в *бесстолкновительной пылевидной среде* (которое привело к предсказанию *ячеистой крупномасштабной структуры Вселенной*).

о) Введение [73-2] метода *многогранников Ньютона* в теорию особенностей (его развитие названо теорией «*торических вложений*»).

п) Открытие [75-4] «*странной двойственности*» в теории особенностей (в настоящее время смыкающейся с открытой физиками десятью годами позже «*зеркальной симметрией*»).

р) Обобщение [83-6] *теорем Ньютона–Айвори* о притяжении эллиптического слоя, описываемом *магнитным полем* (последнее определяется интегралом Био–Савара–Лапласа), а также обобщение [82-6] теории *ньютоновских потенциалов гиперболических гиперповерхностей*.

с) Основанный на диаграммном исчислении и многогранниках Ньютона подход [83-5] к теории возмущений, приведший к необычным асимптотикам объектов, которые физики называют «языками Арнольда» (последние были введены в [61-1], [64-3] и [77-1]).

т) Формулировка ([72-6], [78-1], [79-4] и [94-2]) «инфинитезимальной шестнадцатой проблемы Гильберта» (называемой в литературе также «проблемой Гильберта–Арнольда») о нулях абелевых (и более общих) интегралов.

у) Классификация [85-10] нормальных форм пуассоновых структур на плоскости и в трехмерном пространстве (и нормальных форм комплексных степеней вырожденных форм объема).

ф) Изучение ([76-8], [77-8], [81-1], [85-8] и [87-6]) однопараметрических семейств кривых на поверхностях.

х) Открытие [87-2] связей между квазикристаллами, покрытиями Пенроза, изучаемыми физиками стохастическими паутинами, марковскими разбиениями в эргодической теории и теорией особенностей (см. также [88-4], [89-3] и [89-7]).

ц) Открытие ([87-9], [89-3], [89-8], [89-17] и [90-7]) некоторых незамеченных топологических результатов в «Principia» Ньютона (и их дальнейшее развитие).

ч) Основание ([88-4], [89-7], [91-2] и [92-3]) псевдопериодической топологии.

ш) Основание ([88-3] и [96-10]) проективной топологии.

э) Основание ([89-2], [91-6], [92-1], [92-2], [92-4] и [95-6]) теории конусов Спрингера и теории змей, описывающих группы Кокстера и пространства морсификаций.

ю) Создание ([90-3], [90-6] и [93-3]) теории топологической сложности пересечений в голоморфной и гладкой динамике и в асимптотике чисел Милнора.

я) Определение [89-14] нового варианта многомерного обобщения понятия цепной дроби (в терминах градуированных коммутативных алгебр) и формулировка гипотез об аналогах теоремы периодичности Лагранжа и статистики Гаусса для таких многомерных «дробей».

# Избранные работы по математике

Теоремы. Гипотезы. Обзоры





## О функциях трех переменных

Далее вкратце указывается способ доказательства теоремы, которая доставляет полное решение 13-й проблемы Гильберта (в смысле опровержения высказанной Гильбертом гипотезы).

**Теорема 1.** *Любая заданная на единичном кубе  $E^3$  действительная непрерывная функция  $f(x_1, x_2, x_3)$  трех переменных может быть представлена в виде*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ij}[\varphi_{ij}(x_1, x_2), x_3], \quad (1)$$

где функции двух переменных  $h_{ij}$  и  $\varphi_{ij}$  действительны и непрерывны.

А. Н. Колмогоровым недавно [1] было получено представление

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 h_i[\varphi_i(x_1, x_2), x_3], \quad (2)$$

где функции  $h_i$  и  $\varphi_i$  непрерывны, причем функции  $h_i$  действительны, а функции  $\varphi_i$  принимают значения, принадлежащие некоторому дереву  $\Xi$ . Дерево  $\Xi$  в конструкции А. Н. Колмогорова (для случая функции трех переменных) может быть взято не универсальным, а таким, что все его точки имеют индекс ветвления, не превосходящий 3. Для этого функции  $u_{kt}^r$  основной леммы [1] (для  $n = 2$ ) следует выбрать так, чтобы они, кроме указанных там пяти свойств, обладали еще свойствами:

6) Граница каждого множества уровня каждой функции  $u_{kt}^r$  делит плоскость не более чем на 3 части.

7) При любом  $r$   $G_{11}^r \supseteq E^2$ .

В силу этого замечания теорема 1 является следствием существования представления (2) и следующей теоремы:

**Теорема 2.** *Каково бы ни было семейство  $F$  действительных равностепенно непрерывных функций  $f(\xi)$ , заданных на дереве  $\Xi$ , все точки*

которого имеют индекс ветвления  $\leq 3$ , можно так реализовать дерево в виде подмножества  $X$  трехмерного куба  $E^3$ , что любая функция семейства  $F$  может быть представлена в виде

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k),$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)$  есть образ  $\xi \in \Xi$  в дереве  $X$ ;  $f_k(x_k)$  — непрерывные действительные функции одного переменного, причем  $f_k$  непрерывно зависят от  $f$  (в смысле равномерной сходимости).

Введем некоторые вспомогательные понятия. Пусть  $K$  — конечный отрезочный комплекс, расположенный в  $E^3$  и состоящий из отрезков, не параллельных ни одной из координатных плоскостей.

**Определение 1.** Система принадлежащих  $K$  точек

$$a_0 \neq a_1 \neq \dots \neq a_{n-1} \neq a_n$$

называется *молнией*, если отрезки  $\overline{a_{i-1}a_i}$  перпендикулярны, соответственно, осям  $X_{\alpha_i}$  и

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_{n-1} \neq \alpha_n.$$

Конечная система попарно различных точек  $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ , занумерованных кортежами индексов  $i_1 i_2 \dots i_n$ , называется *ветвящейся схемой*, если: 1) существует только одна точка  $a_0$ , занумерованная одним индексом; 2) вместе с  $a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n}$  в систему входит  $a_{i_1 \dots i_{n-1}}$ .

**Определение 2.** Ветвящаяся система точек  $a_{i_1 \dots i_n}$ , расположенных на  $K$ , называется *выводящей схемой*, если при фиксированном кортеже  $i_1 \dots i_n$  совокупность точек вида  $a_{i_1 \dots i_n i_{n+1}}$  лежит на плоскости, проходящей через  $a_{i_1 \dots i_n}$ , перпендикулярной некоторой оси координат  $x_{\alpha_{i_1 \dots i_n}}$ , и исчерпывает собою все точки пересечения этой плоскости с  $K$ , отличные от  $a_{i_1 \dots i_n}$ .

Дерево  $\Xi$  может быть представлено в виде

$$\Xi = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}, \quad D_n \subset D_{n+1},$$

где  $D_n$  — конечные деревья,  $D_1$  — простая дуга и  $D_{n+1}$  получается из  $D_n$  приклеиванием в некоторой точке  $p_n$ , не являющейся для  $D_n$  ни точкой ветвления, ни концевой точкой, отрезка  $S_n$  [2].

Обозначим через  $\omega_n$  верхнюю грань колебаний функций  $f \in F$  на компонентах разности  $\Xi \setminus D_n$ . Легко видеть, что

$$\omega_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Поэтому можно выбрать такую последовательность

$$n_1 < n_2 < \dots < n_r < \dots,$$

что

$$\omega_n \leq \frac{1}{r^2} \quad \text{при } n \geq n_r.$$

Реализация  $X$  дерева  $\Xi$  в  $E^3$  строится в виде:

$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D'_n},$$

где  $D'_n$  — отрезочные комплексы, реализующие  $D_n$  так, что образы  $S'_n$  дуг  $S_n$  являются отрезками, не перпендикулярными осям координат.

Индуктивное построение  $D'_n$  производится так, чтобы  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D'_n$  было деревом [2] и с соблюдением следующих условий:

1) Любая функция  $f \in F$  представляется на  $D_n$  в виде

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^3 f_k^n(x_k), \quad (3)$$

где  $f_k^n(x_k)$  непрерывно зависят от  $f$ .

2) Дерево  $D'_n$  из любой точки  $a_0$  имеет выводящую схему, в которой первое направление  $\alpha_0$  может быть выбрано произвольно.

3) Пусть  $A_n$  — множество точек  $D'_n$ , являющихся образами точек ветвления  $\Xi$ . Существует такое счетное множество  $B_n \subseteq D'_n$ ,  $B_n \cap A_n = \emptyset$ , что молнии  $a_0 \dots a_m$ , начинающиеся в  $a_0 \in D'_n \setminus B_n$ , не имеют общих точек с  $A_n$  и совпадающих точек  $a_i = a_j$ ,  $i \neq j$ .

4) Если  $n_r < n \leq n_{r+1}$ , то

$$|f_k^n(x_k) - f_k^{n_r}(x_k)| \leq \left( 3 + \frac{n - n_r}{n_{r+1} - n_r} \right) \frac{1}{r^2}. \quad (4)$$

Доказательство возможности индуктивного построения деревьев  $D'_n$  и функций  $f_k^n$  с сохранением свойств 1)–4) слишком сложно, чтобы быть здесь изложенным. Грубо говоря, на каждом шагу приклеиваемый отрезок  $S'_{n+1}$  выбирается очень коротким, его направление и способ отображения  $S_{n+1}$  на  $S'_{n+1}$  выбираются так, чтобы обеспечить выполнение свойств 2) и 3) у  $D'_{n+1}$ . Сохранение равенства (3) при переходе от  $n$  к  $n+1$  на вновь приклеенном отрезке  $S_{n+1}$  требует введения поправки  $f_k^{n+1} - f_k^n$  к хотя бы одной из функций  $f_k^n$  на проекции  $S'_{n+1}$  на ось  $x_k$ . Для сохранения же равенства (3) на ранее построенном дереве  $D'_n$  приходится эту поправку компенсировать новыми поправками к функциям  $f_k^n$  на ряде других отрезков. Точный способ введения этих поправок мы здесь не излагаем. Заметим только следующее: поправки эти должны быть таковы, чтобы при  $n' = n+1$  сохранилось неравенство (4); при достаточной малости и надлежащем расположении  $S'_{n+1}$  их удастся произвести для каждой функции  $f_k^n$  на конечной системе попарно не пересекающихся отрезков оси  $x_k$ ; в доказательстве такой возможности существенно используется то обстоятельство, что дерево  $D'_n$  обладает свойствами 2) и 3).

Доказательство существования непрерывной функции

$$f_k(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_k^n(x_k)$$

и соблюдения равенства

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k)$$

на всем  $X$  несложно.

Я очень благодарен А. Н. Колмогорову за помощь и советы при выполнении этой работы.

## Литература

- [1] Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных. *ДАН СССР*, 1956, **108**(2), 179–182.
- [2] Menger K., Nöbeling G. *Kurventheorie*. Berlin–Leipzig, 1932. Kap. X.

## Некоторые вопросы приближения и представления функций

### 1. Постановка задачи

Пусть  $f$  и  $g$  — функции двух переменных. Тогда

$$F(x, y, z) = f[x, g(y, z)]$$

есть функция трех переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Это пример *суперпозиции*, составленной из функций  $f$  и  $g$ .

Вообще, *суперпозицией*, составленной из данных функций, или *суперпозицией данных функций*, называется функция, получающаяся при подстановке одних из них в другие вместо аргументов.

Понятие суперпозиции — одно из основных в анализе. Например, элементарные функции — это, по определению, суперпозиции функций  $a(x, y) = x + y$ ,  $b(x, y) = xy$ ,  $c(x, y) = x^y$  и известных функций одного переменного  $\ln x$ ,  $\sin x$  и др.

Очевидно, суперпозиция, составленная из функций двух переменных, может быть функцией любого числа переменных. Здесь рассматривается обратный вопрос: какие функции многих переменных являются суперпозициями функций меньшего числа переменных?

Постановка вопроса принадлежит Д. Гильберту. Корни уравнений 5-й и 6-й степени, как функции коэффициентов, оказываются суперпозициями функций двух переменных. Для уравнения 7-й степени не удавалось получить такое представление: дело сводится к функциям трех переменных. Это побудило Гильберта поставить следующую задачу [1] (13-я проблема из «Математических проблем»):

*Всякая ли аналитическая функция трех переменных является суперпозицией, составленной из непрерывных функций двух переменных? Является ли корень  $x(a, b, c)$  уравнения*

$$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$$

*суперпозицией непрерывных функций двух переменных?*

Следует обратить внимание на классы функций, из которых составляются суперпозиции. Легко видеть [2], что суперпозиция *разрывных* функций двух переменных может быть при должном их подборе *любой* функцией 3-х переменных.

С другой стороны, имеет место

**Теорема 1 (Гильберт).** *Существуют аналитические функции трех переменных, не являющиеся суперпозициями бесконечно дифференцируемых функций двух переменных.*

Это может быть объяснено так: число независимых коэффициентов ряда Тейлора до порядка  $n$  у функции трех переменных порядка  $n^3$ , а у функции двух переменных порядка  $n^2$ . Поэтому если функция трех переменных есть суперпозиция любого *фиксированного вида* (например,  $f[x, g(y, z)]$ ) бесконечно дифференцируемых функций двух переменных, то между коэффициентами ее ряда Тейлора достаточно высокого порядка должно выполняться некое соотношение, отвечающее виду суперпозиции (для указанного выше простейшего вида достаточно взять коэффициенты при членах до 4-го порядка). Различных видов суперпозиций счетное множество; существует аналитическая функция трех переменных, избегающая все такие соотношения. Она не может быть суперпозицией *аналитических* функций двух переменных никакого вида.

Этим объясняется постановка вопроса о возможности разложения в суперпозиции *непрерывных* функций. Гильберт ожидал, что и здесь такое разложение не всегда возможно.

Для суперпозиций простейших видов это действительно так [2]–[4].

## 2. Суперпозиции гладких функций

Витушкин [4], [5] показал, что если разложение любой гладкой (имеющей  $p$  производных) функции трех переменных в суперпозицию функций двух переменных и возможно, то лишь с понижением гладкости в полтора раза.

Рассмотрим класс заданных на единичном  $n$ -мерном кубе  $E^n$  функций, имеющих все частные производные до порядка  $p$  включительно, и пусть все  $p$ -е производные удовлетворяют условию Гёльдера степени  $0 < \alpha \leq 1$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  удовлетворяет условию Гёльдера степени  $\alpha$  с константой  $M$ , если  $|f(x) - f(y)| < M\|x - y\|^\alpha$ .

**Определение.** Класс всех таких функций обозначается  $F_{p,\alpha}^n$ ;  $n$  называется *размерностью*,  $p + \alpha$  — *гладкостью*, а  $(p + \alpha)/n$  — *качеством* функций класса.

Заметим, что, например, гладкость 2 имеют функции, у которых первые производные удовлетворяют условию Липшица (условию Гёльдера с  $\alpha = 1$ ).

**Теорема 2 (Витушкин).** *Существует функция класса  $F_{p,\alpha}^n$ , не представимая в виде суперпозиции функций лучшего качества гладкости  $\geq 1$ , т.е. функций классов  $F_{q,\beta}^m$  с  $(q + \beta)/m > (p + \alpha)/n$ ,  $q \geq 1$ .*

Например, функции трех переменных гладкости 3 можно надеяться разложить в суперпозицию функций двух переменных лишь гладкости не более 2.

Полученные очень сложным образом с помощью теории многомерных вариаций [4], созданной Витушкиным на базе исследований Кронрода, Адельсона–Вельского, Ландиса и др. [6], эти результаты были затем связаны Колмогоровым [7] с идеями теории передачи информации Шеннона. Возникшие при этом соображения имеют самостоятельное значение, выходящее далеко за пределы проблемы Гильберта, которая стимулировала их развитие (см. также доклад Колмогорова «Линейная размерность топологических векторных пространств»<sup>2</sup>).

### 3. $\epsilon$ -энтропия классов функций

Чтобы указать точку отрезка  $(0, 1)$  с точностью до 0,001, требуется 3 десятичных знака. Указание точки отрезка с точностью  $\epsilon$  требует числа десятичных знаков порядка  $\lg 1/\epsilon$ , а точки  $n$ -мерного куба — порядка  $n \lg 1/\epsilon$  знаков. Имеет также смысл говорить о «числе знаков, необходимых для задания с точностью  $\epsilon$  функций  $f \in F$ », где  $F$  — какой-либо класс функций. Это число будет «минимальным объемом таблицы функции». Известно, насколько возрастает объем таблицы с ростом числа переменных и как он уменьшается при увеличении гладкости функций (интерполяция высокого порядка!). Оказывается, минимальный объем таблицы функции класса  $F_{p,\alpha}^n(C)$  при точности  $\epsilon$  имеет, когда  $\epsilon \rightarrow 0$ , порядок роста  $(1/\epsilon)^{n/(p+\alpha)}$ . Здесь  $F_{p,\alpha}^n(C)$  есть класс функций  $f \in F_{p,\alpha}^n$ , у которых  $|f|$  и абсолютные величины частных производных порядка  $\leq p$  не превосходят  $C$  и которые удовлетворяют условию

<sup>2</sup> на том же конгрессе, что и настоящий доклад — прим. ред.

Гёльдера с константой  $C$ . В теории передачи информации принято считать не десятичные, а двоичные знаки. Поэтому в приводимых ниже точных формулировках появляются двоичные логарифмы.

Пусть  $X$  — вполне ограниченное множество в метрическом пространстве  $R$ . По определению, при любом  $\varepsilon > 0$  существует конечное множество точек  $R$  таких, что шары радиуса  $\varepsilon$  с центрами в этих точках покрывают  $X$  ( $\varepsilon$ -сеть в  $R$  для  $X$ ).

**Определение.** Пусть:

$N_\varepsilon^R(X)$  — минимальное число точек в  $\varepsilon$ -сети в  $R$  для  $X$ ;

$N_\varepsilon(X)$  — минимальное число множеств диаметра  $2\varepsilon$ , покрывающих  $X$ ;

$M_\varepsilon(X)$  — максимальное число  $\varepsilon$ -различных сигналов в  $X$ , т.е. максимальное число точек  $X$  таких, что шары радиуса  $\varepsilon$  с центрами в этих точках не пересекаются попарно.

Тогда

$$H_\varepsilon^R(X) = \log_2 N_\varepsilon^R(X), \quad H_\varepsilon(X) = \log_2 N_\varepsilon(X), \quad C_\varepsilon(X) = \log_2 M_\varepsilon(X)$$

называются соответственно  $\varepsilon$ -энтропией  $X$  относительно  $R$ ,  $\varepsilon$ -энтропией  $X$  и  $\varepsilon$ -емкостью  $X$ .

Легко доказать, что

$$H_{2\varepsilon}^R(X) \leq C_\varepsilon(X) \leq H_\varepsilon(X) \leq H_\varepsilon^R(X).$$

Если называть таблицей с точностью  $\varepsilon$  функции данного класса любой набор 0 и 1, по которому эта функция определяется в каждой точке с точностью  $\varepsilon$ , то число различных таблиц из  $n$  знаков будет  $2^n$ . Поэтому естественен результат Витушкина, доказавшего, что  $H_\varepsilon(X)$  в случае, когда  $X$  — компакт пространства  $C$ ,<sup>3</sup> есть минимальный объем таблицы функции класса  $X$  с точностью  $\varepsilon$  [10].

Для ряда важнейших классов установлены оценки  $H_\varepsilon$  [8], [9], [11].

(А) Для класса функций  $n$  комплексных переменных, аналитических в области  $G = \prod_{i=1}^n G_i$  ( $G_i$  — область комплексной плоскости), равномерно ограниченных какой-либо константой  $C$  и рассматриваемых на

<sup>3</sup> непрерывных функций на компакте с метрикой  $\rho(f, g) = \max |f - g|$



$$K = \prod_{i=1}^n K_i \quad (K_i \subset G_i \text{ — континуумы})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H_\varepsilon}{C(G, K) (\log 1/\varepsilon)^{n+1}} = 1;$$

здесь  $C(G, K)$  — вычисляемая определенным в [9] регулярным образом геометрическая характеристика  $G$  и  $K$ .

(В) В [8], [11] доказана

**Теорема 3** (Витушкин, Колмогоров).

$$k \left( \frac{C}{\varepsilon} \right)^{n/(p+\alpha)} \leq H_\varepsilon(F_{p,\alpha}^n(C)) \leq K \left( \frac{C}{\varepsilon} \right)^{n/(p+\alpha)},$$

где  $0 < k \leq K < \infty$  — не зависящие от  $\varepsilon$  константы.

Используя эту формулу, легко доказать при  $q \geq 1$ , что суперпозиция некоторого фиксированного вида из функций качества  $(q + \beta)/m$  данного компактного семейства  $F_{q,\beta}^m(C_1)$  не может дать всех функций компактного семейства  $F_{p,\alpha}^n(C)$ , если качество последних хуже  $((p + \alpha)/n < (q + \beta)/m)$ .

Грубо говоря, дело в том, что минимальный объем таблицы функции класса  $F_{p,\alpha}^n(C)$  порядка  $(1/\varepsilon)^{n/(p+\alpha)}$ , а объем таблиц всех входящих в суперпозицию конкретного вида функций класса  $F_{q,\beta}^m(C_1)$  порядка  $(1/\varepsilon)^{m/(q+\beta)}$ . Если разложение всех функций класса  $F_{p,\alpha}^n(C)$  в такую суперпозицию функций класса  $F_{q,\beta}^m(C_1)$  возможно, то достаточно полная таблица всех входящих в суперпозицию функций заменяет таблицу с точностью  $\varepsilon$  функции-суперпозиции; поэтому  $(1/\varepsilon)^{n/(p+\alpha)} \leq K (1/\varepsilon)^{m/(q+\beta)}$ , где  $0 < K < \infty$  не зависит от  $\varepsilon$ . Значит,  $n/(p + \alpha) \leq m/(q + \beta)$ : если разложение и возможно, то в функции не лучшего качества, чем разлагаемые. Применяя известный метод «накопления гадостей», строим теперь функцию класса  $F_{p,\alpha}^n(C)$ , не представимую вообще никакой суперпозицией функций классов  $F_{q,\beta}^m(C_1)$  при всевозможных  $C_1$  и  $(q + \beta)/m > (p + \alpha)/n$ . Это и есть теорема Витушкина.

#### 4. Суперпозиции непрерывных функций

Однако в формулировке Гильберта речь шла не о гладких, а о непрерывных функциях. В этой области результаты оказались противоположными его гипотезе.

В 1956 г. Колмогоров показал [12], что любая непрерывная функция, заданная на  $n \geq 3$ -мерном кубе  $E^n$ , представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r=1}^n h^r [x_n, g_1^r(x_1, \dots, x_{n-1}), g_2^r(x_1, \dots, x_{n-1})],$$

где функции  $n - 1$  переменного  $g$  и функции 3-х переменных  $h$  действительны и непрерывны.

Применяя это разложение много раз, видим, что любая непрерывная функция  $n \geq 4$ -х переменных есть суперпозиция непрерывных функций 3-х переменных.

Доказательство весьма сложно. Основным аппаратом, используемым при этом, является дерево компонент множеств уровня функции, введенное Кронродом [6].

Множеством уровня  $c$  функции  $f(\mathbf{x})$  называется совокупность всех тех точек  $\mathbf{x}$  области определения, для которых  $f(\mathbf{x}) = c$ .

Компонентой множества уровня называется каждый связный кусок множества уровня. На рис. 1 множества уровней  $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$  состоят из одной компоненты, при  $\frac{1}{2} < c \leq \frac{2}{3}$  — из двух компонент, при  $\frac{2}{3} < c \leq 1$  — из одной.

Функция есть отображение области определения на область значений. Это отображение может быть представлено как произведение двух:

(1) Отображение области определения на множество компонент множеств уровня — каждой точке ставится в соответствие та компонента, которой она принадлежит.

(2) Отображение множества компонент на множество значений: каждой компоненте ставится в соответствие значение, принимаемое на ней функцией.

Пусть область определения — компакт  $F$ .

Если функция непрерывна, то в множестве компонент вводится «естественная топология». Пусть  $A$  — компонента,  $U$  — любое открытое подмножество  $F$ , содержащее  $A$ . Тогда совокупность всех тех компонент множеств уровня, которые пересекаются с  $U$ , объявляется окрестностью  $U_A$  компоненты  $A$ .

Теперь первое отображение оказывается непрерывным монотонным<sup>4</sup>, а второе — непрерывным с нульмерными прообразами. Отсюда

<sup>4</sup> т.е. прообраз каждой точки связан

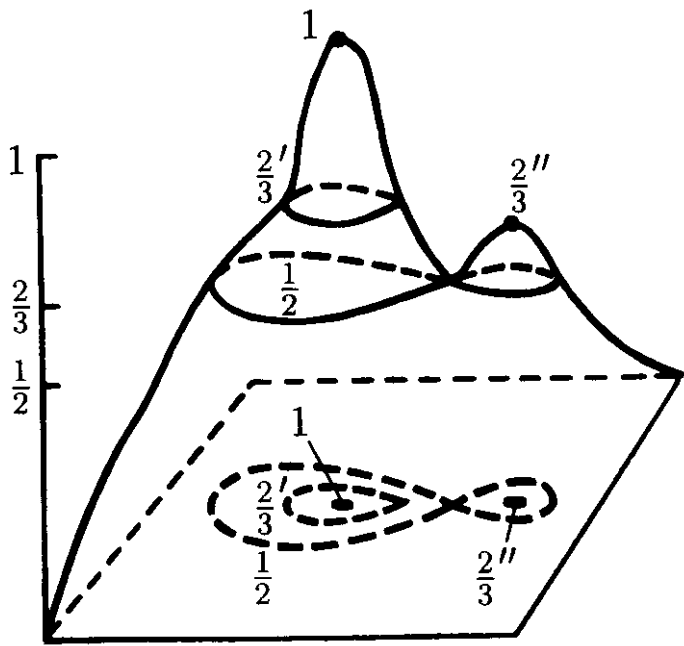


Рис. 1. Множества уровней  $0$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  и  $1$  обозначены теми же цифрами, что и уровни.  $\frac{2}{3}'$  и  $\frac{2}{3}''$  — две компоненты множества уровня  $\frac{2}{3}$

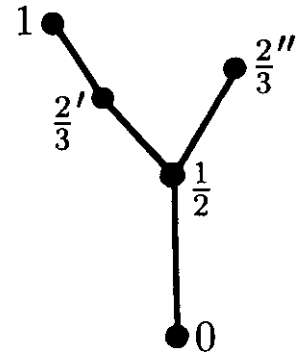


Рис. 2. Дерево компонент множеств уровня функции рис. 1. Компоненты обозначены так же, как на рис. 1

вытекает, что пространство компонент есть локально связный односвязный континуум, т.е. дерево [13], [14]. Оно и называется *деревом функции*.

Связь его с функцией очень простая. Например, функция рис. 1 имеет дерево, гомеоморфное рогатке рис. 2. Число кусков, на которые точка дерева функции разбивает его, равно числу частей, на которые соответствующая компонента множества уровня делит область определения.

Из многочисленных замечательных свойств дерева в [12] используется то, что на плоскости существует универсальное дерево (оно содержит гомеоморфные любому дереву подмножества). О зубчатости функций, входящих в указанную выше суперпозицию и в дальнейшие, свидетельствует то, что их деревья универсальны или почти универсальны.

Гильбертова проблема была сформулирована для функций *трех* переменных, и теорема Колмогорова не давала тут ответа. Однако выяснилось [15], что, усложняя далее его конструкции и располагая дерево в трехмерном пространстве так, чтобы любая функция на нем предста-

влялась в виде суммы функций координат, можно представить любую непрерывную функцию, заданную на трехмерном кубе, в виде

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ij}[\varphi_{ij}(x_1, x_2), x_3],$$

где  $h$  и  $\varphi$  — действительные и непрерывные функции двух переменных.

Тем самым доказана (вопреки гипотезе Гильберта) возможность представить любую непрерывную функцию  $n \geq 3$ -х переменных в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных.

Наконец, вскоре после этого Колмогорову удалось показать, что справедлива

**Теорема 4.** *Любая функция, непрерывная на  $n$ -мерном кубе, представляема в виде*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \chi_i \left[ \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(x_j) \right],$$

где функции  $\chi$  и  $\varphi$  — действительные и непрерывные функции одного переменного.

Таким образом, все непрерывные функции оказались суперпозициями непрерывных функций одного переменного и одной единственной функции двух переменных — сложения.

Метод этой работы элементарнее [12] и [15] и не использует понятия дерева. Доказательство теоремы 4 может быть легко понято по заметке [16].

Функции  $\varphi_{ij}$  — стандартные, не зависящие от  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Построения [16] можно рассматривать поэтому как помещение с помощью стандартных функций

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(x_j) \quad (i = 1, \dots, 2n + 1)$$

специального гомеоморфа  $F$   $n$ -мерного куба  $E^n$  в  $(2n + 1)$ -мерное пространство. Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  индуцирует на  $F$  непрерывную функцию  $f(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1})$ .  $F$  обладает тем замечательным свойством, что любая непрерывная функция  $f(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1})$  на  $F$  представляется в виде суммы функций  $\chi_i(\varphi_i)$  координат точки  $F$ .

## 5. Задачи

Полученные результаты можно свести в следующую таблицу:

Используемые функции		$q + \beta \rightarrow \infty$		
Представляемые функции	$C^m$	$F_{q,\beta}^m$	$F_\infty^m$	$A^m$
$C^n$	+	—	—	—
$p + \alpha$ ↓ $\infty$ $F_{p,\alpha}^n$	+	<div style="border-left: 1px dashed black; border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>q + \beta &gt; (p + \alpha)m/n,</math>  <math>q \geq 1</math>  —  ? </div>	—	—
$F_\infty^n$	+	?	—	—
$A^n$	+	?	—	—

Здесь  $C^n$  — класс всех непрерывных функций на  $n$ -мерном кубе,  $F_\infty^n$  — всех бесконечно-дифференцируемых,  $A^n$  — аналитических; + означает, что все функции класса слева являются суперпозициями функций класса наверху ( $m < n$ ). Отсюда естественно возникает

**Задача 1.** Разлагается ли всякая функция класса  $F_{p,\alpha}^n$  в суперпозицию функций класса  $F_{q,\beta}^m$  при  $(q + \beta)/m = (p + \alpha)/n$ ? При

$$(q + \beta)/m > (p + \alpha)/n - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \quad (m < n)?$$

Разлагается ли каждая функция класса  $F_\infty^n$ ,  $A^n$  в суперпозицию функций  $F_{q,\beta}^m$ ?  $F_\infty^m$ ?

Изучение отдельных видов суперпозиций показывает весьма своеобразные свойства классов функций, представимых в виде суперпозиции данного вида [17]. Отсюда

**Задача 2.** Найти простейшую суперпозицию функций  $m < n$  переменных, в виде которой может быть представлена: (а) данная функция  $n$  переменных; (б) данный класс непрерывных функций  $n$  переменных; (в) все непрерывные функции  $n$  переменных. Исследовать аналогичные вопросы для аппроксимации с произвольной точностью.

О более практическом подходе к задачам такого рода см. [18].

Оценка  $H_\varepsilon$ , даваемая теоремой 3, грубая, так как константы  $k$  и  $K$  остаются неопределенными. Неясно, как они зависят от  $C$ ,  $n$ ,  $p$  и  $\alpha$ ; неизвестна асимптотика  $H_\varepsilon$ , т.е. при какой функции  $\varphi(\varepsilon)$  (предположительно — константе)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H_\varepsilon}{\varphi(\varepsilon) (1/\varepsilon)^{n/(p+\alpha)}} = 1.$$

Трудность этих вопросов становится ясной, если заметить, что в гораздо более простом случае евклидовой метрики им соответствуют задачи о плотнейшей укладке шаров и экономнейшем покрытии пространства шарами.

**Задача 3.** Улучшить оценки  $H_\varepsilon$ , даваемые теоремой 3. Установить асимптотику  $H_\varepsilon(F_{p,\alpha}^n(C))$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Так как  $\varepsilon$ -энтропия  $H_\varepsilon(F)$  характеризует минимальный объем таблицы функции класса  $F$  с точностью  $\varepsilon$ , знание поведения  $H_\varepsilon$  существенно для оценки различных методов приближенного задания функций, их введения в машины и сохранения в памяти машин [17], [20]. Однако здесь будет важным знание  $H_\varepsilon$  при малых, но конечных  $\varepsilon$ .

**Задача 4.** Дать для различных классов ( $F_{p,\alpha}^n(C)$  и т.п.) точные оценки  $H_\varepsilon$  при конечных  $\varepsilon$ . Исследовать способы табулирования, при которых объем таблицы приближается к минимальному. Оценить возрастание трудности пользования таблицей при уменьшении ее объема.

## Литература

- [1] Hilbert D. Gesammelte Abhandlungen. B. 3, Nr. 17. Analysis Grundlagen d. Math., Physik. Verschied., S. Lebensgeschichte. 1935, 435 s.
- [2] Поля Г., Серё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1956, 396 с. Задачи 119 и 119а.

- [3] Арнольд В. И. О представимости функций двух переменных в виде  $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$ . *УМН*, 1957, **12**(2), 119–121.
- [4] Витушкин А. Г. О многомерных вариациях. М.: Гостехиздат, 1955, с. 201.
- [5] Витушкин А. Г. К тринадцатой проблеме Гильберта. *ДАН СССР*, 1954, **95**(4), 701–704.
- [6] Кронрод А. С. О функциях двух переменных. *УМН*, 1950, **5**(1), 24–134.
- [7] Колмогоров А. Н. Оценки минимального числа элементов  $\varepsilon$ -сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных. *УМН*, 1955, **10**(1), 192–194.
- [8] Колмогоров А. Н. О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств. *ДАН СССР*, 1956, **108**(3), 385–388.
- [9] Ерохин В. Д. О конформных преобразованиях колец и об основном базисе пространства функций, аналитических в элементарной окрестности произвольного континуума. *ДАН СССР*, 1958, **120**(4), 689–692.  
Ерохин В. Д. Об асимптотике  $\varepsilon$ -энтропии аналитических функций. *ДАН СССР*, 1958, **120**(5), 942–949.
- [10] Витушкин А. Г. Абсолютная  $\varepsilon$ -энтропия метрических пространств. *ДАН СССР*, 1957, **117**(5), 745–747.
- [11] Витушкин А. Г. О наилучших приближениях дифференцируемых и аналитических функций. *ДАН СССР*, 1958, **119**(3), 418–420.
- [12] Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных. *ДАН СССР*, 1956, **108**(2), 179–182.
- [13] Kuratowski K. Topologie. II. Warszawa–Wrocław, 1950, §46.
- [14] Menger K., Nöbeling G. Kurventheorie. Berlin–Leipzig, 1932, Kap. X.
- [15] Арнольд В. И. О функциях трех переменных. *ДАН СССР*, 1957, **114**(4), 679–681.
- [16] Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. *ДАН СССР*, 1957, **114**(5), 953–956.
- [17] Ли Дя Гон. Представление функции двух переменных в виде  $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$ . *Сутак ка мулли [Математика и физика]*, 1957, **1**(4), 22–28. (Корейск., рус.)
- [18] Шура-Бура М. Р. Аппроксимация функций многих переменных функциями, каждая из которых зависит от одного переменного. В кн: Вычислительная математика. Сб. 2. М., 1957, 3–19.
- [19] Витушкин А. Г. Некоторые оценки из теории табулирования. *ДАН СССР*, 1957, **114**(5), 923–926.
- [20] Бахвалов Н. С. О составлении уравнений в конечных разностях при приближенном решении уравнения Лапласа. *ДАН СССР*, 1957, **114**(6), 1146–1148.





Об устойчивости положения равновесия  
гамильтоновой системы обыкновенных  
дифференциальных уравнений  
в общем эллиптическом случае

1. Пусть точка  $p = q = 0$  есть неподвижная точка системы

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (1)$$

где  $H(p, q, t)$  — аналитическая по  $p, q, t$  функция, периодическая по  $t$  с периодом  $2\pi$ . Эллиптическим называется случай, когда это положение равновесия устойчиво в первом (линейном) приближении. Тогда, как показал Биркгоф [1], при надлежащем выборе переменных  $p, q$  функция Гамильтона имеет вид

$$H = \lambda r + c_2 r^2 + \dots + c_n r^n + \tilde{H}(p, q, t), \quad (2)$$

где  $2r = p^2 + q^2$ ,  $\tilde{H} = O(r^{n+1})$  — аналитическая функция  $p, q, t$  и  $n \geq 2$  произвольно. Общим эллиптическим назовем случай, когда среди постоянных  $c_l$  ( $2 \leq l < \infty$ ) есть отличная от нуля.

2. Известны примеры, когда положение равновесия неустойчиво, а  $\lambda$  рационально [2]. Мы рассмотрим случай иррационального  $\lambda$ . Обозначим через  $\Lambda_K$  множество таких  $\lambda$ , что неравенства

$$|\lambda n - m| > \frac{K}{(|m| + |n|)^2} \quad (3)$$

выполнены при всех целых  $m, n > 0$ . Обозначим через  $\Lambda$  объединение точек плотности всех множеств  $\Lambda_K$ . Как известно, дополнение к  $\Lambda$  на прямой имеет меру нуль [3].

**Теорема 1.** Если  $\lambda \in \Lambda$ , то положение равновесия  $(0, 0)$  системы уравнений (1) с функцией Гамильтона  $H(p, q, t)$  общего эллиптического типа (2) устойчиво.

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 в любой окрестности окружности  $r = q = 0$  пространства  $p, q, t$  имеется аналитический инвариантный тор  $T_\mu$  с уравнением  $r = r(\varphi, t)$  ( $\varphi = \arctg \frac{p}{q}$ ). На торе  $T_\mu$  можно ввести аналитическую координату  $\psi(\varphi, t)$  так, что уравнения (1) на торе  $T_\mu$  примут вид  $\dot{\psi} = \mu$ . Множество, образованное торами  $T_\mu$ , имеет положительную меру в пространстве  $p, q, t$ .

**Теорема 3.** Пусть функция Гамильтона имеет вид

$$H(r, \varphi, t) = H_0(r) + \tilde{H}(r, \varphi, t), \quad (4)$$

где  $dH_0/dr = \mu + \Omega(r)$ ,  $\mu \in \Lambda_K$ ,  $\Omega(0) = 0$  и функция

$$\tilde{H} = \sum_{m^2+n^2 \neq 0} H_{mn}(r) e^{i(m\varphi+nt)}$$

при  $|\operatorname{Im} \varphi, t| \leq \rho$ ,  $|r| \leq \rho_r = \delta^k$  аналитична и удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{H}| \leq M = \delta^N, \quad (5)$$

а функция  $\Omega(r)$  при  $|r| \leq \rho_r$  аналитична и

$$\delta^a = \theta \leq \left| \frac{d\Omega}{dr} \right| \leq \Theta = \delta^{-b}. \quad (6)$$

Здесь  $\delta > 0$  — некоторая постоянная;  $N, k, a, b$  — натуральные числа. Если выполнены неравенства

$$\begin{aligned} 2k + 28 + 2a + 4b < N < 3k - 14 - 2b; \\ \delta < 10^{-6} K^2; \quad \delta < 0,1\rho, \end{aligned} \quad (7)$$

то существуют функции  $R(\varphi, t)$ ,  $\Psi(\varphi, t)$  периода  $2\pi$  по  $\varphi$  и  $t$ , аналитические при  $|\operatorname{Im} \varphi, t| \leq 0,1\rho$  и такие, что на торе  $r = R(\varphi, t)$  из уравнений

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial r}, \quad \dot{r} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}$$

следует  $\dot{\psi} = \mu$  (здесь  $\psi = \varphi + \Psi$ ).

Теорема 1 вытекает из теоремы 2, так как торы  $T_\mu$  отделяют окружность  $r = 0$  от остальной части пространства  $p, q, t$ . Теорема 2 вытекает из теоремы 3: нетрудно видеть, что в условиях теоремы 2 существуют сколь угодно малые торовидные кольца  $|r - r_0| \leq \rho_r$  вокруг

окружности  $r = 0$ , к которым применима теорема 3, если за переменную  $r$  в ней принять  $r - r_0$ .

**3.** Последние две теоремы обобщаются на системы с  $n$  степенями свободы. Однако получающиеся инвариантные  $(n + 1)$ -мерные торы не делят  $(2n + 1)$ -мерное фазовое пространство  $p, q, t$ , и вопрос об устойчивости остается открытым. Аналогичные теоремы можно доказать и об окрестности положения равновесия автономной гамильтоновой системы. В этом случае в  $(2n - 1)$ -мерных многообразиях  $H(p, q) = h$  лежат торы размерности  $n$ . Отсюда следует

**Теорема 4.** *Положение равновесия автономной системы уравнений Гамильтона с двумя степенями свободы в общем эллиптическом случае устойчиво, если  $\lambda_2/\lambda_1 \in \Lambda$ .*

Общим эллиптическим случаем мы называем здесь тот, когда аналитическая функция  $H$  в надлежащих координатах имеет вид [1]

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + H_0(r_1, r_2) + \tilde{H}(p_1, p_2, q_1, q_2),$$

где  $H_0(r_1, r_2) = \sum_{i+j=2}^n c_{ij} r_1^i r_2^j$ ,  $\tilde{H} = O(r_1 + r_2)^{n+1}$ ,  $2r_i = p_i^2 + q_i^2$  и  $h(\varepsilon) = H_0(\varepsilon\lambda_2, -\varepsilon\lambda_1)$  не обращается тождественно в нуль.

Можно также показать, что любое аналитическое каноническое отображение плоскости на себя вблизи неподвижной точки общего эллиптического типа устойчиво, если его число вращения  $\lambda \in \Lambda$ . Теоремы 2 и 3 допускают соответствующее обобщение даже в многомерном случае.

**4.** Наметим теперь доказательство теоремы 3. Она является усилением теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона [4]. Инвариантный тор отыскивается, как и в работе А. Н. Колмогорова, последовательными приближениями типа метода Ньютона. Этот метод дает столь быструю сходимость, что ее не могут разрушить появляющиеся в формуле (9) малые знаменатели.

**Основная лемма.** *В предположениях (4)–(7) теоремы 3 существуют такая аналитическая функция  $\tilde{F}(\bar{r}', \varphi, t) = \sum_{m^2+n^2 \neq 0} F_{mn}(\bar{r}') e^{i(m\varphi+nt)}$  и*

такое число  $\bar{r}^*$ , что каноническое преобразование

$$\bar{\varphi} = \varphi + \partial \tilde{F} / \partial \bar{r}', \quad \bar{r} = \bar{r}' - \bar{r}^*, \quad r = \bar{r}' + \partial \tilde{F} / \partial \varphi$$

приводит функцию Гамильтона (4) к виду  $\bar{H}(\bar{r}, \bar{\varphi}, t) = \bar{H}_0 + \tilde{H}$ , где  $d\bar{H}_0/d\bar{r} = \mu + \bar{\Omega}(\bar{r})$ ,  $\bar{\Omega}(0) = 0$  и функция

$$\tilde{H}(\bar{r}, \bar{\varphi}, t) = \sum_{m^2+n^2 \neq 0} \bar{H}_{mn}(\bar{r}) e^{i(m\bar{\varphi}+nt)}$$

при  $|\operatorname{Im} \bar{\varphi}, t| \leq \bar{\rho} = \rho - 3\delta$ ,  $|\bar{r}| \leq \bar{\rho}_r = \delta^k$  аналитична и удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{H}| \leq \bar{M} = \delta^N,$$

а  $\bar{\Omega}(\bar{r})$  при  $|\bar{r}| \leq \bar{\rho}_r$  аналитична и

$$\bar{\delta}^a = \bar{\theta} \leq \left| \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{r}} \right| \leq \bar{\Theta} = \bar{\delta}^{-b}.$$

В этих формулах  $\bar{\delta} = \delta^{1\frac{1}{2}}$ .

Теорема 3 выводится из основной леммы без особого труда, так как погрешность  $s$ -го приближения  $M_s$  не более  $M^{(1\frac{1}{2})^s}$ .

Не имея возможности привести здесь доказательство основной леммы, укажу лишь способ построения  $\tilde{F}$  и  $\bar{r}^*$ . Как известно,  $\bar{H}(\bar{r}, \bar{\varphi}, t) = \bar{H}'(\bar{r}', \bar{\varphi}, t) = \hat{H}(\bar{r}', \varphi, t)$ , где обозначено

$$\hat{H}(\bar{r}', \varphi, t) = H(r(\bar{r}', \varphi, t), \varphi, t) + \frac{\partial \tilde{F}(\bar{r}', \varphi, t)}{\partial t}.$$

Очевидно,

$$\hat{H}(\bar{r}', \varphi, t) = H_0(\bar{r}') + \hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{S}_1(\bar{r}', \varphi, t) &= \mu \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + \tilde{H}; \\ \hat{S}_2(\bar{r}', \varphi, t) &= H_0(r) - H_0(\bar{r}') - \mu(r - \bar{r}'), \quad |\hat{S}_2| = |\Omega| \left| \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi} \right|; \\ \hat{S}_3(\bar{r}', \varphi, t) &= \tilde{H}(r) - \tilde{H}(\bar{r}'), \quad |\hat{S}_3| = \left| \frac{\partial \tilde{H}}{\partial r} \right| \left| \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi} \right|. \end{aligned} \quad (8)$$

Функция  $\tilde{F}$  определяется из условия  $\hat{S}_1 \equiv 0$ :

$$F_{mn} = \frac{iH_{mn}}{\mu m + n}. \quad (9)$$

Переходя к переменным  $\bar{r}'$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $t$ , находим

$$\bar{H}'(\bar{r}', \bar{\varphi}, t) = H'_0(\bar{r}') + S_{2_0}(\bar{r}') + S_{3_0}(\bar{r}') + \tilde{\bar{H}}'(\bar{r}', \bar{\varphi}, t) = \bar{H}'_0 + \tilde{\bar{H}}',$$

где  $\tilde{\bar{H}}'(\bar{r}', \bar{\varphi}, t) = \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3$  объединяет переменные члены рядов Фурье по  $\bar{\varphi}$ ,  $t$  функций

$$S_i(\bar{r}', \bar{\varphi}, t) = \tilde{S}_i + S_{i_0}(\bar{r}') = \hat{S}_i(\bar{r}', \varphi(\bar{r}', \bar{\varphi}, t), t) \quad (i = 2, 3).$$

Теперь  $\bar{r}^*$  определяется из уравнения

$$\left. \frac{d\bar{H}'_0}{d\bar{r}'} \right|_{\bar{r}^*} = \mu.$$

При этом для оценки  $\bar{r}^*$  используется неравенство (6).

При выполнении неравенств (7) величина  $\tilde{\bar{H}}$ , оцененная по формулам (8), не превосходит  $M^{1\frac{1}{2}} = \bar{M}$ .

## Литература

- [1] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.-Л.: Гостехиздат, 1941, 320 с. Гл. III.
- [2] Levi-Civita T. Sopra alcuni criteri di instabilità. *Ann. di Matem. Pura Appl.* (3), 1901, 5, 221.
- [3] Хинчин А. Я. Цепные дроби. 2-е изд. М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1949, 116 с. §14.
- [4] Колмогоров А. Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. *ДАН СССР*, 1954, 98(4), 527-530.



## О рождении условно периодического движения из семейства периодических движений

1. Условно периодическим называют движение точки  $(x, y)$  по тору  $T$ , если

$$\frac{dy}{dx} = \lambda, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — иррациональная постоянная, а  $x$  и  $y$  — координаты на торе, так что  $(x + k, y + l)$  и  $(x, y)$  — одна и та же точка  $T$ . Рассмотрим семейство близких дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \lambda + a + \varepsilon f(x, y), \quad (2)$$

где  $a$  и  $\varepsilon$  — параметры,  $f(x, y)$  — аналитическая функция.

Недавно [1] я показал, что если «возмущение»  $\varepsilon f(x, y)$  мало, то найдется такое  $a(\varepsilon)$ , что уравнение (2) при  $a = a(\varepsilon)$  аналитической заменой переменной может быть приведено к виду (1).

В настоящей заметке рассматривается вырожденный случай  $\lambda = 0$ ; невозмущенное движение происходит по параллелям тора  $y = \text{const}$ , т.е. периодически. Оказывается, что при многих малых возмущениях такое движение переходит в условно периодическое. Проследить этот переход интересно потому, что системы, близкие к вырождающимся, часто встречаются в механике.

Трудности, появляющиеся при приведении уравнения к виду (1) из-за наличия малых знаменателей, преодолеваются с помощью последовательных приближений ньютоновского типа. А. Н. Колмогоров [2] впервые применил этот метод при построении условно периодических движений системы с функцией Гамильтона

$$H(p, q) = H_0(p_1, \dots, p_n) + \varepsilon \tilde{H}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) + \dots$$

Существенным в настоящей заметке является привлечение новых (впрочем, несложных) арифметических фактов; их появление связано с вырожденностью невозмущенной системы. Обобщая теорему 2 нашей заметки, можно распространить результаты [2] на системы с функцией

Гамильтона

$$H = H_0(p_1, \dots, p_k) + \varepsilon H_1(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_k) + \\ + \varepsilon^2 \tilde{H}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) + \dots \quad (k < n).$$

2. Обозначим через  $\Lambda_\theta$  множество точек  $\lambda$  таких, что

$$|\lambda n + m| > \theta |\lambda| n^{-2}$$

при всех целых  $m$  и  $n$ ,  $n \neq 0$ . Пусть  $\Lambda$  означает объединение множеств  $\Lambda_\theta$  при всех  $\theta > 0$ . Легко доказывается следующая

**Лемма.** *Нуль есть предельная точка множества  $\Lambda_\theta$  ( $0 < \theta < 0,25$ ) и точка плотности множества  $\Lambda$ .*

**Теорема 1.** *Пусть на торе  $T$  дано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon f(x, y), \quad (3)$$

*зависящее от параметра  $\varepsilon$ , с аналитической функцией  $f(x, y)$ . Пусть  $\int_0^1 f(x, y) dx > 0$  при всех  $y$ . Тогда для всякого достаточно малого  $\lambda \in \Lambda_\theta$  найдутся  $\varepsilon(\lambda)$  и замена переменных  $z = z_\lambda(x, y)$ , аналитическая по  $x, y$ , такие, что уравнение (3) принимает вид  $dz/dx = \lambda$ . Множество  $\varepsilon(\lambda)$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) имеет положительную меру; нуль — его точка плотности.*

Доказательство теоремы 1 основано на том, что сначала делается замена переменных, рекомендуемая обычными асимптотическими методами, а затем применяется

**Теорема 2.** *Заключение теоремы 1 справедливо для дифференциального уравнения на торе*

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon c + \varepsilon^2 F(x, y, \varepsilon), \quad (4)$$

*где  $c > 0$  — постоянная и функция  $F(x, y, \varepsilon)$  аналитическая.*

3. Покажем, как привести уравнение (3) к виду (4). Выделим в  $f(x, y)$  усредненную часть  $\bar{f}(y) = \int_0^1 f(\xi, y) d\xi$  и переменную часть  $\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(y)$ . Введем сперва такую координату на торе

$$y_1 = y_1(x, y, \varepsilon) = y + \varepsilon h(x, y), \quad (5)$$



чтобы переменная часть  $dy_1/dx$  была порядка  $\varepsilon^2$ . Очевидно,

$$\frac{dy_1}{dt} = \varepsilon \bar{f} + \varepsilon \left( \tilde{f} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 f \frac{\partial h}{\partial y},$$

следовательно, в (5) надо положить  $h(x, y) = - \int_0^x \tilde{f}(\xi, y) d\xi$ . Тогда

$$\frac{dy_1}{dx} = \varepsilon \bar{f}(y_1) + F_1(x, y_1, \varepsilon), \quad (6)$$

где  $F_1 = \varepsilon[\bar{f}(y_1) - \bar{f}(y)] + \varepsilon^2 f \partial h / \partial y$ . Так как  $\bar{f}(y_1) - \bar{f}(y) = -\varepsilon \bar{f}' \int_0^x \bar{f}'(\xi, y) d\xi$ , функция  $F_1$  в (6) содержит множитель  $\varepsilon^2$ .

Преобразуем теперь координату  $y_1$  так, чтобы член порядка  $\varepsilon$  в правой части стал постоянным. Так как, по условию теоремы 1,  $\bar{f} > 0$ , можно положить

$$y_2(y_1) = \int_0^{y_1} \frac{c d\xi}{\bar{f}(\xi)}, \quad \frac{1}{c} = \int_0^1 \frac{dy}{\bar{f}(y)}.$$

Постоянная  $c$  определяется требованием  $y_2(1) - y_2(0) = 1$ . Теперь уравнение (3) принимает вид

$$\frac{dy_2}{dt} = \varepsilon c + F_2(x, y_2, \varepsilon),$$

где  $F_2 = y_2 F_1(x, y_1(y_2), \varepsilon)$  содержит множитель  $\varepsilon^2$  и

$$c = \left[ \int_0^1 \frac{dy}{\int_0^1 f(x, y) dx} \right]^{-1}.$$

4. Переходя к доказательству теоремы 2, наметим первый шаг построения переменной  $z(x, y) = y + k(x, y)$ . Очевидно,

$$\frac{dz}{dx} = \lambda + \left( \varepsilon^2 F + \frac{\partial k}{\partial x} + \lambda \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 F \frac{\partial k}{\partial y} \quad (\lambda = \varepsilon c), \quad (7)$$

поэтому в первом приближении определим  $k$  из условия

$$\varepsilon^2 F + \frac{\partial k}{\partial x} + \lambda \frac{\partial k}{\partial y} = \varepsilon^2 F_{00}.$$

Коэффициенты Фурье функции  $k(x, y) = \sum_{m^2+n^2 \neq 0} k_{mn} e^{2\pi i(mx+ny)}$  выражаются через коэффициенты Фурье функции  $F(x, y)$ :

$$2\pi k_{mn} = \frac{i\varepsilon^2 F_{mn}}{m + \lambda n}.$$

Зафиксируем  $\varepsilon$  и предположим, что число вращения [3] уравнения (4) есть  $\lambda \in \Lambda_\theta$ . Тогда  $k(x, y)$  и ее производные имеют порядок  $\varepsilon^2 \left| \frac{F}{\lambda} \right|$ , т.е. порядок  $\varepsilon$ . Уравнение (7) дает

$$\frac{dz}{dx} = \lambda + \varepsilon^2 F \frac{\partial k}{\partial y} + \varepsilon^2 F_{00}.$$

Так как  $\varepsilon^2 F \partial k / \partial y$  имеет порядок  $\varepsilon^3$ , а число вращения уравнения (7) равно  $\lambda$ , то  $\varepsilon^2 F_{00}$  имеет порядок  $\varepsilon^3$ . Итак, в новых координатах «возмущение»  $\varepsilon^2 (F_{00} + F \partial k / \partial y)$  имеет порядок  $\varepsilon^3 = (\varepsilon^2)^{1\frac{1}{2}}$ , что обеспечивает быструю сходимость последовательных приближений.

5. Построения §4 позволяют доказать следующее:

**Основная лемма.** Пусть дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \lambda + F(x, y) \quad (8)$$

на торе  $T$  имеет число вращения  $\lambda \in \Lambda_\theta$  и функция  $F(x, y)$  при  $|\operatorname{Im} x, y| < \rho$  аналитична, причем  $|F| < M$ . Предположим, что для некоторого  $\delta > 0$  выполнены неравенства

$$\delta < 0,1\rho; \quad \delta < 2^{-7}\theta; \quad M < \delta^4|\lambda|. \quad (9)$$

Тогда существует аналитическая при  $|\operatorname{Im} x, z| < \rho_1 = \rho - 3\delta$  замена переменной  $y = y(x, z)$  такая, что

$$\frac{dz}{dx} = \lambda + F_{\text{новое}}(x, z),$$

где функция  $F_{\text{новое}}$  при  $|\operatorname{Im} x, z| < \rho_1$  аналитична и

$$|F_{\text{новое}}| < M_1 = \frac{M^2}{\delta^4|\lambda|}.$$

В условиях теоремы 2 существуют такие  $c_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $N > 0$ , что при  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ ,  $|\operatorname{Im} x, y| < \rho$  функция  $F(x, y, \varepsilon)$  аналитична,  $|F| < N$ , и уравнение (4) имеет число вращения  $\lambda(\varepsilon) > c_0\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ).

Зафиксируем  $\theta$ ,  $0 < \theta < 0,25$ ; в любой окрестности нуля есть точка  $\lambda \in \Lambda_\theta$ . Пусть  $\lambda = \delta^{20}$  — такая точка, причем

$$\delta < c_0, \quad \delta^{19} < \varepsilon_0, \quad \delta < 0,1\rho, \quad \delta < 2^{-7}\theta, \quad \delta < N^{-\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Тогда  $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) < \lambda c_0^{-1} < \delta^{19}$ , и мы находимся в условиях основной леммы с  $M = \delta^{36} > N\varepsilon^2$ . В силу условий (10) выполнены неравенства (9); поэтому, согласно основной лемме,

$$M_1 = \delta^{48} = M^{1\frac{1}{3}}.$$

Применяя основную лемму  $s$  раз, получим  $M_s = M^{(1\frac{1}{3})^s}$ , поэтому доказательство сходимости приближений при  $s \rightarrow \infty$  не представляет трудностей.

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1961, **25**(1), 21–86.
- [2] Колмогоров А. Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. *ДАН СССР*, 1954, **98**(4), 527–530.
- [3] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: Гостехиздат, 1947, 392 с. Гл. XV.



## О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона

1. Пусть динамическая система зависит от медленно меняющегося параметра  $\lambda = \varepsilon t$ ; тогда функция Гамильтона  $H(p, q; \lambda)$  содержит время  $t$  и не сохраняется. Функцию  $J(p, q; \lambda)$  называют *адиабатическим инвариантом* системы, если при малых  $\varepsilon$  величина  $J(t) = J[p(t), q(t); \lambda(t)]$  мало меняется за время  $t \sim 1/\varepsilon$  (изменения  $\lambda$ ,  $H$  при этом конечны).

Рассмотрим фазовую плоскость  $p, q$  при фиксированном значении параметра  $\lambda$ . Проходящая через точку  $p_0, q_0$  линия уровня энергии  $H(p, q; \lambda) = H(p_0, q_0; \lambda)$  ограничивает некоторую область. Обозначим через  $2\pi I(p_0, q_0; \lambda)$  величину площади этой области. Можно показать, что  $I$  — адиабатический инвариант [1], [2].

Из адиабатической инвариантности величины не следует, вообще говоря, что она мало меняется за неограниченное время при фиксированном малом  $\varepsilon$ . Это связано с возможностью накопления малых изменений адиабатического инварианта. Рассмотрим, например, линейную колебательную систему

$$\ddot{x} = -\omega^2 x(1 + \alpha \cos \varepsilon t).$$

Как известно, при некоторых  $\varepsilon$  (а именно,  $\varepsilon \approx 2\omega/k$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ) возможен параметрический резонанс, и  $I(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Здесь скорость изменения параметров системы  $\varepsilon$  может быть, очевидно, сколь угодно малой.

Оказывается, однако, что в нелинейной системе с медленно периодически меняющейся аналитической функцией Гамильтона  $H(p, q; \lambda)$  адиабатический инвариант сохраняется вечно: для любого  $\eta > 0$  найдется  $\varepsilon_0(\eta) > 0$  такое, что из  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  вытекает

$$|I(t) - I(0)| < \eta$$

при всех  $-\infty < t < \infty$ .

Линейная система занимает исключительное положение потому, что частота ее колебаний не зависит от амплитуды. В нелинейной же системе при увеличении амплитуды частота меняется и колебания не успевают нарасти, как нарушается условие резонанса  $\varepsilon \approx 2\omega/k$ .

Доказательство вечной адиабатической инвариантности действия намечено в следующих параграфах. Аналогичным методом можно показать, что вечно сохраняется адиабатический инвариант  $I_y$  автономной колебательной системы с двумя степенями свободы и аналитической функцией Гамильтона

$$H = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + U(\varepsilon x, y)}{2}.$$

Нужно только, чтобы в первом приближении отношение частот  $\omega_x/\omega_y$  зависело при фиксированной общей энергии  $H = h$  от амплитуды колебаний  $y$ .

В частности, поле с потенциалом

$$U = \omega^2 y^2 \quad (\omega = 1 + \lambda^2, \lambda = \varepsilon x)$$

является при  $\varepsilon \ll 1$  ловушкой, способной вечно удерживать частицу с начальными условиями  $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$  порядка 1. Это вытекает из вечной адиабатической инвариантности величины  $I_y = \frac{\dot{y}^2 + U}{2\omega}$ <sup>1</sup>.

2. Пусть аналитическая функция Гамильтона  $H$  колебательной системы с одной степенью свободы зависит от медленного времени  $\lambda = \varepsilon t$  периодически с периодом  $2\pi$ . При фиксированном ( $\dot{\lambda} = 0$ ) значении параметра  $\lambda$  в переменных действие  $I$  — угол  $w$  функция  $H$  имеет вид  $H_0(I; \lambda) = H_0(I; \lambda + 2\pi)$ .  $\dot{I} = 0$ , и тор  $I = \text{const}$  в пространстве  $p, q, \lambda$  (где  $p, q, \lambda$  и  $p, q, \lambda + 2\pi$  склеены) инвариантен. Фазовая точка движется по меридиану тора ( $\lambda = \text{const}$ ) с частотой

$$\dot{w} = \frac{\partial H_0}{\partial I} = \omega(I, \lambda).$$

Обозначим через  $\bar{\omega}(I)$  среднюю частоту  $\frac{1}{2\pi} \oint \omega(I, \lambda) d\lambda$ , а сам тор обозначим через  $T_{\bar{\omega}}$ .

<sup>1</sup> Тем же методом можно доказать вечную адиабатическую инвариантность магнитного момента в аксиально-симметричной магнитной ловушке [6].

Если  $\varepsilon \neq 0$  мало, то в первом приближении можно считать, что движение происходит по тору  $T_{\bar{\omega}}$ , причем долгота  $\lambda$  меняется медленно ( $\dot{\lambda} = \varepsilon$ ), а широта  $w$  быстро с медленно меняющейся частотой  $\dot{w} = \omega(I, \lambda)$ . Оказывается, при достаточно малом  $\varepsilon$  и «достаточно не-соизмеримой» с  $\varepsilon$  частоте  $\bar{\omega}$  действительно существует близкий к  $T_{\bar{\omega}}$  инвариантный тор  $T_{\bar{\omega}}(\varepsilon)$ . Этот тор заполнен условно периодическими траекториями с частотами  $\bar{\omega}$  и  $\varepsilon$ .

При фиксированном  $\varepsilon$  инвариантные двумерные торы  $T_{\bar{\omega}}(\varepsilon)$  делят трехмерное пространство на тонкие торовые слои. Каждая траектория, начинающаяся в таком слое, целиком заключена в нем. Толщина слоев стремится к нулю вместе с  $\varepsilon$ ; поэтому доказательство вечной адиабатической инвариантности  $I$  после того, как торы  $T_{\bar{\omega}}(\varepsilon)$  найдены, несложно.

Эти торы ищутся с помощью метода Ньютона [3]. В соответствующих рядах Фурье появляются «малые знаменатели»  $m\bar{\omega} + n\varepsilon$ . Некоторые из них малы вследствие приближенной соизмеримости частот  $\bar{\omega}$  и  $\varepsilon$ , другие же — из-за того, что частота  $\varepsilon$  мала (вырождение). Трудность, связанная с вырождением, преодолевается на основе тех же соображений, что в заметке [4], которая является негамильтоновым аналогом настоящей работы.

**3. Предварительное каноническое преобразование.** В переменных действие  $I$  — угол  $w$  функция Гамильтона имеет, как известно [1], [2], вид

$$H(I, w, \lambda) = H_0(I, \lambda) + \varepsilon H_1(I, w, \lambda) \quad (\lambda = \varepsilon t). \quad (1)$$

Мы предположим, что функции  $H_0$  и  $H_1$ , имеющие периоды  $2\pi$  по  $w$  и  $\lambda$ , аналитичны в комплексной окрестности торового слоя  $I_1 \leq I \leq I_2$ .

**Теорема 1.** Пусть частота  $\omega(I, \lambda) = \partial H_0 / \partial I$  в рассматриваемом слое не обращается в нуль. Тогда существуют такие положительные числа  $\varepsilon_0$ ,  $\tau_0$ ,  $\rho_0$  и такие аналитические функции  $P$ ,  $Q$ ,  $T$  переменных  $I$ ,  $w$ ,  $\lambda$ , не зависящие от  $\varepsilon$ , что:

1. Функции  $P$ ,  $Q - \lambda$  и  $T - w$  имеют периоды  $2\pi$  по  $w$  и  $\lambda$ .
2. Канонические уравнения с функцией Гамильтона (1) эквивалентны каноническим уравнениям с функцией Гамильтона

$$k(P, Q, T) = \varepsilon k_0(P) + \varepsilon^2 k_1(P, Q, T) + \dots, \quad (2)$$

аналитической при  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ ,  $|\operatorname{Im} Q, T| \leq \rho_0$ ,  $|P - P_0| \leq r_0$  и имеющей периоды  $2\pi$  по  $Q$  и  $T$ .

3. Главная часть функции Гамильтона (2) есть  $\varepsilon k_0(P)$ , где функция  $k_0(P)$  — обратная к  $\bar{H}_0(I) = \frac{1}{2\pi} \oint H_0(I, \lambda) d\lambda$ , так что  $\bar{H}_0(k_0(P)) \equiv P$ .

Введем сначала новое время  $T = w$ . Как известно [5], интегральные кривые гамильтоновой системы в пространстве  $I, w, \lambda$  инвариантно связаны с дифференциальной формой

$$I dw - H(I, w, \varepsilon t) dt = -\frac{1}{\varepsilon}(H d\lambda - \varepsilon I dw). \quad (3)$$

Умножение формы на постоянную не меняет этой связи. Будем считать в (3) независимыми переменными не  $I, w, \lambda$ , а  $H, \lambda, w$ . Разрешая (1) относительно  $I$ , получим

$$I(H, \lambda, w) = I_0(H, \lambda) + \varepsilon I_1(H, \lambda, w) + \dots \quad (4)$$

Введем обозначения<sup>2</sup>  $p = H, q = \lambda, T = w, K = \varepsilon I$ , так что

$$K(p, q, T) = \varepsilon I_0(p, q) + \varepsilon^2 I_1(p, q, T) + \dots \quad (5)$$

Тогда

$$H d\lambda - \varepsilon I dw = p dq - K(p, q, T) dT,$$

поэтому [5] системы с функциями Гамильтона (1) и (5) эквивалентны.

Заметим, что частота  $\omega(I, \lambda)$  в §2 менялась со временем. С помощью канонического преобразования  $p, q \rightarrow P, Q$  изменим координату  $q = \lambda$  (имеющую смысл времени) так, чтобы частота относительно измененного времени  $Q$  стала постоянной  $\bar{\omega}(I)$ . Для этого введем в системе с функцией Гамильтона  $I_0(p, q)$  переменные действие  $P$  — угол  $Q$ .

Если  $S(q, P)$  — производящая функция, то преобразование определяется уравнениями

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}; \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P}.$$

Выберем  $S$  так, чтобы удовлетворить уравнению Якоби–Гамильтона

$$I_0\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = k_0(P)$$

<sup>2</sup> Не путать с  $p, q$  из §§ 1, 2!



с неизвестной пока функцией  $k_0(P)$ . Согласно (4) находим  $\partial S/\partial q = H_0(k_0(P), q)$  или

$$S = \int^q H_0(I, \lambda) d\lambda, \quad \text{где } I = k_0(P). \quad (6)$$

Условие периодичности  $Q(p, q + 2\pi) = Q(p, q) + 2\pi$  дает теперь

$$\oint \frac{\partial H_0}{\partial I} \frac{dk_0}{dP} d\lambda = 2\pi; \quad \frac{dk_0}{dP} \frac{d\bar{H}_0}{dI} = 1. \quad (7)$$

Равенство (7) будет выполнено, если в качестве  $k_0(P)$  взять функцию, обратную  $\bar{H}_0(I)$ . Тогда производящая функция (6) вводит переменные  $P, Q$ , удовлетворяющие теореме 1. При этом  $k(P, Q, T) = K(p, q, T)$ .

**4. Построение инвариантных торов системы с гамильтоновой функцией (2) производится последовательными приближениями ньютоновского типа [3], [4]. Пусть  $\varepsilon \neq 0$ . Мы скажем, что число  $\bar{\omega}$  достаточно несоизмеримо с  $\varepsilon$  и напишем  $\bar{\omega} \in \Omega(\varepsilon)$ , если**

$$|m\bar{\omega} + n\varepsilon| > |\varepsilon|(|m| + |n|)^{-2}$$

при всех целых  $m, n, |m| + |n| > 0$ . Обозначим через  $\bar{\Omega}(\varepsilon)$  дополнение к  $\Omega(\varepsilon)$  на оси  $\omega$ . Легко доказывается:

**Лемма.** Мера  $\bar{\Omega}(\varepsilon)$  не превосходит  $10\varepsilon$ .

Каждому значению  $P = P_1$  соответствуют  $I_1 = k_0(P_1)$  и определенная частота  $\bar{\omega}_1 = \omega(I_1)$ . Предположим, что  $d\bar{\omega}/dI \neq 0$  (что эквивалентно условиям  $d^2\bar{H}_0/dI^2 \neq 0, d^2k_0/dP^2 \neq 0$ ). Из приведенной леммы нетрудно вывести, что мера множества тех  $P_1$ , для которых  $\bar{\omega}_1 \in \bar{\Omega}(\varepsilon)$ , стремится к нулю вместе с  $\varepsilon$ .

**Теорема 2.** Пусть функция Гамильтона (2) аналитична при  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  в следующей окрестности тора  $P = P_1$ :

$$|P - P_1| \leq r_1, \quad |\operatorname{Im} Q, T| \leq \rho_0.$$

Предположим, что в этой окрестности выполнены неравенства

$$|k_0| \leq M, \quad |k_1 + \varepsilon k_2 + \dots| \leq M, \quad \left| \frac{d^2 k_0}{dP^2} \right| \geq \theta > 0.$$

Тогда существует такое  $\varepsilon_1(r_1, \rho_0, M, \theta) > 0$ , что если при некотором  $\varepsilon < \varepsilon_0, \varepsilon_1$  частота  $\bar{\omega}_1$  достаточно несоизмерима с  $\varepsilon$ , то существуют такие аналитические функции  $F_\varepsilon(Q, T)$ ,  $G_\varepsilon(Q, T)$ , что тор  $P = F_\varepsilon(Q, T)$  инвариантен и на нем  $dG_\varepsilon/dT = \varepsilon/\bar{\omega}_1$ . Функции  $F_\varepsilon(Q, T)$  и  $G_\varepsilon(Q, T) - Q$  имеют по  $Q$  и  $T$  периоды  $2\pi$  и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремятся к  $P_1$  и к нулю соответственно.

Доказательство не уместается в рамки настоящей заметки (см. [3], [4]). Как объяснено в §2, из теоремы 2 вытекает

**Теорема 3.** Пусть колебательная система имеет в переменных действии — угол аналитическую функцию Гамильтона (1), и в торовом слое  $I_1 \leq I \leq I_2$  всюду  $\partial H_0/\partial I \neq 0$ ,  $d^2 \bar{H}_0/dI^2 \neq 0$ . Тогда для любого  $\eta > 0$  найдется  $\varepsilon_2 > 0$  такое, что если  $|\varepsilon| < \varepsilon_2$  и  $I_1 + \eta \leq I(0) \leq I_2 - \eta$ , то при всех  $-\infty < t < +\infty$  будет  $|I(t) - I(0)| < \eta$ .

5. Теорема 3 справедлива и в случае, когда функция Гамильтона меняется условно периодически, а именно, когда в переменных §1  $H(p, q, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  зависит от нескольких угловых параметров  $\lambda$ , меняющихся каждый со своей частотой  $\dot{\lambda}_i = \varepsilon \mu_i$ . Предположим, что  $\mu_i$  сильно несоизмеримы:

$$\left| \sum \mu_i n_i \right| > C \left( \sum |n_i| \right)^{-\nu}, \quad \text{если } \sum |n_i| > 0, \quad (8)$$

при каких-нибудь  $C, \nu > 0$ .

Переходя к «времени»  $T = w$ , мы получим функцию Гамильтона (5) в виде  $K(h, q, T)$ , где  $h = \sum \mu_i r_i$ . Благодаря условию (8) преобразование  $p, q \rightarrow P, Q$  возможно. В функцию Гамильтона (2)  $P_i$  войдут только в виде комбинации  $H = \sum \mu_i P_i$ . Аналогично теореме 2 можно найти инвариантные многообразия  $H = F_\varepsilon(Q, T)$ ; им соответствуют инвариантные  $(n+1)$ -мерные торы в исходном  $(n+2)$ -мерном пространстве  $p, q, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

6. Случай нескольких степеней свободы представляет значительные трудности. Теорема 2 допускает нужное обобщение, но не удается, вообще говоря, привести функцию Гамильтона к виду (2). Дело в том, что отношение частот быстрых движений зависит от фазы медленного движения. Система уравнений на трехмерном торе

$$\dot{x} = \mu_1(z) + \varepsilon f(x, y, z); \quad \dot{y} = \mu_2(z) + \varepsilon g(x, y, z); \quad \dot{z} = \varepsilon \quad (9)$$

( $x, y, z$  — угловые координаты точки тора) дает простой пример этого явления; траектории (9) нельзя выпрямить малой вместе с  $\varepsilon$  заменой переменных.

Поэтому едва ли в случае общей системы с  $n$  разделяющимися переменными и медленно периодически меняющимися коэффициентами имеются заполненные условно периодическими траекториями торы. Если бы такие  $(n + 1)$ -мерные торы и нашлись, они не делили бы  $(2n + 1)$ -мерное пространство  $p_i, q_i, \lambda$  и не позволили бы доказать вечную адиабатическую инвариантность переменных действия.

## Литература

- [1] Борн М. Лекции по атомной механике. Харьков–Киев: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1934, 312 с.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1: Механика. М.: Физматгиз, 1958, 206 с.
- [3] Колмогоров А. Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. *ДАН СССР*, 1954, **98**(4), 527–530.
- [4] Арнольд В. И. О рождении условно периодического движения из семейства периодических движений. *ДАН СССР*, 1961, **138**(1), 13–15.
- [5] Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.–Л.: ОНТИ. Глав. ред. техн.-теорет. лит-ры, 1937, 500 с. §139.
- [6] Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М.: Физматгиз, 1961, 468 с.



**П**

ОСТАНОВЛЕНИЕМ КОМИТЕТА  
ПО ЛЕНИНСКИМ ПРЕМИЯМ  
В ОБЛАСТИ НАУКИ И ТЕХНИКИ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР  
ОТ 21 АПРЕЛЯ 1965 ГОДА  
ПРИСУЖДЕНА ЛЕНИНСКАЯ ПРЕМИЯ

*АРНОЛЬДУ Владимиру Игоревичу, доктору  
физико-математических наук, профессору  
Московского государственного университета  
имени М. В. Ломоносова, КОЛМОГОРОВУ Андрею  
Николаевичу, академику, заведующему кафедрой  
того же университета, — за цикл работ по проб-  
леме устойчивости гамильтоновых систем.*

*Настоящий диплом выдан*

**АРНОЛЬДУ  
Владимиру Игоревичу**

Председатель Комитета  
по Ленинским премиям в области  
науки и техники  
при Совете Министров СССР

М. КЕЛДЫШ



Заместитель секретаря Комитета  
по Ленинским премиям в области  
науки и техники  
при Совете Министров СССР

Н. АРЖАНИКОВ



## О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем

1. Теория возмущений позволяет предсказывать движение планет на много лет вперед со всей необходимой точностью. Однако качественные вопросы о поведении системы в течение бесконечно большого промежутка времени, например, вопрос об устойчивости, теория возмущений решить не смогла. Движение планет описывается в этой теории рядами вида

$$\sum_{m,n} a_{mn} \cos[(m\omega_1 + n\omega_2)t + \varphi_{mn}].$$

Во времена Лапласа считалось неизбежным появление в высших приближениях также «вековых членов» вида  $at^\alpha \cos \omega t$  и  $bt^\beta$ . Из этого пытались вывести неустойчивость Солнечной системы (см. [1]). Однако ко времени работ Пуанкаре ([2], [3], см. также [4], [5]) стало ясно, что можно построить теорию возмущений так, чтобы ряды любого приближения содержали только члены тригонометрического вида. С другой стороны, выяснилось, что указанные ряды расходятся, так что вопрос об устойчивости остался открытым.

Расходимость рядов связана со своего рода резонансом — приближенной соизмеримостью частот. Например, частоты Юпитера и Сатурна  $\omega_1 \approx 299''{,}1$ ,  $\omega_2 \approx 120''{,}5$  почти удовлетворяют соотношению  $2\omega_1 = 5\omega_2$ . Возмущение выражается с помощью рядов

$$\sum_{m,n} \frac{a_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_2} \cos[(m\omega_1 + n\omega_2)t + \varphi_{mn}].$$

Так как знаменатель  $2\omega_1 - 5\omega_2$  очень мал, наблюдается большое долгопериодическое возмущение (см. [4]). Для большинства пар  $\omega_1, \omega_2$  величины  $|m\omega_1 + n\omega_2|$  не обращаются в нуль и даже превосходят  $K(|m| + |n|)^{-2}$  при некотором  $K > 0$  и всех целых  $m, n > 0$  (см. [6]). Это приводит к давно обсуждавшейся астрономами гипотезе, что для большинства начальных условий планетная система устойчива. Доказать эту гипотезу, однако, не удавалось из-за трудностей нескольких типов. Пуанкаре

[2], [3] предложил ряд модельных задач, содержащих некоторые из этих трудностей по отдельности.

Впервые нетривиальные задачи с малыми знаменателями были решены лишь в 1941 г. Зигелем [8]. Зигель дал также (в некоторых случаях; см. [9]) строгое доказательство тому факту, известному еще Пуанкаре, что приближения теории возмущений могут сходиться только в отдельных, исключительных случаях.

Важный шаг вперед был сделан в 1954 г. Колмогоровым, который применил метод ньютоновского типа и построил сходящийся вариант теории возмущений в так называемом невырожденном случае (см. [10], [11]). Результаты [10] имеют многочисленные приложения, однако большинство задач небесной механики относится как раз к вырожденному случаю.

После того как удалось, комбинируя метод Ньютона с классическими асимптотическими методами, преодолеть по отдельности трудности, связанные с вырождением разных видов в модельных задачах [12], [13], [14], открылась возможность применить развитую технику к задаче о движении планет, где все трудности встречаются вместе. В настоящей заметке сообщаются результаты, полученные на этом пути<sup>1</sup>.

2. Рассмотрим для простоты плоскую задачу трех тел масс  $M$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ , причем  $m_1, m_2 \ll M$ . Теория возмущений дает следующую картину движения [3], [4]. В нулевом приближении планеты  $m_1$ ,  $m_2$ , не возмущают друг друга и движутся по кеплеровым эллипсам с большими полуосями  $a_1$ ,  $a_2$  и эксцентриситетами  $e_1$ ,  $e_2$ . Направления больших полуосей определяются углами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  (долготами перигелиев). В нулевом приближении  $a_k$ ,  $e_k$ ,  $\omega_k$  сохраняются во все время движения. Рассмотрим важный случай, когда  $m_k$ ,  $e_k$  малы,  $a_2 - a_1 > c$  и планеты движутся вокруг  $M$  в одну сторону.

В первом приближении учет взаимного влияния планет приводит лишь к небольшому «дрожанию»  $a_k$ ,  $e_k$ ,  $\omega_k$  вокруг постоянных значений. Во втором приближении обнаруживается медленное, но неограниченное (вековое) движение перигелиев. Это медленное изменение  $e_k$ ,  $\omega_k$  может быть описано следующим образом. Будем характеризовать кеплеров эллипс направленным вдоль большой оси вектором, пропорциональным эксцентриситету. Оказывается, для каждой из пла-

<sup>1</sup> Часть из них анонсирована в докладах 11 VII 1961 г. на IV Всесоюзном математическом съезде и 27 XI 1961 г. на конференции по теоретической астрономии.

нет  $m_k$  этот вектор есть сумма двух равномерно вращающихся векторов  $\xi_{k1}$ ,  $\xi_{k2}$ , угловые скорости которых  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  малы и одинаковы для обеих планет. Движение планет по меняющимся таким образом эллипсам назовем лагранжевым.

Наш основной результат состоит в том, что если массы и эксцентриситеты планет достаточно малы, то для большинства начальных условий найдется лагранжево движение, от которого истинное движение мало отличается в течение всего бесконечного промежутка времени.

Будем считать центр тяжести тел неподвижным. Тогда система имеет 4 степени свободы. Пусть  $0 < c_1 < C_1 < c_2 < C_2 < \infty$  — постоянные. Условия  $c_1 < a_1 < C_1$ ;  $c_2 < a_2 < C_2$ ;  $e_1, e_2 < \delta$  выделяют в 8-мерном фазовом пространстве область  $G_\delta$ . Точка из  $G_\delta$  однозначно определяет начальные координаты и скорости, а следовательно, все движение. Пусть  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  — постоянные и  $m_1 = \mu\alpha_1 M$ ,  $m_2 = \mu\alpha_2 M$ .

**Теорема 1.** Для любого  $\eta > 0$  найдется  $\varepsilon > 0$  такое, что если  $\delta, \mu < \varepsilon$ , то большинство точек области  $G_\delta$  (исключение составляют точки, образующие множество меры меньше  $\eta \text{mes } G_\delta$ ) движется так, что: 1) точка вечно остается в области  $G_\delta$ ; 2) она движется условно периодически, всюду плотно заметая аналитический четырехмерный тор в  $G_\delta$ ; 3) она вечно остается ближе  $\eta$  от изображающей некоторое лагранжево движение точки фазового пространства.

**Замечание 1.** Аналогичные теоремы о «метрической устойчивости» справедливы в плоской задаче  $n$  тел и в пространственной задаче 3 тел. Распространение их на пространственную задачу  $n > 3$  тел требует некоторых дополнительных вычислений (связанных с исключением узла).

**Замечание 2.** Исключительное множество в теореме 1 простирается в бесконечность, связно и всюду плотно. Имея в виду, с одной стороны, эти обстоятельства, а с другой — известный факт существования «люков» в распределении малых планет, можно предполагать, что движение планет топологически неустойчиво.

**3.** Наметим путь доказательства теоремы 1. Как известно [3], функция Гамильтона плоской задачи трех тел имеет вид

$$F = F_0(\Lambda) + (\mu)\bar{F}(\Lambda, \xi, \eta) + (\mu)\tilde{F}(\Lambda, \lambda, \xi, \eta), \quad (1)$$

где  $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ;  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  — канонически сопряженные переменные, соответствующие:  $\Lambda_k$  — большим полуосям,

углы  $\lambda_k$  — фазам,  $(\xi_k, \eta_k)$  — векторам  $(e_k \cos \omega_k, e_k \sin \omega_k)$ . В формуле (1) черта означает среднее по  $\lambda_1, \lambda_2$ ,  $(\mu)F = \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$ . Функции  $F_0, \bar{F}, \tilde{F}$  — аналитические;  $\tilde{F}$  имеет по  $\lambda$  период  $2\pi$  и в среднем равна 0. При малых  $\xi, \eta$  функции  $\bar{F}$  и  $\tilde{F}$  разлагаются в сходящийся ряд Тейлора по  $\xi, \eta$ , причем  $F$  содержит только члены четной степени.

Предварительным каноническим преобразованием  $\Lambda, \lambda, \xi, \eta \rightarrow \Lambda', \lambda', \xi', \eta'$  («усреднением по быстрым переменным», см. §4) можно привести  $F$  в большей части области  $G_\delta$  к виду

$$F' = F_0(\Lambda') + (\mu)\bar{F}(\Lambda', \xi', \eta') + F_2(\Lambda', \lambda', \xi', \eta'), \quad (2)$$

где  $F_2$  — возмущение порядка  $\mu^2$ .

Вековое движение определяется функцией Гамильтона  $(\mu)\bar{F}(\xi', \eta')$ , где  $\Lambda'_k$  рассматриваются как параметры. Точка  $\xi' = \eta' = 0$  является устойчивым по линейному приближению положением равновесия. Вводя вслед за Биркгофом [7] в окрестности нуля новые канонические переменные  $r, \varphi$ , приведем  $\bar{F}$  к виду<sup>2</sup>  $\bar{F} = \bar{F}_2(r) + R_3(r, \varphi)$ , где  $r = (r_1, r_2)$  — величины порядка  $e^2$ ;  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  — угловые переменные;  $(\mu)\bar{F}_2 = \nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 + c_{11} r_1^2 + 2c_{12} r_1 r_2 + c_{22} r_2^2$  и  $R_3$  начинается с  $r^3$ , т.е.  $e^6$ . Каноническое преобразование  $\Lambda', \lambda', \xi', \eta' \rightarrow \Lambda'', \lambda'', r, \varphi$  приводит  $F'$  к виду

$$F'' = F_0(\Lambda'') + (\mu)\bar{F}_2(\Lambda'', r) + F_2''(\Lambda'', \lambda'', r, \varphi), \quad (3)$$

где  $F_2'' = F_2 + R_3$  — возмущение порядка  $\mu^2 + \mu r^3$ .

Условно периодические решения уравнений с функцией Гамильтона (3) находятся сходящимся итеративным методом ньютоновского типа. При этом возникают две трудности. Первая связана с предельным вырождением при  $r = 0$  и преодолевается так же, как в [12]. Вторая трудность — собственное вырождение при  $\mu = 0$  — связана с наличием быстрых и медленных движений. При  $\mu = 0$  кеплерово движение описывается двумя «быстрыми» частотами  $\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2$ , а при  $\mu \neq 0$  в лагранжевом движении появляются еще две «медленные» частоты  $\nu_1, \nu_2$  (порядка  $\mu$ ) (ср. [13], [14]).

Проверка выполнения условий (6) зависимости частот от импульсов для функции Гамильтона (3) производилась прямыми вычислениями, использующими разложение  $F$  по степеням  $e$  и  $a_1/a_2$  [15].

<sup>2</sup> В случае двух планет  $\bar{F}(\xi', \eta')$  можно точно привести к виду  $\bar{F}(r)$ . Наши рассуждения применимы и в случае  $n > 2$  планет.



4. Сформулируем обобщение результатов [10] на случай собственного вырождения, когда функция Гамильтона имеет вид

$$H = H_0(p_1, \dots, p_k) + \varepsilon H_1(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \quad (k < n), \quad (4)$$

период  $2\pi$  по каждому из переменных  $q_1, \dots, q_n$  и аналитична<sup>3</sup>, когда  $p$  меняется в некоторой области  $G$  и  $|\operatorname{Im} q| < \rho$ . При  $\varepsilon = 0$  канонические уравнения с функцией Гамильтона (4) описывают условно периодическое движение  $\dot{q}_i = \omega_i$  ( $i \leq k$ ),  $\dot{q}_{k+1} = \dots = \dot{p}_n = 0$  с частотами  $\omega_i = \partial H_0 / \partial p_i$ . При малых  $\varepsilon$  можно считать, пренебрегая «дрожанием», что на медленное изменение  $q_{k+1}, \dots, p_n$  со временем влияет только среднее значение  $H_1$  по быстрым переменным<sup>4</sup>

$$\bar{H}_1(p; q_{k+1}, \dots, q_n) = (2\pi)^{-k} \oint H_1(p, q) dq_1 \dots dq_k.$$

Мы будем теперь предполагать<sup>5</sup>, что  $\bar{H}_1$  не зависит от фаз медленных движений. Тогда функцию Гамильтона (4) можно представить в виде

$$H = H_0(p_1, \dots, p_k) + \varepsilon \bar{H}_1(p_1, \dots, p_n) + \varepsilon \tilde{H}_1(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n). \quad (5)$$

**Теорема 2.** Пусть при  $p \in G$  выполнены условия

$$\det \left( \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} \right) \neq 0 \quad (i, j = 1, \dots, k); \quad \det \left( \frac{\partial^2 H_1}{\partial p_i \partial p_j} \right) \neq 0 \quad (i, j = k+1, \dots, n). \quad (6)$$

Обозначим через  $T$  торовый слой  $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q = 0$ ,  $p \in G$ ,  $q_i \in [0, 2\pi)$ .

Тогда для любого  $\eta > 0$  найдется  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что если  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , то в  $T$  имеются аналитические инвариантные  $n$ -мерные торы, несущие траектории условно периодических движений. Эти торы заполняют  $T$  с точностью до остатка меры меньше  $\eta \operatorname{mes} T$ .

Теорема 2 показывает, что при малых  $\varepsilon$  для большинства начальных условий движение системы с функцией Гамильтона (5) на бесконечном

<sup>3</sup> В соответствии с недавними работами Ю. Мозера, достаточно существования нескольких сотен производных.

<sup>4</sup> Это замечание, восходящее к Гауссу, составляет суть известного «метода усреднения» [16]. Дальнейшее можно рассматривать как один из вариантов обоснования этого метода для бесконечного промежутка времени.

<sup>5</sup> Именно так обстоит дело в задаче о движении планет, см. формулу (3).

промежутке времени лишь немного отличается от условно периодического  $n$ -частотного движения  $\dot{q}_i = \partial \bar{H} / \partial p_i$  ( $\bar{H} = \bar{H}_0 + \varepsilon \bar{H}_1$ ),  $\dot{p} = 0$  с подходящими начальными условиями.

Доказательство теоремы 2 аналогично рассуждениям [13], где рассмотрен случай  $k = 1$ . При  $k > 1$  малые знаменатели появляются уже на первом этапе доказательства при усреднении по быстрым переменным. Чтобы не иметь дела с бесконечно большим числом резонансов, удобно (ср., например, [16]) учесть в возмущении  $\tilde{H}_1$  только гармоники до  $N$ -го порядка; если  $N \sim |\ln \varepsilon|$ , то высшие гармоники дают сумму порядка  $\varepsilon^2$ .

Пусть  $\Omega$  — область в пространстве  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ , в которую переходит  $G$  при отображении  $p \rightarrow \partial H_0 / \partial p$ . Обозначим через  $\Omega_{KN}$  множество тех  $\omega$ , для которых  $|(\omega, n)| > K|n|^{-s}$  ( $s = k + 1$ ,  $|n| = |n_1| + \dots + |n_k|$ ) при любом целочисленном ненулевом векторе  $n$ ,  $|n| < N$ . Через  $G_{KN}$  обозначим прообраз  $\Omega_{KN}$  и через  $G_{KN} - d$  — множество точек, принадлежащих  $G_{KN}$  с  $d$ -окрестностью.

При доказательстве теоремы 2 некоторое число  $\delta > 0$  выбирается достаточно малым, а затем выбирается  $\varepsilon = \delta^T$ , где  $T$  — довольно большая постоянная, зависящая только от числа степеней свободы  $n$ . Первый шаг доказательства состоит в установлении следующей леммы.

**Лемма.** В условиях теоремы 2 пусть  $|\varepsilon H_1| < M$ ,  $|\partial^2 H_0 / \partial p_i \partial p_j| < \theta$ . Пусть числа  $\gamma, \delta$  удовлетворяют неравенствам

$$2\gamma < \rho, \quad \delta < \min(K, 1/3, \gamma/4, 1/\theta, e^{2k} n^{-2} (8k)^{-2k}), \quad M < \delta^{2k+7}.$$

Тогда в области  $P \in G_{KN} - 2\delta$ ,  $|\operatorname{Im} Q| < \rho - 2\gamma$  (здесь  $N = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{M}$ ) существует аналитическое каноническое взаимно однозначное преобразование  $p, q \leftrightarrow P, Q$ , приводящее  $H$  к виду

$$H = H_0(P) + \varepsilon \bar{H}_1(P) + H_2(P, Q),$$

где  $|P - p|, |Q - q| < M\delta^{-2k-5}$ ;  $|H_2| < M^2\delta^{-4k-10}$ .

Так как  $H_2$ , таким образом, имеет в области  $G_{KN} - 2\delta$  порядок  $\varepsilon^2$ , а величина компонент области  $G_{KN} - 2\delta$  порядка  $|\ln \varepsilon^{-1}|$ , то вывод теоремы 2 из леммы проводится аналогично доказательству теоремы 2 в заметке [13].

## Литература

- [1] Якоби К. Лекции по динамике. Л.–М.: ОНТИ. Главн. ред. общетехн. лит-ры, 1936, с. 29.
- [2] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: Гостехиздат, 1947, 392 с.
- [3] Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. T. I–III. Paris, 1892–1897.
- [4] Charlier C. L. Die Mechanik des Himmels. Vorlesungen. Mit zahlreichen Figuren. 2 Bd. Leipzig, 1902; 1907.
- [5] Борн М. Лекции по атомной механике. Харьков–Киев: Гос. науч.-тех. изд-во Украины, 1934, 312 с.
- [6] Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.–Л.: ОНТИ. Глав. ред. общетехн. лит-ры и номографии, 1935, 104 с.
- [7] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1941, 320 с.
- [8] Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959, 300 с.
- [9] Зигель К. Л. О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона в окрестности положения равновесия. В кн.: Математика: Период. сб. перев. ин. статей. М., 1961, 5(2), 129–155.
- [10] Колмогоров А. Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. *ДАН СССР*, 1954, 98(4), 527–530.
- [11] Международный математический конгресс в Амстердаме в 1954 г.: Обзорные доклады. М.: Физматгиз, 1961, 338 с.
- [12] Арнольд В. И. Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае. *ДАН СССР*, 1961, 137(2), 255–257.
- [13] Арнольд В. И. О рождении условно периодического движения из семейства периодических движений. *ДАН СССР*, 1961, 138(1), 13–15.
- [14] Арнольд В. И. О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона. *ДАН СССР*, 1962, 142(4), 758–761.
- [15] Le Verrier U.-J. Annales publiées par U.-J. le Verrier. 1. Observatoire Royal etc. Paris, 1855.
- [16] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958, 408 с.



Равномерное распределение точек на сфере  
и некоторые эргодические свойства решений линейных  
обыкновенных дифференциальных уравнений  
в комплексной области

Совместно с А. Л. Крыловым

Всюду плотные траектории, эргодичность и перемешивание часто встречаются в анализе. Метрическая теория динамических систем (см., например, [1]) дает подход к этим вопросам, по крайней мере в случае «одномерного времени». В настоящей заметке мы рассматриваем некоторые задачи, в которых роль времени играет некоммутативная дискретная группа. К этим задачам нас привела попытка изучения эргодических свойств решений линейных дифференциальных уравнений в комплексной области (см. [2]).

### 1. Равномерное распределение точек на сфере.

**Теорема 1.** Пусть  $A$  и  $B$  — два вращения сферы  $S^2$ ,  $x$  — точка сферы. Если последовательность точек

$$x; Ax, Bx; A^2x, ABx, BAx, B^2x; \dots \quad (1)$$

всюду плотна на сфере  $S^2$ , то она равномерно распределена.

Под равномерным распределением здесь понимается следующее. Пусть  $\Delta$  — область на сфере  $S^2$ , ограниченная кусочно-гладкой кривой. Применением  $n$  вращений  $A, B$  из точки  $x$  можно получить  $2^n$  точек

$$A^n x, A^{n-1} Bx, A^{n-2} B A x, \dots, B^n x. \quad (2)$$

Число точек (2), попавших в область  $\Delta$ , обозначим через  $p_n(\Delta)$ . Теорема 1 утверждает тогда, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n(\Delta)}{2^n} = \frac{\text{mes } \Delta}{\text{mes } S^2}. \quad (3)$$

При доказательстве теоремы 1 мы используем метод Г. Вейля [3]. Рассмотрим произвольную непрерывную на сфере  $S^2$  функцию  $f(x)$ . Образует среднее арифметическое  $f_n(x)$  значений  $f(x)$  в точках (2). Следуя Вейлю, для доказательства (3) достаточно установить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \bar{f} \equiv \int_{S^2} f(x) dx / \text{mes } S^2. \quad (4)$$

При изучении временных средних  $f_n$  естественным образом возникают унитарные операторы, действующие в  $L_2(S^2)$ :

$$\mathbf{A}f(x) = f(A^{-1}x); \quad \mathbf{B}f(x) = f(B^{-1}x).$$

С их помощью временное среднее можно записать в виде

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^n f(x) = \left( \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} \right)^n f(x). \quad (5)$$

Как известно (см., например, [4]), пространство  $L_2(S^2)$  разлагается в ортогональную сумму подпространств  $R_l$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ), инвариантных относительно всех вращений сферы. Пространство  $R_l$  размерности  $2l + 1$  состоит из сферических функций степени  $l$  и не имеет инвариантных относительно всех вращений подпространств.

Легко видеть, что формулу (4) достаточно доказать для функций  $f(x)$ , принадлежащих каждому инвариантному подпространству  $R_l$ .

**Лемма 1.** Пусть  $A$  и  $B$  — конечномерные унитарные операторы. Тогда либо при некотором  $k \geq 1$

$$\left\| \left( \frac{A + B}{2} \right)^k \right\| < 1, \quad (6)$$

либо для некоторого вектора  $f \neq 0$  имеем

$$\begin{aligned} Af &= Bf; \quad A^2 f = ABf = BAf = B^2 f; \\ A^3 f &= A^2 Bf = ABAf = \dots = B^3 f \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство леммы основано на том, что из  $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$  и  $\|f\| = \|g\| = 1$  вытекает  $f = g$ .

Теперь докажем формулу (4) для  $f$  из  $R_l$ ,  $l > 0$ . Если на  $R_l$  операторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  из (5) удовлетворяют (6), то  $f_n \rightarrow 0$  и (4) доказано. Покажем, что случай (7) невозможен. Действительно, из всюду плотности последовательности (1) легко вытекает, что замыкание произведений  $A$  и  $B$

есть вся группа вращений сферы. Поэтому из (7) следовала бы коммутативность представления этой группы в  $R_l$ , которая не имеет места при  $l > 0$ . Теорема 1 доказана<sup>1</sup>.

**2. Обобщение.** Теорему 1 можно рассматривать как эргодическую теорему, в которой роль времени играет свободная полугруппа с двумя образующими. Можно построить динамические системы, в которых «временем» является группа  $\Gamma$  с конечным числом образующих  $a_1, \dots, a_s$ . Речь идет о группе сохраняющих меру преобразований  $A_\gamma$  ( $\gamma \in \Gamma$ ) пространства с мерой  $\Omega$ , для которой  $A_{\gamma_1\gamma_2} = A_{\gamma_1}A_{\gamma_2}$  и  $A_{\gamma^{-1}} = A_\gamma^{-1}$ .

Чтобы определить временные средние, рассмотрим совокупность  $\Gamma_n$  элементов  $\Gamma$ , получающихся из  $a_1, a_1^{-1}, \dots, a_s, a_s^{-1}$   $n$  (но не меньше, чем  $n$ ) умножениями, и пусть их число равно  $N(n)$ . Тогда «временное среднее»  $f_n(x)$  функции  $f(x)$ ,  $x \in \Omega$ , определим как  $f_n(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} f(A_\gamma x) / N(n)$ .

Метод §1 позволяет исследовать поведение  $f_n(x)$  в некоторых случаях, к которым подходит термин «дискретный спектр».

Пусть  $\Omega$  — однородное пространство (в §1 — сфера  $S^2$ ), на котором транзитивно действует компактная группа Ли  $G$ , и пусть преобразования  $A_\gamma$  ( $\gamma \in \Gamma$ ) принадлежат  $G$ . Для ряда групп  $\Gamma$  удается доказать, что *последовательность точек  $A_\gamma x$  равномерно распределена в своем замыкании, если только оно связно; иначе говоря, временные средние  $f_n(x)$  непрерывной функции сходятся к пространственному среднему по замыканию траектории  $A_\gamma x$  ( $\gamma \in \Gamma$ ).*

В качестве примера рассмотрим 2 случая:

- 1)  $\Gamma$  — свободная группа с двумя образующими  $a, b$ .
- 2)  $\Gamma$  — группа с образующими  $a, b, c$  и соотношением  $abc = e$ .

Легко видеть, что  $f_n(x) = S_n f(x)$ , где  $S_0 = E$  и соответственно

$$S_1 = \frac{1}{4}(A + B + A^{-1} + B^{-1}); \quad S_{n+1} = \frac{4}{3}S_1 S_n - \frac{1}{3}S_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad (8)$$

$$S_1 = \frac{1}{6}(A + B + C + A^{-1} + B^{-1} + C^{-1});$$

$$S_{n+1} = \frac{3}{2}S_1 S_n - \frac{1}{4}S_n - \frac{1}{4}S_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (9)$$

<sup>1</sup> Другое доказательство теоремы 1 дал М. Малютов.

(здесь  $A, B, C$  — унитарные операторы, соответствующие образующим группы  $\Gamma$ :  $Af(x) = f(A_a^{-1}x)$ ).

Рассмотрим замыкание траектории  $A_\gamma x$  ( $\gamma \in \Gamma$ ). Это однородное пространство  $M$ , на котором транзитивно действует замыкание  $\bar{\Gamma}$  группы  $A_\gamma$  в  $G$ . Разложим  $L_2(M)$  в ортогональную сумму конечномерных подпространств  $R_l$ , инвариантных и неприводимых относительно  $\bar{\Gamma}$  (см. [4]).

Операторы  $S_1$  (а следовательно, и  $S_n$ , как функции от них), самосопряжены. Изучение  $S_n$  в  $R_l$  сводится к изучению их собственных значений, для которых из (8) или (9) получаются рекуррентные уравнения. Решая эти уравнения, видим, что либо в  $R_l$   $S_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), либо  $R_l$  одномерно и для  $f \in R_l$ ,  $D \in \bar{\Gamma}$  имеем  $Df = \pm f$ .

Покажем теперь, что  $f$  постоянна на  $M$ , если  $M$  связно. Обозначим через  $K$  компоненту единицы в  $\bar{\Gamma}$ . Для  $D$  из  $K$ , очевидно,  $Df = f$ , поэтому на  $Kx$  функция  $f$  постоянна. Но так как  $M$  связно, оно совпадает с  $Kx$ , и на нем  $f = \text{const}$ . Отсюда легко следует, что временные средние стремятся к пространственному.

**Замечание 1.** Мы изучали выше временные средние по «сферам»  $\Gamma_n$ . Легко вывести аналогичные теоремы о средних по «шарам»  $\bigcup_{k=0}^n \Gamma_k$ .

**Замечание 2.** Если  $A$  и  $B$  — два наугад взятые вращения сферы, то в общем случае последовательность (1) всюду плотна. Вероятно, для двух элементов  $A$  и  $B$  компактной группы Ли  $G$  общим случаем будет всюду плотность произведений  $A$  и  $B$  в  $G$ . Если же группа  $G$  не компактна, то порожденная любым числом элементов подгруппа может быть устойчиво дискретной (пример:  $G$  — группа движений плоскости Лобачевского,  $\Gamma$  — подгруппа дискретной группы, связанной с поверхностью рода  $p$  (см. [5])).

**3. Уравнения с комплексным временем.** С геометрической точки зрения решения обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области изображаются двумерными поверхностями, на которые расслаивается фазовое пространство. Такая поверхность может заметать фазовое пространство или его часть всюду плотно. В этом случае естественно ожидать в каком-то смысле равномерного распределения.



Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dz} = A(z)x, \quad (10)$$

где  $z$  — комплексное переменное,  $x$  — вектор  $(x_1, \dots, x_n)$   $n$ -мерного комплексного пространства  $\mathbb{C}^n$  и  $A$  — матрица, зависящая от  $z$  аналитически, исключая 3 особые точки  $z_1, z_2, z_3$  на сфере Римана.

Фазовое пространство действительной размерности  $2n + 2$  — прямое произведение сферы Римана без трех точек  $z_1, z_2, z_3$ , обозначаемой далее через  $Z$ , на  $\mathbb{C}^n(z)$ . Оно расслоено на решения — поверхности действительной размерности 2, локально задаваемые уравнением  $x = x(z)$ , где  $x(z)$  удовлетворяет системе (10), а  $z \in Z$ .

Каждому пути на  $Z$ , выходящему из  $z_0$ , и каждому вектору  $x_0 \in \mathbb{C}^n(z_0)$  отвечает единственное решение  $x(z)$  с начальным условием  $x_0(z_0)$ . Тем самым определено линейное отображение  $\mathbb{C}^n(z_0)$  на  $\mathbb{C}^n(z)$ . В частности, замкнутому пути  $\gamma$  отвечает линейное преобразование  $A_\gamma$  пространства  $\mathbb{C}^n(z_0)$  на себя. Преобразование  $A_\gamma$  зависит только от гомотопического класса пути  $\gamma$  на  $Z$ ; эти преобразования образуют антипредставление фундаментальной группы  $Z$ . Группа преобразований  $A_\gamma$  называется группой монодромии системы (10).

**Лемма 2.** *Если группа монодромии ограничена, то система (10) имеет однозначный первый интеграл  $(B(z)x, \bar{x}) = \text{const}$ , где  $B(z)$  — положительно определенная самосопряженная матрица, однозначная при  $z \in Z$ .*

Доказательство основано на том, что ввиду компактности замыкания  $A_\gamma$  представление  $A_\gamma$  эквивалентно унитарному.

Из леммы 2 следует, что каждая двумерная поверхность, изображающая решение в  $(2n + 2)$ -мерном пространстве, остается постоянно на  $(2n + 1)$ -мерной поверхности  $(Bx, \bar{x}) = c$ , а точки разных ветвей решения  $x(z)$  над одной точкой  $z_0$  — на сфере  $(B(z_0)x, \bar{x}) = c$ . Согласно результатам §§ 1, 2 эти точки распределяются равномерно в своем замыкании (если оно связно): фундаментальная группа  $Z$  имеет три образующих  $a, b, c$  и соотношение  $abc = e$ .

Есть случай, когда удастся явно выписать условие ограниченности группы монодромии. Это — гипергеометрическое уравнение Гаусса

$$z(1-z)\frac{d^2x}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\frac{dx}{dz} - \alpha\beta x = 0. \quad (11)$$

Мы предположим, что параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  действительны.

**Теорема 2.** *Гипергеометрическое уравнение (11) имеет однозначный первый интеграл*

$$b_{11}x\bar{x} + b_{12}x\bar{x}' + b_{21}x'\bar{x} + b_{22}x'\bar{x}' = \text{const}, \quad (12)$$

где  $x' = dx/dz$ , а  $b_{ij}(z)$  — однозначные (но не комплексно-аналитические) функции, определенные при  $z \neq 0, 1, \infty$  и образующие самосопряженную матрицу  $\|b_{ij}(z)\|$ .

Чтобы найти функции  $b_{ij}$ , достаточно заметить, что обе образующие  $A_a$ ,  $A_b$  группы монодромии, явно выписанные в [7], сохраняют некоторое скалярное произведение.

Согласно Риману и Шварцу, с уравнением (11) связан ограниченный дугами окружностей треугольник с углами  $\lambda\pi$ ,  $\mu\pi$ ,  $\nu\pi$ , где  $\lambda = |1 - \gamma|$ ,  $\mu = |\gamma - \alpha - \beta|$ ,  $\nu = |\alpha - \beta|$  (см. [6]). Если сумма углов этого треугольника больше  $\pi$ , то матрица  $\|b_{ij}(z)\|$  положительно определена, группа монодромии состоит из унитарных в метрике  $\|x\| = (B(z_0)x, \bar{x})$  матриц, а все ветви решения над каждой точкой  $z$  лежат на сфере (12) в пространстве  $x$ ,  $x'$  и равномерно распределены на этой сфере при почти всех значениях параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (исключительные значения составляют одномерное многообразие).

4. Укажем в заключение на несколько нерешенных вопросов.

- 1°. Справедливы ли эргодические теоремы Биркгофа и Неймана для динамических систем с некоммутативным временем типа §2?
- 2°. Распространяются ли результаты §2 на произвольные группы  $\Gamma$  с конечным числом образующих?
- 3°. Распространяются ли результаты §§ 1, 2 на некомпактный случай? (Например, пусть  $\Omega$  — плоскость Эвклида или Лобачевского.)
- 4°. Каково обобщение §§ 1, 2 на случай, когда роль времени играет группа Ли, например, группа движений плоскости Лобачевского?
- 5°. Уравнения (10) можно записать в виде  $dx = (A(z)dz)x$ . Если под  $A(z)dz$  понимать матрицу из дифференциалов, то рассуждения §3 переносятся на уравнения на римановых поверхностях. Трудность состоит в том, чтобы узнать, ограничена ли группа монодромии.

- 6°. Равномерное распределение поверхности, изображающей решения (10) в  $(2n + 1)$ -мерном многообразии  $M_c : (Bx, \bar{x}) = c$ , имеет, вероятно, место по отношению к следующей метрике: на  $Z$  вводится метрика постоянной отрицательной кривизны (см. [5]), а на  $\mathbb{C}^n(z)$  метрику определяет скалярное произведение  $(B(z)x, y)$ .
- 7°. Систему (10) можно рассматривать как динамическую систему, в которой роль времени играет универсальная накрывающая  $Z$ , т.е. плоскость Лобачевского. Но с ней можно связать также обыкновенную динамическую систему с непрерывным временем. С этой целью рассмотрим в качестве точки нового фазового пространства точку  $(z, x) \in M_c$  вместе с направлением  $\xi$  вектора, касательного к  $Z$  в  $z$ . Движение определим так: точка  $z$  движется равномерно по геодезической направления  $\xi$ , а  $x$  над  $z$  — в соответствии с уравнениями (10). Метрика и инвариантная мера определены в 6°.

Указанная конструкция позволяет «умножать» поток, заданный на многообразии, на группу автоморфизмов (являющуюся представлением фундаментальной группы многообразия). Представляет интерес изучение получающихся «произведений».

## Литература

- [1] Халмош П. Р. Лекции по эргодической теории. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959, 147 с.
- [2] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике. В кн.: Труды Четвертого Всесоюзного математического съезда (Ленинград, 3–12 июля 1961 г.). Т. 2. Л.: Наука, 1964, 403–409.
- [3] Поля Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1956, с. 98.
- [4] Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1950, 223 с.
- [5] Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960, 343 с.
- [6] Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.–Л.: ОНТИ. Глав. ред. техн.-теорет. лит-ры, 1937, 432 с.
- [7] Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во, 1939, 719 с.



## Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики

1. Лиувиль доказал, что если в системе с  $n$  степенями свободы

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (1)$$

известны  $n$  первых интегралов в инволюции  $H = F_1, F_2, \dots, F_n$ , то система интегрируема в квадратурах (см. [1]). Известно много примеров интегрируемых задач. Давно замечено, что в этих примерах ограниченные инвариантные многообразия, выделяемые уравнениями  $F_i = f_i = \text{const}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), оказываются торами, а движение на них — условно периодическим. Мы докажем, что такое положение неизбежно в любой интегрируемой в указанном смысле задаче. Доказательство основано на простых топологических соображениях.

**2. Обозначения.** Точку  $2n$ -мерного евклидова пространства  $(p, q)$  будем обозначать через  $x = (x_1, \dots, x_{2n})$ . Для функции  $F(x)$  через  $\text{grad } F$  обозначим вектор  $(F_{x_1}, \dots, F_{x_{2n}})$ . Уравнения Гамильтона (1) примут тогда вид

$$\dot{x} = I \text{grad } H, \quad (2)$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

и  $E$  — единичная матрица порядка  $n$ .

Для двух векторов  $x, y$  определим *кососкалярное произведение*  $[x, y] = (Ix, y) = -[y, x]$ . Линейные преобразования  $S$ , сохраняющие кососкалярное произведение (так что  $[Sx, Sy] = [x, y]$  при всех  $x, y$ ), называются *симплектическими*. Например, преобразование с матрицей  $I$  симплектическое.

Кососкалярное произведение  $[\text{grad } F, \text{grad } G]$  называется *скобкой Пуассона*  $(F, G)$  функций  $F$  и  $G$ . Очевидно, функция  $F$  тогда и только

тогда является первым интегралом системы (2), когда ее скобка Пуассона с функцией Гамильтона  $(F, H)$  равна нулю. Если скобка Пуассона двух функций равна нулю, то говорят, что эти функции *находятся в инволюции*.

Точка  $n$ -мерного тора задается  $n$  угловыми координатами  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \pmod{2\pi}$ . *Условно периодическим* называется такое движение точки по тору, при котором координаты меняются равномерно.

**3. Теорема.** Пусть гамильтонова система (2) с  $n$  степенями свободы имеет  $n$  однозначных первых интегралов  $H = F_1, F_2, \dots, F_n$ , попарно находящихся в инволюции. Пусть уравнения  $F_i = f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) выделяют в  $2n$ -мерном пространстве  $x$   $n$ -мерное компактное многообразие  $M = M_f$ , в каждой точке которого вектора  $\text{grad } F_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) линейно независимы. Тогда  $M$  есть  $n$ -мерный тор и точка  $x(t)$ , изображающая решение уравнений (2), движется по нему условно периодически.

Доказательство разобьем на 4 пункта.

1)  $M$  параллелизуемо, т.е. имеет  $n$  касательных векторных полей, линейно независимых в каждой точке. Действительно, рассмотрим систему (2) с функцией Гамильтона  $F_i$ . Так как  $(F_i, F_j) = 0$ , все функции  $F_j$  являются первыми интегралами и каждая траектория целиком лежит на  $M_f$ . Следовательно, поле скоростей  $I \text{grad } F_i$  касается  $M$ . Ввиду невырожденности матрицы  $I$ , вектора  $I \text{grad } F_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) в каждой точке  $M$  линейно независимы.

2) Пусть  $D$  — поверхность в  $M$ ,  $\Gamma$  — ее граница. Тогда  $\int_{\Gamma} p dq$  (сумма площадей проекций  $D$  на плоскости  $p_i q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )) равен нулю.

Доказательство достаточно провести для лежащих в  $M$  бесконечно малых параллелограммов. Если  $\Gamma$  — конечный параллелограмм со сторонами  $\xi, \eta$ , то сумма площадей проекций, очевидно, есть  $[\xi, \eta]$ . Пусть теперь  $\xi, \eta$  касаются  $M$  в некоторой точке. Согласно 1), любой касательный к  $M$  вектор есть линейная комбинация  $I \text{grad } F_i$ . Но из  $[\text{grad } F_i, \text{grad } F_j] = 0$ , ввиду симплектичности  $I$ , следует  $[I \text{grad } F_i, I \text{grad } F_j] = 0$ . Следовательно,  $[\xi, \eta] = 0$ , что и требовалось доказать.

3) Векторные поля  $I \text{grad } F_i$  на  $M$  безвихревые (т.е. являются градиентами (многозначных) функций).

Согласно 2),  $\int_{q_0}^q p dq$  не зависит от лежащего на  $M_f$  в окрестности точки  $q_0$  пути интегрирования. Поэтому такой интеграл можно рассматривать как многозначную функцию  $S(q, f)$ . Уравнения  $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ ,  $g = \frac{\partial S}{\partial f}$  определяют в каждой малой области каноническое преобразование  $p, q \leftrightarrow f, g$  с производящей функцией  $S(q, f)$  (см. [1]). В переменных  $f, g$  функция Гамильтона  $F_i$  есть  $f_i$  и уравнения Гамильтона дают  $\dot{g}_i = 1$ ,  $\dot{g}_j = \dot{f} = 0$ .

Ввиду линейной независимости полей скоростей  $I \text{grad } F_i$ , дифференциалы  $dg_i$  в каждой точке линейно независимы. Будем рассматривать  $g_i$  как локальные координаты на  $M$ . В пересечении двух окрестностей они отличаются на постоянные, так что дифференциалы  $dg_i$  однозначны, а  $g$  многозначны на  $M$ . В координатах  $g$  поля скоростей  $I \text{grad } F_i$  на  $M$  безвихревые, как градиенты функций  $g_i$ . Таким образом, многообразие  $M$  параллелизуемо посредством безвихревых полей. Отсюда легко вывести, что оно есть тор.

**4) Лемма.** Пусть на  $n$ -мерном компактном многообразии  $M$  существуют  $n$  линейно независимых в каждой точке дифференциалов  $dg_i$  (замкнутых дифференциальных форм степени 1). Тогда это многообразие есть прямое произведение  $n$  окружностей.

Действительно, пусть  $O$  — точка  $M$  и  $M'$  — универсальная накрывающая  $M$ . Каждому пути  $OA$  на  $M$  соответствует путь  $O'A'$  на  $M'$ . Функции  $g_i(A') = \int_{O'A'} dg_i$  отображают  $M'$  в евклидово пространство  $g_1, \dots, g_n$ . Легко проверить (ср., например, [2]), что:

- а) это есть отображение на все пространство  $g_1, \dots, g_n$ ;
- б) в каждую точку  $g$  переходит только одна точка  $A'$ ;
- в) если  $O'$  и  $O''$  накрывают  $O$  и  $g(O''') = g(O') \pm g(O'')$ , то  $O'''$  накрывает  $O$ .

Ввиду а) и б),  $M'$  можно отождествить с евклидовым пространством. При этом, согласно в), точки, накрывающие  $O$ , образуют решетку (совокупность целочисленных линейных комбинаций  $k$  независимых векторов). Вообще, точки  $A', A''$  накрывают одну точку  $A$  тогда и только тогда, когда  $A' - A''$  есть вектор решетки. Отождествляя в евклидовом пространстве все такие точки, мы получим прямое произведение  $k$  окружностей и  $n - k$  прямых. Ввиду компактности  $M$ ,  $k = n$ . Лемма доказана.

Согласно 3), многообразию  $M_f$  удовлетворяет условиям леммы. Следовательно, оно является  $n$ -мерным тором. Так как координаты  $g$  меняются равномерно, движение на  $M_f$  условно периодическое. Теорема доказана.

**Замечание 1.** Множество точек  $2n$ -мерного пространства  $x$ , где  $n$  векторов  $\text{grad } F_i$  линейно зависимы, имеет, вообще говоря, размерность  $n - 1$ . Поэтому  $n$ -мерные многообразия  $M$ , на которых  $\text{grad } F_i$  линейно зависимы, являются исключением (вообще говоря,  $n$ -мерное и  $(n - 1)$ -мерное многообразия в  $2n$ -мерном пространстве не пересекаются).

**Замечание 2.** При  $n = 2$  функция Гамильтона  $F_1$  и первый интеграл  $F_2$  автоматически находятся в инволюции. В этом случае теорема почти тривиальна, так как тор — единственное компактное ориентируемое двумерное многообразие, допускающее векторное поле без особых точек. Поэтому даже в негамильтоновой системе четвертого порядка с двумя первыми интегралами уровни  $F_i = f_i$  являются торами (см. [3]).

**Замечание 3.** В формулировке теоремы мы для простоты ограничились случаем, когда исходное фазовое пространство евклидово. Ничего не изменилось бы, если бы это было любое многообразие с канонической структурой, т.е. каноническими преобразованиями в качестве допустимых замен переменных. Для простоты мы не сформулировали соответствующую теорему и в случае, когда  $M_f$  не компактно.

**Замечание 4.** Остается открытым вопрос о топологической характеристике многообразий уровня  $M_f$ , когда число  $k$  первых интегралов  $F_i$  меньше числа  $n$  степеней свободы, а также когда имеющиеся интегралы не находятся в инволюции. Далее, хотя все известные системы, интегрируемые в квадратурах, имеют  $n$  первых интегралов в инволюции, неизбежность этого не доказана.

4. Рассмотренные задачи динамики естественно приводят к вопросу о том, сколько линейно независимых безвихревых полей допускает данное многообразие. Например, трехмерная сфера параллелизуема, но не имеет ни одного безвихревого касательного векторного поля без особенностей. Действительно, градиент локальной функции на сфере есть градиент однозначной функции, так как сфера односвязна. В точке максимума функции градиент обращается в нуль.



Вообще нетрудно показать, что компактное многообразие  $M$  допускает  $k$  безвитревых касательных векторных полей  $\text{grad } F_j$ , линейно независимых в каждой точке, тогда и только тогда, когда оно есть косо произведение с  $k$ -мерным тором в качестве базы. Действительно, при небольшом изменении векторы  $\text{grad } F_j$  останутся линейно независимыми. Таким изменением можно добиться того, что для любого одномерного цикла  $\gamma_i$  будет  $\oint_{\gamma_i} dF_j = \frac{M_{ij}}{N}$ , где  $M_{ij}, N$  — целые числа. Однозначные функции  $\varphi_j = \exp(2\pi i N F_j)$ ,  $1 \leq j \leq k$ , отображают  $M$  на  $k$ -мерный тор  $T$ . Ввиду линейной независимости  $\text{grad } F_j$  в каждой точке  $M$  представлено в виде косо произведения с базой  $T$ .

Вопрос о существовании невырожденных замкнутых форм степени  $> 1$ , а также полей плоскостей и реперов, не так прост. Известны некоторые необходимые условия (в терминах препятствий и характеристических классов), но они заведомо далеки от достаточных.

С указанным вопросом связана следующая задача о расслоениях. Пусть окрестность каждой точки  $n$ -мерного многообразия  $M$  диффеоморфно отображена на евклидов куб. Рассмотрим прообразы горизонтальных плоскостей  $x_n = \text{const}$ . Если отображения пересекающихся окрестностей согласованы так, что прообразы в пересечении либо не пересекаются, либо совпадают, то мы скажем, что дано расслоение  $M$  на  $(n-1)$ -мерные поверхности, лишенные особенностей. Типичный пример: расслоение двумерного тора на траектории условно периодического движения.

Аналогично определяются расслоения на  $(n-k)$ -мерные поверхности.

**Задача.** *Определить, существует ли расслоение данного  $n$ -мерного многообразия на  $(n-k)$ -мерные поверхности. Исследовать поведение поверхностей расслоения в целом.*

Изучение расслоений есть естественное обобщение качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Расслоения  $n$ -мерного многообразия на  $(n-1)$ -мерные больше напоминают качественную теорию на двумерных многообразиях, чем расслоения  $n$ -мерного пространства на кривые.

Во время печатания настоящей заметки А. С. Шварц любезно обратил мое внимание на посвященные поставленной задаче работы французских топологов (см., например, [4]).

## Литература

- [1] Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.–Л.: ОНТИ. Глав. ред. техн.-теорет. лит-ры, 1937, 500 с. §148.
- [2] Картан Э. Геометрия римановых пространств. М.–Л.: ОНТИ. Глав. ред. общетехн. лит-ры и номографии, 1936, 244 с. Гл. III.
- [3] Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика. В кн.: Междунар. математ. конгресс в Амстердаме, 1954. М.: Физматгиз, 1961, 187–208.
- [4] Haefliger A. Sur les feuilletages analytiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1956, **242**(25), 2908–2910.

## О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы

1. Недавний прогресс теории возмущений позволил найти много условно периодических движений в каждой нелинейной динамической системе, близкой к интегрируемой (см. [1], [2]). Устойчивость всех движений системы вытекает из этих результатов лишь в случаях, когда размерность фазового пространства  $\leq 4$ . Цель настоящей заметки — указать пример (3) системы с 5-мерным фазовым пространством, удовлетворяющей всем условиям работ [1], [2], но неустойчивой<sup>1</sup>. Вековые изменения  $I_2$  в системе (3) имеют скорость  $\exp(-1/\sqrt{\epsilon})$  и потому не улавливаются никаким приближением классической теории возмущений.

Сначала введем некоторые определения.

2. **Усатый тор.** Тором  $T^k$  мы называем прямое произведение  $k$  окружностей, допускающее  $k$  угловых координат  $\varphi = \varphi_1, \dots, \varphi_k \pmod{2\pi}$ . Условно периодическое движение с частотами  $\omega$  определяется уравнениями  $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$  (где  $\sum n_i \omega_i \neq 0$  при целых  $n_i$ ,  $\sum n_i^2 \neq 0$ ). Пусть в фазовом пространстве динамической системы имеется инвариантный тор  $T$  и на нем движение условно периодически. Мы назовем  $T$  *усатым тором*, если  $T$  является компонентой пересечения двух инвариантных открытых многообразий  $Y^-$  и  $Y^+$ , причем все траектории на входящем усе  $Y^-$  стремятся к  $T$  при  $t \rightarrow +\infty$ , а на выходящем усе  $Y^+$  — при  $t \rightarrow -\infty$ .

**Пример 1.** Стандартным усатым тором мы назовем тор  $x = y = z = 0$  в системе

$$\dot{x} = \lambda x, \quad \dot{y} = -\mu y, \quad \dot{z} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad (1)$$

определенной в  $(l_+ + l_- + l_0 + k)$ -мерном пространстве  $x, y, z, \varphi$  ( $\varphi \pmod{2\pi}$ ).

<sup>1</sup> В отличие от устойчивости, неустойчивость устойчива. Нам кажется, что механизм «переходных цепочек», обеспечивающий неустойчивость в нашем примере, действует и в общем случае (например, в задаче трех тел).

Для дальнейшего существенно понятие *загораживающего множества*. Пусть  $M$  — гладкое подмногообразие пространства  $X$ . Касательную плоскость к  $M$  в точке  $x$  мы будем обозначать через  $TM_x$ . Многообразие  $N$  дополняет  $M$  в точке  $x \in M \cap N$ , если  $TM_x + TN_x = TX_x$ . Мы скажем, что множество  $\Omega$  *загораживает* многообразие  $M$  в точке  $x \in M$ , если каждое многообразие  $N$ , дополняющее  $M$  в  $x$ , пересекается с  $\Omega$ .

**Пример 2.** *Спираль  $\Omega$ , навивающаяся на замкнутую кривую  $M$ , загораживает  $ee^2$ .*

Другой пример доставляется стандартным усатым тором (1). Пусть  $U$  — окрестность точки  $\xi$  входящего уса  $x = z = 0$ . Обозначим через  $\Omega = \bigcup_{t>0} U(t)$  множество всех траекторий, начинающихся в  $U$ . Легко доказывается

**Теорема 1.** *Множество  $\Omega$  загораживает выходящий ус  $y = z = 0$  в любой его точке  $\eta$ .*

**3. Переходная цепочка.** Если усатый тор  $T$  обладает тем свойством, что образы любой окрестности любой точки  $\xi$  его входящего уса загораживают выходящий ус в любой точке последнего  $\eta$ , то такой тор мы назовем *переходным*. Согласно теореме 1, *стандартный тор (1) — переходный*.

Пусть динамическая система с фазовым пространством  $X$  имеет несколько переходных торов  $T_1, \dots, T_s, \dots$ . Мы назовем эти торы *переходной цепочкой*, если выходящий ус  $Y_s^+$  каждого предыдущего тора  $T_s$  дополняет входящий ус следующего тора  $Y_{s+1}^-$  в некоторой точке их пересечения  $x_s \in Y_s^+ \cap Y_{s+1}^-$ .

Пусть  $T_1, \dots, T_s, \dots$  — переходная цепочка. Легко доказывается

**Теорема 2.** *Любая окрестность тора  $T_1$  соединена с любой окрестностью тора  $T_s$  траекторией рассматриваемой динамической системы.*

Таким образом, для доказательства неустойчивости достаточно найти переходную цепочку, соединяющую далекие торы  $T_1, T_s$ . Отыскание усатых торов и особенно изучение их пересечений в общей задаче теории возмущений требует громоздких вычислений. Мы ограничимся

<sup>2</sup> На этом обстоятельстве основаны работы [3], [4].

примером, в котором специально подобранное возмущение исчезает на торах  $T_s$ .

**4. Неустойчивая система.** Мы рассмотрим систему с двумя степенями свободы, периодическую по времени  $t$  с периодом  $2\pi$ . «Фазовое пространство»  $I_1, I_2; \varphi_1, \varphi_2; t$  — прямое произведение плоскости  $I_1, I_2$  на трехмерный тор  $\varphi_1, \varphi_2, t \pmod{2\pi}$ . Функция Гамильтона, зависящая от параметров  $\varepsilon, \mu$ , будет иметь вид  $H = H_0 + \varepsilon H_1$ , где<sup>3</sup>

$$H_0 = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2), \quad \varepsilon H_1 = \varepsilon(\cos \varphi_1 - 1)[1 + \mu\beta], \quad \beta = \sin \varphi_2 + \cos t. \quad (2)$$

Иначе говоря, рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= I_1, & \dot{\varphi}_2 &= I_2; & \dot{I}_1 &= \varepsilon \sin \varphi_1 [1 + \mu\beta], \\ \dot{I}_2 &= \varepsilon(1 - \cos \varphi_1)\mu \cos \varphi_2; & \beta &= \sin \varphi_2 + \cos t. \end{aligned} \quad (3)$$

Исследуем сперва невозмущенную систему ( $\varepsilon = 0$ ). Каждый трехмерный тор  $I_1 = \omega_1, I_2 = \omega_2$  инвариантен. На нем происходит трехчастотное движение  $\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \dot{t} = 1$ . Тор называется *нерезонансным*, если на нем частоты независимы (т.е.  $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_0 \neq 0$  при целых  $n \neq 0$ ). Уравнение  $I_1 = 0$  определяет семейство резонансных торов (так как  $\omega_1 = 0$ ).

Теперь рассмотрим возмущенную систему: пусть  $0 < \varepsilon\mu \ll \varepsilon \ll 1$ . В [1], [2] показано, что для большинства нерезонансных начальных условий величины  $I_1(t), I_2(t)$  будут мало меняться в течение всего бесконечного промежутка времени  $-\infty < t < +\infty$ . Оказывается, однако, что вблизи резонансного многообразия  $I_1 = 0$  появляется зона неустойчивости. Точнее, справедлива

**Теорема 3.** Пусть  $0 < A < B$ . Для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\mu_0 > 0$  такое, что при  $0 < \mu < \mu_0$  система (3) неустойчива: существует траектория, соединяющая область  $I_2 < A$  с областью  $I_2 > B$ .

**5. Доказательство неустойчивости.** Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ .

А. Пусть сначала  $\mu = 0$ . Тогда переменные разделяются:

$$H = H^{(1)} + H^{(2)}, \quad H^{(1)} = \frac{1}{2}I_1^2 + \varepsilon(\cos \varphi_1 - 1), \quad H^{(2)} = \frac{1}{2}I_2^2. \quad (4)$$

<sup>3</sup> Нетрудно построить реальную механическую систему с функцией Гамильтона (2).

Таким образом,  $\dot{I}_2 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_2 = I_2 = \omega = \text{const}$ , а изменение  $I_1$ ,  $\varphi_1$  со временем описывается гамильтонианом обычного маятника  $H^{(1)}$ . Пусть число  $\omega$  иррационально. Легко доказывается

**Утверждение А.** Многообразию  $T_\omega$ , определенное уравнениями  $I_1 = \varphi_1 = I_2 - \omega = 0$ , есть двумерный усатый тор системы (3). Усы трехмерны и имеют уравнения

$$H^{(1)} = 0, \quad H^{(2)} = \frac{1}{2}\omega^2 \quad \text{или} \quad I_1 = \pm 2\sqrt{\varepsilon} \sin \frac{\varphi_1}{2}, \quad I_2 = \omega. \quad (5)$$

Усы заполнены асимптотическими траекториями

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \pm 2\sqrt{\varepsilon} \operatorname{ch}^{-1} \tau, & \varphi_1(t) &= \pm \operatorname{arcctg}(-\operatorname{sh} \tau), \\ \varphi_2(t) &= \varphi_2^0 + \omega(t - t^0), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\tau = \sqrt{\varepsilon}(t - t^0)$ ,  $I_1(t_0) = \pm 2\sqrt{\varepsilon}$ ,  $\varphi_1(t^0) = \pm \pi$ ,  $\varphi_2(t^0) = \varphi_2^0$ .

Таким образом, точка выходящего уса тора  $T_\omega$  попадает при  $t \rightarrow +\infty$  снова к тому же тору  $T_\omega$ . Иначе говоря, выходящий ус составляет одно многообразие со входящим. Естественно, при  $\mu \neq 0$  это многообразие расщепится на два уса, пересекающихся друг с другом<sup>4</sup>. Мы увидим, что (в отличие от сепаратрис систем с фазовым пространством размерности  $\leq 4$ , рассмотренных в [5], [6]) эти усы пересекаются также и с усами соседних торов  $T_{\omega'}$ .

**Б.** Пусть теперь  $\mu \neq 0$ . Из (3) видно, что торы  $T_\omega$  остаются инвариантными при всех  $\mu$ . Пусть  $\omega$  иррационально. Стандартным методом сжатых отображений доказываемся<sup>5</sup>

**Утверждение Б.** Многообразию  $T_\omega$  есть усатый переходный тор системы (3), если  $\mu$  достаточно мало.

Пусть  $\omega_1 < A < B < \omega_s$ . Для доказательства теоремы 3 достаточно построить переходную цепочку торов  $T_{\omega_1}, \dots, T_{\omega_s}$  и воспользоваться теоремой 2. Построение такой цепочки основано на исследовании возмущения усов (5) при малых  $\mu$ . Оказывается, справедлива

**Лемма 1.** Пусть  $A < \omega < B$ . Тогда выходящий ус  $Y_\omega^+$  тора  $T_\omega$  пересекается со входящими усами  $Y_{\omega'}^-$  всех столь близких торов  $T_{\omega'}$ , что  $|\omega - \omega'| \leq \kappa$  (где  $\kappa = \kappa(\varepsilon, \mu, A, B) > 0$ ).

<sup>4</sup> Расщепление сепаратрис изучено Пуанкаре в последней главе «Новых методов» [5]. Исследования Пуанкаре недавно продолжены Мельниковым [6].

<sup>5</sup> Удобна коническая метрика  $\|f(x)\| = \max |x^{-1}f(x)|$ .

Доказательство леммы 1 требует некоторых вычислений. Невозмущенные усы имеют уравнения (5):  $H^{(1)} = 0$ ,  $H^{(2)} = \frac{1}{2}\omega^2$ , где  $H^{(k)}$  — функции (4). Пусть  $\alpha > 0$  (например,  $\alpha = \pi/2$ ). Легко показать, что при  $|\varphi_1| < 2\pi - \alpha$  уравнения возмущенного выходящего уса  $Y_\omega^+$  можно записать в виде

$$H^{(1)} = \Delta_1^+(\varphi_1; \varphi_2, t; \omega'); \quad H^{(2)} = \frac{1}{2}\omega^2 + \Delta_2^+(\varphi_1; \varphi_2, t; \omega), \quad (7)$$

где функции  $\Delta_k^+ = O(\mu)$  имеют период  $2\pi$  по  $\varphi_2$ ,  $t$  и равны 0 при  $\varphi_1 = 0$ . Точно так же входящий ус  $Y_{\omega'}^-$  при  $|\varphi_1 - 2\pi| < 2\pi - \alpha$  имеет уравнения

$$H^{(1)} = \Delta_1^-(\varphi_1; \varphi_2, t; \omega'), \quad H^{(2)} = \frac{1}{2}\omega'^2 + \Delta_2^-(\varphi_1; \varphi_2, t; \omega'). \quad (8)$$

Пересечение усов  $Y_\omega^+$  и  $Y_{\omega'}^-$  будем искать в плоскости  $\varphi_1 = \pi$ . В обозначениях (7), (8) лемма 1 есть утверждение о разрешимости относительно  $\varphi_2$ ,  $t$  системы уравнений

$$\begin{aligned} \Delta_1^+(\pi; \varphi_2, t; \omega) &= \Delta_1^-(\pi; \varphi_2, t; \omega'), \\ \frac{1}{2}\omega^2 + \Delta_2^+(\pi; \varphi_2, t; \omega) &= \Delta_2^-(\pi; \varphi_2, t; \omega') + \frac{1}{2}\omega'^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Разрешимость системы (9) выводится из следующих приближенных выражений для  $\Delta_k^\pm$ .

**Лемма 2** (ср. [6]). *Возмущения усов суть  $\Delta_k^\pm = \mu\delta_k^\pm + O(\mu^2)$ , где*

$$\mu\delta_k^\pm(\pi; \varphi_2^0, t^0; \omega) = \int_{\mp\infty}^0 \{H, H^{(k)}\} d(t - t^0)|_{(6)} \quad (10)$$

(скобка Пуассона интегрируется вдоль невозмущенной траектории (6)).

Действительно, согласно определениям (7), (8), величины  $\Delta_k^\pm$  суть приращения  $H^{(k)}$  в возмущенном движении (3). Производная функции  $H^{(k)}$  в силу системы уравнений (3) есть как раз скобка Пуассона  $\{H, H^{(k)}\}$ . Поэтому  $\Delta_k^\pm$  в точности равны интегралам (10), распространенным на возмущенные траектории. Отсюда легко получить оценку  $\Delta_k^\pm - \mu\delta_k^\pm = O(\mu^2)$ , доказывающую лемму 2.

Из леммы 2 видно, что разрешимость системы (9) зависит в основном от разрешимости относительно  $\varphi_2^0, t^0$  приближенной системы

$$\delta_1 = 0, \quad \mu\delta_2 = \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega'^2), \quad (11)$$

где

$$\delta_k = \delta_k^+(\pi; \varphi_2^0, t^0; \omega) - \delta_k^-(\pi; \varphi_2^0, t^0; \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{H, H^{(k)}\} d(t - t^0)|_{(6)}. \quad (12)$$

Несложные вычисления, основанные на формулах (2)–(6), дают

$$\delta_1 = -2\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{\partial \beta}{\partial t} dt, \quad \delta_2 = 2\varepsilon\omega \int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_2} dt, \quad (13)$$

где  $u = \text{ch}^{-2} \tau$ ,  $\tau = \sqrt{\varepsilon}(t - t^0)$ ,  $\beta = \beta(\varphi_2, t)$ ,  $\varphi_2 = \varphi_2^0 + \omega(t - t^0)$ . При  $\beta = \sin \varphi_2 + \cos t$  интегралы (13) берутся вычетами<sup>6</sup>:

$$\delta_1 = 2\pi \left( \text{sh}^{-1} \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \sin t^0, \quad \delta_2 = 2\pi\omega^2 \left( \text{sh}^{-1} \frac{\omega\pi}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \cos \varphi_2^0. \quad (14)$$

Полагая в (14)  $t^0 = 0$ , убеждаемся в разрешимости системы (11) при

$$|\omega^2 - \omega'^2| < 4\pi\mu\omega^2 \text{sh}^{-1} \frac{\omega\pi}{2\sqrt{\varepsilon}} \asymp \mu e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}. \quad (15)$$

Из леммы 2 следует теперь, что при достаточно малых  $\mu$  разрешима и система (9). Из неравенства (15) легко получается равномерная при  $A < \omega < B$  оценка  $\max_{\omega'} |\omega - \omega'| = \kappa(\omega)$  снизу, требуемая в лемме 1. Таким образом, лемма 1 доказана. Она позволяет построить цепочку переходных торов  $T_{\omega_1}, \dots, T_{\omega_s}$  ( $\omega_1 < A < B < \omega_s$ ). Из формул (14) видно, что при достаточно малом  $\mu$  эту цепочку можно выбрать так, чтобы последовательные пересекающиеся усы лежали в общем положении и дополняли друг друга в смысле §2. Тогда цепочка  $T_{\omega_1}, \dots, T_{\omega_s}$  будет переходной. Применение теоремы 2 к переходной цепочке  $T_{\omega_1}, \dots, T_{\omega_s}$  завершает доказательство теоремы 3.

<sup>6</sup> Аналогичные интегралы в [6, с. 32] вычислены неверно.



## Литература

- [1] Колмогоров А. Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. *ДАН СССР*, 1954, **98**(4), 527–530.
- [2] Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. *УМН*, 1963, **18**(5), 13–40.  
Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *УМН*, 1963, **18**(6), 91–192.
- [3] Ситников К. А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел. *ДАН СССР*, 1960, **133**(2), 303–306.
- [4] Леонтович А. М. О существовании неограниченных осциллирующих траекторий в одной бильiardной задаче. *ДАН СССР*, 1962, **145**(3), 523–526.
- [5] Poincaré H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Т. 3. Paris, 1897.
- [6] Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях. *Тр. Моск. матем. об-ва*, 1963, **12**(3), 3–52.



## Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы

### 1. Поведение решений систем вида

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega(I; \varepsilon) + \varepsilon f(I, \varphi; \varepsilon), \\ \dot{I} &= \varepsilon F(I, \varphi; \varepsilon), \\ \varphi &= \varphi_1, \dots, \varphi_k; \quad I = I_1, \dots, I_l \end{aligned} \quad (1)$$

(где  $\varphi \pmod{2\pi}$  — углы;  $\varepsilon \ll 1$ ; точка — производная по времени  $t$ ; функции  $\omega$ ,  $f$ ,  $F$  аналитичны при  $I \in G$ ,  $|\operatorname{Im} \varphi| < \rho$ ,  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  (зависимость их от  $\varepsilon$  в дальнейшем не указывается);  $G$  — комплексная компактная область) обычно изучают «методом усреднения», т.е. заменяя (1) усредненной системой

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{F}(J), \quad \bar{F}(J) = (2\pi)^{-k} \iint F(J, \varphi; 0) d\varphi. \quad (2)$$

Хотя отброшенные при усреднении члены  $\varepsilon \tilde{F} = \varepsilon F - \varepsilon \bar{F}$  того же порядка величины, что и оставленные, считается, что в течение времени  $t \sim 1/\varepsilon$  разность между точным и усредненным решениями с одинаковыми начальными условиями  $|I(t) - J(t)|$  остается малой. Действительно, в одночастотном случае ( $k = 1$ ) легко [1] получается оценка

$$|I(t) - J(t)| < C_1 \varepsilon \quad \text{при } 0 < t < 1/\varepsilon.$$

Здесь и далее  $C_1, \dots, C_{22}$  — достаточно большие постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ ,  $K$ ,  $N$ ,  $x$ .

В настоящей заметке рассматривается двухчастотная система ( $k = 2$ ). Мы укажем условие, достаточное для малости  $|I - J|$ , и получим оценки  $C_2^{-1} \sqrt{\varepsilon} < |I(t) - J(t)| < C_3 \sqrt{\varepsilon} \ln^2(1/\varepsilon)$ .

### 2. Прежде всего приведем пример, показывающий, что без дополнительных предположений усреднение может приводить к неверным результатам.

**Пример 1.** Рассмотрим систему

$$\dot{\varphi}_1 = I_1, \quad \dot{\varphi}_2 = I_2, \quad \dot{I}_1 = \varepsilon, \quad \dot{I}_2 = \varepsilon a \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (a > 1).$$

Усредненные уравнения  $\dot{J}_1 = \varepsilon, \dot{J}_2 = 0$ . Пусть  $I_1(0) = I_2(0) = J_1(0) = J_2(0) = 1, \varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = \arccos(1/a)$ . Точное решение  $I_1(t) = I_2(t) = 1 + \varepsilon t$  через время  $t = 1/\varepsilon$  теряет всякую связь с усредненным  $J_1(t) = 1 + \varepsilon t, J_2(t) = 1$ .

Возвращаясь к системе (1),  $k = 2$ , предположим, что  $\omega_2(I) \neq 0$ . Введем отношение частот  $\lambda(I) = \omega_1/\omega_2$ .

**Условие А.** Предположим, что  $C_4^{-1}\varepsilon < |\dot{\lambda}| < C_4\varepsilon$ , т.е. что величина

$$A(I, \varphi) = \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial I} F \right) \omega_2 - \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial I} F \right) \omega_1$$

не обращается в нуль ни при каких  $\varphi$ , если  $I \in G$ .

При условии А система не может застрять ни на каком резонансе. В примере 1 условие А нарушено:  $A = I_2 - I_1 a \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$  меняет знак при  $I_1 = I_2$ , если  $a > 1$ .<sup>1</sup>

**3. Теорема 1.** Если условие А выполнено, то справедлива оценка

$$|I(t) - J(t)| < C_3 \sqrt{\varepsilon} \ln^2(1/\varepsilon) \quad \text{при всех } 0 \leq t \leq 1/\varepsilon. \quad (3)$$

Грубо говоря, теорема 1 оценивает разницу между решениями точной и усредненной систем величиной  $\sqrt{\varepsilon}$ . Следующий пример показывает, что, вообще говоря,  $|I(t) - J(t)| > C_2^{-1} \sqrt{\varepsilon}$ .

**Пример 2.** Рассмотрим систему

$$\dot{\varphi}_1 = I_1 + I_2, \quad \dot{\varphi}_2 = I_2, \quad \dot{I}_1 = \varepsilon, \quad \dot{I}_2 = \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Пусть  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = I_1(0) = I_2(0) - 1 = 0$ . Условие А выполнено при  $I_1 < I_2$ . В усредненной системе  $J_2(t) \equiv 1$ . В точном решении

$$I_2(T) - 1 = \varepsilon \int_0^T \cos \varepsilon \frac{t^2}{2} dt = \sqrt{2\varepsilon} \int_0^\tau \cos x^2 dx, \quad \tau = \sqrt{\varepsilon/2} T.$$

<sup>1</sup> Пример 1 показывает, что условие А нельзя заменять аналогичным условием  $\bar{A}$  на усредненную систему (2), как это предлагалось в [2]. Однако возможно, что при условии  $\bar{A}$  неравенство (3) справедливо для большинства начальных условий. Именно так обстоит дело в примере 1, который легко интегрируется до конца:  $\ddot{q} = -\partial U/\partial q$ ,  $U = -\varepsilon(q - a \sin q)$ , где  $q = \varphi_1 - \varphi_2$ . См. также [3], [4].

При  $T = 1/\varepsilon$ , очевидно,  $I_2(T) - J_2(T) = I_2(T) - 1 > C_2^{-1}\sqrt{\varepsilon}^2$

Анализируя пример 2, легко заметить, что резонанс  $\omega_1 = \omega_2$  оказывает на пучок траекторий, отличающихся вначале лишь фазами  $\varphi$ , рассеивающее действие. Разброс величины  $I_2$  после прохождения резонанса порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ .

Идея доказательства теоремы 1 состоит в разбиении пространства  $I$  на две части: конечное (порядка  $\ln^2(1/\varepsilon)$ ) число резонансных зон ширины  $K$  и нерезонансную часть. За время пребывания в резонансных зонах набирается расхождение  $|I - J|_p \sim K$  (пренебрегая логарифмами). В нерезонансной области строим новые переменные  $P$ , удовлетворяющие условиям  $|P - I| \sim \varepsilon/K$ ,  $|\dot{P} - \varepsilon\bar{F}(P)| \sim \varepsilon^2/K^2$ . Из этих оценок извлекаем, что  $|P - J| \sim \varepsilon/K$ . Итак,  $|I - J|_{\text{нр}} \leq |I - P| + |P - J| \sim \varepsilon/K$ . Следовательно,  $|I - J| \leq |I - J|_p + |I - J|_{\text{нр}} \sim K + \varepsilon/K$ . При  $K \sim \sqrt{\varepsilon}$  получаем (3).

**4. Оценки.** Пусть  $N > 1 > K > 0$ . Обозначим через  $G_N$  множество точек  $I$  области  $G$ , в которых  $(\omega, n) = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 \neq 0$  при целых  $n_1, n_2$ ;  $0 < |n| = |n_1| + |n_2| < N$ . Через  $G_{K,N}$  обозначим множество точек, входящих в  $G_N$  вместе с окрестностью радиуса  $K$ .

Из условия А вытекает, что  $d(\omega, n) \neq 0$  при  $(\omega, n) = 0$ . Поэтому в  $G_{K,N}$

$$|(\omega, n)| > C_5^{-1}K, \quad 0 < |n| < N. \quad (4)$$

Дополнение к  $G_{K,N}$  обозначим через  $R_{K,N} = G \setminus G_{K,N}$ . Пусть  $I(t), \varphi(t)$  ( $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$ ) — решение системы (1), причем  $I(t) \in G$ . Отрезок  $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$  разбивается на две части:  $g_{K,N}$  (где  $I(t) \in G_{K,N}$ ) и  $r_{K,N}$  (где  $I(t) \in R_{K,N}$ ). Пусть  $K < C_6^{-1}$ . Из условия А вытекают

**Лемма 1.** *Множество  $r_{K,N}$  состоит из не более чем  $C_7 N^2$  отрезков. Длина каждого из них не превосходит  $C_8 K/\varepsilon$ .*

**Лемма 2.** *Пусть  $\alpha < t < \beta$  — один из отрезков, составляющих  $g_{K,N}$ . Если  $\alpha + x \leq t \leq \beta - x$ , то  $I(t) \in G_{K(x),N}$ , где  $K(x) = K + C_9^{-1}\varepsilon x$ .*

Обозначим через  $J(J_0, t_0; t)$  решение системы (2) с  $J(t_0) = J_0$ . Очевидно

**Лемма 3.** *При  $|t - t_0| < 1/\varepsilon$  имеем  $|J(J_0, t_0; t) - J(J'_0, t_0; t)| < C_{10}|J_0 - J'_0|$ .*

<sup>2</sup> Пример 2 опровергает утверждение, что  $|I - J| < C\varepsilon$ , высказанное в [2]. Вероятно, в общем случае  $|I - J| > C_2^{-1}\sqrt{\varepsilon} \ln^2(1/\varepsilon)$ .

Пусть  $|\dot{x}| \leq a|x| + b(t)$ ,  $|x(0)| < c$ ;  $a, b, c \geq 0$ . Легко доказывается

**Лемма 4.**  $|x(t)| \leq \left[ c + \int_0^t b(t) dt \right] e^{at}$ .

Обычными приемами (см. §6) доказывается основная

**Лемма 5.** Существуют функции  $P = I + S(I, \varphi)$ ,  $S(I, \varphi + 2\pi) \equiv S(I, \varphi)$  и не зависящие от  $\varepsilon$ ,  $K$  константы  $C_{11} - C_{14}$  такие, что

$$|\dot{P} - \varepsilon \bar{F}(P)| < C_{11} \varepsilon^2 / K^2, \quad |P - I| < C_{12} \varepsilon / K \quad (5)$$

при  $|\operatorname{Im} \varphi| \leq 0,5\rho$ ;  $I \in G_{K,N}$ ;  $N = C_{13} \ln(1/\varepsilon)$ ;  $|\varepsilon| \leq C_{14}^{-1} K^2$ .

**5. Доказательство теоремы 1.** Пусть  $0 < \varepsilon < C_{14}^{-1} C_6^{-2}$ ,  $K = \sqrt{C_{14} \varepsilon} < C_6^{-1}$ . Применив лемму 5, образуем  $P(I, \varphi)$  и  $G_{K,N}$ . Обозначим последовательные отрезки, составляющие  $g_{K,N}$ , через  $[t_r^{\text{л}}, t_r^{\text{п}}]$  ( $r = 1, 2, \dots$ ; для определенности,  $t_1^{\text{л}} = 0 \in g_{K,N}$ ;  $1/\varepsilon \in r_{K,N}$ ). Введем обозначения  $\alpha = \text{л}, \text{п}$ ;  $I(t_r^\alpha) = I_r^\alpha$ ;  $J(I_r^\alpha, t_r^\alpha; t) = J_r(t)$ ;  $P(I(t), \varphi(t)) = P(t)$ . Из леммы 3, учитывая, что  $J_r(t_r^{\text{л}}) = I_r^{\text{л}}$ , получаем

$$\begin{aligned} |I(t) - J(t)| &\leq \sum_r |J_{r+1}(t) - J_r(t)| \leq C_{10} \sum_r |J_{r+1}(t_{r+1}^{\text{л}}) - J_r(t_{r+1}^{\text{л}})| \leq \\ &\leq C_{10} \sum_r \{|I_{r+1}^{\text{л}} - I_r^{\text{п}}| + |I_r^{\text{п}} - J_r(t_r^{\text{п}})| + |J_r(t_r^{\text{п}}) - J_r(t_{r+1}^{\text{л}})|\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из леммы 1 вытекает, что

$$|I_{r+1}^{\text{л}} - I_r^{\text{п}}| + |J_r(t_{r+1}^{\text{л}}) - J_r(t_r^{\text{п}})| < C_{15} K. \quad (7)$$

Из леммы 5 находим при  $t_r^{\text{л}} \leq t \leq t_r^{\text{п}}$ ,  $a = C_{16} \varepsilon$ ,  $b = |\dot{P} - \varepsilon \bar{F}(P)|$

$$|\dot{P} - \dot{J}_r| \leq a|P - J_r| + b. \quad (8)$$

Величину  $b$  оценим с помощью лемм 2 и 5:

$$b(t) < C_{11} \varepsilon^2 / (K + C_9^{-1} \varepsilon x)^2 \quad \text{при } t_r^{\text{л}} + x \leq t \leq t_r^{\text{п}} - x.$$

Следовательно,  $\int b(t) dt < C_{17} \varepsilon / K$  при  $t_r^{\text{л}} \leq t \leq t_r^{\text{п}}$ . Согласно (5)

$$|P(t_r^{\text{л}}) - J_r(t_r^{\text{л}})| = |P(t_r^{\text{л}}) - I_r^{\text{л}}| < c = C_{12} \varepsilon / K.$$

Применяя теперь к неравенству (8) лемму 4, находим

$$|P(t_r^n) - J_r(t_r^n)| \leq e^{C_{16}}(C_{12} + C_{17})\varepsilon/K < C_{18}\varepsilon/K. \quad (9)$$

Из (5) и (9) вытекает

$$|I_r^n - J_r(t_r^n)| \leq |I_r^n - P(t_r^n)| + |P(t_r^n) - J_r(t_r^n)| < (C_{12} + C_{18})\varepsilon/K. \quad (10)$$

Соединяя (6), (7), (10) и лемму 1, находим при  $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$

$$|I(t) - J(t)| < C_{10}C_7(C_{13} \ln(1/\varepsilon))^2[C_{15}K + (C_{12} + C_{18})\varepsilon/K].$$

При  $K = \sqrt{C_{14}\varepsilon}$  правая часть меньше  $C_3\sqrt{\varepsilon} \ln^2(1/\varepsilon)$ , что и требовалось.

**6. Доказательство леммы 5.** Пусть

$$S = \sum S_n e^{i(n,\varphi)}; \quad S_n = \frac{i\varepsilon F_n}{(\omega, n)}; \quad 0 < |n| < N, \quad (11)$$

где  $F(I, \varphi) = \bar{F}(I) + \tilde{F}(I, \varphi)$  разлагается в ряд Фурье:  $\tilde{F} = \sum F_n e^{i(n,\varphi)}$  ( $|n| > 0$ ) и  $[\tilde{F}]_N = \sum F_n e^{i(n,\varphi)}$  ( $0 < |n| < N$ ). Тогда  $\dot{P} = \varepsilon\bar{F}(P) + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5$ , где  $\Sigma_1 = [\varepsilon\tilde{F}]_N + \frac{\partial S}{\partial \varphi}\omega \equiv 0$  (см. (11));  $\Sigma_2 = \varepsilon\bar{F}(I) - \varepsilon\bar{F}(P)$ ;  $\Sigma_3 = \varepsilon\tilde{F} - [\varepsilon\tilde{F}]_N$ ;  $\Sigma_4 = \frac{\partial S}{\partial \varphi}\varepsilon F$ ;  $\Sigma_5 = \frac{\partial S}{\partial \varphi}\varepsilon f$ .

При  $|\operatorname{Im} \varphi| < 0,9\rho$ ,  $I \in G_{0,1K;N}$ , ввиду (4), имеем (ср. [5])

$$|S| < C_{12}\varepsilon/K, \quad |\partial S/\partial \varphi| < C_{12}\varepsilon/K, \quad |\partial S/\partial I| < C_{12}\varepsilon/K^2. \quad (12)$$

Если  $I \in G_{K,N}$ ,  $|\varepsilon| < C_{14}^{-1}K^2$ , то весь отрезок  $IP \subset G_{0,1K;N}$ . Поэтому при  $I \in G_{K,N}$  и  $|\operatorname{Im} \varphi| < 0,5\rho$  имеем, согласно (12),

$$|\Sigma_2| < \varepsilon \left| \frac{\partial \bar{F}}{\partial I} S \right| < C_{19} \varepsilon^2/K; \quad |\Sigma_4| < C_{20} \varepsilon^2/K^2, \quad |\Sigma_5| < C_{21} \varepsilon^2/K.$$

Ввиду аналитичности  $\tilde{F}$  при  $|\operatorname{Im} \varphi| < \rho$ , из  $N = C_{13} \ln(1/\varepsilon)$  при достаточно большом  $C_{13} = C_{13}(\rho)$  вытекает  $|\Sigma_3| < C_{22}\varepsilon^2$ . Таким образом,  $|\dot{P} - \varepsilon\bar{F}(P)| < C_{11}\varepsilon^2/K^2$  (где  $C_{11} = C_{19} + C_{20} + C_{21} + C_{22}$ ), что и требовалось доказать.

Поводом к написанию настоящей заметки послужила ошибочная работа [2]. Автор выражает благодарность А. М. Молчанову, указавшему на эту работу.

## Литература

- [1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958, 408 с.
- [2] Молчанов А. М. Об эволюции планетных систем. В кн.: Проблемы движения искусственных небесных тел. М., 1963, с. 42–49.
- [3] Аносов Д. В. Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1960, 24(5), 721–742.
- [4] Kasuga T. On the adiabatic theorem for the Hamiltonian system of differential equations in the classical mechanics. I–III. *Proc. Japan Acad.*, 1961, 37(7), 366–371, 372–376, 377–382.
- [5] Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. *УМН*, 1963, 18(5), 13–40.  
Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *УМН*, 1963, 18(6), 91–192.



## О римановой кривизне групп диффеоморфизмов

Приведено явное вычисление кривизны в двумерных направлениях в некоторых бесконечномерных группах Ли с левоинвариантной метрикой, геодезические которой описывают течение идеальной жидкости. В некоторых двумерных направлениях кривизна оказывается отрицательной.

1. Я предлагаю явное выражение (9) для римановой кривизны группы Ли, снабженной левоинвариантной метрикой. Римановой кривизной бесконечномерной группы Ли я называю то же самое выражение, распространенное на такие группы. В частности, я вычисляю кривизну группы диффеоморфизмов тора  $\mathbb{T}^2$ , сохраняющих площадь (14). В примере с тором кривизна в некоторых двумерных направлениях оказывается отрицательной (13); знак кривизны, согласно Адамару [1], влияет на поведение геодезических: на многообразиях отрицательной кривизны существуют неустойчивые геодезические.

Интерес к геодезическим на различных группах Ли объясняется следующими примерами:

- a) В случае  $SO(3)$  геодезические описывают вращения твердого тела в трехмерном евклидовом пространстве  $E^3$ .
- b) В случае группы  $S\text{Diff } \Omega$  сохраняющих объем диффеоморфизмов римановой области  $\Omega$  геодезические описывают движение несжимаемой жидкости в  $\Omega$  [3]–[5].
- c) Группа, порожденная растяжениями с положительным коэффициентом и сдвигами  $\mathbb{R}^n$ , описывает геодезический поток в пространстве постоянной отрицательной кривизны, а нильпотентные группы — «нильпотоки» [6].

2. **Обозначения.** Пусть  $M$  — риманово пространство. Обозначим через  $TM_x$  касательное пространство в точке  $x \in M$ , через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение, определенное метрикой. Для  $x \in M$ ,  $\xi \in TM_x$  я

обозначаю через  $\gamma(x, \xi, t) = \gamma(\xi, t) = \gamma(t) = \gamma$  геодезическую, выходящую из точки  $x = \gamma(0)$  и касающуюся вектора  $\xi = \dot{\gamma}(0)$ , параметризованную параметром  $t$ .

При параллельном переносе вдоль геодезической  $\gamma$  вектор  $\eta \in TM_x$  переходит в вектор  $P_\gamma \eta$ , который можно определить посредством следующей конструкции. Положим

$$\Pi_{\gamma(\xi, t)} \eta = \frac{1}{t} \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \gamma(x, \xi + \tau \eta, t) \in TM_{\gamma(t)}. \quad (1)$$

Тогда  $P_{\gamma(t)} \eta - \Pi_{\gamma(t)} \eta = O(t^2)$ ,  $t \rightarrow 0$ . Ковариантная производная  $\nabla_\xi \eta$  вектора  $\eta$  вдоль  $\xi$ , по определению, равна

$$\nabla_\xi \eta = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P_{\gamma(t)}^{-1} \eta(\gamma(\xi, t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Pi_{\gamma(t)}^{-1} \eta(\gamma(\xi, t)). \quad (2)$$

Пусть  $\xi, \eta$  — два ортогональных нормированных вектора в  $TM_x$ . Кривизна  $R_{\xi, \eta}$  пространства  $M$  в точке  $x$  в двумерном направлении, заданном векторами  $\xi, \eta$ , равна, по определению [7]:

$$R_{\xi, \eta} = -\langle \nabla_\xi \nabla_\eta \xi, \eta \rangle + \langle \nabla_\eta \nabla_\xi \eta, \xi \rangle + \langle \nabla_{[\xi, \eta]} \xi, \eta \rangle, \quad (3)$$

где через  $[\xi, \eta]$  обозначена скобка Ли векторных полей  $\xi$  и  $\eta$ , значения которых в точке  $x$  равны соответственно  $\xi(x)$  и  $\eta(x)$ .

Пусть  $G$  — вещественная группа Ли,  $\mathcal{G} = TG_e$  — ее алгебра Ли со скобкой Ли  $[\cdot, \cdot]$ . Экспоненциальное отображение<sup>1</sup>  $\exp : \mathcal{G} \rightarrow G$  позволяет интерпретировать алгебру как карту на  $G$  в окрестности нейтрального элемента  $e$ .

Для  $a \in \mathcal{G}$  я обозначаю  $\exp a$  через  $\mathcal{A}$ . Через

$$L_g : TG_h \rightarrow TG_{gh}, \quad L_g : T\mathcal{G}_h \rightarrow T\mathcal{G}_{gh}$$

обозначены отображения касательных пространств, порожденные левым сдвигом.

Легко видеть, что отображение  $\mathcal{G}$  в себя

$$L_a : \mathcal{G} = T\mathcal{G}_0 \rightarrow T\mathcal{G}_a = \mathcal{G}$$

задается формулой

$$L_a \xi = \xi + \frac{1}{2} [a, \xi] + O(a^2), \quad \text{где } a, \xi \in \mathcal{G}, |a| \ll 1. \quad (4)$$

<sup>1</sup> вообще говоря, отличное от геодезического экспоненциального отображения

Пусть  $\langle a, b \rangle$  — произвольное скалярное произведение на алгебре  $\mathcal{G}$ . Левоинвариантная метрика на  $G$  определяется по  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  как скалярное произведение

$$\langle a, b \rangle_g = \langle L_{g^{-1}}a, L_{g^{-1}}b \rangle, \quad \text{где } a, b \in TG_g.$$

С этого момента все метрические понятия, такие как геодезические, кривизна и т.д., относятся именно к этой метрике.

Кривизна группы  $G$  будет выражаться (9) в терминах операции  $B$ , определяемой следующим образом.

Пусть  $a, b \in \mathcal{G}$ , тогда равенство

$$\langle [a, b], c \rangle = \langle B(c, a), b \rangle \quad \text{для всех } b \in \mathcal{G} \quad (5)$$

определяет билинейное отображение  $B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ .

**Пример.** Пусть  $\langle a, b \rangle = (Aa, b)$ , где  $(\cdot, \cdot)$  — бинвариантное скалярное произведение и  $A$  — симметрический оператор. Тогда  $B(c, a) = A^{-1}[Ac, a]$ .

Еще один пример описан в §4.

**3. Результаты.** Пусть  $\gamma(\gamma_0, \dot{\gamma}, t)$  — геодезическая на  $G$ . Рассмотрим<sup>2</sup> вектор скорости  $\dot{\gamma} \in TG_\gamma$ , перенесенный в точку  $e$ :

$$\xi(t) = L_{\gamma^{-1}}\dot{\gamma} \in \mathcal{G}.$$

Имеем:

**Лемма 1.** Вектор  $\xi(t)$  удовлетворяет уравнению Эйлера [2]:

$$\dot{\xi} = B(\xi, \xi). \quad (6)$$

Для доказательства достаточно рассмотреть случай  $\gamma_0 = e$ .

В этом случае выпишем уравнения Эйлера–Лагранжа для лагранжиана  $L = \frac{1}{2}\langle \xi, \xi \rangle$  и используем (4).

Утверждению леммы 1 можно придать другую форму:

**Лемма 2.** Образ кривой  $\gamma(e, \xi, t)$  в  $\mathcal{G}$  имеет вид

$$\gamma(\xi, t) = \xi t + B(\xi, \xi)\frac{t^2}{2} + O(t^3), \quad t \rightarrow 0. \quad (7)$$

<sup>2</sup> В динамике твердого тела  $\xi(t)$  называется угловой скоростью по отношению к телу. В гидродинамике это поле скоростей в момент  $t$ .

Пусть  $\xi(g), \eta(g)$  — два левоинвариантных векторных поля на  $G$ . Тогда  $\nabla_{\xi(g)}\eta(g)$  — тоже левоинвариантное векторное поле. Обозначим через  $\nabla_{\xi}\eta$  его значение при  $g = e$ . Вычислим это значение.

**Лемма 3.** Ковариантная производная дается формулой

$$2\nabla_{\xi}\eta = [\xi, \eta] - B(\xi, \eta) - B(\eta, \xi). \quad (8)$$

Из (1) и (7) вытекает, что

$$\Pi_{\gamma(\xi, t)}\eta = \eta + \delta t + O(t^2), \quad t \rightarrow 0,$$

где

$$2\delta = B(\xi, \eta) + B(\eta, \xi).$$

С помощью (2) и (4) получаем (8).

Используя (8) и (3), заключаем:

**Теорема 1.** Кривизна группы  $G$  в двумерном направлении  $\xi, \eta$  в точке  $e$  равна

$$R_{\xi, \eta} = \langle \delta, \delta \rangle + 2\langle \alpha, \beta \rangle - 3\langle \alpha, \alpha \rangle - 4\langle B_{\xi}, B_{\eta} \rangle, \quad (9)$$

где

$$2\alpha = [\xi, \eta], \quad 2\beta = B(\xi, \eta) - B(\eta, \xi),$$

$$2\delta = B(\xi, \eta) + B(\eta, \xi), \quad 2B_{\xi} = B(\xi, \xi), \quad 2B_{\eta} = B(\eta, \eta)$$

и отображение  $B$  определено формулой (5).

**4. Приложения к группам диффеоморфизмов.** Пусть  $G = \text{SDiff } \Omega$  — группа диффеоморфизмов, оставляющих инвариантным элемент объема в римановой области  $\Omega$ . Алгебра  $\mathcal{G}$  состоит из векторных полей  $\vec{v}$  на  $\Omega$ , таких что  $\text{div } \vec{v} = 0$  и  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ . Определим<sup>3</sup> метрику на  $\Omega$  равенством

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx,$$

где через  $dx$  обозначен элемент объема в области  $\Omega$ .

<sup>3</sup> Из принципов механики следует, что геодезические на  $G$  описывают движение идеальной жидкости в  $\Omega$ .

Чтобы вычислить кривизну (9), выразим отображение  $B$  явно. Выражение для  $B$  выглядит особенно просто, если  $\Omega$  является областью в евклидовом пространстве  $E^3$ .

Обозначим через  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  скалярное произведение, а через  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  — векторное произведение векторных полей в  $E^3$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{G}$ , тогда

$$\vec{B}(\vec{u}, \vec{v}) = (\text{rot } \vec{u}) \wedge \vec{v} + \text{grad } \alpha, \quad (10)$$

где  $\alpha$  — функция, определенная условиями:  $\text{div } \vec{B} = 0$ ,  $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$  на  $\partial\Omega$ .

Если  $\Omega$  — область на плоскости с координатами  $x, y$ , то алгебру  $\mathcal{G}$  векторных полей можно отождествить с алгеброй функций тока  $\psi(x, y)$ :

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (11)$$

и  $[\psi_1, \psi_2]$  совпадает с якобианом функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$ .

В этих обозначениях, согласно (10), поле  $\vec{B}(\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{G}$  имеет вид

$$\vec{B}(\psi_1, \psi_2) = -\Delta \psi_1 \text{grad } \psi_2 + \text{grad } \alpha, \quad (12)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

**Пример.** Пусть  $\Omega = \mathbb{T}^2$  — тор, снабженный плоской метрикой. Рассмотрим в группе  $G = \text{SDiff } \Omega$  двумерное направление, определенное парой функций тока

$$\psi_1 = \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{x}), \quad \psi_2 = \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{x}), \quad (13)$$

где  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$  — «волновые векторы».

Используя (9), (11) и (12), получаем:

**Теорема 3.** Кривизна группы  $\text{SDiff } \mathbb{T}^2$  в точке  $e$  в двумерном направлении (13) равна

$$R = -\frac{k_1^2 + k_2^2}{4S} \sin^2 \phi \sin^2 \phi', \quad (14)$$

где  $S$  — площадь тора,  $\phi$  — угол между  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$ ,  $\phi'$  — угол между  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2$  и  $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$ .

Если, в частности,  $\mathbb{T}^2 = \{x(\text{mod } 2\pi), y(\text{mod } 2\pi)\}$ , то кривизна группы  $\text{SDiff } \mathbb{T}^2$  в двумерном направлении, заданном вектором  $\vec{u}$  с компонентами  $\sin y$  и 0 и вектором  $\vec{v}$  с компонентами 0 и  $\sin x$ , равна  $R = -1/8\pi^2$ .

## Литература

- [1] Hadamard J. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. *J. Math. Pures et Appl.*, 5<sup>e</sup> série, 1898, 4, 27–73.
- [2] Euler L. *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*. Rost. et Gryph., 1765.
- [3] Moreau J.-J. Une méthode de «cinématique fonctionnelle» en hydrodynamique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1959, 249, 2156–2158.
- [4] Юдович В. И. Плоские нестационарные движения идеальной несжимаемой жидкости. *ДАН СССР*, 1961, 136(3), 564–567.
- [5] Arnold V. I. Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problèmes de stabilité non linéaires. *J. de Mécanique*, 1966, 5(1), 29–43.
- [6] Auslander L., Green L., Hahn F. *Flows on homogeneous spaces*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1963, 107 p. (Ann. of Math. Studies, 53)
- [7] Milnor J. Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds. Washington, DC, 1964, 542 p. (Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 51)

## Об одном топологическом свойстве глобально канонических отображений классической механики

Неравенства Морса, относящиеся к числу критических точек функции на многообразии, используются для нахождения периодических решений задач механики.

1. А. Пуанкаре обратил внимание на важность сохраняющих площадь отображений кольца в ограниченной задаче трех тел и во всех задачах механики с двумя степенями свободы. Такие отображения обладают замечательным топологическим свойством.

**Лемма Пуанкаре.** Пусть  $A$  — сохраняющий площадь диффеоморфизм плоского кольца, и пусть  $\gamma$  — простая замкнутая кривая в этом кольце, не гомологичная нулю. Тогда кривые  $\gamma$  и  $A\gamma$  имеют не менее двух общих точек.

Действительно,  $A\gamma$  не лежит ни внутри  $\gamma$ , ни снаружи в силу равенства площадей, ограниченных кривыми  $\gamma$  и  $A\gamma$ .

На лемме Пуанкаре основаны теорема Биркгофа о существовании периодических орбит, «последняя теорема Пуанкаре» и т.д. [1]–[3].

Задачи механики более чем с двумя степенями свободы приводят [4] к глобально каноническим отображениям (см. определение ниже) торического кольца  $\Omega = T^n \times B^n$ ,  $B^n \subset \mathbb{R}^n$ .

В настоящей заметке лемма Пуанкаре и ее следствия обобщаются на системы со многими степенями свободы. Рассуждение с площадями более не проходит: тор  $T^n$  при  $n > 1$  не ограничивает область в  $\Omega$ . Используются другие топологические аргументы — теория Морса.

2. **Глобально канонические отображения.** Рассмотрим торическое кольцо  $\Omega = T^n \times B^n$ , где

$$B^n \subset \mathbb{R}^n = \{p\}, \quad p = (p_1, \dots, p_n); \quad T^n = \{q \bmod 2\pi\}, \quad q = (q_1, \dots, q_n).$$

**Определение.** Отображение  $A : \Omega \rightarrow \Omega$  называется *глобально каноническим*, если оно гомотопно тождественному отображению и

$$\oint_{\gamma} p dq = \oint_{A\gamma} p dq \quad (p dq = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n) \quad (1)$$

для любой замкнутой кривой  $\gamma \subset \Omega$  (возможно, не гомологичной нулю).

Пусть  $x$  — точка кольца  $\Omega$ . Обозначим через  $p(x)$  и  $q(x)$  ее координаты; будем использовать обычные обозначения

$$P(x) = p(Ax), \quad Q(x) = q(Ax). \quad (2)$$

**Лемма.** *Отображение  $A$  является глобально каноническим тогда и только тогда, когда интеграл*

$$A(x) = \int_{x_0}^x (Q - q) dP + (p - P) dq \quad (3)$$

определяет однозначную функцию  $A(x)$ .

Функция  $A(x)$  называется *производящей функцией* отображения  $A$ .

**Доказательство леммы.** Пусть  $\gamma$  — замкнутая кривая в  $\Omega$ ,  $A$  — глобально каноническое отображение. Покажем, что

$$\oint_{\gamma} (Q - q) dP + (p - P) dq = 0. \quad (4)$$

Действительно, с учетом (2) можно переписать (1) в виде

$$\oint_{\gamma} p dq = \oint_{\gamma} P dQ. \quad (5)$$

Следовательно,  $\oint_{\gamma} (Q - q) dP + (p - P) dq = \oint_{\gamma} d(P(Q - q))$ . Последний интеграл есть приращение  $P(Q - q)$  вдоль  $\gamma$ .

Но приращение  $Q - q$  равно нулю, поскольку отображение  $A$  гомотопно тождественному. Поэтому

$$\oint_{\gamma} d(P(Q - q)) = 0. \quad (6)$$



Обратно, равенства (4) и (6) влекут (5) и, следовательно, (1), что и требовалось доказать.

**3. Пересечение торов.** Пусть  $T$  обозначает тор  $p = 0$  в кольце  $\Omega$  и  $AT$  — образ  $T$  при глобально каноническом отображении  $A$ .

**Теорема 1.** Если  $AT$  задается уравнением

$$p = p(q), \quad \left| \frac{\partial p}{\partial q} \right| < \infty, \quad (7)$$

то торы  $T$  и  $AT$  пересекаются не менее чем в  $2^n$  точках (считая кратности).

**Доказательство.** Рассмотрим определенную на  $AT$  функцию

$$f(x) = \oint_{x_0}^x p dq \quad (\text{кривая } x_0x \text{ лежит на } AT). \quad (8)$$

Интеграл (8) не зависит от выбора пути интегрирования, лежащего на торе  $AT$ .

Действительно, для замкнутой кривой  $\gamma \subset AT$  имеем

$$\oint_{\gamma} p dq = \oint_{A^{-1}\gamma} p dq = 0,$$

поскольку отображение  $A^{-1}$  является глобально каноническим,  $A^{-1}\gamma \subset T$  и  $p = 0$  на  $T$ . Итак,  $f(x)$  — дифференцируемая функция на торе  $AT$ . Вследствие неравенств Морса (см., например, [5])  $f(x)$  имеет не менее  $2^n$  критических точек<sup>1</sup>. Далее,

$$df = p dq \quad (9)$$

по определению (8).

Если  $x$  — критическая точка функции  $f$  на  $AT$ , т.е.  $df = 0$ , то из (7) и (9) следует, что  $p(x) = 0$ , т.е.  $x \in T$ , что и требовалось.

---

<sup>1</sup>  $2^n = \sum_{i=0}^n b_i$ ,  $b_i = \text{rank } H_i(T^n, \mathbb{R})$ .

**Следствие.** Утверждение теоремы 1 остается справедливым, если торы  $T$  и  $AT$  задаются уравнениями

$$p = p'(q), \quad p = p''(q) \quad \left( \left| \frac{\partial p'}{\partial q} \right| < \infty, \quad \left| \frac{\partial p''}{\partial q} \right| < \infty \right) \quad (10)$$

соответственно и 2-форма  $dp \wedge dq = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$  тождественно равна нулю на  $T$ .

Действительно, замена канонических переменных  $p, q \rightarrow p - p'(q), q$  превращает (10) в (7), где  $p(q) = p''(q) - p'(q)$ .

**4. Неподвижные точки.** Пусть  $A_0$  — глобально каноническое отображение вида

$$A_0 : p, q \mapsto p, q + \omega(p), \quad (11)$$

где  $\omega : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\omega(p) = (\omega_1(p), \dots, \omega_n(p))$ . Если

$$\det \left| \frac{\partial \omega}{\partial p} \right| \neq 0, \quad (12)$$

то существует точка  $p_0 \in B^n$  такая, что все числа  $\omega_i(p_0)$  соизмеримы с  $2\pi$ :

$$\omega_1(p_0) = \frac{2\pi m_1}{N}, \dots, \omega_n(p_0) = \frac{2\pi m_n}{N}. \quad (13)$$

Очевидно, что все точки тора  $p = p_0$  будут неподвижными точками отображения  $A_0^N$ .

**Теорема 2.** Пусть  $A$  — глобально каноническое отображение, достаточно близкое к  $A_0$ . Тогда отображение  $A^N$  имеет в окрестности тора  $p = p_0$  не менее  $2^n$  неподвижных точек (с учетом кратностей).

**Доказательство.** Из (11), (12) и (13) вытекает, что отображение  $A_0^N$  записывается в виде

$$A_0^N : p, q \mapsto p, q + \alpha(p), \quad \alpha(p_0) = 0, \quad \det \left| \frac{\partial \alpha}{\partial p} \right|_{p_0} \neq 0. \quad (14)$$

Следовательно, близкое отображение  $A^N$  записывается в виде

$$A^N : p, q \mapsto p + \beta_1(p, q), q + \alpha(p) + \beta_2(p, q), \quad \beta_1, \beta_2 \ll 1. \quad (15)$$

Пусть  $T$  обозначает тор, определенный уравнением

$$\alpha(p) + \beta_2(p, q) = 0. \quad (16)$$

Для отображения  $A$ , достаточно близкого к  $A_0$ , из (14) вытекает, что:

- 1) к уравнению (16) применима теорема о неявной функции;
- 2) уравнение (16) задает гладкий тор  $T$ ,  $p = p'(q)$ , причем  $|\partial p' / \partial q| < \infty$ ;
- 3) тор  $AT$  задается уравнениями  $p = p''(q)$ ,  $|\partial p'' / \partial q| < \infty$ ;
- 4) торы  $T$  и  $AT$  близки к тору  $p = p_0$ .

Из леммы §2 следует, что производящая функция  $\mathcal{A}$  отображения  $A^N$  однозначна на кольце  $\Omega$ . Обозначим через  $a(x)$  ее ограничение на тор  $T$ . Получим дифференцируемую функцию на  $T$ , которая, в силу теории Морса, имеет не менее  $2^n$  критических точек. Из (3) вытекает, что

$$d\mathcal{A} = (Q - q) dP + (p - P) dq.$$

В силу (15) и (16)  $Q - q = 0$  на  $T$ ; следовательно,  $da = (p - P) dq$ . Из свойств 2) и 3) вытекает, что  $p - P = 0$  в критических точках функции  $a(x)$ . Вместе с (16) это означает, что  $2^n$  критических точек  $a(x)$  являются неподвижными точками отображения  $A^N$ . Теорема доказана.

**5. Замечание А.** Используя вместо теории Морса теорию Люстерника–Шнирельмана, можно показать, что в условиях теоремы 1 существует  $n + 1$  геометрически различных точек пересечения  $T$  и  $AT$ . Возникает вопрос: *существует ли  $n + 1$  точка пересечения  $T$  и  $AT$  для глобально канонических гомеоморфизмов  $A$ ?*

**Замечание В.** Из теоремы 2 вытекает существование бесконечно-го множества периодических орбит в окрестности общей эллиптической периодической орбиты (обобщение теоремы Биркгофа на случай  $n > 1$ ).

**Замечание С.** Представляется правдоподобным, что теорема 1 остается справедливой и без предположения (7), а лишь при условии, что  $A$  является диффеоморфизмом<sup>2</sup>. Из доказательства этого утверждения следовало бы множество «теорем о возвращении».

Например, рассмотрим плоскую задачу  $n$  тел. Предположим, что начальные значения  $a_i$ ,  $b_i$  длин осей эллипсов Кеплера таковы, что эллипсы не пересекаются. Тогда следовало бы, что для любого  $\tau$  суще-

<sup>2</sup> Если отображение  $A$  не диффеоморфно, то уже при  $n = 1$  существует контрпример.

ствуют начальные фазы<sup>3</sup>  $l_i, g_i$  такие, что спустя время  $\tau$  длины всех осей вновь примут те же самые значения  $a_i, b_i$ .

**Замечание D.** Также представляется правдоподобным, что последняя теорема Пуанкаре может быть обобщена следующим образом:

Пусть  $A : \Omega \rightarrow \Omega$  ( $\Omega = B^n \times T^n$ ;  $B^n = \{p, |p| \leq 1\}$ ;  $T^n = \{q \bmod 2\pi\}$ ) — глобально канонический диффеоморфизм такой, что для любого  $q \in T^n$  сферы  $S^{n-1}(q) = \partial B^n \times q$  и  $AS^{n-1}(q)$  зацеплены в  $\partial B^n \times \mathbb{R}^n$  (здесь  $\mathbb{R}^n$  — универсальное накрытие тора  $T^n$ ). Тогда у отображения  $A$  существует не менее  $2^n$  неподвижных точек (с учетом кратностей) в кольце  $\Omega$ .

## Литература

- [1] Poincaré H. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1912, **33**, 375–407.
- [2] Биркгоф Дж. Д. *Динамические системы*. М.: Гостехиздат, 1941, 320 с.
- [3] Зигель К. Л. *Лекции по небесной механике*. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959, 300 с.
- [4] Арнольд В. И. *Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике*. *УМН*, 1963, **18**(6), 91–192.
- [5] Милнор Дж. *Теория Морса*. М.: Мир, 1965, 185 с.

<sup>3</sup> Фазы — это углы  $l_i, g_i \pmod{2\pi}$ , которые определяют ориентацию эллипсов на плоскости ( $g_i$ ) и положение «планет» на эллипсах ( $l_i$ ).

## О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости

Рассматриваются вихревые стационарные течения несжимаемой невязкой жидкости в ограниченной области  $D$ . Предполагается, что векторы скорости и вихря не всюду коллинеарны. Доказывается, что область течения  $D$  разбивается особыми «поверхностями Бернулли» на конечное число ячеек, в каждой из которых линии тока либо замкнуты, либо обвивают всюду плотно поверхности торов.

### 1. Уравнения движения. Уравнение Эйлера–Ньютона

$$\frac{dv}{dt} = -\text{grad } p, \quad \text{div } v = 0 \quad \left( \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v \right) \quad (1.1)$$

эквивалентно «уравнению Бернулли»

$$\frac{\partial v}{\partial t} = [v, \text{rot } v] - \text{grad } \alpha, \quad \text{div } v = 0 \quad (\alpha = p + \frac{1}{2}v^2). \quad (1.2)$$

Для стационарного течения уравнение Бернулли принимает вид

$$[v, \text{rot } v] = \text{grad } \alpha, \quad \text{div } v = 0. \quad (1.3)$$

Воспользуемся известным тождеством векторного анализа

$$\text{rot}[a, b] = \{b, a\} + a \text{ div } b - b \text{ div } a. \quad (1.4)$$

Здесь  $\{b, a\}$  — скобка Пуассона:

$$\{b, a\}_i = \sum_j \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_j} b_j - \frac{\partial b_i}{\partial x_j} a_j \right).$$

Из формул (1.3) и (1.4) следует, что поле скоростей стационарного течения коммутирует со своим ротором:

$$\{v, \text{rot } v\} = 0. \quad (1.5)$$

Предположим, что область течения  $D$  связна, конечна и ограничена аналитической поверхностью  $\Gamma$ ; граничные условия  $(v, n)_\Gamma = 0$  (касание).

**2. Теорема.** Пусть  $v$  — аналитическое стационарное поле скоростей, не всюду коллинеарное своему ротору:

$$[v, \operatorname{rot} v] \neq 0. \quad (2.1)$$

Тогда почти все линии тока замкнуты либо всюду плотны на двумерных торах: все линии тока иного типа заполняют конечное число аналитических подмногообразий  $D$ .

**Замечание.** Снять условие (2.1) нельзя, так как течения с  $\operatorname{rot} v \equiv \lambda v$  ( $\lambda = \text{const}$ ) могут иметь линии тока с весьма сложной топологией, характерной для задач небесной механики (см. [1], рис. 6). Столь же запутанные линии тока могут быть у стационарных течений вязкой жидкости, близких к стационарным течениям идеальной жидкости. Это было подтверждено М. Эно (М. Hénon) численным экспериментом на машине Института астрофизики в Париже. Отметим еще, что формулы (1.1)–(1.5) и теорема вместе с доказательством легко переносятся на случай течения идеальной жидкости в трехмерном римановом пространстве (ср. [2]).

**3. Доказательство.** Рассмотрим поверхности уровня функции  $\alpha$  (см. (1.3)). Связные компоненты этих поверхностей будем называть поверхностями Бернулли. Линии тока и линии вихря, согласно (1.3), ортогональны  $\operatorname{grad} \alpha$  и потому лежат на поверхностях Бернулли. Покажем, что большинство поверхностей Бернулли — торы или кольца.

Назовем значение  $\alpha_0$  *плохим*, если существует точка  $x$  в области  $D$ , где  $\operatorname{grad} \alpha = 0$  и  $\alpha(x) = \alpha_0$ , или если существует точка  $x$  на границе  $\Gamma$ , в которой  $\operatorname{grad} \alpha$  ортогонален  $\Gamma$  и  $\alpha(x) = \alpha_0$ . Из аналитичности  $\alpha$  и  $\Gamma$  вытекает, что плохих значений  $\alpha$  конечное число. Точки  $x$ , в которых функция  $\alpha$  принимает плохие значения, образуют конечное число аналитических подмногообразий  $D$  размерности не выше 2 (так как функция  $\alpha$  — не константа, см. (2.1)). Эти подмногообразия можно назвать *плохими*, а все остальные поверхности Бернулли — *хорошими*.

Плохие подмногообразия разбивают область  $D$  на ячейки, каждая из которых расслоена на хорошие поверхности Бернулли. Хорошая поверхность Бернулли, не пересекающаяся с границей области  $\Gamma$ , будет замкнутой гладкой двумерной поверхностью, так как на ней  $\operatorname{grad} \alpha \neq 0$ . Оказывается, эта поверхность — тор (см. ниже случай (1) и рис. 1, а).

Хорошая поверхность Бернулли, пересекающаяся с границей области  $\Gamma$ , пересекается с ней трансверсально (так как на границе  $\text{grad } \alpha$  не ортогонален  $\Gamma$ ). Поэтому такая поверхность — гладкая, с краем, состоящим из конечного числа гладких замкнутых кривых, лежащих на  $\Gamma$ . Оказывается, эта поверхность — кольцо (см. ниже случай (2) и рис. 1, б).

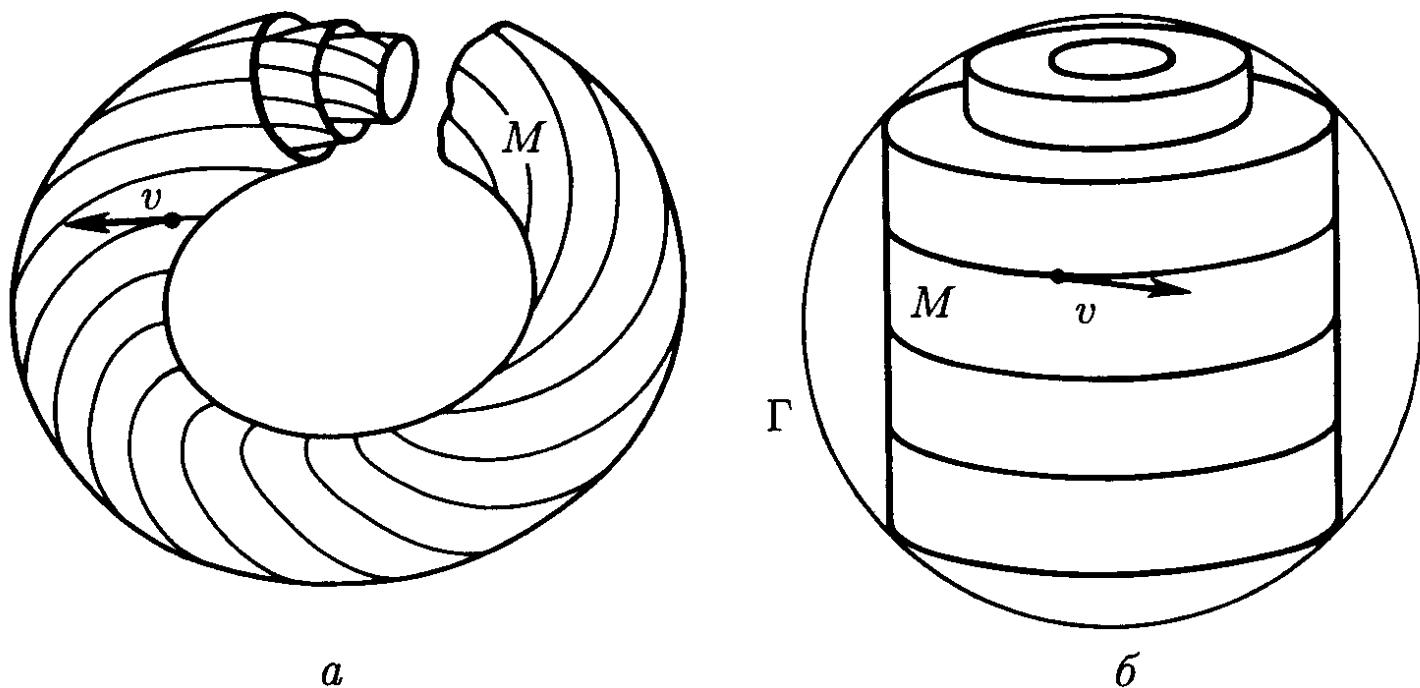


Рис. 1

*Случай (1).* Пусть  $M$  — поверхность Бернулли без края. Построим на  $M$  систему угловых координат  $\alpha, \beta \pmod{2\pi}$  так, чтобы линии тока получили уравнение  $d\alpha/d\beta = \lambda = \text{const}$ . Тем самым будет показано, что  $M$  — тор. Но на торе линии  $d\alpha/d\beta = \lambda$  замкнуты, если  $\lambda$  — рациональное число, и всюду плотны, если  $\lambda$  иррационально. Поэтому теорема в случае (1) будет полностью доказана, если будут построены координаты  $\alpha, \beta$ .

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $y(\tau, x, \sigma)$

$$\frac{dy}{d\tau} = s \text{rot } v(y) + tv, \quad y(0, x, \sigma) = x, \quad \sigma = (s, t).$$

Здесь параметр  $x$  — точка поверхности Бернулли  $M$ , а  $\sigma$  — точка плоскости  $st$ . Так как вектора  $v$  и  $\text{rot } v$  касаются  $M$ , точка  $y$  лежит на той же поверхности Бернулли, что и  $x$ . При фиксированном  $x$  формула

$$p_x(\sigma) = y(1, x, \sigma) \tag{3.1}$$

определяет отображение плоскости  $\sigma$  на поверхность Бернулли  $M$ . Из (1.5) вытекает соотношение коммутативности

$$p_{p_x(\sigma)}(\sigma') = p_x(\sigma + \sigma') = p_{p_x(\sigma')}(\sigma). \quad (3.2)$$

Так как вектора  $v$  и  $\text{rot } v$  на  $M$  линейно независимы, отображение (3.2) есть накрытие (т.е. локально  $\sigma$  можно принять за координаты на  $M$ ). В целом, однако, существует много точек  $\sigma$ , накрывающих  $x$ . Эти точки образуют, согласно (3.2), «решетку» (если  $p_x(\sigma) = p_x(\sigma') = x$ , то и  $p_x(\sigma + \sigma') = x$ ). Из компактности поверхности Бернулли  $M$  следует, что решетка эта имеет две образующие  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (две точки плоскости такие, что любая накрывающая  $x$  точка  $\sigma$  имеет вид  $m\sigma_1 + n\sigma_2$  с целыми  $m, n$ ). Сделаем на плоскости  $\sigma$  линейную замену переменных  $s, t$  на  $\alpha, \beta$  так, чтобы точки  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  получили координаты  $(2\pi, 0)$  и  $(0, 2\pi)$ . Легко видеть, что  $\alpha, \beta \pmod{2\pi}$  — искомые угловые координаты на поверхности Бернулли  $M$ . В случае (1) теорема доказана.

*Случай (2).* Пусть  $M$  — поверхность Бернулли с краем. Край  $M$  состоит из нескольких замкнутых линий тока, лежащих на границе  $\Gamma$  (ибо вектор  $v$  касается и  $M$ , и  $\Gamma$ ). Пусть  $x$  — точка края  $M$ . Тогда в обозначениях (3.1) проходящая через  $x$  замкнутая линия тока будет

$$p_x(0, t) = p_x(0, t + T), \quad \infty < t < +\infty. \quad (3.3)$$

Положим  $z = p_x(s, t)$ , тогда из соотношений (3.2) и (3.3) вытекает

$$p_z(0, T) = p_x(s, t + T) = p_{p_x(0, T)}(s, t) = p_x(s, t) = z, \quad (3.4)$$

т.е. линия тока, проходящая через  $z$ , замкнута. Но всякая точка  $M$  имеет вид  $z = p_x(s, t)$  (ввиду линейной независимости  $v$  и  $\text{rot } v$  и связности  $M$ ). Поэтому формула (3.4) доказывает замкнутость всех линий тока на  $M$ . Одновременно эта формула вводит на  $M$  координаты кольца

$$t \pmod{T}, \quad s, \quad 0 \leq s \leq S \text{ или } S \leq s \leq 0.$$

Доказательство теоремы закончено.

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *УМН*, 1963, **18**(6), 91–192.
- [2] Arnold V. I. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, **261**(1), 17–20.



## Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости

В настоящей заметке приводится доказательство теоремы устойчивости, сформулированной в [1].

Пусть  $D$  — ограниченная кривыми  $\Gamma_i$  область на плоскости  $x, y$ . Функцией тока течения идеальной жидкости в  $D$  называется решение  $u(x, y; t)$  «уравнения вихря»  $\frac{\partial \Delta u}{\partial t} = [\nabla u, \nabla \Delta u]$ , где  $[u, v] = u_1 v_2 - u_2 v_1$ , с граничными условиями  $u|_{\Gamma_i} = c_i(t)$ ,<sup>1</sup>  $c_1 \equiv 0$ ,  $\frac{d}{dt} \oint_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ .

Пусть  $\psi(x, y)$  — функция тока стационарного течения:  $[\nabla \psi, \nabla \Delta \psi] = 0$ , и, следовательно, векторы  $\nabla \psi$  и  $\nabla \Delta \psi$  коллинеарны. Предположим еще, что  $\psi = \Psi(\Delta \psi)$ ; для этого достаточно, чтобы  $\nabla \Delta \psi \neq 0$ , но  $\psi = \Psi(\Delta \psi)$  и в некоторых других случаях (см. пример 2 в [1]). Пусть  $u = \psi + \varphi(x, y; t)$  — функция тока другого течения, причем соотношения  $\oint_{\Gamma_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0$  выполнены при  $t = 0$ ; тогда по закону сохранения циркуляций эти соотношения выполнены при всех  $t$ . Предположим, наконец, что в области  $D$

$$c \leq \frac{\nabla \psi}{\nabla \Delta \psi} \leq C, \quad \text{где } 0 < c \leq C < \infty. \quad (1)$$

**Теорема 1.** *Возмущение  $\varphi(x, y; t)$  в любой момент времени оценивается через начальное возмущение  $\varphi_0 = \varphi(x, y; 0)$  по формуле*

$$\iint_D (\nabla \varphi)^2 + c(\Delta \varphi)^2 dx dy \leq \iint_D (\nabla \varphi_0)^2 + C(\Delta \varphi_0)^2 dx dy. \quad (2)$$

**Доказательство.** Положим  $\Phi(\xi) = \int_{\xi}^{\xi} \Psi(\eta) d\eta$ . Тогда  $\Phi'' = \frac{\nabla \psi}{\nabla \Delta \psi}$ , поэтому при  $\min \Delta \psi \leq \xi \leq \max \Delta \psi$  имеем

$$c \leq \Phi''(\xi) \leq C. \quad (3)$$

<sup>1</sup> В граничные условия входит лишь независимость  $c_i$  от  $x, y$ , а не значения  $c_i(t)$ .

Доопределим  $\Phi(\xi)$  на всю ось  $\xi$  с сохранением этого неравенства. В дальнейшем  $\Phi$  означает именно продолженную так функцию. образуем функционал

$$H_2(\varphi) = \iint_D \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + [\Phi(\Delta\psi + \Delta\varphi) - \Phi(\Delta\psi) - \Phi'(\Delta\psi)\Delta\varphi] dx dy. \quad (4)$$

**Лемма.** Функционал  $H_2$  сохраняется:

$$H_2(\varphi(x, y; t)) \equiv H_2(\varphi(x, y; 0)). \quad (5)$$

**Доказательство.** Рассмотрим функционал

$$H(u) = \iint_D \frac{1}{2}(\nabla u)^2 + \Phi(\Delta u) dx dy.$$

Этот функционал сохраняется по законам сохранения энергии и вихря:  $H(u(x, y; t)) \equiv H(u(x, y; 0))$ . Поэтому разность  $\hat{H}(\varphi) = H(\psi + \varphi) - H(\psi)$  — также сохраняющийся функционал:

$$\hat{H}(\varphi(x, y; t)) \equiv \hat{H}(\varphi(x, y; 0)). \quad (6)$$

Представим  $\hat{H}(\varphi)$  в виде суммы двух слагаемых  $\hat{H}(\varphi) = H_1(\varphi) + H_2(\varphi)$ , где

$$H_1(\varphi) = \iint_D \nabla\varphi\nabla\psi + \Phi'(\Delta\psi)\Delta\varphi dx dy,$$

$$H_2(\varphi) = \iint_D \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + [\Phi(\Delta\psi + \Delta\varphi) - \Phi(\Delta\psi) - \Phi'(\Delta\psi)\Delta\varphi] dx dy.$$

Первое слагаемое равно нулю (это теорема I из [1]). Действительно, интегрируя по частям, находим

$$H_1(\varphi) = \iint_D (-\psi\Delta\varphi + \Phi'\Delta\varphi) dx dy + \oint_{\Gamma} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds.$$

Но  $\Phi' = \Psi$ ,  $\psi|_{\Gamma_i}$  постоянны и  $\oint_{\Gamma_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = 0$ . Итак,  $H_1(\varphi) \equiv 0$ . Значит,  $H(\varphi) = H_2(\varphi)$  и согласно (6) функционал  $H_2$  сохраняется. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что из неравенств (3) следует при любом  $h$ :

$$c \frac{h^2}{2} \leq \Phi(\xi + h) - \Phi(\xi) - \Phi'(\xi)h \leq C \frac{h^2}{2}.$$

Значит,

$$H_2(\varphi(t)) \geq \iint_D \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + c \frac{(\Delta\varphi)^2}{2} dx dy, \quad (7)$$

$$H_2(\varphi(0)) \leq \iint_D \frac{(\nabla\varphi_0)^2}{2} + C \frac{(\Delta\varphi_0)^2}{2} dx dy. \quad (8)$$

Сопоставляя (5), (7), (8), получаем (2), что и требовалось доказать. Оценка (2) означает устойчивость стационарных течений с  $\frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} > 0$ .

Пусть теперь стационарное течение таково, что  $c \leq -\frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \leq C$ ,  $0 < c \leq C < \infty$ .

**Теорема 2.** Возмущение  $\varphi(x, y; t)$  оценивается через  $\varphi(x, y; 0)$  так:

$$\iint_D c(\Delta\varphi)^2 - (\nabla\varphi)^2 dx dy \leq \iint_D C(\Delta\varphi_0)^2 - (\nabla\varphi_0)^2 dx dy. \quad (9)$$

**Доказательство.** Пусть опять  $\Phi(\xi) = \int^\xi \Psi(\eta) d\eta$  продолжена на всю ось  $\xi$  с сохранением неравенств  $c < -\Phi'' < C$ . Тогда вместо (7), (8) получаем

$$\left. \begin{aligned} -H_2(\varphi(t)) &\geq \iint_D c \frac{(\Delta\varphi)^2}{2} - \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} dx dy, \\ -H_2(\varphi(0)) &\leq \iint_D C \frac{(\Delta\varphi_0)^2}{2} - \frac{(\nabla\varphi_0)^2}{2} dx dy, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

что вместе с (5) и дает (9). Теорема доказана.

Если форма  $\iint_D c(\Delta\varphi)^2 - (\nabla\varphi)^2 dx dy$  положительно определена, то при некотором  $\theta > 0$  будет  $\iint_D c(\Delta\varphi)^2 - (\nabla\varphi)^2 dx dy \geq \theta c \iint_D (\Delta\varphi)^2 dx dy$ .

Поэтому из (9) вытекает неравенство

$$\iint_D (\Delta\varphi)^2 dx dy \leq \frac{C}{c\theta} \iint_D (\Delta\varphi_0)^2 dx dy,$$

выражающее устойчивость стационарного течения  $\psi$ .

**Замечание.** В формулировке теоремы II в [1] допущена неточность. Там утверждалось, что для устойчивости достаточна *знакоопределенность* формы

$$\iint_D (\nabla\varphi)^2 + \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} (\Delta\varphi)^2 dx dy \quad (11)$$

относительно  $\nabla\varphi$  (где  $\varphi|_{\Gamma_i} = c_i$ ,  $\oint_{\Gamma_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = 0$ ). В действительности

устойчивость доказана в случае *положительной определенности* формы (11) (теорема 1 выше) и в случае *отрицательной определенности* формы

$$\iint_D (\nabla\varphi)^2 + \left( \max \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \right) (\Delta\varphi)^2 dx dy$$

(теорема 2 выше). В конкретных примерах (§6 в [1]) теорема II использовалась именно в таком виде. Из отрицательной определенности формы (11) вытекает, впрочем, устойчивость в линейном приближении.

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости. *ДАН СССР*, 1965, **162**(5), 975–978.

## Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем

*Классическая динамическая система* состоит из гладкого многообразия  $M$  и однопараметрической группы  $g^t$  его диффеоморфизмов  $g^t : M \rightarrow M$ .

Дифференциальные уравнения классической механики, например, в задаче трех тел, доставляют немало примеров систем  $(M, g^t)$ . Эти системы, впрочем, принадлежат более узкому классу *гамильтоновых систем*  $(M, g^t, \omega^1)$ ; многообразие  $M = M^{2n}$  четномерно, на нем задана каноническая структура, т.е. фиксирована некоторая 1-форма  $\omega^1$  (заданная с точностью до полного дифференциала однозначной функции), имеющая невырожденную производную  $d\omega^1 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$  в надлежащих локальных координатах  $p, q$  на  $M$ ; диффеоморфизмы  $g^t$  канонические: для любой замкнутой кривой  $\gamma$

$$\oint_{\gamma} \omega^1 = \oint_{g^t \gamma} \omega^1.$$

Промежуточное положение между общими и гамильтоновыми системами занимают *системы с инвариантной мерой*  $(M, g^t, \tau)$ : на  $M$  фиксируется невырожденная дифференциальная форма  $\tau$  максимальной размерности, и  $g^t$  сохраняет эту форму.

Теория динамических систем ставит своей задачей изучение поведения типичной орбиты типичной системы  $(M, g^t)$ ,  $(M, g^t, \tau)$  или  $(M, g^t, \omega^1)$ . Все три теории совершенно различны. Так, для общих систем одна из типичных возможностей — асимптотически устойчивые движения, притягивающие соседей. В системах же с инвариантной мерой асимптотически устойчивые движения невозможны. Менее известны дополнительные особые свойства гамильтоновых систем; они проявляются, например, в консервативном противостоянии эволюции.

В настоящее время мы не располагаем сколько-нибудь удовлетворительной общей теорией ни в одном из трех случаев. Хорошо изучены

лишь некоторые специальные системы. Можно пытаться разобраться в ситуации, переводя специальные системы в общие посредством малого возмущения.

## 1. Теория возмущений

Пусть  $M = T^k \times \mathbb{R}^l$  — прямое произведение  $k$ -мерного тора  $T^k$  на евклидово пространство  $\mathbb{R}^l$ ,  $\varphi = \varphi_1, \dots, \varphi_k \pmod{2\pi}$  — угловые координаты на  $T^k$ ,  $I = I_1, \dots, I_l$  — декартовы координаты  $\mathbb{R}^l$ . Рассмотрим в качестве «невозмущенной системы» систему, определенную дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(I), \quad \frac{dI}{dt} = 0, \quad \omega = \omega_1, \dots, \omega_k \in \mathbb{R}^k. \quad (1)$$

Очевидно, каждый тор  $I = \text{const}$  инвариантен. Если частоты на нем несоизмеримы,

$$n_1\omega_1 + \dots + n_k\omega_k \neq 0 \quad \text{для целых } n_i, \quad n_1^2 + \dots + n_k^2 \neq 0,$$

то орбита  $\varphi(t)$  всюду плотна на торе и движение называется квазипериодическим с  $k$  частотами. Если частоты зависимы, то замыкание орбиты есть тор с числом измерений меньше  $k$  (резонанс).

Для исследования «возмущенной системы»

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi), \quad \frac{dI}{dt} = \varepsilon F(I, \varphi) \quad (2)$$

классическая (т.е. нестрогая) теория возмущений предписывает составить среднее значение  $\bar{F}(I) = (2\pi)^{-k} \oint_{T^k} F(I, \varphi) d\varphi$  и «эволюционное уравнение»

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{F}(J). \quad (3)$$

Считается, что для  $\varepsilon \ll 1$  различие между решениями  $I(t)$  и  $J(t)$  систем (2) и (3) с одинаковыми начальными условиями невелико, по крайней мере на большом промежутке времени  $0 < t < 1/\varepsilon$ .

**Проблема 1.** Как связаны  $I(t)$  и  $J(t)$ ,  $0 < t < 1/\varepsilon$ ?

Кроме особых случаев, когда система (3) имеет асимптотически устойчивое движение, известно лишь очень немногое:

**Теорема 1.** Для  $k = 1$ ,  $\omega \neq 0$  имеем  $|I(t) - J(t)| < C\varepsilon$  [1]. Для  $k = 2$ ,  $d(\omega_1/\omega_2)/dt \neq 0$  имеем  $|I(t) - J(t)| < C\sqrt{\varepsilon} \log^2 1/\varepsilon$  [2].

Случай  $k > 2$  совсем плохо изучен. Известно лишь, что для систем с инвариантной мерой  $dI d\varphi$  при малом  $\varepsilon$  для большинства начальных условий  $|I(t) - J(t)|$  мал (см. работы Д. В. Аносова [3] и Т. Касуга [4]).

Пусть теперь система (2) гамильтонова:  $k = l$ ,  $\omega^1 = I d\varphi$ .

## 2. Возмущения гамильтоновых систем

Гамильтонова система (2) имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I}, \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi). \quad (4)$$

Поэтому усреднение дает нуль:

$$-\bar{F}(I) = (2\pi)^{-k} \oint_{T^k} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} d\varphi = 0.$$

Следовательно, эволюционная система нулевая и в первом приближении эволюции нет. Более того, справедлива

**Теорема 2** (А. Н. Колмогоров [5]). Пусть  $H_0, H_1$  аналитичны при  $I \in G$ ,  $|\text{Im}\varphi| < \rho$  и в  $G$

$$\det \left( \frac{\partial \omega}{\partial I} \right) = \det \left( \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right) \neq 0.$$

Тогда большая часть  $G \times T^k$  заполнена при достаточно малых  $\varepsilon$  инвариантными  $k$ -мерными торами системы (4).

Теорема 2 обобщается на некоторые важные для небесной механики случаи, когда  $\det \partial^2 H_0 / \partial I^2 = 0$ . Таким путем, например, найдены квазипериодические движения в задаче многих тел [6]. Предположение аналитичности также можно ослабить — достаточно существования нескольких сот производных (Ю. Мозер [7]).

Множество инвариантных торов, о которых идет речь в теореме 2, имеет всюду плотное открытое дополнение.

**Проблема 2.** Как ведут себя орбиты из этого дополнительного множества? В частности, верно ли, что для них нет эволюции в  $s$ -м приближении, т.е.  $|I(t) - J(t)| \ll 1$ ,  $0 < t < (1/\varepsilon)^s$ ?

Недавняя работа о «формальной устойчивости» (Глимм [8]), видимо, оставляет этот важный вопрос открытым. В старой астрономической литературе он считался решенным положительно, однако математически строгое доказательство мне неизвестно, исключая лишь случай двух степеней свободы, когда об устойчивости можно судить по наличию инвариантных торов.

### 3. Инвариантные торы и устойчивость

В случае  $k = 2$  инвариантные торы теоремы 2 делят множество уровня энергии  $H = \text{const}$  системы (4). Более того, если отношение частот меняется вдоль  $H = \text{const}$ , т.е.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} & \frac{\partial H_0}{\partial I} \\ \frac{\partial H_0}{\partial I} & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

то таких торов много на каждом уровне энергии. Эти торы запирают каждую орбиту в узком слое, ограниченном ими, поэтому движение устойчиво для всех начальных условий в том смысле, что

$$|I(t) - J(t)| < C(\varepsilon), \quad -\infty < t < +\infty, \quad C(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

При  $k \geq 3$  торы  $T^k$  не делят  $(2k - 1)$ -мерный уровень  $H$ .

**Гипотеза.** «Общим случаем» для гамильтоновой системы (4) с  $k \geq 3$  является такой, когда для любой пары окрестностей торов  $I = I'$ ,  $I = I''$  с общим  $H_0(I') = H_0(I'')$  найдется при достаточно малом  $\varepsilon$  орбита, пересекающая обе окрестности.

Что такие орбиты, соединяющие окрестности далеких торов, вообще возможны, показывает пример [9] системы, удовлетворяющей всем условиям теоремы об инвариантных торах и потому устойчивой для большинства начальных условий, но неустойчивой для «резонансных» начальных условий. Механизм «переходных цепочек», действующий в этом примере, носит, вероятно, весьма общий характер.

Для построения неустойчивой орбиты в [9] используется семейство инвариантных торов однократного резонанса (размерности  $n - 1$ ). Первые общие теоремы о существовании таких торов получены в самое



последнее время В. К. Мельниковым, Ю. Мозером, А. М. Леонтовичем, Г. А. Красинским. Чтобы сделать следующий шаг к доказательству высказанной гипотезы, нужно разобраться в переходе между однократным и двукратным резонансом (резонанс порядка 3 и выше несуществен по топологическим соображениям). Модельной задачей здесь может служить построение переходной цепочки, соединяющей две периодические орбиты и положение равновесия в системе на  $T^2 \times \mathbb{R}^2$

$$H = \frac{I_1^2 \pm I_2^2}{2} + U(\varphi_1, \varphi_2).$$

При построении этой цепочки полезна доказанная Е. В. Гайдуковым [18] элементарная

**Теорема.** *Через каждую точку риманова тора  $T^2$  проходит геодезическая, асимптотическая к замкнутой геодезической, гомотопной данной.*

#### 4. Геометрическая теорема Пуанкаре

Другим далеко не завершенным отделом теории многомерных гамильтоновых систем является теория периодических орбит. Кажутся правдоподобными, например, такие обобщения «последней теоремы» Пуанкаре.

А. Пусть  $A : q \mapsto q + f(q)$  — диффеоморфизм тора  $T^2 = \{q_1, q_2 \bmod 2\pi\}$ , сохраняющий меру  $dq_1 \wedge dq_2$  и центр тяжести ( $\oint f(q) dq \wedge dq = 0$ ). Тогда  $A$  имеет по крайней мере 4 неподвижные точки, если считать с кратностями, и по крайней мере 3 геометрически различные неподвижные точки.

Б. Пусть  $\Omega = T^k \times B^k$ ,  $T^k = \{q \bmod 2\pi\}$ ,  $B^k = \{p \in \mathbb{R}^k, |p| \leq 1\}$  — торовое кольцо с канонической структурой  $\omega^1 = p dq$  и  $A : \Omega \rightarrow \Omega$  — канонический диффеоморфизм, гомотопный тождественному и такой, что каждая сфера  $q \times \partial B^k$  зацеплена со своим образом на накрывающей края  $T^k \times \partial B^k$ . Тогда  $A$  имеет по крайней мере  $2^k$  неподвижных точек, если считать с кратностями, в том числе  $k+1$  геометрически различных.

Доказательства основаны на теории Морса–Люстерника–Шнирельмана; их удается провести лишь при дополнительных ограничениях (см. [10]; в задаче А ограничение  $\frac{\partial f}{\partial q} \xi \neq -2\xi$ ).

## 5. Эргодические свойства

**Проблема.** *Выяснить эргодические свойства движений в области, дополнительной к инвариантным торам системы (4). В частности, положительна ли энтропия этой системы?*

До сих пор доказана «типичность» только двух типов поведения динамических систем с инвариантной мерой: квазипериодических, рассмотренных выше, и неустойчивых, которым посвящен доклад Д. В. Аносова на этом конгрессе. В то же время известен ряд моделей промежуточного типа: орициклические потоки (см. Грин [11]), нильпотоки (Грин, Ауслендер, Хан [12]), системы с квазидискретным спектром (Абрамов [13]), переключивания отрезков [14] и т.д. Для исследования этих «систем с медленным перемешиванием» создан специальный аппарат — метод периодических аппроксимаций (А. Б. Каток и А. М. Стёпин [14]),  $2^n$ -энтропия (А. Г. Кушниренко [15]) и т.п. Однако неизвестно, как ведут себя подобные системы при возмущении и не распадаются ли они на компоненты с дискретным спектром и компоненты с положительной энтропией.

Было бы очень интересно, например, исследовать возмущения орициклических потоков, отделяющих в алгебраическом случае системы с дискретным спектром от систем с экспоненциальным разбеганием: это позволило бы проследить переход от системы с инвариантными торами к  $K$ -системе.

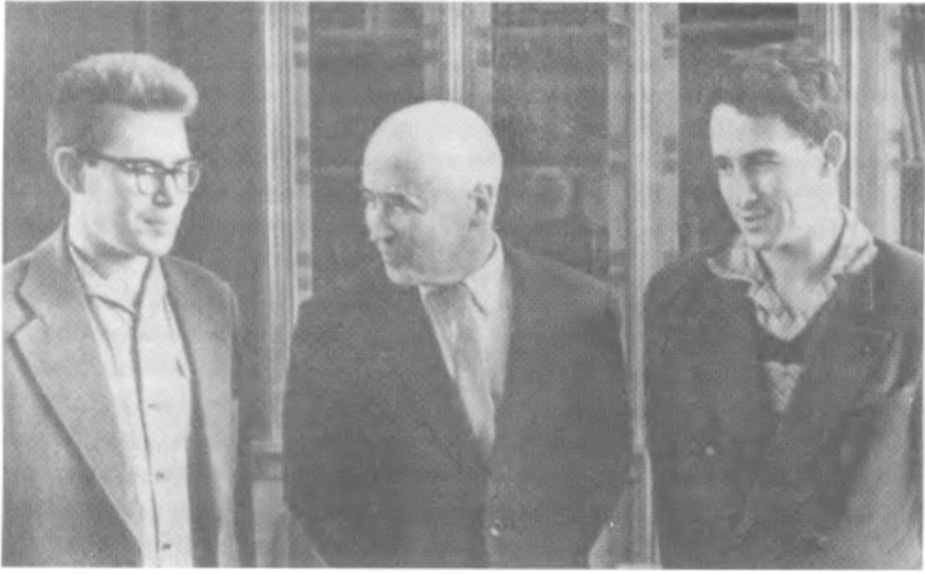
К этому же кругу вопросов примыкает вопрос о непрерывности энтропии классической динамической системы как функции системы; доказана лишь ограниченность энтропии диффеоморфизма компактного многообразия (А. Г. Кушниренко [16]).

Особый интерес представляет изучение эргодических свойств систем (4) в случае, когда  $\varepsilon$  не мало. В этом случае был бы полезен численный эксперимент, а он показывает, что мера инвариантных торов с ростом  $\varepsilon$  быстро убывает (см., например, работу Эно и Хейлса [17]).

## Литература

- [1] Крускал М. Адиабатические инварианты. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
- [2] Арнольд В. И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы. *ДАН СССР*, 1965, **161**(1), 9–12.

- [3] Аносов Д. В. Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1960, **24**(5), 721–742.
- [4] Kasuga T. On the adiabatic theorem for the Hamiltonian system of differential equations in the classical mechanics. I–III. *Proc. Japan Acad.*, 1961, **37**(7), 366–371, 372–376, 377–382.
- [5] Колмогоров А. Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. *ДАН СССР*, 1954, **98**(4), 527–530.
- [6] Арнольд В. И. О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем. *ДАН СССР*, 1962, **145**(3), 487–490.  
Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. *УМН*, 1963, **18**(5), 13–40.  
Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *УМН*, 1963, **18**(6), 91–192.
- [7] Moser J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II*, 1962, **1**, 1–20.
- [8] Glimm J. G. Formal stability of Hamiltonian systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1964, **17**(4), 509–526.
- [9] Арнольд В. И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы. *ДАН СССР*, 1964, **156**(1), 9–12.
- [10] Arnold V. I. Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, **261**(19), 3719–3722.
- [11] Green L. W. The Pythagorean group and ergodic flows. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1966, **72**, 44–49.
- [12] Auslander L., Hahn F., Green L. Flows on homogeneous spaces. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1963, 107 p. (Ann. of Math. Studies, 53)
- [13] Абрамов Л. М. Метрические автоморфизмы с квазидискретным спектром. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1962, **26**(4), 513–530.
- [14] Каток А. Б., Стёпин А. М. О спектрах эргодических динамических систем. В кн.: Тезисы кратких научных сообщений. Секц. 6: Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1966, с. 29.
- [15] Кушниренко А. Г. О метрических инвариантах типа энтропии. В кн.: Тезисы кратких научных сообщений. Секц. 6: Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1966, с. 31–32.
- [16] Кушниренко А. Г. Оценка сверху энтропии классической динамической системы. *ДАН СССР*, 1965, **161**(1), 37–38.
- [17] Hénon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments. *Astronom. J.*, 1964, **69**, 73–79.
- [18] Гайдуков Е. В. Асимптотические геодезические на римановом многообразии, негомеоморфном сфере. *ДАН СССР*, 1966, **169**(5), 999–1001.



## О характеристическом классе, входящем в условия квантования

Недавно В. П. Маслов дал математически строгую трактовку многомерных асимптотических методов «квазиклассического» типа в целом, т.е. при любом числе сопряженных точек [1], [2]. Оказалось, что в асимптотических формулах участвуют некоторые целые числа, отражающие гомологические свойства кривых на поверхностях фазового пространства и тесно связанные с индексами Морса соответствующих вариационных задач. В частности, Маслов определил одномерный класс целочисленных когомологий, значения которого на базисных циклах входят в так называемые «условия квантования».

В настоящей заметке даются новые формулы для вычисления этого класса когомологий. Характеристическим этот класс является в категории вещественных векторных пучков, комплексификация которых тривиальна и тривиализована, а также в некоторых более широких категориях.

### 1. Обозначения

**1.1. Фазовое пространство.** Фазовым пространством назовем  $2n$ -мерное вещественное арифметическое пространство

$$\mathbb{R}^{2n} = \{x\}, \quad x = q, p; \quad q = q_1, \dots, q_n; \quad p = p_1, \dots, p_n.$$

В  $\mathbb{R}^{2n}$  будут рассматриваться следующие три структуры:

1. *Евклидова структура*, заданная скалярным квадратом

$$(x, x) = p^2 + q^2.$$

2. *Комплексная структура*, заданная оператором

$$I : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad I(p, q) = (-q, p); \quad z = p + iq, \quad \mathbb{C}^n = \{z\}.$$

3. *Симплектическая структура*, заданная кососкалярным произведением

$$[x, y] = (Ix, y) = -[y, x]. \quad (1)$$

Группы автоморфизмов  $\mathbb{R}^{2n}$ , сохраняющих эти структуры, называются соответственно *ортогональной группой*  $O(2n)$ , *комплексной линейной группой*  $GL(n, \mathbb{C})$  и *симплектической группой*  $Sp(n)$ . Из формулы (1) вытекает

**Лемма 1.1.** *Автоморфизм, сохраняющий две из трех структур, сохраняет и третью, так что*

$$O(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap Sp(n) = Sp(n) \cap O(2n) = U(n).$$

Автоморфизмы, сохраняющие две (и, значит, все три) структуры, образуют *унитарную группу*  $U(n)$ . Определитель  $\det$  унитарного автоморфизма есть комплексное число с модулем 1. Таким образом, возникает отображение  $U(n)$  на окружность,

$$SU(n) \longrightarrow U(n) \xrightarrow{\det} S^1, \quad (2)$$

которое, очевидно, является расслоением (слой — группа  $SU(n)$  унитарных автоморфизмов с определителем 1).

**1.2. Лагранжев грассманиан  $\Lambda(n)$ .** Рассмотрим  $n$ -мерную плоскость  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ . Она называется *лагранжевой*, если кососкалярное произведение любых двух векторов из  $\mathbb{R}^n$  равно нулю. Например, плоскости  $p = 0$  и  $q = 0$  лагранжевы<sup>1</sup>.

Многообразие всех (неориентированных) лагранжевых подпространств  $\mathbb{R}^{2n}$  назовем *лагранжевым грассманианом*  $\Lambda(n)$ .

С комплексной точки зрения лагранжевы плоскости можно назвать вещественно подобными, так как справедлива

**Лемма 1.2.** *Унитарная группа  $U(n)$  действует на  $\Lambda(n)$  транзитивно, со стационарной подгруппой  $O(n)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\lambda$  — лагранжева плоскость. Ввиду (1) это значит, что плоскость  $I\lambda$  ортогональна  $\lambda$ . Пусть  $\lambda' \in \Lambda(n)$  и  $\xi, \xi'$  — ортонормальные реперы в  $\lambda, \lambda'$ . Тогда автоморфизм  $\mathbb{R}(2n)$ , переводящий  $\xi$  в  $\xi'$  и  $I\xi$  в  $I\xi'$ , унитарен.

<sup>1</sup> Название происходит от «скобок Лагранжа» в классической механике.

Из доказанной леммы вытекает, что  $\Lambda(n)$  есть многообразие,  $\Lambda(n) = U(n)/O(n)$ ; итак, построено расслоение

$$O(n) \rightarrow U(n) \rightarrow \Lambda(n). \quad (3)$$

**1.3. Отображение  $\text{Det}^2 : \Lambda(n) \rightarrow S^1$ .** Определитель ортогонального автоморфизма  $A \in O(n) \subset U(n)$  равен  $\pm 1$ . Поэтому квадрат определителя унитарного автоморфизма, переводящего плоскость  $p = 0$  в лагранжеву плоскость  $\lambda$ , зависит только от  $\lambda$ . Тем самым построено отображение

$$\text{Det}^2 : \Lambda(n) \rightarrow S^1.$$

Обозначим через  $S\Lambda(n)$  множество лагранжевых плоскостей  $\lambda \in \Lambda(n)$  с  $\text{Det}^2 \lambda = 1$ . На этом множестве транзитивно действует группа  $SU(n)$  унитарных унимодулярных автоморфизмов, и стационарная подгруппа любой точки изоморфна группе вращений  $SO(n)$ . Поэтому  $S\Lambda(n) = SU(n)/SO(n)$  есть многообразие.

Таким образом, мы получили диаграмму из шести расслоений (очевидным образом коммутативную):

$$\begin{array}{ccccccc} SO(n) & \longrightarrow & O(n) & \xrightarrow{\det} & S^0 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ SU(n) & \longrightarrow & U(n) & \xrightarrow{\det} & S^1 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow z^2 & & \\ S\Lambda(n) & \longrightarrow & \Lambda(n) & \xrightarrow{\text{Det}^2} & S^1, & & \end{array}$$

где  $z^2$  — отображение окружности ( $z = e^{i\varphi} \mapsto e^{2i\varphi} = z^2$ ).

**1.4. Класс когомологий  $\alpha \in H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z})$ .**

**Лемма 1.4.1.** *Фундаментальная группа  $\Lambda(n)$  — свободная циклическая:*

$$\pi_1(\Lambda(n)) = \mathbb{Z},$$

*и ее образующая переходит в образующую  $\pi_1(S^1)$  при отображении, индуцированном  $\text{Det}^2$ .*

Доказательство получается из точных гомотопических последовательностей левого столбца и нижней строки диаграммы из п. 1.3.

**Следствие 1.4.2.** Группы одномерных гомологий и когомологий  $\Lambda(n)$  — свободные циклические:

$$H_1(\Lambda(n), \mathbb{Z}) \simeq H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(\Lambda(n)) \simeq \mathbb{Z}.$$

За образующую  $\alpha$  группы когомологий  $H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z})$  примем число оборотов  $\text{Det}^2$ , т.е. коцикл, значение которого на замкнутой кривой  $\gamma : S^1 \rightarrow \Lambda(n)$  равно степени сквозного отображения

$$S^1 \xrightarrow{\gamma} \Lambda(n) \xrightarrow{\text{Det}^2} S^1.$$

(Здесь  $S^1$  — окружность  $e^{i\varphi}$ , ориентированная в сторону возрастания  $\varphi$ .)

**Пример 1.4.3.** Пусть  $\lambda$  — лагранжева плоскость:  $\lambda \in \Lambda(n)$ . Рассмотрим автоморфизмы  $e^{i\varphi}E \in U(n)$ . Лагранжевы плоскости  $e^{i\varphi}\lambda$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) образуют замкнутую кривую  $\gamma : S^1 \rightarrow \Lambda(n)$ , так как  $e^{i\pi}E = -E$ .

Значение класса  $\alpha$  на кривой  $\gamma$  равно  $n$ .

Действительно,  $\det(e^{i\varphi}E) = e^{in\varphi}$ , поэтому  $\text{Det}^2 e^{i\varphi}\lambda = e^{2in\varphi} \text{Det}^2 \lambda$ .

**1.5. Лагранжевы многообразия.** Пусть  $M$  есть  $n$ -мерное подмногообразие фазового пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ . Многообразие  $M$  называется лагранжевым, если его касательная плоскость в каждой точке лагранжева. Например, в случае  $n = 1$  всякая кривая  $M$  на фазовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  лагранжева.

Пусть  $M$  — лагранжево многообразие. Рассмотрим тангенциальное отображение

$$\tau : M \rightarrow \Lambda(n),$$

переводящее каждую точку  $x \in M$  в подпространство  $\tau x \in \Lambda(n)$ , параллельное касательной плоскости к  $M$  в  $x$ .

Введенный выше класс когомологий  $\alpha \in H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z})$  индуцирует на  $M$  класс одномерных когомологий

$$\alpha^* = \tau^* \alpha \in H^1(M, \mathbb{Z}).$$

Значение  $\alpha^*$  на ориентированной замкнутой кривой  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  определяется как число оборотов квадрата определителя касательной плоскости, т.е. как степень сквозного отображения

$$S^1 \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{\tau} \Lambda(n) \xrightarrow{\text{Det}^2} S^1.$$



Целью настоящей заметки является доказательство следующего утверждения.

**Теорема 1.5.** *Класс когомологий  $\alpha^* \in H^1(M, \mathbb{Z})$  совпадает с «индексом замкнутых кривых на лагранжевом многообразии  $M$ »  $\text{ind}$ , введенным Масловым в [1].*

## 2. Доказательство теоремы 1.5

Индекс Маслова определяется им как индекс пересечения с некоторым двусторонним  $(n - 1)$ -мерным циклом на  $M^n$  — циклом особенностей.

**2.1. Цикл особенностей.** Пусть  $M$  есть  $n$ -мерное лагранжево многообразие. Рассмотрим проекцию  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  многообразия  $M$  на плоскость  $p = 0$ :  $f(p, q) = q$ . Множество  $\Sigma$  точек  $M$ , где ранг дифференциала  $f$  меньше  $n$ , называется *особенностью* отображения  $f$ . Относительно особенности  $\Sigma$  Маслов формулирует следующие утверждения 1–5 (доказательства даны ниже, в §§ 3 и 4).

**Теорема 2.1.** *Сколько угодно малым унитарным поворотом многообразия  $M$  можно привести в «общее положение» относительно проектирования  $f$ , так что будут справедливы следующие утверждения:*

**Утверждение 1.** *Особенность  $\Sigma$  состоит из открытого  $(n - 1)$ -мерного многообразия  $\Sigma^1$ , где  $df$  имеет ранг  $n - 1$ , и границы  $(\Sigma - \Sigma^1)$  размерности строго меньше  $n - 2$ , так что  $\Sigma$  определяет  $(n - 1)$ -мерный (неориентированный) цикл в  $M$ .*

**Утверждение 2.** *Этот цикл  $\Sigma$  лежит в  $M$  двусторонне.*

Выбор положительной стороны  $\Sigma$  можно провести следующим образом.

**Утверждение 3.** *В окрестности точки  $x \in \Sigma^1$  лагранжево многообразие  $M$  задается  $n$  уравнениями вида*

$$q_k = q_k(p_k, q_{\hat{k}}), \quad p_{\hat{k}} = p_{\hat{k}}(p_k, q_{\hat{k}}),$$

где  $\hat{k} = 1, 2, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n$  при некотором  $k, 1 \leq k \leq n$ .

Очевидно, в окрестности такой точки  $x$  особенность  $\Sigma^1$  задается уравнением  $\frac{\partial q_k}{\partial p_k} = 0$ .

**Утверждение 4.** При переходе через  $\Sigma^1$  величина  $\frac{\partial q_k}{\partial p_k}$  меняет знак.

Оказывается, за положительную сторону  $\Sigma^1$  можно принять ту, где  $\frac{\partial q_1}{\partial p_1} > 0$ .

**Утверждение 5.** Такое определение положительной стороны корректно, т.е. не зависит от того, какой из координатных систем  $p_k, q_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) мы пользуемся.

**2.2. Индекс Маслова,  $\text{ind} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ .** Пусть на лагранжевом многообразии  $M$  «общего положения» в смысле теоремы 2.1 дана кривая  $\gamma$ , трансверсальная циклу  $\Sigma$ , причем начало и конец  $\gamma$  неособые:

$$\partial\gamma = x_1 - x_0, \quad x_1 \notin \Sigma, \quad x_0 \notin \Sigma.$$

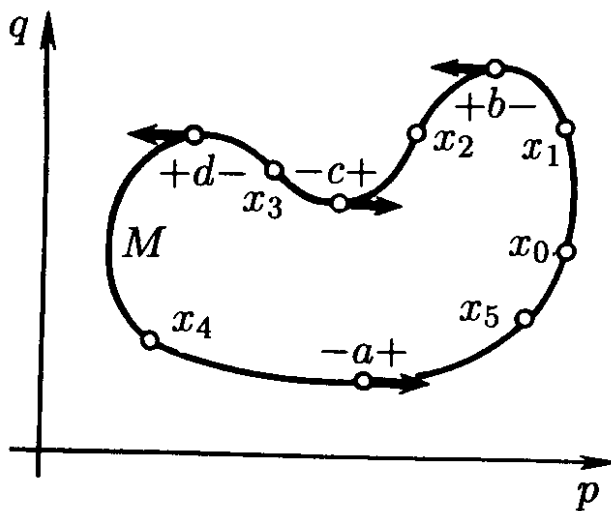


Рис. 1

Индексом  $\text{ind} \gamma$  кривой  $\gamma$  Маслов называет ее индекс пересечения с  $\Sigma$ , т.е. число  $\nu_+$  точек перехода с отрицательной стороны на положительную минус число  $\nu_-$  точек перехода с положительной стороны на отрицательную:

$$\text{ind} \gamma = \nu_+ - \nu_-.$$

**Пример.** Пусть  $n = 1$ ,  $M$  — кривая на плоскости  $p, q$  (рис. 1). Для  $M$  в общем положении  $\Sigma$  состоит из отдельных точек  $a, b, c, \dots$ . Индексы кривых  $\gamma_i$  ( $\partial\gamma_i = x_i - x_0$ ) равны соответственно 0, 1, 0, 1, 2.

**Теорема 2.2.** Индекс замкнутой ориентированной кривой  $\gamma$  на лагранжевом многообразии общего положения  $M$  зависит только от класса гомологий  $\gamma$  и является значением некоторого одномерного класса целочисленных когомологий  $M$  на цикле  $\gamma$ :  $\text{ind} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ .

**2.3. Индекс кривых на грассманиане  $\Lambda(n)$ .** Доказательства сформулированных теорем (1.5, 2.1, 2.2) основаны на следующей конструкции.

В многообразии лагранжевых плоскостей  $\Lambda(n)$  выделяются множества  $\Lambda^k(n)$  плоскостей, имеющих  $k$ -мерное пересечение с фиксированной плоскостью  $\sigma \in \Lambda(n)$  (а именно, плоскостью  $q = 0$ ). Оказывается, замыкание  $\overline{\Lambda^1(n)}$  определяет цикл (неориентированный) коразмерности 1, см. п. 3.2.2.

В п. 3.5 доказывается

**Основная лемма.**  $\Lambda^1(n)$  лежит в  $\Lambda(n)$  двусторонне, т.е. существует непрерывное векторное поле, трансверсальное к  $\Lambda^1(n)$  и касательное к  $\Lambda(n)$ .

Такое векторное поле строится с помощью орбит действия  $S^1 = \{e^{i\theta}\}$  на  $\Lambda(n)$ . В §3 доказана

**Лемма 3.5.1.** Все окружности

$$\theta \mapsto e^{i\theta} \lambda, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \lambda \in \Lambda(n), \quad (4)$$

трансверсальны к  $\Lambda^1(n)$ .

За положительную сторону  $\Lambda^1(n)$  выберем ту, куда обращены векторы скорости кривых (4).

Двусторонность  $\Lambda^1(n)$  позволяет определить

$$\text{Ind} \in H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z})$$

как индекс пересечения ориентированных замкнутых кривых на  $\Lambda(n)$  с  $\overline{\Lambda^1(n)}$  (определение 3.6.1).

Индекс  $\text{Ind}$  связывает индекс Маслова  $\text{ind}$  и класс когомологий  $\alpha$  из п. 1.4. А именно, оказывается, что выбор положительной стороны  $\Lambda^1(n)$  с помощью кривых (4) согласован с определением положительной стороны  $\Sigma^1$  из п. 2.1. В §4 доказывается

**Лемма 4.3.1.** Индекс  $\text{Ind}$  порождает индекс Маслова  $\text{ind}$  при тангенциальном отображении  $\tau : M^n \rightarrow \Lambda(n)$ ;  $\text{ind} = \tau^* \text{Ind}$ , т.е. для каждой кривой  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  имеем  $\text{ind} \gamma = \text{Ind} \tau \gamma$ .

**Доказательство теоремы 1.5.** Вычисление индекса кривых (4) (см. пример 3.6.2) дает  $\text{Ind} \gamma = n = \alpha(\gamma)$  (пример 1.4.3). Но  $H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  (следствие 1.4.2). Значит,  $\text{Ind} = \alpha$ . По лемме 4.3.1  $\text{ind} = \tau^* \text{Ind}$ , а по определению 1.5  $\alpha^* = \tau^* \alpha$ . Итак,  $\text{ind} = \alpha^*$ , что и требовалось доказать.

### 3. Доказательство основной леммы

В этом параграфе доказывается двусторонность цикла особенности  $\overline{\Lambda^1(n)}$  и определяется индекс  $\text{Ind} \in H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z})$ .

**3.1. Производящие функции.** Пусть  $M$  — многообразие в фазовом пространстве, которое в односвязной окрестности точки  $q = q_0$ ,  $p = p_0$  задается уравнением вида  $p = p(q)$ .

**Лемма 3.1.1.** *Чтобы многообразие  $M$  было лагранжевым, необходимо и достаточно существование «производящей функции»  $s(q)$  такой, что*

$$p = \frac{\partial s}{\partial q}. \quad (5)$$

**Доказательство.** Пусть  $s(q) = \int_{q_0}^q p(q) dq$ . Независимость интеграла от пути эквивалентна обращению в 0 на  $M$  производной  $d(p dq) = dp \wedge dq$ . Но значение  $dp \wedge dq$  на бивекторе  $\xi \wedge \eta$  равно как раз косо-скалярному произведению  $[\xi, \eta]$ , так что равенство  $dp \wedge dq$  нулю на  $M$  эквивалентно лагранжевости  $M$ . Функция  $s(q)$  удовлетворяет (5), что и доказывает лемму.

**Замечание 3.1.2.** Функция  $s(q)$  определена с точностью до постоянного слагаемого. В частном случае, когда  $M$  — подпространство, это слагаемое можно выбрать так, что  $s(q)$  — квадратичная форма. Отсюда вытекает

**Следствие 3.1.3.** *Множество лагранжевых подпространств вида  $p = p(q)$  (т.е. трансверсальных плоскости  $q = 0$ ) составляет в многообразии  $\Lambda(n)$  открытую клетку  $\Lambda^0(n)$ , диффеоморфную линейному пространству  $D$  всех вещественных симметрических матриц порядка  $n$ . Диффеоморфизм устанавливается отображением*

$$\varphi : D \rightarrow \Lambda^0(n), \quad \varphi(S) = \lambda_S \quad (S \in D, \lambda_S \in \Lambda^0(n)),$$

где  $\lambda_S$  означает плоскость  $p = Sq$ .

Доказательство получается из (5) при  $s(q) = \frac{1}{2}(Sq, q)$ .

Пространство симметрических матриц  $D$  есть  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ . Поэтому доказано

**Следствие 3.1.4.** Многообразие  $\Lambda(n)$  имеет размерность

$$\dim \Lambda(n) = n(n+1)/2.$$

### 3.2. Цикл особенностей $\overline{\Lambda^1(n)}$ .

**Обозначение 3.2.0.** Пусть  $\sigma$  — лагранжева плоскость  $q = 0$ . Обозначим через  $\Lambda^k(n)$  множество всех лагранжевых плоскостей  $\lambda \in \Lambda(n)$ , пересечение которых с плоскостью  $\sigma$   $k$ -мерно.

**Лемма 3.2.1.** Множество  $\Lambda^k(n)$  является открытым многообразием коразмерности  $k(k+1)/2$  в лагранжевом грассманиане  $\Lambda(n)$ .

**Доказательство.** Сопоставим с каждой плоскостью  $\lambda \in \Lambda^k(n)$  ее пересечение с плоскостью  $\sigma$ . Возникает отображение  $\Lambda^k(n)$  на многообразии Грассмана  $G_{n,k}$  всех  $k$ -мерных подпространств  $n$ -мерного пространства  $\sigma$ . Легко проверить, что это отображение определяет расслоение

$$\Lambda^0(n-k) \rightarrow \Lambda^k(n) \rightarrow G_{n,k}.$$

По следствию 3.1.4  $\dim \Lambda^0(n-k) = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$ . Так как  $\dim G_{n,k} = k(n-k)$ , то находим

$$\begin{aligned} \dim \Lambda^k(n) &= \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + k(n-k) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = \\ &= \dim \Lambda(n) - \frac{k(k+1)}{2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Следствие 3.2.2.**  $\overline{\Lambda^1(n)}$  определяет цикл (неориентированный) коразмерности 1 в  $\Lambda(n)$ .

**Доказательство.** Многообразие  $\Lambda(n)$  можно считать алгебраическим. Замыкание  $\overline{\Lambda^1(n)} = \bigcup_{k \geq 1} \Lambda^k(n)$  — его алгебраическое подмногообразие коразмерности 1 ( $k(k+1)/2 \geq 1$  при  $k \geq 1$ ).

Поэтому  $\overline{\Lambda^1(n)}$  определяет некоторую (неориентированную) цепь. Особенность алгебраического многообразия  $\overline{\Lambda^1(n)}$  есть алгебраическое подмногообразие  $\overline{\Lambda^2(n)} = \bigcup_{k \geq 2} \Lambda^k(n)$  коразмерности 3 в  $\Lambda(n)$ , так как  $k(k+1)/2 \geq 3$  при

$k \geq 2$ . Итак, гомологическая граница цепи  $\overline{\Lambda^1(n)}$  равна 0, что и требовалось доказать.

**3.3. Координаты на  $\Lambda(n)$ .** Рассмотрим лагранжеву плоскость  $\lambda \in \Lambda(n)$ . Пусть  $\lambda \in \Lambda^k(n)$ , т.е. пересечение  $\lambda \cap \sigma$   $k$ -мерно. Введем координаты на  $\Lambda(n)$  в окрестности  $\lambda$ .

**Обозначение 3.3.0.** Пусть  $K$  — подмножество множества  $1, 2, \dots, n$ . Обозначим через  $\sigma_K$  лагранжеву координатную плоскость

$$\sigma_K = \{p, q : p_k = 0, \quad q_l = 0 \quad \forall k \in K, \quad \forall l \notin K\}.$$

**Лемма 3.3.1.** *Плоскость  $\lambda \in \Lambda^k(n)$  трансверсальна одной из  $C_n^k$  координатных плоскостей  $\sigma_K$ , где  $K$  имеет  $k$  элементов.*

**Доказательство.** Пересечение  $\lambda \cap \sigma = \lambda_0$   $k$ -мерно. Следовательно, плоскость  $\lambda_0$  в  $\sigma$  трансверсальна одной из  $C_n^k$   $(n-k)$ -мерных координатных плоскостей  $\tau = \sigma_K \cap \sigma$ , т.е. при некотором  $K$  будет  $\lambda_0 \cap \sigma_K \cap \sigma = 0$ . Докажем, что плоскость  $\sigma_K$  трансверсальна  $\lambda$ :  $\sigma_K \cap \lambda = 0$ .

По условию,  $\lambda_0 + \tau = \sigma$ . Из лагранжевости  $\lambda$  и  $\sigma_K$  вытекает  $[\lambda, \lambda_0] = 0$  (так как  $\lambda_0 \subset \lambda$ ) и  $[\sigma_K, \tau] = 0$  (так как  $\tau \subset \sigma_K$ ). Значит,  $[\lambda \cap \sigma_K, \lambda_0 + \tau] = 0$ , т.е.  $[\lambda \cap \sigma_K, \sigma] = 0$ . Но наибольшее число попарно косоортогональных независимых векторов в  $\mathbb{R}^{2n}$  равно  $n$ . Поэтому  $n$ -мерная плоскость  $\sigma$  — максимальная себе косоортогональная плоскость, значит,  $(\lambda \cap \sigma_K) \subset \sigma$ . Итак,  $(\lambda \cap \sigma_K) \subseteq (\lambda \cap \sigma \cap \sigma_K) = (\lambda_0 \cap \tau) = 0$ , что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы вытекает, что каждая плоскость  $\lambda \in \Lambda(n)$  трансверсальна одной из  $2^n$  координатных плоскостей  $\sigma_K$ . Это позволяет составить атлас  $\Lambda(n)$  из  $2^n$  карт.

Одна из карт построена в п. 3.1.1: область  $\Lambda^0(n)$  диффеоморфна пространству симметрических матриц  $D = \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ , причем диффеоморфизм  $\varphi : D \rightarrow \Lambda^0(n)$  определен как

$$\varphi(S) = \lambda_S = \{p, q : p = Sq\} \quad \forall S \in D.$$

**Обозначение 3.3.2.** Обозначим через  $I_K$  оператор умножения на  $i$  переменных  $z_\kappa = p_\kappa + iq_\kappa$ ,  $\kappa \in K$ :

$$I_K : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n},$$

и для  $\eta = I_K \xi$

$$\begin{aligned} q_\kappa(\eta) &= +p_\kappa(\xi), & p_\kappa(\eta) &= -q_\kappa(\xi), & \forall \kappa \in K, \\ q_\nu(\eta) &= q_\nu(\xi), & p_\nu(\eta) &= p_\nu(\xi), & \forall \nu \notin K. \end{aligned}$$

Оператор  $I_K$  унитарен, поэтому лагранжевы плоскости он переводит в лагранжевы. В частности,  $I_K \sigma = \sigma_K$ . Таким образом,  $I_K$  переводит множество  $\Lambda^0(n)$  плоскостей, трансверсальных  $\sigma$ , в множество плоскостей  $I_K \Lambda^0(n)$ , трансверсальных  $\sigma_K$ . Итак, формула

$$\varphi_K(S) = I_K \lambda_S \in \Lambda(n), \quad S \in D, \quad (6)$$

задает диффеоморфизм  $\varphi_K : D \rightarrow I_K \Lambda^0(n)$ , где  $I_K \Lambda^0(n)$  есть множество всех лагранжевых плоскостей, трансверсальных  $\sigma_K$ .

По лемме 3.3.1  $2^n$  областей  $I_K \Lambda^0(n)$  покрывают  $\Lambda(n)$  целиком, так что формулы (6) доставляют атлас  $\Lambda(n)$  из  $2^n$  карт.

**Лемма 3.3.3.** *Множество  $\Lambda^k(n)$  покрыто  $C_n^k$  картами  $\varphi_K D$  ( $K$  из  $k$  элементов) и в координатах  $S = \varphi_K^{-1} \lambda$  задается  $k(k+1)/2$  линейными уравнениями  $S_{\mu\nu} = 0$  ( $\forall \mu \in K, \forall \nu \in K$ ).*

**Доказательство.** Пусть  $\dim \lambda \cap \sigma = k$ . По лемме 3.3.1  $\lambda \cap \sigma_K = 0$  при некотором  $K$  из  $k$  элементов. Поэтому плоскость  $I_K \lambda = I_K^{-1} \lambda$  трансверсальна  $\sigma$  и имеет уравнение  $p = Sq$ . Пересечение  $(I_K \lambda) \cap \sigma_K = I_K(\lambda \cap \sigma)$  имеет размерность  $k$ . Но на  $\sigma_K$  имеем  $q_l = 0$  ( $\forall l \notin K$ ),  $p_m = 0$  ( $\forall m \in K$ ). Поэтому на  $k$ -мерном подпространстве  $q_l = 0$  ( $l \notin K$ ) плоскости  $p = 0$   $k$  функций  $p_\mu$  ( $p = Sq$ ,  $\mu \in K$ ) должны тождественно обращаться в нуль. Это эквивалентно уравнениям  $S_{\mu\nu} = 0$ , что и требовалось доказать.

**3.4. Унитарная параметризация.** Через координаты  $S$ , введенные выше, можно выразить унитарные преобразования, переводящие «чисто мнимую» плоскость  $p = 0$  в плоскость  $\lambda_S \in \Lambda^0(n)$ . Очевидна

**Лемма 3.4.1.** *Пусть  $S, U$  — квадратные  $n \times n$  матрицы с комплексными элементами. Тогда*

$$\left( U = \frac{E - iS}{E + iS} \right) \Leftrightarrow \left( S = -i \frac{E - U}{E + U} \right), \quad (7)$$

и для  $S, U$ , связанных формулами (7),

- самосопряженность  $S$  эквивалентна унитарности  $U$ ,
- симметричность  $S$  эквивалентна симметричности  $U$ .

Итак, формулы (7) устанавливают диффеоморфизм между пространством  $D$  вещественных симметрических матриц  $S$  и многообразием унитарных симметрических неособых матриц  $U$ . (Унитарная матрица  $U$  неособая, если среди ее собственных чисел нет  $-1$ ; для вещественных симметрических  $S$  всегда  $\det(E + iS) \neq 0$ .)

Из неособых унитарных матриц можно извлекать квадратный корень, определяя его по непрерывности, начиная с  $\sqrt{E} = E$ .

**Лемма 3.4.2.** Пусть  $\lambda_S \in \Lambda^0(n)$  — плоскость  $p = Sq$ . Тогда матрица

$$\sqrt{U} = \frac{E - iS}{\sqrt{E + S^2}}$$

задает унитарное преобразование, переводящее плоскость  $p = 0$  в плоскость  $\lambda_S$ .

**Доказательство.** Так как  $S$  симметрична и вещественна, то  $\sqrt{E + S^2}$  веществен, и  $\sqrt{U}$  переводит плоскость  $p = 0$  туда же, куда и  $E - iS$ . Последнее преобразование переводит точку

$$(0, q) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \text{т.е. } iq \in i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n,$$

в точку

$$iq + Sq \in \mathbb{C}^n, \quad \text{т.е. } (Sq, q) \in \lambda_S \subset \mathbb{R}^{2n},$$

что и требовалось доказать.

**Следствие 3.4.3.** Отображение  $\text{Det}^2 : \Lambda(n) \rightarrow S^1$  из п. 1.3 задается формулой

$$\text{Det}^2 \lambda_S = \det \frac{E - iS}{E + iS}.$$

**Следствие 3.4.4.** Симметрическая неособая унитарная матрица  $U$ , для которой  $\sqrt{U}$  переводит плоскость  $p = 0$  в плоскость  $\lambda$ , определена этой плоскостью  $\lambda \in \Lambda^0(n)$  однозначно.

В самом деле, по лемме 3.4.1  $U$  однозначно определяется по  $S$ , а по лемме 3.4.2  $S$  однозначно определяется по  $\lambda$ .



**3.5. Двусторонность цикла особенностей.** Пусть  $\lambda$  — лагранжева плоскость. Тогда каждая из плоскостей  $e^{i\theta}\lambda$  — лагранжева.

**Лемма 3.5.1.** Если  $\lambda \in \Lambda^1(n)$ , то кривая  $\gamma : S^1 \rightarrow \Lambda(n)$ ,  $e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}\lambda$  трансверсальна к циклу  $\Lambda^1(n)$  в точке  $\theta = 0$ .

Таким образом, векторы скорости  $v(\lambda) = \left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} (e^{i\theta}\lambda)$  образуют трансверсальное оснащение  $\Lambda^1(n)$ , откуда вытекает

**Основная лемма.** Цикл особенностей  $\overline{\Lambda^1(n)}$  лежит в  $\Lambda(n)$  двусторонне.

Доказательство леммы 3.5.1 проведем в три этапа.

А. Пусть сначала  $\lambda \in \Lambda^0(n)$ ,  $\lambda = \lambda_S$ , где  $S \in D$  — вещественная симметрическая матрица. Сосчитаем координаты вектора скорости кривой  $e^{i\theta}\lambda$  в этой системе координат.

**Лемма 3.5.2.** Для любой матрицы  $S \in D$

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} \varphi^{-1} e^{i\theta} \lambda_S = -(E + S^2).$$

**Доказательство леммы 3.5.2.** Согласно п. 3.4 плоскости  $\lambda$  однозначно соответствует неособая унитарная симметрическая матрица  $U$ , так что

$$\lambda = \lambda_{S(U)}, \quad S(U) = -i \frac{E - U}{E + U},$$

и  $\sqrt{U}$  переводит плоскость  $p = 0$  в  $\lambda$ .

Пусть  $U(\theta) = e^{2i\theta}U$ . Матрица  $U(\theta)$  унитарна, симметрична и при малых  $|\theta|$  неособая, так что  $\sqrt{U(\theta)} = e^{i\theta}\sqrt{U}$ . Поэтому  $\sqrt{U(\theta)}$  переводит плоскость  $p = 0$  в  $e^{i\theta}\lambda$ , так что

$$\lambda_{S(U(\theta))} = e^{i\theta} \lambda_{S(U)}, \quad \text{или} \quad \varphi^{-1} e^{i\theta} \lambda_{S(U)} = S(U(\theta)). \quad (8)$$

Вектор  $\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} \varphi^{-1} e^{i\theta} \lambda$  лежит в касательном пространстве к линейному пространству симметрических матриц  $D$ , это касательное пространство естественно отождествляется с самим  $D$ . При таком отождествлении, по формулам п. 3.4.1,

$$-\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} S(U(\theta)) = \left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} i \frac{E - e^{2i\theta}U}{E + e^{2i\theta}U} = \frac{4U}{(E + U)^2} = E + S^2,$$

что вместе с формулами (8) доказывает лемму 3.5.2.

Б. Пусть теперь  $\lambda \in \Lambda^1(n)$ . По лемме 3.3.3 точка  $\lambda \in \Lambda^1(n)$  принадлежит одной из  $n$  карт  $\varphi_K D$ , где  $K$  состоит из одного элемента  $\kappa$ ,  $1 \leq \kappa \leq n$ . Иными словами, в обозначениях п. 3.3.2

$$\lambda = I_K \lambda_S, \quad \text{где } S \in D, \quad \lambda_S \in \Lambda^0(n).$$

Нетрудно сосчитать вектор скорости кривой  $\gamma : S^1 \rightarrow \Lambda(n)$ ,  $e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta} \lambda$  при  $\theta = 0$  в системе координат  $\varphi_K^{-1} \lambda = S$ .

**Лемма 3.5.3.** Для любой матрицы  $S \in D$ ,  $\lambda = I_K \lambda_S$ ,

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} \varphi_K^{-1} e^{i\theta} \lambda = -(E + S^2).$$

Действительно, по определению 3.3.2,  $\varphi_K = I_K \varphi$ , и  $I_K$  коммутирует с  $e^{i\theta}$ . Поэтому

$$\varphi_K^{-1} e^{i\theta} \lambda = \varphi^{-1} I_K^{-1} e^{i\theta} I_K \lambda_S = \varphi^{-1} e^{i\theta} \lambda_S,$$

и лемма 3.5.3 вытекает из леммы 3.5.2.

В. Цикл особенности  $\Lambda^1(n)$  в координатах  $S = \varphi_K^{-1} \lambda$  имеет уравнение  $S_{\kappa\kappa} = 0$  (лемма 3.3.3). Вектор скорости  $v = \left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} \varphi_K^{-1} e^{i\theta} \lambda$  по лемме 3.5.3 есть отрицательно определенная матрица,  $-v_{\kappa\kappa} \geq 1$ . Значит,  $v$  и  $\Lambda^1(n)$  трансверсальны, что и доказывает лемму 3.5.1.

**Замечание 3.5.4.** Одновременно доказано, что вектор  $v$  направлен в ту сторону от  $\Lambda^1(n)$ , где  $-S_{\kappa\kappa} > 0$ .

**3.6. Индекс  $\text{Ind}$  кривых на  $\Lambda(n)$ .** Пусть  $\gamma$  — ориентированная кривая в  $\Lambda(n)$ , трансверсальная  $\Lambda^1(n)$ , и  $v(\lambda)$  — поле скоростей из леммы 3.5.1.

**Определение 3.6.1.** Через  $\text{Ind } \gamma$  будем обозначать индекс пересечения кривой  $\gamma$  с циклом  $\Lambda^1(n)$ , оснащенным полем  $v(\lambda)$ .

Иначе говоря,  $\text{Ind } \gamma = \nu_+ - \nu_-$ , где  $\nu_+$  — число точек пересечения  $\gamma$  с  $\Lambda^1(n)$ , в которых векторы  $\dot{\gamma}$  и  $v$  лежат по одну сторону  $\Lambda^1(n)$ , а  $\nu_-$  — по разные стороны.

Индекс замкнутой кривой  $\gamma$ , как всякий индекс пересечения, определяется классом гомологий  $\gamma$  и может рассматриваться как класс одномерных когомологий

$$\text{Ind} \in H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z}).$$

**Пример 3.6.2.** Индекс замкнутой кривой  $\gamma : S^1 \rightarrow \Lambda(n)$ , образованной  $e^{i\theta}\lambda$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , есть  $n$ :

$$\text{Ind } \gamma = n.$$

**Доказательство.** Имеем  $\dim \Lambda^2(n) = \dim \Lambda^1(n) - 2$  (лемма 3.2.1). Поэтому для почти всех  $\lambda$  кривая  $e^{i\theta}\lambda$  не пересекается с  $\overline{\Lambda^2(n)}$ . Такая кривая трансверсальна  $\Lambda^1(n)$  во всех точках пересечения (лемма 3.5.1). При этом  $\text{Ind } \gamma$  есть просто число этих точек пересечения (определение 3.6.1).

Пусть  $\lambda \in \Lambda^0(n)$ . По лемме 3.4.4 имеем  $\lambda = \lambda_{S(U)}$ , где  $U$  — унитарная симметрическая неособая матрица. Мы можем считать плоскость  $\lambda$  такой, что все собственные числа матрицы  $U$

$$e^{i\alpha_k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad |\alpha_k| < \pi,$$

различны.

Но

$$e^{i\theta}\lambda = \lambda_{S(e^{2i\theta}U)}$$

по формуле (8) из п. 3.5.2, и

$$\left( \lambda_{S(e^{2i\theta}U)} \notin \Lambda^0(n) \right) \Leftrightarrow (\det(E + e^{2i\theta}U) = 0)$$

по лемме 3.4.2. Иными словами, в точках пересечения  $\gamma$  с  $\Lambda^1(n)$

$$\theta \equiv \frac{\pi - \alpha_k}{2} \pmod{\pi}.$$

Таких  $\theta$  на отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$  ровно  $n$ . Значит,  $\text{Ind } \gamma = n$ , что и требовалось доказать.

## 4. Доказательства теорем об общем положении

Здесь доказаны теоремы 2.1 и 2.2 из §2.

### 4.1. Трансверсальность.

**Обозначения 4.1.1.** Пусть  $A$  — гладкое многообразие, а  $a \in A$ . Через  $TA_a$  обозначим касательное пространство к  $A$  в точке  $a$ . Если  $f : A \rightarrow B$  — гладкое отображение, то через  $f_* : TA_a \rightarrow TB_{f(a)}$  обозначим дифференциал  $f$  в  $a$ .

Пусть  $f : A \rightarrow B$ ,  $h : C \rightarrow B$  — два гладких отображения. Отображения  $f$ ,  $h$  называются *трансверсальными* в точке  $b \in B$ , если

$$f_*TA_a + h_*TC_c = TB_b$$

для каждой пары точек  $a \in A$ ,  $c \in C$ , для которых  $f(a) = h(c) = b$ . Отображения  $f$  и  $h$  трансверсальны, если они трансверсальны в каждой точке  $b \in B$ .

В частном случае, когда  $f$  или  $h$  — вложения, можно говорить о трансверсальности отображения подмногообразию или о трансверсальности двух подмногообразий.

Понятие трансверсальности распространяется и на тот случай, когда  $A$  есть объединение нескольких многообразий  $A = \bigcup A_k$  (например,  $\Lambda^1(n) = \bigcup_{k \geq 1} \Lambda^k(n)$  в §3) — в этом случае ограничение  $f$  на каждое  $A_k$  должно быть трансверсально  $h$ .

Легко доказывается (см., например, [3]) принадлежащая М. Морсу и А. Сарду

**Лемма 4.1.2.** Пусть  $f : A \rightarrow B$  — гладкое отображение. Тогда мера множества точек  $b \in B$ , не трансверсальных  $f$ , равна 0 (точка  $b \hookrightarrow B$  есть нульмерное подмногообразие  $B$ ).

Из леммы 4.1.2 выводится (см., например, [4])

**Лемма 4.1.3.** Пусть  $V$  — однородное пространство, на котором транзитивно действует группа Ли  $G$  ( $\forall g \in G$ ,  $g : V \rightarrow V$  — диффеоморфизм). Пусть  $C \hookrightarrow V$  — гладкое подмногообразие  $V$ , и  $f : A \rightarrow V$  — гладкое отображение. Тогда мера множества точек  $g \in G$ , для которых отображение

$$f_g : A \rightarrow V, \quad f_g(a) = gf(a)$$

не трансверсально  $C$ , равна нулю.

Для полноты приведем доказательство леммы 4.1.3.

**Замечание 4.1.4.** Так как сумма счетного числа множеств меры нуль имеет меру нуль, то лемму 4.1.3 достаточно доказать применительно к окрестности  $A_0$  точки  $a_0 \in A$ , окрестности  $C_0$  точки  $c_0 \in C$  и окрестности единицы  $e$  в группе  $G$ .

Из транзитивности действия  $G$  легко вытекает

**Утверждение 4.1.5.** Существует диффеоморфизм произведения шаров

$$u : D_1 \times D_2 \rightarrow G,$$

$$D_i = \{x \in \mathbb{R}^{\nu_i}, |x| < 1\}, \quad \nu_1 = \dim B - \dim C, \quad \nu_2 = \dim G - \nu_1,$$

такой, что  $u(0, 0) = e$ , и отображение

$$\beta : D_1 \times D_2 \times C_0 \rightarrow B \times D_2,$$

заданное формулой

$$\beta(x, y, c) = (u(x, y) c, y), \quad \forall x \in D_1, y \in D_2, c \in C_0,$$

есть диффеоморфизм  $D_1 \times D_2 \times C_0$  на некоторую окрестность  $E$  точки  $(c_0, 0)$  в  $B \times D_2$ .

Определим теперь проекцию  $E \subset B \times D_2$  на  $D_1 \times D_2$

$$\Phi : E \rightarrow D_1 \times D_2 \quad \text{по формуле} \quad \Phi(\beta(x, y, c)) = (x, y).$$

Далее, определим отображение

$$\hat{f} : A \times D_2 \rightarrow B \times D_2 \quad \text{формулой} \quad \hat{f}(a, y) = (f(a), y).$$

Применим лемму 4.1.2 к сквозному отображению

$$\Theta = \Phi \circ \hat{f} : A_0 \times D_2 \rightarrow D_1 \times D_2.$$

**Утверждение 4.1.6.** Пусть  $x, y \in D_1 \times D_2$  — точка, трансверсальная отображению  $\Theta$ . Тогда отображение

$$f_g : A_0 \rightarrow B, \quad g = (u(x, y))^{-1},$$

трансверсально вложению  $C_0 \hookrightarrow B$ .

**Доказательство утверждения 4.1.6.** Рассмотрим  $\Phi^{-1}(x, y)$  ( $x \in D_1$ ,  $y \in D_2$ ). Очевидно,  $\Phi^{-1}(x, y) = (C_{x,y}, y)$ , где  $C_{x,y} = u(x, y)C_0 \hookrightarrow B$ . Ядро дифференциала  $\Phi_* : T(B \times D_2)_{b,y} \rightarrow T(D_1 \times D_2)_{x,y}$  есть в точности касательное пространство к  $(C_{x,y}, y)$ :

$$\ker \Phi_* = T(C_{x,y}, y)_{b,y}.$$

Поэтому трансверсальность отображения  $\Theta = \Phi \circ \hat{f}$  в точке  $x, y$  влечет

$$\hat{f}_* T(A_0 \times D_2)_{a,y} + T(C_{x,y}, y)_{f(a),y} = T(B \times D_2)_{b,y}$$

для всех  $a \in A_0$ , для которых  $f(a) = b \in C_{x,y}$ . Итак, отображение  $f : A_0 \rightarrow B$  трансверсально вложению  $C_{x,y} \hookrightarrow B$ . Действуя диффеоморфизмом  $g = (u(x, y))^{-1} \in G$ , убеждаемся, что  $gf : A_0 \rightarrow B$  трансверсально  $gC_{x,y} = C_0$ , что и требовалось.

**Доказательство леммы 4.1.3.** Применим к  $\Theta$  лемму 4.1.2. Множество точек  $x, y \in D_1 \times D_2$ , не трансверсальных  $\Theta$ , имеет меру нуль. Соответствующее множество точек  $g = (u(x, y))^{-1} \in G$  имеет меру нуль в  $G$ . Для остальных  $g$ , близких к  $e$ , отображение  $f_g$  трансверсально  $C_0$  согласно 4.1.6. Это доказывает лемму 4.1.3 в соответствии с замечанием 4.1.4.

**4.2. Доказательство теоремы 2.1.** Применим лемму 4.1.3 к случаю, когда  $A$  — лагранжево многообразие  $M^n$ ,  $B$  — лагранжево рассманиан  $\Lambda(n)$ ,  $f$  — тангенциальное отображение  $\tau : M^n \rightarrow \Lambda(n)$ ,  $C$  — подмногообразие  $\Lambda^k(n) \hookrightarrow \Lambda(n)$ ,  $G$  — унитарная группа  $U(n)$ .

Из леммы 4.1.3 вытекает тогда, что для почти всех  $u \in U(n)$  многообразии  $uM^n$  таково, что его тангенциальное отображение  $\tau$  трансверсально всем  $\Lambda^k(n) \hookrightarrow \Lambda(n)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Покажем, что такое многообразие  $uM^n$  находится в «общем положении» в смысле теоремы 2.1.

Утверждение 1 из теоремы 2.1 вытекает из теоремы о неявной функции и лемм 3.2.1, 3.2.2. Утверждение 2 вытекает из основной леммы п. 3.5. Утверждение 3 выводится из леммы 3.3.1. Утверждение 4 получается из леммы 3.3.3 при  $k = 1$ . Наконец, утверждение 5 вытекает из леммы 3.5.1 и замечания 3.5.4. Теорема 2.1 доказана.

**4.3. Доказательство теоремы 2.2.** Пусть  $M^n$  — лагранжево многообразие в общем положении, и  $\gamma : S^1 \rightarrow M^n$  — ориентированная замкнутая кривая, трансверсальная циклу особенностей  $\Sigma$ .

**Лемма 4.3.1.** Пусть  $\tau \circ \gamma : S^1 \rightarrow \Lambda(n)$  — тангенциальное отображение  $M^n$  на кривой  $\gamma$ . Тогда

$$\text{ind } \gamma = \text{Ind } \tau \circ \gamma.$$

Действительно,  $\Sigma^1 = \tau^{-1}\Lambda^1(n)$  (определения из п. 2.1 и 3.2). Далее, положительная (в смысле п. 2.1) сторона  $\Sigma^1$  при отображении  $\tau$  переходит в положительную (в смысле определения 3.6.1) сторону  $\Lambda^1(n)$  — это вытекает из замечания 3.5.4. Значит, каждая точка пересечения  $\gamma$  с  $\Sigma^1$  дает в  $\text{ind}$  такой же вклад, как соответствующая точка пересечения  $\tau \circ \gamma$  с  $\Lambda^1(n)$  в  $\text{Ind}$ , что и доказывает лемму 4.3.1.

Одновременно доказана и теорема 2.2, так как  $\text{Ind } \tau \circ \gamma$  не меняется при замене  $\gamma$  гомологичной кривой  $\gamma'$  (последнее вытекает из того, что  $\dim \Lambda^2(n) = \dim \Lambda^1(n) - 2$ ).

## 5. Квазиклассическая асимптотика

Здесь будут приведены без доказательств асимптотические формулы Маслова, в которых участвует индекс, для простейшего примера.

### 5.1. Асимптотика при $\hbar \rightarrow 0$ решений уравнения Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi + U(q)\psi, \quad \psi = \psi(q, t), \quad q \in \mathbb{R}^n \quad (9)$$

с начальным условием

$$\psi|_{t=0} = \varphi(q) e^{\frac{i}{\hbar} f(q)}, \quad \text{где } \varphi(q) \text{ — финитная функция.} \quad (10)$$

Уравнению Шрёдингера соответствует классическая динамическая система, заданная в  $2n$ -мерном фазовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  уравнениями Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad H = \frac{1}{2} p^2 + U(q).$$

Решения уравнений Гамильтона определяют однопараметрическую группу канонических<sup>2</sup> диффеоморфизмов фазового пространства — фазовый поток  $g^t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ .

<sup>2</sup> Диффеоморфизм  $g : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  называется каноническим, если для всякой замкнутой кривой  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  имеем  $\oint_{\gamma} p dq = \oint_{g\gamma} p dq$ . Дифференциал  $g_*$  в каждой точке имеет тогда симплектическую матрицу: при каноническом преобразовании 2-форма  $dp \wedge dq$  переходит в себя. Поэтому лагранжевы многообразия при каноническом диффеоморфизме переходят в лагранжевы.

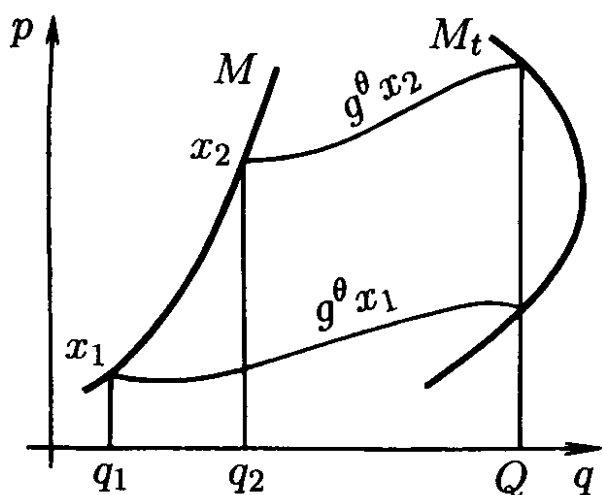


Рис. 2

Начальным условием (10) соответствует функция  $\varphi(q)$  на поверхности  $M^n$ , заданной в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  уравнениями

$$M = \left\{ p, q : p(q) = \frac{\partial f}{\partial q} \right\}.$$

Поверхность  $M$  однозначно проектируется на плоскость  $q$ . Она лагранжева по лемме 3.1.1. Фазовый поток  $g^t$  переводит  $M$  в другую лагранжеву поверхность  $g^t M = M_t$ .

Поверхность  $M_t$  уже не обязательно однозначно проектируется на плоскость  $q$ . Возникает отображение  $Q(q) = q(g^t(p(q), q))$  (рис. 2).

Пусть  $x_j = (p_j, q_j)$  — точки  $M$  такие, что  $g^t x_j = (P_j, Q) \in M_t$ . Предположим, что якобиан  $\left. \frac{DQ}{Dq} \right|_{q=q_j} \neq 0$ .

Маслов доказал следующую асимптотическую формулу для решений уравнения (9) с условием (10).

**Теорема 5.1.** При  $h \rightarrow 0$

$$\psi(Q, t) = \sum_j \varphi(q_j) \left| \frac{DQ}{Dq_j} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{h} S_j(Q, t) - \frac{i\pi}{2} \mu_j} + O(h),$$

где  $S_j(Q, t)$  — действие вдоль траектории  $g^\theta x_j$ :

$$S_j(Q, t) = f(q_j) + \int_0^t L d\theta, \quad L = \frac{\dot{q}^2}{2} - U(q);$$

$(p(\theta), q(\theta)) = g^\theta x_j$ , а  $\mu_j$  — индекс Морса траектории  $g^\theta x_j$ , т.е. число точек  $q(g^\theta x_j)$ ,  $0 < \theta < t$ , фокальных  $M$ .

**5.2. Связь между индексами Маслова и Морса.** В теореме 5.1 участвует индекс Морса  $\mu$ . Индекс Морса есть частный случай индекса Маслова; справедлива



**Теорема 5.2.** Рассмотрим в  $(2n + 2)$ -мерном фазовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n+2} = \{\hat{p}, \hat{q}\}$ ,  $\hat{p} = p_0, p$ ;  $\hat{q} = q_0, q$ ;  $(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $(n + 1)$ -мерное многообразие  $\hat{M}$ :  $(p, q) \in M_t$ ,  $q_0 = t$ ,  $p_0 = -H(p, q)$ . Тогда многообразие  $\hat{M}$  лагранжево, и индекс Морса траектории  $g^\theta x$ ,  $0 < \theta < t$  есть индекс Маслова кривой  $(\theta, -H, g^\theta x)$  на многообразии  $\hat{M}$ .

Доказательство легко вытекает из определений индексов  $\mu$  и  $\text{ind}$ : так как  $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \xi, \xi\right) > 0$ , то простая фокальная точка дает в  $\text{ind}$  вклад  $+1$ .

**Следствие.** Для любой кривой  $\gamma$  на  $M$

$$\text{ind } g^t \gamma - \text{ind } \gamma = \mu(g^\theta \gamma^+) - \mu(g^\theta \gamma^-),$$

где  $g^\theta \gamma^+$ ,  $g^\theta \gamma^-$  ( $0 \leq \theta \leq t$ ) — траектории концов  $\gamma$ ,  $\partial \gamma = \gamma^+ - \gamma^-$ .

Действительно, четырехугольник  $\gamma, g^\theta \gamma^+, (g^t \gamma)^{-1}, (g^\theta \gamma^-)^{-1}$  на  $\hat{M}$ , очевидно, гомологичен нулю, поэтому его индекс Маслова равен нулю (теорема 2.2), что в силу теоремы 5.2 доказывает искомое соотношение.

**5.3. Условия квантования.** В теореме 5.1 участвуют индексы незамкнутых кривых. Индексы замкнутых кривых входят в асимптотические формулы для стационарных задач.

Пусть  $M$  — инвариантное лагранжево многообразие фазового потока  $g^t$ , лежащее на гиперповерхности  $H = E$  (такие инвариантные многообразия имеются не только у интегрируемых систем: см. [5]).

Масловым доказана

**Теорема 5.3.** Уравнение

$$\frac{1}{2} \Delta \psi = \lambda^2 (U(q) - E) \psi$$

имеет серию собственных чисел  $\lambda_N \rightarrow \infty$  с асимптотикой  $\lambda_N = \mu_N + O(\mu_N^{-1})$ , если для всех  $\gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$

$$\frac{2\mu_N}{\pi} \oint_{\gamma} p dq \equiv \text{ind } \gamma \pmod{4}. \quad (11)$$

При этом собственные функции  $\psi_N$  также связаны с многообразием  $M$  (в некотором, точно определенном в [1] смысле и при некоторых предположениях типа простоты спектра).

В частном случае  $n = 1$  индекс окружности равен 2, и формула (11) превращается в классическое «условие квантования»

$$\mu_N \oint_{\gamma} p dq = 2\pi \left( N + \frac{1}{2} \right).$$

## Литература

- [1] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965, 553 с.
- [2] Маслов В. П. Метод ВКБ в многомерном случае. Прил. к кн.: Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. М.: Мир, 1965, 177–237.
- [3] Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР*, 1955, 45, 3–13.
- [4] Абрахам Р. Трансверсальность отображений. Прил. III к кн.: Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. М.: Мир, 1967, 169–195.
- [5] Arnold V., Avez A. *Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique*. Paris: Gauthier-Villars, 1967, 243 p.

## О косах алгебраических функций и когомологиях ласточкиных хвостов

Существует интересная связь между теорией алгебраических функций и теорией кос Артина: пространство  $G_n$  многочленов степени  $n$ , не имеющих кратных корней, есть пространство  $K(\pi, 1)$  для группы  $B(n)$  кос из  $n$  нитей:

$$\pi_1(G_n) = B(n), \quad \pi_i(G_n) = 0 \quad \text{при } i > 1. \quad (1)$$

Эту связь можно использовать в обоих направлениях — и для изучения группы кос, и для изучения алгебраических функций. Вот несколько примеров.

А) Наряду с группой монодромии, описывающей перестановки листов функции при обходе многообразия ветвления, существует более тонкий инвариант алгебраической функции (но не соответствующего накрытия) — *группа кос функции*. Эта группа учитывает не только перестановку значений функции после обхода, но и то, как они обходили друг вокруг друга в плоскости значений функции. Группа монодромии есть представление фундаментальной группы дополнения к многообразию ветвления в группу перестановок. Группа кос алгебраической функции есть представление той же фундаментальной группы в группу кос Артина.

Б) Пространство  $G_n$  можно рассматривать как *пространство гиперэллиптических кривых степени  $n$* .

Из этого замечания извлекается, с одной стороны, представление группы кос в группу симплектических целочисленных матриц (а именно, матриц автоморфизмов гомотопий кривой, индуцированных обходами в пространстве коэффициентов). Можно показать, что это представление будет представлением на всю симплектическую группу в случаях  $n = 3, 4, 6$  и только в этих случаях.

С другой стороны, мы получаем информацию о ветвлении гиперэллиптических интегралов как функций параметров: из соотношений между образующими группы кос вытекают соотношения между матрицами Пикара–Лефшеца.

В) Пространство  $G_n$  можно рассматривать как множество регулярных значений отображения  $\Sigma^{1n}$ . Таким образом, соотношения (1) и сформулированные ниже теоремы доставляют нам сведения о топологии простейших особенностей комплексных аналитических отображений.

Г) Пространство  $G_n$  можно рассматривать как дополнение к многообразию ветвления универсальной  $n$ -значной целой алгебраической функции  $z(a)$ :

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2)$$

(корень общего уравнения  $n$ -й степени как функция коэффициентов).

Из этого замечания видно, какое значение имеют классы когомологий  $G_n$ . Действительно,  $n$ -значная целая алгебраическая (соответственно алгеброидная, псевдоалгебраическая) функция  $z(x)$  порождается полиномиальным (соответственно аналитическим, непрерывным) отображением  $a(x)$  пространства аргументов  $x$  в пространство аргументов  $a$  универсальной функции (2). Классы когомологий  $G_n$  индуцируют при этом отображении специальные классы когомологий в дополнении к многообразию ветвления функции  $z(x)$ . С другой стороны, из (1) вытекает, что когомологии  $G_n$  совпадают с когомологиями группы кос из  $n$  нитей (действие  $\mathbb{Z}$  тривиальное):

$$H^i(G_n, \mathbb{Z}) \cong H^i(B(n), \mathbb{Z}).$$

Д) Когомологии группы кос. Комплексная и алгебраическая структуры  $G_n$  оказываются весьма полезными для исследования когомологий групп кос.

Прежде всего мы замечаем, что  $G_n$  есть  $n$ -мерное многообразие Штейна (ибо  $G_n$  задается в пространстве  $\mathbb{C}^n$  всех многочленов степени  $n$  вида (2) полиномиальным условием  $\Delta(a) \neq 0$ , где  $\Delta$  — дискриминант). Следовательно,  $H^i(G_n) = H^i(B(n)) = 0$  при  $i > n$ . Дальнейшие результаты получаются при более подробном изучении геометрии стратифицированных многообразий  $\Delta(a) = 0$  (эти многообразия можно назвать многомерными ласточкиными хвостами, так как случаю  $n = 4$  соответствует поверхность «queue d'aronde»).

**Теорема конечности.** Когомологии группы кос конечны, исключая  $H^0$  и  $H^1$ . При этом  $H^i(B(n)) = 0$  при  $i \geq n$ .

$n \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2, 3	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0
4, 5	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	0	0	0	0	0
6, 7	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	0	0	0	0
8, 9	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	0	0
10, 11	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{6?3}$	$\mathbb{Z}_{2?1}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_5$

Таблица когомологий групп кос  $H^i(B(n), \mathbb{Z})$ ,  $n < 12$

**Теорема повторения.** Все группы когомологий группы кос из нечетного числа нитей такие же, как у группы кос из предыдущего четного числа нитей:

$$H^i(B(2n+1)) \cong H^i(B(2n)).$$

**Теорема стабилизации.** При увеличении  $n$   $i$ -мерная группа когомологий группы кос из  $n$  нитей стабилизируется:  $H^i(B(n)) \cong \cong H^i(B(2i-2))$  при  $n \geq 2i-2$ .

Таким образом, первые стабильные группы когомологий (в предыдущей таблице они выделены) суть  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6, \dots$

Аналогичные теоремы справедливы для групп когомологий пространств многочленов, имеющих не более  $k$   $q$ -кратных корней<sup>1</sup>.

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Кольцо когомологий группы крашенных кос. *Матем. заметки*, 1969, 5(2), 227–231.
- [2] Арнольд В. И. Замечание о ветвлении гиперэллиптических интегралов как функций параметров. *Функц. анализ и его прилож.*, 1968, 2(3), 1–3.

<sup>1</sup> Подробное изложение доклада опубликовано в «Трудах Московского математического общества» 21 (1970), 27–46.



## Замечания об особенностях конечной коразмерности в комплексных динамических системах

К изучению особых точек динамических систем естественно подходить с точки зрения теории особенностей отображений (см. [1], [2]).

Особенности «общего положения» изучены Пуанкаре [3] и Зигелем [4]. Они показали, что в окрестности особой (т.е. неподвижной) точки общего положения аналитическая динамическая система становится линейной в надлежащей аналитической системе координат.

На первый взгляд более сложные особые точки не должны встречаться в природе, так как каждую систему можно аппроксимировать такой, в которой все особые точки — общего положения. Дело обстоит, однако, не совсем так, если, как это часто бывает, нас интересует не индивидуальная система, а семейство систем, зависящее, например, от  $k$  параметров. В таком семействе могут встречаться — притом неустранимым малыми деформациями семейства образом — особые точки не общего положения, а именно, точки тех классов, коразмерность которых в функциональном пространстве всех систем не превосходит  $k$ .

Мы приходим, таким образом, к задаче изучения особых точек коразмерности  $k$ . Несмотря на обилие исследований разных экзотических особых точек, простейший случай  $k = 1$  до сих пор мало изучен.

Речь будет идти о топологическом и дифференцируемом устройстве комплексных решений в окрестности особой точки динамической системы, зависящей от параметров. При изменении параметров топологический тип особой точки может меняться; мы интересуемся его перестройкой при прохождении параметров через критические или «резонансные» значения, соответствующие особым точкам комплексной коразмерности  $k = 1$ , т.е. однократным резонансам. Оказывается, при трансверсальном прохождении такого критического значения

от сепаратрис особой точки отщепляется инвариантное многообразие коразмерности  $k$ .<sup>1</sup>

Для изучения этого явления полезно отображение нашей динамической системы на одномерную. Такое отображение можно назвать одномерным коциклом (так как вложения одномерной системы в нашу называют циклами). С каждым резонансом связывается (по крайней мере в классе формальных рядов) некоторый одномерный коцикл; особым точкам полученной одномерной системы соответствуют инвариантные многообразия исходной.

Другой метод изучения комплексной окрестности особой точки состоит в том, чтобы рассмотреть пересечение решений со сферой малого радиуса с центром в особой точке. При этом мы инвариантно связываем с комплексной системой вещественное слоение на сфере.

## 1. Резонансы

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — собственные числа линейной части

$$\dot{z} = Az, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (1)$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = a(z), \quad a(z) = Az + \dots, \quad (2)$$

где  $a(z)$  — векторное поле, аналитическое в окрестности  $z = 0$ .

*Резонансом* называется соотношение

$$\lambda_i = (m, \lambda), \quad (3)$$

где  $m$  — вектор с целыми неотрицательными компонентами  $m_j$ ,  $|m| = \sum m_j \geq 2$ ,  $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение.

Соотношение (3) можно записать в симметричном виде:

$$(\mu, \lambda) = 0, \quad \text{где } \mu = (m_j - \delta_{ij}). \quad (4)$$

В пространстве наборов собственных чисел  $\mathbb{C}^n = \{\lambda\}$  уравнение резонанса (4) задает *резонансную плоскость*  $\Gamma_\mu$ .

Все пространство наборов собственных чисел разбивается на две части.

<sup>1</sup> Аналогичное явление наблюдается не только в комплексном случае, но также в вещественно-аналитическом и даже конечно-дифференцируемом. Однако перестройка топологии в комплексной области может и никак не сказываться на топологическом расположении вещественных решений (примеры: узел, седло).



Областью Пуанкаре  $\Pi$  назовем множество тех векторов  $\lambda$ , для которых выпуклая оболочка  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  не содержит 0.

Областью Зигеля  $\mathcal{Z}$  назовем дополнение,  $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^n \setminus \Pi$ .

Область Пуанкаре открыта, а область Зигеля замкнута. Легко проверить, что в области Пуанкаре резонансные плоскости лежат дискретно (т.е. у каждой точки  $\lambda$  области Пуанкаре есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом резонансных плоскостей), а в области Зигеля — всюду плотно. Предположим, что все  $n$  собственных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  различны.

**Теорема Пуанкаре.** Система (2) приводится к линейному виду (1) биголоморфной в окрестности 0 заменой координат, если  $\lambda \in \Pi \setminus \bigcup \Gamma_\mu$ .

**Теорема Зигеля.** Система (2) приводится к линейному виду (1) биголоморфной в окрестности 0 заменой координат для почти всех (по мере Лебега)  $\lambda$ .

Точка  $\lambda$  называется *точкой  $k$ -кратного резонанса*, если среди соотношений (4), которым она удовлетворяет, есть  $k$  линейно независимых и нет  $k + 1$ . Множество точек  $k$ -кратного резонанса имеет комплексную коразмерность  $k$ . Точки однократного резонанса — это те точки  $\lambda$  резонансной плоскости  $\Gamma_\mu$ , которые не принадлежат пересечению  $\Gamma_\mu$  с другими резонансными плоскостями.

Мы интересуемся тем, как меняется поведение решений нелинейной системы (2), когда  $\lambda$  проходит через однократный резонанс (4). Здесь полезна следующая аналогия с системой дифференциальных уравнений на торе. Пусть  $z_1, \dots, z_n$  — система координат, в которой линейная часть  $A$  системы (2) диагональна. Замена  $z = e^{i\varphi}$  приводит (2) к виду

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \sum a_m e^{im\varphi}, \quad \text{где } \omega_j = -i\lambda_j.$$

На торе линейному целочисленному соотношению  $(\mu, \omega) = 0$  между частотами  $\omega_j$  соответствует инвариантное многообразие коразмерности 1, близкое к  $(\mu, \varphi) = c$ . Поэтому естественно искать у системы (2) инвариантное многообразие, близкое к  $z^\mu = c$ .

## 2. Инвариантное многообразие $M_\varepsilon$

Рассмотрим аналитическое семейство динамических систем

$$\dot{z} = a(z, \varepsilon), \quad a(z, 0) = a(z) = Az + \dots, \quad (2_\varepsilon)$$

зависящее аналитически от комплексного параметра  $\varepsilon$ . Пусть все собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  линейной части  $A$  отличны от 0, различны и образуют вектор  $\lambda$  однократного резонанса (3).

**Гипотеза.** Для почти всех семейств  $(2_\varepsilon)$  в окрестности  $z = 0$  существует инвариантное относительно  $(2_\varepsilon)$  многообразие  $M_\varepsilon$  коразмерности 1, которое при  $\varepsilon = 0$  превращается в сепаратрисное многообразие системы  $(2_0)$ . Точнее, существует бианалитическая в окрестности 0 и аналитически зависящая от  $\varepsilon$  замена переменных  $w = w(z, \varepsilon)$  такая, что в новых переменных инвариантное многообразие  $M_\varepsilon$  задается уравнением

$$F(\varepsilon, w) = 0,$$

где  $F$  — аналитическая в окрестности  $\varepsilon = 0$ ,  $w = 0$  функция, разложение которой в ряд Тейлора в 0 начинается с

$$F = c_0 \varepsilon w_i + c_1 w^m + \dots, \quad (5)$$

где  $c_0, c_1$  — постоянные,  $w^m = w_1^{m_1} \dots w_n^{m_n}$ .

Таким образом, инвариантное многообразие  $M_\varepsilon$  задается в первом приближении уравнением вида  $w^\mu = c\varepsilon$ .

**Пример.** Если  $\lambda_1 = i\omega$ ,  $\lambda_2 = -i\omega$ , то приближенное уравнение инвариантного многообразия имеет вид  $w_1 w_2 = c\varepsilon$ . Если исходная система вещественная, записанная в комплексно-сопряженном собственном базисе, то  $w_2 = \bar{w}_1$ . Таким образом, на расстоянии  $\varepsilon$  от резонанса (в пространстве параметров) имеется предельный цикл, радиус которого  $|w|$  пропорционален  $\sqrt{\varepsilon}$ . Эта ситуация хорошо изучена (см. [5]–[8], [10]).

**Замечание.** Параметр  $\varepsilon$  введен лишь для удобства записи формулы (5).

### 3. Вычисления

Поскольку все  $\lambda_i$  отличны от 0, мы можем по теореме о неявной функции выбрать аналитически зависящие от  $\varepsilon$  координаты  $z'(z, \varepsilon)$  так, что неподвижная точка системы  $(2_\varepsilon)$  при всех  $\varepsilon$  будет  $z' = 0$ .

Поскольку все  $\lambda_i$  различны, мы можем новой заменой координат  $z''(z', \varepsilon)$  сделать матрицу линейной части диагональной. После этого

мы можем вслед за Пуанкаре [3] уничтожить в  $(2_\varepsilon)$  любое число «нерезонансных членов», так что наша система в новых координатах  $w(z'', \varepsilon)$  будет иметь вид

$$\dot{w}_j = w_j(\lambda_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon)w^\mu + \dots), \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Предположим, что обозначенные точками члены степени выше  $|\mu| + 1$  равны 0. Рассмотрим функцию  $\varphi = w^\mu$ . Имеем, согласно (6),

$$\dot{\varphi} = \varphi[c_0(\varepsilon) + c_1(\varepsilon)\varphi], \quad (7)$$

где  $c_0(\varepsilon) = (\mu, \lambda(\varepsilon))$ ,  $c_1(\varepsilon) = (\mu, b)$ . Многообразие  $M_\varepsilon$ , заданное уравнением

$$M_\varepsilon = \{w : c_0(\varepsilon) + c_1(\varepsilon)\varphi(w) = 0\},$$

инвариантно относительно (6). Заметим, что  $c_0(0) = 0$  (так как  $(\mu, \lambda(0)) = 0$  согласно (4)). Поэтому  $c_0(\varepsilon) = c_0\varepsilon + \dots$ ; остается положить  $c_1 = c_1(0)$  и умножить уравнение  $M_\varepsilon$  на  $w_i$ , чтобы привести его к виду (5).

Отброшенные выше члены (...) можно, действительно, уничтожить аналитическим выбором координат, если вектор  $\lambda$  принадлежит области Пуанкаре. Таким образом, в случае Пуанкаре приведенное выше рассуждение можно превратить в доказательство. Это сделано Н. Н. Брушлинской.

В случае Зигеля, вообще говоря, нельзя уничтожить члены (...) в (6) — их можно лишь отодвинуть до как угодно высокой степени, заменяя  $\lambda + bw^\mu$  полиномом по степеням  $w^\mu$ . Однако можно надеяться, что эти возмущения высокого порядка малости не разрушат инвариантное многообразие  $M_0$ .

#### 4. Коциклы

*Динамической системой*  $(M, g^t)$  называется однопараметрическая группа  $g^t$  диффеоморфизмов многообразия  $M$ .

*Цикл* или *инвариантное многообразие* системы  $(M, g^t)$  — это динамическая система  $(N, h^t)$  вместе с вложением  $i : N \rightarrow M$ , для которого  $ih^t = g^ti$ . Размерность  $N$  называется размерностью цикла.

*Коцикл* или *фактор* системы  $(M, g^t)$  — это динамическая система  $(K, f^t)$  вместе с отображением  $\varphi$  многообразия  $M$  на многообразии  $K$ , причем  $\varphi g^t = f^t \varphi$ . Размерность  $K$  называется размерностью коцикла.

В этих терминах мы можем сказать, что отображение  $\varphi : w \mapsto w^\mu$  задает одномерный коцикл (7), а инвариантное многообразие  $M_\varepsilon$  — это цикл коразмерности 1, соответствующий неподвижной точке коцикла (7) (точнее, следовало бы говорить о «ростке мероморфного коцикла»).

Итак, в области Пуанкаре прохождение однократного резонанса приводит к бифуркации неподвижной точки  $\varphi = 0$  одномерного коцикла (7).

В области Зигеля одномерный коцикл, аналогичный (7),

$$\dot{\varphi} = \varphi(b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + \dots) \quad (8)$$

также существует, но лишь в классе формальных степенных рядов. Из [9] видно, что соответствующие ряды могут расходиться при большинстве  $\lambda \in \mathcal{Z}$ .

## 5. Пересечение со сферой

Комплексные траектории системы (2) образуют в окрестности  $z = 0$  двумерное (в вещественном смысле) слоение с особенностью в 0. Чтобы разобраться в строении этой особенности, пересечем слоение сферой малого радиуса с центром в начале координат.

Предположим, что линейная часть системы (2) в координатах  $z_1, \dots, z_n$  диагональна:  $\dot{z}_j = \lambda_j z_j + \dots$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

**Теорема.** Если набор собственных чисел  $\lambda$  принадлежит области Пуанкаре, то каждая сфера  $|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = r^2$  достаточно малого радиуса пересекается со слоением (2) трансверсально.

**Доказательство.** Рассмотрим вначале линейную систему. Имеем

$$dr^2 = \sum (\bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j) = A dt + \bar{A} d\bar{t}, \quad A = \sum |z_j|^2 \lambda_j.$$

Условие трансверсальности слоя со сферой состоит в том, что 1-форма  $dr^2$  не должна обращаться в нулевую форму на касательной плоскости к слою. Но форма  $A dt + \bar{A} d\bar{t}$  нулевая только при  $A = 0$ . Соотношение  $A = 0$  не выполняется в случае Пуанкаре (и только в случае Пуанкаре) ни при каком  $z \neq 0$ . Итак, в линейном случае теорема доказана: слои пересекают сферу под ненулевым углом  $\alpha(z)$ .

Рассмотрим минимум  $\alpha_0$  угла  $\alpha(z)$  на сфере  $|z| = r$ . Величина  $\alpha_0$  не зависит от  $r$  (так как  $\alpha(cz) = \alpha(z)$ ). Итак,  $\alpha(z) \geq \alpha_0 > 0$  при всех  $z \neq 0$ .

Обратимся теперь к нелинейной системе. Угол между полями направлений нелинейной системы и ее линейной части мал вместе с  $|z|$ . Поэтому в достаточно малой окрестности  $z = 0$  он меньше  $\alpha_0$ , и траектории нелинейной системы (2) пересекают сферу трансверсально. Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Пересечения траекторий системы (2) со сферой достаточно малого радиуса  $|z| = r$  образуют одномерное слоение без особых точек на этой сфере  $S^{2n-1}$ .*

**Следствие 2.** *Слоения, полученные на всех сферах достаточно малого радиуса  $|z| = r$ , диффеоморфны. Более того, дифференцируемый тип слоения не меняется при любой деформации секущей сферы, если только она остается гладкой и трансверсальной слоям.*

Таким образом, изучаемое двумерное слоение (2) в окрестности особой точки  $z = 0$  гомеоморфно конусу над одномерным слоением на сфере.

**Замечание 1.** Полученное одномерное слоение на сфере  $S^{2n-1}$  есть разбиение сферы на траектории вещественной динамической системы без неподвижных точек. Это следует из ориентируемости сферы и слоения (2).

**Замечание 2.** В нерезонансном случае, согласно теореме Пуанкаре, система (2) в надлежащей системе координат в достаточно малой окрестности  $z = 0$  линейна. Отсюда вытекает, что дифференцируемый тип слоения на  $S^{2n-1}$  в нерезонансном случае такой же, как у линейной части системы (2).

Мы заключаем, что дифференцируемый тип слоения на  $S^{2n-1}$  остается таким же, как у линейной части системы, не только в той окрестности начала координат, где сходятся ряды Пуанкаре, но и далеко за ее пределами. Действительно, при приближении к резонансу область сходимости рядов Пуанкаре стремится к 0, тогда как область трансверсальности в теореме 1 остается ограниченной снизу. Таким образом, мы можем следить за прохождением резонанса по изменению одномерного слоения, полученного в пересечении со сферой фиксированного радиуса,  $|z| = r_0$ .

## 6. Пример

Опишем изменение топологического типа слоения на  $S^3$  при прохождении резонанса  $\lambda_1 = 2\lambda_2$  в системе

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + \dots, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + \dots \quad (9)$$

Мы находимся в области Пуанкаре, если отношение собственных чисел  $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$  не является отрицательным числом. Рассмотрим сначала слоение  $S^3$ , отвечающее линейной части системы (9).

Сепаратрисы  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 0$  пересекаются со сферой по большим кругам, являющимся циклами системы на  $S^3$ . Их коэффициент зацепления равен 1.

Если  $\lambda$  — не вещественное число (случай «фокуса»), то все остальные траектории сматываются с одного цикла и наматываются на другой. Заметим, что функции последования, соответствующие нашим двум циклам, комплексно-аналитичны (при надлежащем выборе комплексной структуры двумерной секущей площадки). Действительно, эти функции последования дифференцируемо эквивалентны комплексным функциям последования сепаратрис (как в линейном, так и в нелинейном случае). Отсюда следует, что собственные числа наших (вещественно двумерных) функций последования равны  $e^{\pm 2\pi i \lambda}$  и  $e^{\pm 2\pi i \lambda^{-1}}$  соответственно.

Слоения  $S^3$ , соответствующие всем фокусам, гомеоморфны друг другу, но не все диффеоморфны:  $\lambda^2 + \lambda^{-2}$  — инвариант диффеоморфизма.

Если  $\lambda$  — вещественное положительное («узел»), то мы также находимся в области Пуанкаре. В этом случае пространство  $S^3$  между двумя зацепленными циклами расслаивается на двумерные торы, заполненные обмотками с числом вращения  $\lambda$  (одинаковым на всех торах).

Рассмотрим теперь нелинейную систему (9).

В случае фокуса резонанс невозможен, поэтому слоение  $S^3$ , соответствующее нелинейной системе, диффеоморфно описанному выше слоению линейной системы. То же верно для нерезонансного узла, т.е. для всех  $\lambda > 0$ , исключая случаи, когда  $\lambda$  или  $1/\lambda$  — целое число.

Рассмотрим, например, резонанс  $\lambda = 2$ . В этом случае (если коэффициент  $c_1$  в формуле (5) отличен от нуля) система (9) имеет лишь одну сепаратрису, а система на  $S^3$  — лишь один цикл. Заменим  $\lambda = 2$  близким невещественным значением. Полученная система на  $S^3$ , с одной стороны, должна быть близкой к резонансной системе с одним циклом. С другой стороны, она должна быть диффеоморфной изученной вы-

ше системе, отвечающей линейному фокусу, и должна поэтому иметь 2 цикла с коэффициентом зацепления 1.

Можно показать, что один из этих циклов,  $C_1$ , близок к единственному циклу  $C$  резонансной системы. Другой же цикл,  $C_2$ , лежит на тонком торе с осевой линией  $C_1$  и замыкается после двух обходов вдоль  $C_1$ , сделав один оборот по меридиану (так что коэффициент зацепления  $C_2$  и  $C_1$  равен 1).

Итак, перестройка системы на  $S^3$  при прохождении через резонанс  $\lambda = 2$  состоит в бифуркации двукратной периодической траектории от периодической траектории с собственными числами  $-1, -1$ .

Автор благодарен Н. Н. Брушлинской, А. Д. Брюно и А. Г. Кушниренко за полезные обсуждения, а также рецензенту за ценные замечания.

## Литература

- [1] Особенности дифференцируемых отображений: Сб. переводов. М.: Мир, 1968, 268 с.
- [2] Арнольд В. И. Особенности гладких отображений. *УМН*, 1968, **23**(1), 3–44.
- [3] Poincaré H. Thèse, 1879. In: Poincaré H. Oeuvres de Henri Poincaré. T. 1. Paris, 1928, 132 + 382 p.
- [4] Зигель К. Л. О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия. В кн.: Математика: Период. сб. перев. ин. статей. М., 1961, **5**(2), 119–128.
- [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1954, 795 с.; §27: Возникновение турбулентности.
- [6] Неймарк Ю. И. О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров. *ДАН СССР*, 1959, **129**(4), 736–739.
- [7] Брушлинская Н. Н. Качественное интегрирование одной системы  $n$  дифференциальных уравнений в области, содержащей особую точку и предельный цикл. *ДАН СССР*, 1961, **139**(1), 9–12.
- [8] Sacker R. J. On Invariant Surfaces and Bifurcation of Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations. New York University, 1964.
- [9] Брюно А. Д. О расходимости преобразований дифференциальных уравнений к нормальной форме. *ДАН СССР*, 1967, **174**(5), 1003–1006.
- [10] Hopf E. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung. *Berich. Sächs. Akad. Wiss., Leipzig, Math.-Phys. Kl.*, 1942, **94**(19), 3–22.





## Кольцо когомологий группы крашенных кос

Вычислено кольцо когомологий пространства упорядоченных наборов  $n$  различных точек плоскости.

Группа крашенных кос Артина  $I(n)$  определяется как фундаментальная группа пространства  $M_n$  упорядоченных наборов  $n$  попарно различных точек плоскости<sup>1</sup>. Нетрудно показать, что  $M_n$  есть пространство  $K(\pi, 1)$  для группы  $I(n)$ :

$$\pi_1(M_n) = I(n), \quad \pi_i(M_n) = 0 \quad \text{при } i > 1.$$

Отсюда следует, что когомологии группы  $I(n)$  совпадают с когомологиями пространства  $M_n$  (имеется в виду тривиальное действие  $\mathbb{Z}$ ):

$$H^*(I(n)) \cong H^*(M_n, \mathbb{Z}).$$

В настоящей заметке описано это кольцо когомологий. Мы используем реализацию  $M_n$  в виде комплексного аффинного пространства  $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n)\}$  с «выкинутыми диагоналями»:

$$M_n = \{z \in \mathbb{C}^n : z_k \neq z_l \forall k \neq l\}.$$

Обозначим через  $A(n)$  внешнее градуированное кольцо, порожденное  $C_n^2$  одномерными элементами  $\omega_{k,l} = \omega_{l,k}$ ,  $1 \leq k \neq l \leq n$ , удовлетворяющими  $C_n^3$  соотношениям

$$\omega_{k,l}\omega_{l,m} + \omega_{l,m}\omega_{m,k} + \omega_{m,k}\omega_{k,l} = 0. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Кольцо когомологий группы крашенных кос изоморфно  $A(n)$ . Изоморфизм  $H^*(M_n, \mathbb{Z}) \cong A(n)$  устанавливается формулами

$$\omega_{k,l} = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz_k - dz_l}{z_k - z_l}. \quad (2)$$

<sup>1</sup> Название объясняется другим определением:  $I(n)$  есть ядро естественного гомоморфизма  $B(n) \rightarrow S(n)$  группы кос из  $n$  нитей на симметрическую группу перестановок концов косы. Иными словами,  $I(n)$  состоит из кос, каждая нить которых индивидуализирована (покрашена в свой цвет) и кончается там же, где начинается.

Иными словами, одномерные образующие  $\omega_{k,l}$  соответствуют обходам вокруг диагоналей  $z_k = z_l$ .

**Следствие 1.** Группы когомологий группы крашенных кос не имеют кручения.

**Следствие 2.** Полином Пуанкаре многообразия  $M_n$  равен

$$p(t) = (1+t)(1+2t)\dots(1+(n-1)t).$$

Иными словами, группы когомологий многообразия  $M_n$  (или группы  $I(n)$ ) такие же, как у прямого произведения окружности, букета двух окружностей, ..., букета  $n-1$  окружностей.

**Следствие 3.** Аддитивный базис кольца  $A(n)$  состоит из всех произведений вида

$$\omega_{k_1, l_1} \omega_{k_2, l_2} \dots \omega_{k_p, l_p}, \quad \text{где } k_s < l_s, l_1 < l_2 < \dots < l_p. \quad (3)$$

**Следствие 4.** Подкольцо кольца внешних дифференциальных форм, порожденное  $C_n^2$  формами (2), изоморфно  $A(n)$ .

**Следствие 5.** Внешний многочлен от дифференциальных форм (2) когомологичен 0 в  $M_n$  тогда и только тогда, когда он равен 0.

**Следствие 6.** Симметризация любого внешнего многочлена степени выше 1 от дифференциальных форм (2) равна 0.

**Пример.** Имеет место неочевидное тождество

$$\sum_{120} \omega_{1,2} \wedge \omega_{2,3} \wedge \omega_{3,4} \wedge \omega_{4,5} = 0,$$

где суммирование производится по всем 120 перестановкам цифр 1, ..., 5.

Легко доказывается

**Лемма 1.** Существует расслоение  $M_n \xrightarrow{p} M_{n-1}$ ; его слой — плоскость без  $n-1$  точки. Действие фундаментальной группы базы  $M_{n-1}$  на когомологии слоя тривиально. Расслоение  $p$  имеет секущую.

Действительно, положим  $p(z_1, \dots, z_n) = z_1, \dots, z_{n-1}$ . Тогда слой  $F_{n-1} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq z_1, \dots, z_{n-1}\}$ . Слой  $F_{n-1}$  гомотопически эквивалентен букету из  $n-1$  окружностей. Группа одномерных (ко)гомологий слоя изоморфна  $\mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}$  ( $n-1$  раз). Фундаментальная группа базы —

группа крашенных кос из  $n - 1$  нити  $I(n - 1)$ . Ее действие на слое — обычное действие группы кос на плоскости с выкинутыми точками. Но косы  $I(n - 1)$  крашенные, и они не переставляют выкинутые точки. Следовательно, на (ко)гомологии слоя  $I(n - 1)$  действует тривиально. Секущую можно задать формулой

$$z_n = \frac{z_1 + \dots + z_{n-1}}{n-1} + 2 \max_{1 \leq i, j \leq n-1} |z_i - z_j| + 1.$$

Приведенное ниже простое доказательство теоремы 1 принадлежит Д. Б. Фуксу.

Рассмотрим когомологическую спектральную последовательность расслоения  $M_n \rightarrow M_{n-1}$ . Поскольку  $\pi_1(M_{n-1})$  действует на когомологии слоя  $F_{n-1}$  тривиально, член  $E_2^* = H^*(M_{n-1}, H^*(F_{n-1}))$  такой же, как в прямом произведении. Единственный возможный дифференциал  $d_2$  в действительности равен 0 (это легко вытекает из существования секущей поверхности). Таким образом,  $E_2 = E_\infty$ . Итак, группы (ко)гомологий  $M_n$  такие же, как у прямого произведения  $M_{n-1}$  и  $F_{n-1}$ . Полагая последовательно  $n = 2, 3, \dots$  ( $M_1 = \mathbb{C}$ ), находим, что (ко)гомологии  $M_n$  такие же, как у прямого произведения окружности, лемнискаты, ..., букета  $n - 1$  окружности. Утверждения следствий 1 и 2 доказаны.

Построим аддитивный базис  $H^*(M_n, \mathbb{Z})$ . Из нашей спектральной последовательности следует, что он получается из образа аддитивного базиса  $H^*(M_{n-1}, \mathbb{Z})$  при отображении  $p^*$  добавлением произведений его элементов на  $n - 1$  одномерных классов когомологий, которые переходят в образующие  $H^1(F_{n-1}, \mathbb{Z})$  при отображении  $i^*$  (где  $i : F_{n-1} \rightarrow M_n$ ). Заметим, что в качестве таких одномерных классов можно взять классы когомологий дифференциальных форм  $\omega_{1,n}, \omega_{2,n}, \dots, \omega_{n-1,n}$  из (2). Полагая последовательно  $n = 2, 3, \dots$ , убеждаемся, что произведения вида (3) дифференциальных форм (2) образуют аддитивный базис  $H^*(M_n, \mathbb{Z})$ .

Дифференциальные формы (2) удовлетворяют соотношениям (1). Это проверяется непосредственной подстановкой. Классы когомологий дифференциальных форм (2) в кольце  $H^*(M_n, \mathbb{Z})$  тем более удовлетворяют соотношениям (1). Мы можем поэтому построить гомоморфизм колец  $\varphi : A(n) \rightarrow H^*(M_n, \mathbb{Z})$ , сопоставляя образующим  $\omega_{k,l} \in A(n)$  дифференциальные формы из  $H^*(M_n, \mathbb{Z})$  по формуле (2). Выше мы показали, что  $\varphi$  есть гомоморфизм на. Покажем, что  $\varphi$  не имеет ядра. Легко доказывается

**Лемма 2.** Кольцо  $A(n)$  аддитивно порождается произведениями (3).

Действительно, из косокоммутативности следует, что  $A(n)$  порождается произведениями  $\omega_{k_1, l_1} \cdot \dots \cdot \omega_{k_p, l_p}$ , где  $k_s < l_s$ ,  $l_s \leq l_{s+1}$ . Соотношение (1) позволяет изгнать равные  $l$ . Например,

$$\omega_{k_1, l} \omega_{k_2, l} = \omega_{k_1, k_2} \omega_{k_2, l} - \omega_{k_1, k_2} \omega_{k_1, l}.$$

В обоих слагаемых больший индекс первого множителя строго меньше  $l$ . Таким образом, все произведения  $\omega_{k, l}$  выражаются аддитивно через произведения, в которых  $k_s < l_s$ ,  $l_s < l_{s+1}$ . Лемма доказана.

Отсюда вытекает, что гомоморфизм колец  $\varphi : A(n) \rightarrow H^*$  не имеет ядра. Действительно, аддитивно порождающие  $A(n)$  произведения (3) переходят в независимые элементы  $H^*$  (выше мы установили, что они образуют в  $H^*$  аддитивный базис). Следовательно,  $\varphi$  не имеет ядра; значит,  $\varphi$  — изоморфизм колец. Теорема 1 доказана.

Одновременно доказано следствие 3, так как мы уже знаем, что в кольце  $H^*$  произведения (3) образуют аддитивный базис. Следствия 4 и 5 вытекают из того, что, с одной стороны, классы когомологий форм, порожденных формами (2), образуют изоморфное  $A(n)$  кольцо  $H^*(M_n, \mathbb{Z})$ ; с другой же стороны, сами дифференциальные формы (2) удовлетворяют соотношениям (1).

Следствие 6 вытекает из следствия 5 и конечности групп когомологий  $H^i(B(n))$ ,  $i > 1$  ( $B(n)$  — группа кос из  $n$  нитей) [1].

**Замечание.** Пусть  $M$  — многообразие, полученное из  $\mathbb{C}^n$  выкидыванием любого числа гиперплоскостей:

$$M = \{z \in \mathbb{C}^n : a_k(z) \neq 0, k = 1, \dots, N\}.$$

Вероятно, кольцо  $H^*(M, \mathbb{Z})$  не имеет кручения и порождено одномерными классами  $\omega_k = \frac{1}{2\pi i} \frac{da_k}{a_k}$ , причем внешний полином от  $\omega_k$  когомологичен 0 в  $H^*$ , лишь когда он равен нулю.

Автор благодарен В. П. Паламодову и Д. Б. Фуксу за полезные обсуждения.

## Литература

- [1] Арнольд В. И. О косах алгебраических функций и когомологиях ласточкиных хвостов. УМН, 1968, 23(4), 247–248.

## Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела и идеальной жидкости

Из приведенных ниже простых соображений теории групп Ли вытекают новые законы сохранения в гидродинамике идеальной жидкости.

**1. Уравнение Эйлера.** Пусть  $G$  — группа Ли,  $\mathfrak{A}$  — ее алгебра Ли,  $\mathfrak{A}^*$  — сопряженное пространство,  $[\cdot, \cdot]$  — коммутатор Ли в  $\mathfrak{A}$ . Каждый элемент  $a \in \mathfrak{A}$  действует на  $\mathfrak{A}^*$  как линейный оператор  $\text{Ad}_a^*$ . Будем обозначать  $\text{Ad}_a^* \xi$  через  $\{a, \xi\}$  (где  $a \in \mathfrak{A}$ ,  $\xi$  и  $\{a, \xi\} \in \mathfrak{A}^*$ ). Тогда, по определению,

$$(b, \{a, \xi\}) = ([a, b], \xi).$$

Пусть  $H$  — функция на  $\mathfrak{A}^*$ . Кокасательное пространство к  $\mathfrak{A}^*$  в каждой точке естественно отождествляется с  $\mathfrak{A}$ . Уравнением Эйлера для «твердого тела с группой  $G$  и энергией  $H$ » называется (см. [1]) уравнение

$$\dot{M} = \{\omega, M\}, \quad \text{где } M \in \mathfrak{A}^*, \quad \omega(M) = dH|_M \in \mathfrak{A}. \quad (1)$$

В случае обычного твердого тела  $G = \text{SO}(3)$ , а  $M$  и  $\omega$  — кинетический момент и угловая скорость. В случае идеальной жидкости  $G = \text{SDiff } D$  есть группа сохраняющих элемент объема диффеоморфизмов римановой области  $D$ . В этом случае  $\omega$  — поле скоростей,  $M$  — циркуляция.

**2. Уравнение Гамильтона.** Орбиты действия группы  $G$  в  $\mathfrak{A}^*$  являются инвариантными многообразиями уравнения (1) (закон сохранения момента). На каждой из этих орбит имеется естественная симплектическая структура (см. [2]). Именно, пусть  $\xi$  и  $\eta$  — векторы, касательные к орбите  $V$  в точке  $M \in \mathfrak{A}^*$ . Тогда в алгебре найдутся  $f$  и  $g \in \mathfrak{A}$ , для которых

$$\xi = \{f, M\}, \quad \eta = \{g, M\}.$$

Положим

$$\Omega(\xi, \eta) = ([f, g], M).$$

Число  $\Omega(\xi, \eta)$  не зависит от выбора представителей  $f$  и  $g$ . Дифференциальная 2-форма  $\Omega$  на орбите  $V$  невырождена и замкнута, а потому задает на  $V$  структуру симплектического многообразия.

Функция  $F$  на симплектическом многообразии  $(V, \Omega)$  определяет гамильтоново векторное поле  $X_F$  по формуле « $\Omega(\xi, X_F) = (dF, \xi)$  для всякого касательного к  $V$  вектора  $\xi$ ». Уравнением Гамильтона с функцией Гамильтона  $F$  называется уравнение  $\dot{x} = X_F$ ,  $x \in V$ . Легко доказывается<sup>1</sup>

**Теорема.** Уравнение Эйлера (1) на каждой орбите  $V$  является гамильтоновым, с функцией Гамильтона  $H$ .

**Доказательство.** Всякий вектор  $\xi$ , касательный к  $V$  в  $M$ , имеет вид

$$\xi = \{f, M\}.$$

В частности, эйлерово поле (1) имеет вид  $X = \{dH, M\}$ . Из определений  $\Omega$  и  $\{\cdot, \cdot\}$  вытекает

$$\Omega(\xi, X) = ([f, dH], M) = (dH, \{f, M\}) = (dH, \xi),$$

что и требовалось доказать.

**3. Интегральные инварианты и первые интегралы.** Применяя к уравнению (1) общие теоремы гамильтоновой динамики, получаем

**Следствие 1.** Уравнение Эйлера (1) на каждой орбите  $V$  имеет интегральным инвариантом 2-форму  $\Omega$ , а также каждую внешнюю степень  $\Omega$ .

Рассмотрим положение равновесия  $M$  уравнения (1) на  $V$ . Применяя стандартные методы [3], получаем

**Следствие 2.** Эллиптическое невырожденное положение равновесия  $M$  уравнения Эйлера (1) на орбите  $V$  является точкой плотности условно-периодических траекторий. В окрестности такой точки  $M$  уравнение (1) на  $V$  имеет  $n$  формальных первых интегралов (где  $2n = \dim V$ ).

<sup>1</sup> Этот факт был замечен также А. М. Вершиком.

Если положение равновесия  $M$  на  $V$  не изолировано, так что существует вектор  $\xi$ , касательный в  $M$  и к  $V$ , и к многообразию положений равновесия уравнения (1), то справедливо

**Следствие 3.** *Линеаризованное в окрестности  $M$  уравнение Эйлера (1) на  $V$  имеет линейный первый интеграл.*

А именно, таким интегралом является

$$\Phi(\eta) = \Omega(\xi, \eta).$$

**4. Гидродинамический случай.** Применение сказанного выше к уравнениям гидродинамики идеальной жидкости дает законы сохранения величин необычной природы,  $\Omega$  и  $I$ . Величина  $\Omega$  представляет собой функционал от трех бесконечно близких равнозавихренных полей. Соответствующий интеграл

$$I = \iint \Omega$$

берется по двумерной цепи в функциональном пространстве. Форма  $\Omega$  сохраняется в линеаризованной задаче, интеграл  $I$  сохраняется точно.

**Пример.** Рассмотрим течения идеальной жидкости в ограниченной односвязной области  $D$  евклидовой плоскости  $x, y$ . Алгебру Ли  $\mathcal{A}$  группы  $\text{SDiff } D$  можно отождествить с алгеброй функций тока, равных нулю на границе; коммутатор Ли превращается при этом в якобиан функций тока

$$J(\varphi, \psi) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}.$$

Сопряженное пространство  $\mathcal{A}^*$  можно отождествить с пространством функций ротора  $r$ . Операция  $\{\cdot, \cdot\}$  сводится тогда к якобиану функции тока и функции ротора.

Рассмотрим какое-нибудь начальное поле скоростей  $v \in \mathcal{A}$  и два бесконечно близких поля  $v_1 = v + \delta v_1$ ,  $v_2 = v + \delta v_2 \in \mathcal{A}$ . Эти поля равнозавихрены с  $v$ , если их роторы можно представить в виде  $r + \delta r_i$ , где  $\delta r_i = J(\delta \varphi_i, r)$ ,  $\delta \varphi_i \in \mathcal{A}$ . При движении жидкости с начальными условиями  $v$ ,  $v_1$  и  $v_2$  поля скоростей будут все время оставаться равнозавихренными, так что при всех  $t$  будет  $\delta r_i = J(\delta \varphi_i, r)$  (с зависящими от  $t$  полями  $\delta \varphi_i$ ). Сохраняться (в линеаризованной задаче) будет величина

$$\Omega(\delta v_1, \delta v_2) = \iint r J(\delta \varphi_1, \delta \varphi_2) dx dy.$$

Автор благодарен В. И. Юдовичу за полезные обсуждения.

## Литература

- [1] Arnold V. I. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1966, 16(1), 319–361.
- [2] Кириллов А. А. Характеры унитарных представлений групп Ли. *Функц. анализ и его прилож.*, 1968, 2(2), 40–55.
- [3] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *УМН*, 1963, 18(6), 91–192.



Об одномерных когомологиях алгебры Ли  
бездивергентных векторных полей  
и о числах вращения динамических систем

**1. Определения.** Пусть  $\mathfrak{A}$  — алгебра Ли. Коммутант  $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$  есть множество конечных сумм коммутаторов элементов  $\mathfrak{A}$ . Группой одномерных когомологий  $H^1(\mathfrak{A}, \mathbb{R})$  называется линейное пространство, дуальное к  $\mathfrak{A}/[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$ .

Пусть  $G$  — группа диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема  $\tau$  бесконечно дифференцируемого компактного связного  $n$ -мерного многообразия  $M$ . Соответствующая алгебра Ли  $\mathfrak{A}$  состоит из  $C^\infty$  векторных полей дивергенции нуль на  $(M, \tau)$ .

Векторное поле  $X$  дивергенции нуль на  $(M, \tau)$  называется также динамической системой  $(X, M, \tau)$ . Класс вращения [1], [2] динамической системы  $X$  есть класс одномерных гомологий  $\lambda(X) \in H_1(M, \mathbb{R})$ , определяемый следующим образом.

Естественный изоморфизм между динамическими системами на  $(M, \tau)$  и замкнутыми  $(n-1)$ -формами на  $M$  позволяет сопоставить каждой динамической системе  $X \in \mathfrak{A}$  класс когомологий  $h \in H^{n-1}(M, \mathbb{R})$ . Изоморфизм Пуанкаре  $D : H^{n-1} \rightarrow H_1$  переводит  $h$  в класс вращения  $\lambda(X)$ . Отображение  $\lambda : \mathfrak{A} \rightarrow H_1$  является гомоморфизмом алгебр Ли ( $H_1$  тривиальна).

**Теорема 1.** Коммутант  $\mathfrak{A}$  есть алгебра Ли всех динамических систем с классом вращения нуль:  $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] = \text{Ker } \lambda$ ,  $H^1(\mathfrak{A}, \mathbb{R}) = H^1(M, \mathbb{R})$ .

**2. Доказательство.** Рассмотрим соответствующую локальную задачу. Обозначим через  $I^n$  единичный замкнутый куб в  $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$ . Будем называть функцию (форму, поле, ...) финитной, если она обращается в нуль в окрестности границы куба. Обозначим через  $\mathfrak{A}_0$  алгебру Ли финитных бездивергентных  $C^\infty$  векторных полей в  $I^n$ .

**Лемма 1.** Если  $n \neq 2$ , то алгебра  $\mathfrak{A}_0$  совпадает со своим коммутантом.

Пусть  $n > 2$ . Теорема вытекает из леммы, так как с помощью разбиения единицы всякое бездивергентное поле  $X$  на  $M$  можно представить в виде суммы бездивергентных полей с малыми носителями.

Доказательство леммы основано на явном представлении всякого поля  $X \in \mathcal{A}_0$  в виде суммы скобок Пуассона  $\{P_i, Q_i\}$ , где поля  $P_i$  фиксированы. Для определения  $Q \in \mathcal{A}_0$  получаются линейные уравнения, которые можно решить. При этом в качестве  $P_i$  можно использовать и не финитные бездивергентные поля, ибо всякое бездивергентное поле в  $I^n$  можно сделать еще и финитным, изменив его лишь в сколь угодно малой окрестности границы, где все равно  $Q_i \equiv 0$ .

Пусть  $X \in \mathcal{A}_0$ . Полю  $X$  соответствует замкнутая  $(n - 1)$ -форма. Эту форму можно представить в виде  $d\Omega$ , где  $(n - 2)$ -форма  $\Omega$  финитна (лемма Пуанкаре + гомологии сферы). Форма  $\Omega$  разлагается по базисным:  $\Omega = a_{12}dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots$ . Коэффициенты  $a_{ij}$  финитны. Если интеграл от  $a_{12}$  равен 0, то соответствующее слагаемому с  $a_{12}$  поле можно представить в виде суммы скобок Пуассона базисных полей ( $P_i = e_i$ ) с полями  $Q_i \in \mathcal{A}_0$ , ибо эта задача сводится<sup>1</sup> к представлению финитной функции с интегралом 0 в виде дивергенции финитного поля, что можно сделать с помощью леммы Пуанкаре. Итак, коммутант  $\mathcal{A}_0$  содержит все поля  $X$ , для которых коэффициенты  $a_{ij}$  имеют интегралы 0.

Условие  $n \geq 3$  используется следующим образом для борьбы с интегралами от  $a_{ij}$ .

Рассмотрим векторные поля  $Y = x_3e_2 - x_2e_3$ ,  $Z = v_1e_3 - v_3e_1$ , где  $v_i = \partial v / \partial x_i$ ,  $v$  — финитная функция. Поля  $Y$ ,  $Z$  бездивергентны, а  $Z$  финитно. Скобка Пуассона  $\{Y, Z\}$  — это векторное поле, соответствующее  $(n - 2)$ -форме  $\Omega$ , коэффициенты которой все равны нулю, исключая  $a_{12} = x_3v_3$ ,  $a_{23} = x_3v_1$ ,  $a_{13} = x_2v_3$ . Из интегралов  $a_{ij}$  отличен от нуля лишь  $\int a_{12}\tau = -\int v\tau$ .

Итак, коммутант  $\mathcal{A}_0$  содержит поля  $X$  с любыми наперед заданными значениями интегралов от  $a_{ij}$ . Лемма доказана.

Между прочим, мы видим, что второй коммутант  $\mathcal{A}$  (или  $\mathcal{A}_0$ ) совпадает с первым. Аналогичным образом можно убедиться, что коммутант алгебры Ли всех векторных полей на многообразии совпадает с этой алгеброй (ср. [3]).

<sup>1</sup> Здесь пропущено полстраницы выкладок.

**3. Симплектический случай.** В случае  $n = 2$  лемма 1 неверна. Но этот случай лучше рассматривать в рамках другой серии алгебр.

Пусть  $(M^{2n}, \omega^2)$  — симплектическое многообразие, т.е.  $\omega^2$  — замкнутая невырожденная 2-форма на  $M^{2n}$ . Соответствующая алгебра Ли  $\mathfrak{A}$  называется алгеброй гамильтоновых векторных полей.

**Теорема 2<sup>2</sup>.** Коммутант  $\mathfrak{A}$  есть алгебра Ли гамильтоновых полей с однозначными гамильтонианами:  $\mathfrak{A}/[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] = H^1(M, \mathbb{R})$ ;  $H^1(\mathfrak{A}, \mathbb{R}) = H_1(M, \mathbb{R})$ .

**Лемма 2.** Коммутант алгебры  $\mathfrak{A}_0$  финитных гамильтоновых полей (в кубе  $I^{2n}$  пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $\omega^2 = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$ ) есть алгебра Ли гамильтоновых полей с финитной в среднем равной нулю функцией Гамильтона.

**Лемма 3.** Всякая функция на связном многообразии  $M$  с элементом объема  $\tau$ , в среднем равная нулю, представима в виде суммы функций со сколь угодно малыми носителями, в среднем равных нулю.

Лемма 3 сразу следует из связности нерва покрытия  $M$  (см. также [4]). Лемма 2 доказывается, как лемма 1 в §2. Теорема 2 вытекает из лемм 2 и 3 и теоремы Дарбу [5], как теорема 1 из леммы 1.

Одновременно мы замечаем, что коммутант алгебры Ли функций Гамильтона на  $(M, \omega)$  совпадает с алгеброй Ли функций на  $M$ , в среднем равных нулю.

**4. Двумерный случай.** На двумерном многообразии гамильтоновость и бездивергентность совпадают. Поэтому теорема 1 для  $n = 2$  вытекает из теоремы 2. Заметим, что в применении к двумерным многообразиям теоремы 1 и 2 принимают следующий вид<sup>3</sup>:

**Теорема 3.** Всякая 2-форма  $\alpha$  на связном компактном двумерном многообразии  $M$ , имеющая интеграл 0, индуцирована стандартной формой  $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  при отображении  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , так что  $\alpha = f^*\omega$ .

Например, всякая функция на двумерной сфере, в среднем равная нулю, может быть представлена в виде суммы трех якобианов отображений сферы на плоскость.

<sup>2</sup> Эту теорему доказали также Полэ и Калаби.

<sup>3</sup> Эта формулировка подсказана докладом В. А. Рохлина о работах Нэша о вложениях римановых метрик.

**5. Замечание.** Всякое гамильтоново поле бездивергентно, и потому имеет класс вращения. Возникает вопрос: (А) *всякое ли гамильтоново поле с классом вращения 0 имеет однозначный гамильтониан?* Эквивалентные формулировки: (Б) *В каждом ли классе гомологий  $H_1(M, \mathbb{R})$  есть гамильтоново поле?* (В) *Является ли оператор умножения на  $\omega^{n-1}$  изоморфизмом  $H^1 \rightarrow H^{2n-1}(M^{2n}, \mathbb{R})$ ?*

Ответ положителен, если  $(M^{2n}, \omega^2)$  допускает кэлерову структуру.

## Литература

- [1] Swartzman S., *Ann. Math.*, 1957, **66**(2), 270–289.
- [2] Гельфанд И. М., Пятецкий-Шапиро И. И. Об одной теореме Пуанкаре. *ДАН СССР*, 1959, **127**(3), 490–493.
- [3] Гельфанд И. М., Фукс Д. Б. Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1968, **2**(4), 92–93.
- [4] Moser J. K. On the volume elements on a manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, **120**(2), 286–294.
- [5] Darboux G. Sur le problème de Pfaff. *Bull. Sci. Math. Astron.*, 1882, **6**, 14–30, 49–68.

## О классах когомологий алгебраических функций, сохраняющихся при преобразованиях Чирнгаузена

Существует аналогия между алгебраическими функциями и векторными расслоениями, причем роль многообразия Грассмана играет пространство  $K(\pi, 1)$  группы кос. Среди классов когомологий дополнения к многообразию ветвления алгебраической функции выделяются классы, индуцированные классами когомологий группы кос. Некоторые из этих классов (во всяком случае одномерный по модулю 2 и трехмерный) инвариантны относительно преобразования Чирнгаузена. Отсюда вытекает, например, что функцию  $w(a, b, c)$ , заданную уравнением  $w^4 + aw^2 + bw + c = 0$ , нельзя представить в виде преобразования Чирнгаузена с полиномиальными коэффициентами никакой алгебраической функции  $z(u, v)$  двух переменных  $u, v$ , являющихся полиномами от  $a, b, c$ .

**1. Классы когомологий алгебраической функции.** Алгебраическая (целая,  $n$ -значная) функция  $z(x)$  от  $k$  переменных  $x$  задается полиномиальным отображением  $p: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$  пространства ее аргументов в пространство  $\mathbb{C}^n = \{a\}$  аргументов универсальной функции  $z(a)$ , заданной уравнением  $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ . Многообразием ветвления универсальной функции  $z(a)$  называется гиперповерхность  $\Sigma$  в  $\mathbb{C}^n$ , заданная уравнением  $\Delta(a) = 0$ , где  $\Delta$  — дискриминант. Многообразием ветвления  $\Sigma(p)$  функции  $z(x)$ , заданной отображением  $p$ , называется  $p^{-1}(\Sigma)$ . Дополнения обозначим через  $G = \mathbb{C}^n \setminus \Sigma$ ,  $G(p) = \mathbb{C}^k \setminus \Sigma(p)$ . Функция  $z(x)$  собственно  $n$ -значная, если  $G(p)$  непусто. Сужения отображения  $p$  на  $\Sigma(p)$  и на  $G(p)$  будем обозначать просто через  $p$ . Отображение  $p$  индуцирует отображение когомологий  $p^*: H^i(G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(G(p), \mathbb{Z})$ . Пусть  $\alpha \in H^i(G)$ . Классом когомологий  $\alpha(p)$  собственно  $n$ -значной алгебраической функции, заданной отображением  $p$ , будем называть  $p^* \alpha \in H^i(G(p))$ .

Информация о классах когомологий универсальной функции  $H^i(G)$  имеется в [1]. В частности, при  $n \geq 4$  имеем  $H^0 = H^1 = \mathbb{Z}$ ,  $H^2 = 0$ ,  $H^3 = \mathbb{Z}_2$ . Обозначим через  $\alpha_1 = \text{cl}(2\pi i)^{-1} d \ln \Delta$  образующую  $H^1$ , а че-

рез  $\alpha_3$  — образующую  $H^3$ . Классы  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  имеют следующий геометрический смысл. Пусть  $X$  — алгебраическое подмногообразие  $\mathbb{C}^N$ . Через  ${}_F H$  будем обозначать гомологии с замкнутыми носителями, через  $I : H^i(\mathbb{C}^N \setminus X) \rightarrow {}_F H_{2N-i-1}(X)$  — изоморфизм Александера. Пусть  $\Sigma^k$  — алгебраическое подмногообразие пространства  $\mathbb{C}^n$ , состоящее из многочленов  $a$ , имеющих по меньшей мере  $k$  двойных корней, т.е. имеющих вид  $a = a_k^2 a_{n-2k}$ . Тогда  $I\alpha_1 = \text{cl } \Sigma^1$ ,  $I\alpha_3 = \text{cl } \Sigma^2$ .

**2. Преобразование Чирнгаузена.** Пусть  $\mathbb{C}_a^n$  — пространство полиномов  $a$  вида  $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  с корнями  $z_1, \dots, z_n$ . Пусть  $\mathbb{C}_b^n$  — пространство полиномов  $b$  вида  $b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$ . *Отображение Чирнгаузена*  $T$  сопоставляет паре  $(a, b)$  полином  $c$  вида  $w^n + c_1 w^{n-1} + \dots + c_n$ , корни которого суть  $w_i = b(z_i)$ . Легко проверить, что  $T : \mathbb{C}_a^n \times \mathbb{C}_b^n \rightarrow \mathbb{C}_c^n$  есть полиномиальное отображение.

Пусть  $p : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}_a^n$  — полиномиальное отображение, задающее алгебраическую функцию  $z(x)$ . Пусть  $q : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}_b^n$  — другое полиномиальное отображение. *Преобразованием Чирнгаузена функции  $z(x)$  с коэффициентами  $q$*  называется переход от  $z(x)$  к алгебраической функции  $w(x)$ , заданной отображением  $r : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$ , где

$$r(x) = T(p(x), q(x)).$$

При преобразовании Чирнгаузена многообразие ветвления может только увеличиваться. Поэтому существует естественное вложение дополнений  $i : G(r) \rightarrow G(p)$ , индуцирующее отображение когомологий  $i^* : H^k(G(p)) \rightarrow H^k(G(r))$ . Мы будем предполагать, что функция  $w(x)$  собственно  $n$ -значная.

**3. Теорема.** *Классы когомологий  $\alpha_1 \bmod 2$  и  $\alpha_3$  инвариантны относительно преобразования Чирнгаузена:*

$$\alpha_1(r) = i^* \alpha_1(p) + 2\beta, \quad \alpha_3(r) = i^* \alpha_3(p).$$

При этом  $I\beta$  — фундаментальный цикл некоторой гиперповерхности в  $\mathbb{C}^k$ .

**4. Вычисления.** Пусть  $f : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^N$  — полиномиальное отображение,  $X \subset \mathbb{C}^N$  — алгебраическое многообразие,  $Y = f^{-1}X$ . Изоморфизм

Александера  $I$  превращает отображение когомологий  $f^* : H^i(\mathbb{C}^N \setminus X) \rightarrow H^i(\mathbb{C}^M \setminus Y)$  в отображение гомологий  $f^! = If^*I^{-1} : {}_F H_{2N-i-1}(X) \rightarrow {}_F H_{2M-i-1}(Y)$ . Если выполнено некоторое условие квазитрансверсальности, то  $f^!$  можно интерпретировать как взятие прообраза  $f$  с учетом кратностей.

В частности, рассмотрим в качестве  $(f, X)$  отображение Чирнгаузена  $T : \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}_c^n$  и многообразие  $\Sigma^1 \subset \mathbb{C}_c^n$ . Обозначим через  $\Psi^k \subset \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}_a^n \times \mathbb{C}_b^n$  множество таких пар  $(a, b)$ , что полином  $b$  принимает равные значения  $b(z_i) = b(z_j)$  в  $k$  непересекающихся парах корней полинома  $a$ . Пусть  $\Sigma_1^k = \Sigma^k \times \mathbb{C}_b^n \subset \mathbb{C}^{2n}$  — множество таких пар  $(a, b)$ , что многочлен  $a$  имеет по меньшей мере  $k$  двойных корней. Будем обозначать через  $[v]$  фундаментальный цикл замыкания  $v$ . Вычисление кратностей компонент  $T^{-1}(\Sigma^k)$  показывает, что

$$T^![\Sigma^k] = [\Sigma_1^k] + 2[\Sigma_1^{k-1} \cap \Psi^1] + 4[\Sigma_1^{k-2} \cap \Psi^2] + \dots + 2^k[\Psi^k].$$

Теорема §3 получается из этой формулы при  $k = 1$  и  $2$ . Инвариантность  $\alpha_1 \bmod 2$  можно также получить, логарифмируя тождество  $\Delta(T(a, b)) = \Delta(a)Q^2(a, b)$  (где  $Q$  — многочлен), связывающее дискриминанты функции и ее преобразования Чирнгаузена.

**5. Следствие.** Если собственно  $n$ -значная алгебраическая функция  $w$  любого числа переменных  $x$  получается преобразованием Чирнгаузена с полиномиальными коэффициентами  $b = q(x)$  из алгебраической функции  $z(u, v)$  двух переменных  $u, v$ , полиномиально зависящих от  $x$ , то для этой функции  $w$  класс  $\alpha_3$  равен нулю.

Действительно,  $H^3(\mathbb{C}^2 \setminus \Sigma) = 0$  для любой алгебраической кривой  $\Sigma \subset \mathbb{C}^2$ .

Класс  $\alpha_3$  для функции  $w(a, b, c)$ , где  $w^4 + aw^2 + bw + c = 0$ , не нулевой. Итак, эту функцию нельзя получить описанным выше способом из алгебраических функций двух переменных.

**6. Замечания.** 1. Поскольку полиномиальность отображений  $p, q, r$  не существенна для наших рассуждений, результат легко обобщается на неалгебраические функции (например, на алгеброидные ростки).

2. Д. Б. Фукс указал, что сравнение когомологий групп кос и симметрических групп позволяет распространить теорему §3 на некоторые другие классы когомологий.

3. Аналогичным методом можно доказать, что функция  $k = n - 1$  переменных, заданная уравнением

$$z^n + a_1 z^{n-2} + \dots + a_k = 0, \quad n = 2^r, \quad r \geq 2,$$

не разлагается в суперпозицию алгебраических функций меньшего числа переменных, имеющую ровно  $n$  значений. В частности, формула для решения уравнений четвертой степени в радикалах определяет 72-значную функцию.

## Литература

- [1] Арнольд В. И. О косах алгебраических функций и когомологиях ласточкиных хвостов. *УМН*, 1968, **23**(4), 247–248.



## О матрицах, зависящих от параметров

Указана нормальная форма, к которой можно привести семейство матриц гладко зависящих от параметров эндоморфизмов комплексного линейного пространства при помощи гладко зависящего от параметров выбора базиса. Полученные формулы применяются к исследованию бифуркационных диаграмм семейств матриц общего положения.

### Содержание

Введение	155
1. Версальные и универсальные деформации	156
2. Версальность и трансверсальность	157
3. Пример	160
4. Построение трансверсальных деформаций	161
5. Замечания	165
Литература	172

### Введение

Приведение матрицы к жордановой нормальной форме — неустойчивая операция. Действительно, как сама нормальная форма, так и приводящее к ней преобразование разрывно зависят от элементов исходной матрицы. Поэтому если элементы матрицы известны лишь приближенно, то приводить ее к жордановой форме неразумно.

Далее, если изучается семейство матриц, гладко зависящих от параметров, то хотя каждую индивидуальную матрицу и можно привести к жордановой форме, делать это неразумно, так как при такой операции теряется гладкость (и даже непрерывность) относительно параметров.

Таким образом, возникает задача об отыскании возможно простой нормальной формы, к которой можно привести не только данную индивидуальную матрицу, но и любое семейство близких к ней матриц, с помощью гладко зависящего от элементов матриц преобразования.

В настоящей заметке эта задача решается для семейства матриц, голоморфно зависящих от параметров. Иными словами, рассматривается вопрос о нормальной форме матриц над кольцом ростков голоморфных функций нескольких комплексных переменных.

Очевидно, достаточно рассмотреть деформацию жордановой матрицы, т.е. семейство, содержащее приведенную к жордановой нормальной форме матрицу при нулевых значениях параметров. В теореме 4.4 описана нормальная форма, к которой приводятся голоморфно зависящей от параметров заменой базиса все близкие матрицы.

Эта нормальная форма отличается от исходной жордановой тем, что в некоторых местах вместо нулей стоят голоморфные функции параметров, обращающиеся в нуль при нулевых значениях параметров. Простейшей эта форма является в том смысле, что число таких мест — минимальное возможное.

Приведение к указанной нормальной форме устойчиво: если матрица известна лишь приближенно, то можно приближенно найти и элементы нормальной формы, и приводящее преобразование.

Построение нормальной формы основано на известной теореме о коммутирующих матрицах и на стандартных рассуждениях теории особенностей дифференцируемых отображений [2]. Полученный результат имеет очевидные приложения в теории бифуркаций нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений (см. [3]–[7]).

Автор благодарен Н. Н. Брушлинской, Д. А. Каждану и С. Г. Крейну за полезные обсуждения.

## 1. Версальные и универсальные деформации

**1.1. Деформации.** Мы будем рассматривать квадратные комплексные матрицы порядка  $n$ . Пусть  $A_0$  — такая матрица. *Деформацией* матрицы  $A_0$  мы назовем матрицу того же порядка  $A(\lambda)$ , элементы которой — сходящиеся в окрестности точки  $\lambda = 0$  степенные ряды от любого числа  $k$  комплексных переменных  $\lambda_i$ , причем  $A(0) = A_0$ . Деформацию называют также семейством, переменные  $\lambda_i$  — *параметрами*, а пространство параметров  $\Lambda = \{\lambda\}$  — *базой* семейства.

Две деформации  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$  матрицы  $A_0$  назовем *эквивалентными*, если существует такая деформация единицы  $C(\lambda)$  с той же базой, что  $A(\lambda) = C(\lambda)B(\lambda)C^{-1}(\lambda)$ .

Пусть  $\varphi$  — росток голоморфного в 0 отображения  $\mathbb{C}^l \rightarrow \mathbb{C}^k$ , т.е. набор  $k$  сходящихся в окрестности нуля степенных рядов от  $l$  комплексных переменных. Предположим, что  $\varphi(0) = 0$ . Отображение  $\varphi$  пространства параметров  $\{\mu\}$  в базу деформации  $A(\lambda)$  определяет новую деформацию матрицы  $A_0$  по формуле

$$(\varphi^* A)(\mu) = A(\varphi(\mu)), \quad \mu \in \mathbb{C}^l.$$

Деформация  $\varphi^* A$  называется *индуцированной* из деформации  $A$  при отображении  $\varphi$ .

**1.2. Версальные деформации.** Деформация  $A(\lambda)$  матрицы  $A_0$  называется *версальной*<sup>1</sup>, если всякая другая деформация  $B(\mu)$  матрицы  $A_0$  эквивалентна деформации, индуцированной из деформации  $A(\lambda)$  при надлежащей замене параметров:

$$B(\mu) = C(\mu)A(\varphi(\mu))C^{-1}(\mu), \quad C(0) = E, \quad \varphi(0) = 0.$$

Версальная деформация  $A(\lambda)$  называется *универсальной*, если замена параметров  $\varphi$  определяется деформацией  $B(\mu)$  однозначно.

**Пример.** Из трех деформаций

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 + \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

первая версальна, но не универсальна, вторая даже не версальна, а третья не только версальна, но и универсальна.

## 2. Версальность и трансверсальность

**2.1. Трансверсальность.** Пусть  $N \subset M$  — гладкое подмногообразие многообразия  $M$ . Рассмотрим гладкое отображение  $A : \Lambda \rightarrow M$  еще одного многообразия  $\Lambda$  в  $M$ , и пусть  $\lambda$  — точка из  $\Lambda$ , для которой  $A(\lambda) \in N$ .

Отображение  $A$  называется *трансверсальным к подмногообразию  $N$  в точке  $\lambda$* , если касательное пространство к  $M$  в  $A(\lambda)$  есть сумма

$$TM_{A(\lambda)} = A_* T\Lambda_\lambda + TN_{A(\lambda)}.$$

<sup>1</sup> Термин «версальный» получен из слова универсальный отбрасыванием приставки «уни», указывающей на единственность.

**2.2. Орбиты.** Рассмотрим множество  $M = \mathbb{C}^{n^2}$  всех матриц порядка  $n$  и группу Ли  $G = GL(n, \mathbb{C})$  всех невырожденных матриц порядка  $n$ . Группа  $G$  действует на многообразии  $M$  по формуле

$$\text{Ad}_g m = gmg^{-1} \quad (m \in M, g \in G). \quad (1)$$

Зафиксируем какую-нибудь матрицу  $A_0 \in M$  и рассмотрим ее орбиту под действием группы  $G$ . Это гладкое подмногообразие многообразия  $M$  обозначим через  $N$ . Орбита  $N$  матрицы  $A_0$  состоит, таким образом, из всех матриц, которые подобны  $A_0$ .

**2.3. Условие версальности.** Деформацию  $A(\lambda)$  матрицы  $A_0$  можно рассматривать как отображение  $A : \Lambda \rightarrow M$  базы семейства в пространство всех матриц  $M$ . Очевидна и хорошо известна

**Лемма.** *Деформация  $A(\lambda)$  версальна тогда и только тогда, когда отображение  $A$  трансверсально к орбите матрицы  $A_0$  в точке  $\lambda = 0$ .*

Докажем, что версальная деформация  $A$  трансверсальна. Пусть  $V(\mu)$  — любая деформация матрицы  $A_0$ . Тогда ввиду версальности  $A$

$$V(\mu) = C(\mu)A(\varphi(\mu))C^{-1}(\mu),$$

откуда

$$V_{*0} = A_*\varphi_* + [C_*, A_0].$$

Следовательно, для каждого касательного к базе деформации  $V$  в нуле вектора  $\xi$  имеем  $V_*\xi = A_*\varphi_*\xi + [C_*\xi, A_0]$ . Следовательно, любой вектор пространства  $TM_{A_0}$  разлагается в сумму вектора из образа  $A_*$  и вектора, касающегося орбиты. Итак, отображение  $A$  трансверсально к орбите.

Доказательству версальности трансверсальной деформации предположим следующие построения.

**2.4. Орбита и централизатор.** Рассмотрим отображение  $\alpha : G \rightarrow M$ , заданное формулой (1) при фиксированном  $m = A_0$ . Отображение  $\alpha$  переводит группу  $G$  в орбиту матрицы  $A_0$ . В точку  $A_0$  переходит при этом стационарная подгруппа  $H$  матрицы  $A_0$ ; она состоит из всех коммутирующих с  $A_0$  элементов группы  $G$ .

Отображение  $\alpha$  индуцирует отображение касательного пространства в единице группы на касательную плоскость к орбите

$$\alpha_* : TG_e \rightarrow TM_{A_0}, \quad \alpha_* C = [C, A_0].$$

Ядро  $\text{Ker } \alpha_*$  отображения  $\alpha_*$  — это касательная плоскость к стационарной подгруппе  $H$ . Подалгебра  $\text{Ker } \alpha_*$  алгебры Ли  $TG_e$  состоит из всех матриц, коммутирующих с  $A_0$ , и называется *централизатором* матрицы  $A_0$ .

Заметим, что размерности группы матриц  $G$  и многообразия матриц  $M$  одинаковы (равны  $n^2$ ). Следовательно, *коразмерность орбиты матрицы  $A_0$  равна размерности ее централизатора*.

**2.5. Разложение в прямое произведение.** Проведем через единицу группы  $G$  подмногообразие  $V$ , трансверсальное к централизатору и дополнительной размерности (равной размерности орбиты). Пусть  $A : \Lambda \rightarrow M$ ,  $A(0) = A_0$ , — какая-нибудь трансверсальная к орбите деформация матрицы  $A_0$ , причем размерность базы  $\Lambda$  равна коразмерности орбиты (т.е. имеет минимальное для трансверсальных деформаций значение).

Зададим отображение  $\beta : V \times \Lambda \rightarrow M$  формулой  $\beta(v, \lambda) = \text{Ad}_v A(\lambda)$ . Заметим, что размерности прямого произведения  $V \times \Lambda$  и  $M$  одинаковы (равны  $n^2$ ). Из трансверсальности  $A$  к орбите и  $V$  к централизатору следует, что производная  $\beta_*|_{(e,0)}$  невырождена. По теореме об обратной функции отображение  $\beta$  устанавливает голоморфный диффеоморфизм достаточно малой окрестности точки  $(e, 0)$  в  $V \times \Lambda$  и достаточно малой окрестности точки  $A_0$  в  $M$ . Заменяя  $V$  и  $\Lambda$  меньшими многообразиями, мы можем считать, что окрестность точки  $A_0$  в  $M$  разложена в прямое произведение  $V \times \Lambda$ .

**2.6. Трансверсальность  $\Rightarrow$  версальность.** Пусть  $A$  — трансверсальная деформация. Если размерность базы больше минимально возможной (т.е. коразмерности орбиты), заменим базу подмногообразием, размерность которого равна коразмерности орбиты, таким, что сужение  $A$  на это подпространство все еще трансверсально орбите. Докажем, что получившееся семейство версально. Тогда исходное большее — и тем более.

Пусть  $B(\mu)$  — любая деформация матрицы  $A_0$ . При достаточно малых  $\mu$  матрица  $B(\mu)$  единственным образом представляется в виде

$B(\mu) = \beta(v, \lambda)$ ,  $v \in V$ ,  $\lambda \in \Lambda$  (см. п. 2.5). Следовательно, деформация  $B$  записывается в виде

$$B(\mu) = C(\mu)A(\varphi(\mu))C^{-1}(\mu),$$

где  $\varphi(\mu) = \pi_2\beta^{-1}B(\mu)$ ,  $C(\mu) = \pi_1\beta^{-1}B(\mu)$ , а  $\pi_1$  и  $\pi_2$  — проекции  $V \times \Lambda$  на  $V$  и на  $\Lambda$ . Итак, деформация  $A$  версальна и лемма п. 2.3 доказана.

Заметим, что, несмотря на единственность полученного разложения, деформация  $A$  может не быть универсальной. Дело в том, что единственность получается лишь при фиксированном подмногообразии  $V$ , а его можно выбирать по-разному.

### 3. Пример

**3.1. Сильвестрово семейство.** Рассмотрим  $n$ -параметрическое семейство матриц порядка  $n$

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \end{pmatrix}.$$

Это семейство<sup>2</sup> мы будем называть *сильвестровым*.

**3.2. Версальность сильвестрова семейства.** Непосредственными вычислениями коммутаторов легко проверить, что сильвестрово семейство трансверсально орбите каждой из своих матриц. Из леммы п. 2.3 вытекает поэтому

**Следствие.** *Сильвестрово семейство определяет  $n$ -параметрическую версальную деформацию каждой из своих матриц.*

*Если матрица  $A_0$  приводится к сильвестровой нормальной форме, то и близкие к ней матрицы можно привести к сильвестровой форме, не теряя гладкой зависимости от параметров.*

**3.3. Универсальность сильвестровых деформаций.** Заметим, что элементы  $\alpha_i$  сильвестровой матрицы являются (с точностью до

<sup>2</sup> Его можно рассматривать также как семейство всех линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка  $n$  с постоянными коэффициентами.

знака) коэффициентами ее характеристического полинома. Следовательно, элементы силвестровой нормальной формы определены приводящейся к ней матрицей однозначно.

**Следствие.** Силвестрово семейство задает универсальную деформацию каждой из своих матриц.

Таким образом, вопрос о нормальной форме деформаций матрицы  $A_0$  решен для случая, когда матрица  $A_0$  приводится к силвестровой форме, т.е. когда каждому собственному числу соответствует только одна жорданова клетка.

**3.4. Универсальная деформация жордановой клетки.** В частности, рассмотрим случай, когда  $A_0$  — жорданова клетка с собственным числом  $\lambda$ . Из леммы п. 2.3 и следствия п. 3.3 получается

**Следствие.** Версальной (и даже универсальной) деформацией жордановой клетки является  $n$ -параметрическая деформация

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \lambda E + A(\alpha),$$

где  $A(\alpha)$  — силвестрова матрица.

Если матрица  $A_0$  — жорданова клетка, то близкие к ней матрицы можно привести к только что указанному виду, причем приводящее преобразование и параметры  $\alpha_i$  силвестровой матрицы голоморфно зависят от элементов приводимой матрицы.

**3.5. Коразмерность орбит.** Из следствия п. 3.3 вытекает также

**Следствие.** Для любой силвестровой матрицы, независимо от кратностей собственных чисел, коразмерность орбиты (равная размерности централизатора, а также числу параметров универсальной деформации) одна и та же — она равна порядку матрицы,  $n$ .

## 4. Построение трансверсальных деформаций

**4.1. Ортогональное дополнение.** Введем в пространстве матриц  $M = \mathbb{C}^{n^2}$  эрмитово скалярное произведение  $(A, B) = \text{Tr}(AB^*)$ , где  $B^*$  — матрица, полученная из  $B$  транспонированием и комплексным сопряжением. Соответствующий скалярный квадрат — это просто сумма квадратов модулей элементов матрицы.

**Лемма.** Вектор  $V \in TM_{A_0}$  перпендикулярен к орбите матрицы  $A_0$ , если и только если  $[V^*, A_0] = 0$ .

**Доказательство.** Касательные вектора к орбите матрицы  $A_0$  — это матрицы, представимые в виде  $[C, A_0]$ . Ортогональность  $V$  к орбите означает, что при любом  $C$  имеем  $([C, A_0], V) = 0$ . Иначе говоря, при любом  $C$  имеем  $0 = \text{Tr}([C, A_0]V^*) = \text{Tr}(CA_0V^* - A_0CV^*) = \text{Tr}([A_0, V^*]C) = ([A_0, V^*], C^*)$ . Ввиду произвольности  $C$ , это условие эквивалентно  $[V^*, A_0] = 0$ .

Итак, лемма доказана: ортогональное дополнение к орбите матрицы  $A_0$  получается из ее централизатора транспонированием и сопряжением.

**4.2. Централизаторы жордановых матриц.** Централизаторы матриц, приведенных к жордановой нормальной форме, вычислить нетрудно. Предположим вначале, что матрица  $A_0$  имеет только одно собственное число  $\lambda$  и ряд верхне-жордановых клеток размеров  $n_1 \geq n_2 \geq \dots$

**Лемма<sup>3</sup>.** С матрицей  $A_0$  коммутируют матрицы, изображенные на рис. 1, а и только они.

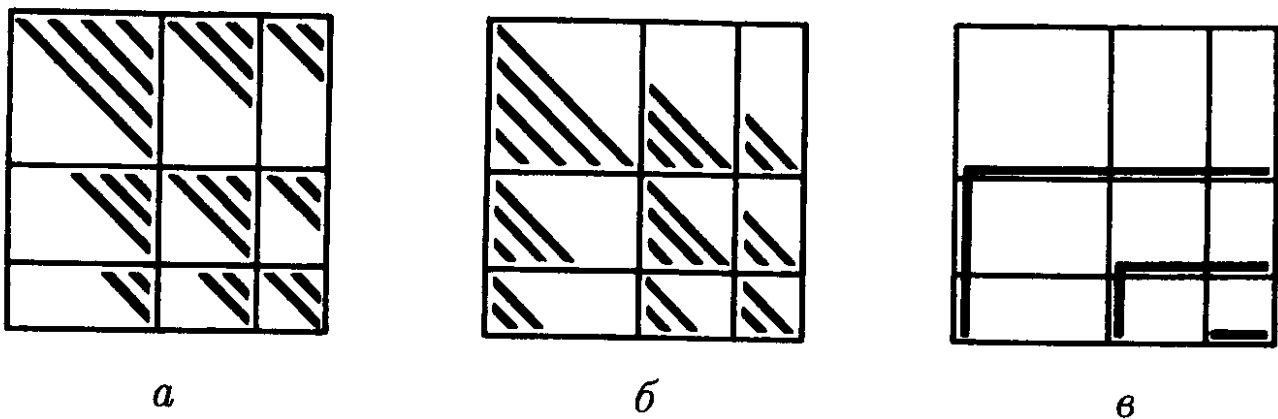


Рис. 1. а) Матрица из централизатора.  
б) Вектор нормали к орбите.  
в) Нормальная форма.

На рис. 1, а каждый косой отрезок означает ряд одинаковых чисел, а в незаполненных местах подразумеваются нули. Таким образом, число косых отрезков равно размерности централизатора.

<sup>3</sup> Доказательство имеется в [8] на с. 199–207.



**Следствие.** Размерность централизатора матрицы  $A_0$  (равная коразмерности орбиты и минимальной возможной размерности версальной деформации) дается формулой  $d = n_1 + 3n_2 + 5n_3 + \dots$ .

Если жорданова матрица  $A_0$  имеет несколько собственных чисел, разобьем ее на блоки соответственно собственным числам. Тогда матрицы, коммутирующие с  $A_0$ , будут блочно-диагональными, причем блок, соответствующий собственному числу  $\lambda$ , имеет указанный на рис. 1, а вид.

Формула для размерности централизатора (коразмерности орбиты, размерности минимального версального семейства) получается из предыдущей суммированием по всем различным собственным числам.

**4.3. Выбор нормальной формы.** В качестве трансверсальной деформации матрицы  $A_0$  можно взять семейство матриц вида  $A_0 + B$ , где матрица  $B$  принадлежит описанному выше ортогональному дополнению к орбите матрицы  $A_0$ . Мы получаем, таким образом, версальную деформацию матрицы  $A_0$  с минимальным возможным числом параметров (равным коразмерности орбиты).

В случае, когда матрица  $A_0$  имеет только одно собственное число, матрица  $B$  имеет изображенный на рис. 1, б вид. Здесь на каждом косом отрезке стоит ряд равных чисел, являющихся параметрами деформации. Число параметров равно числу отрезков и дается формулой следствия п. 4.2.

Матрица  $B$  имеет много ненулевых элементов. Можно предложить иную форму версального семейства  $A_0 + B$ , в которой число ненулевых элементов матрицы  $B$  минимальное возможное (равное числу параметров).

С этой целью выберем в централизаторе базис следующим естественным образом: каждому косому отрезку рис. 1, а сопоставим матрицу из нулей и единиц, у которой единицы стоят на этом косом отрезке.

Записывая условие ортогональности леммы п. 4.1, мы убеждаемся, что систему независимых уравнений касательной плоскости к орбите составляют следующие уравнения: для каждого косого отрезка рис. 1, б сумма соответствующих элементов матрицы равна нулю.

Таким образом, чтобы получить трансверсальное к орбите семейство  $A_0 + B$ , достаточно в качестве семейства матриц  $B$  взять матрицы,

у которых на каждом из косых отрезков рис. 1, б в одном месте стоит независимый параметр, а на всех остальных местах стоят нули.

Выбирать ненулевой элемент на каждом косом отрезке можно в любом месте. Например, годится выбор, указанный на рис. 1, в. Мы получаем, таким образом, следующий результат.

**4.4. Теорема.** *Всякая матрица  $A_0$  имеет версальную деформацию, число параметров которой равно коразмерности орбиты и размерности централизатора матрицы  $A_0$ . Это число равно  $d = \sum_{\lambda} (n_1 + 3n_2 + 5n_3 + \dots)$ , где  $n_1 \geq n_2 \geq \dots$  — размеры жордановых клеток, соответствующих собственному числу  $\lambda$ , а суммирование распространяется на все различные собственные числа. Версальной деформации с меньшим числом параметров не существует.*

*Если матрица  $A_0$  имеет жорданову нормальную форму, то в качестве версальной деформации с наименьшим числом параметров можно взять  $d$ -параметрическую «нормальную форму»  $A_0 + B$ , где блоки блочно-диагональной матрицы  $B$  имеют указанный на рис. 1, в вид. Размер блока равен кратности соответствующего собственного числа. На местах, указанных на рис. 1, в, стоят независимые параметры, а в остальных местах — нули.*

*Иначе говоря, все комплексные матрицы, близкие к данной, можно привести к указанной выше  $d$ -параметрической нормальной форме  $A_0 + B$  (где  $A_0$  — жорданова нормальная форма данной матрицы) так, чтобы приводящее преобразование и параметры нормальной формы голоморфно зависели от элементов приводимой матрицы.*

*Или еще: всякую матрицу над кольцом ростков голоморфных функций в нуле можно привести к указанной выше  $d$ -параметрической нормальной форме  $A_0 + B$ , где  $A_0$  — жорданова форма значения ростка в нуле, а в матрице  $B$  ненулевые элементы имеются только в указанных на рис. 1, в местах.*

**4.5. Примеры.** Если все  $n$  собственных чисел матрицы  $A_0$  различны, то  $d = n$  и наша нормальная форма диагональна.

Если матрица  $A_0$  равна нулю, то  $d = n^2$  и наша версальная деформация есть просто семейство всех матриц.

Если матрица  $A_0$  — одна жорданова клетка, то  $d = n$  и наша нормальная форма силвестрова.

Будем обозначать матрицу, имеющую жорданову нормальную форму, произведением определителей ее клеток. Например,  $\alpha^3\alpha^2$  означает матрицу, имеющую две жордановы клетки (порядка 3 и порядка 2) с одинаковым собственным числом  $\alpha$ , а матрица  $\alpha^2\alpha\beta^2$  имеет клетки порядка 2 и 1 с собственным числом  $\alpha$  и клетку порядка 2 с собственным числом  $\beta$ .

По теореме п. 4.4 минимальные версальные деформации матриц  $\alpha^3\alpha^2$  и  $\alpha^2\alpha\beta^2$  можно выбрать в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \alpha + \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_6 & 0 & 0 & \alpha & 1 \\ \lambda_7 & 0 & 0 & \lambda_8 & \alpha + \lambda_9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \alpha + \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & \alpha + \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & \beta + \lambda_7 \end{pmatrix}.$$

Размерности семейств равны соответственно

$$d = n_1 + 3n_2 = 3 + 3 \cdot 2 = 9, \quad d = n_1(\alpha) + 3n_2(\alpha) + n_1(\beta) = 2 + 3 \cdot 1 + 2 = 7.$$

Итак, любое семейство матриц, близких к матрице 5-го порядка с единственным собственным числом  $\alpha$  и жордановыми клетками порядка 3 и 2 приводится без потери гладкости к указанной выше девятипараметрической нормальной форме. Если матрицы семейства голоморфно зависели от параметров, то коэффициенты нормальной формы  $\lambda_1, \dots, \lambda_9$  будут также голоморфными функциями от параметров.

Точно так же любое семейство матриц, близких к матрице  $\alpha^2\alpha\beta$ , можно гладко привести к указанной выше семипараметрической нормальной форме.

## 5. Замечания

**5.1. Обобщения.** 1. Аналогичные предложения для вещественного случая и для дифференцируемой зависимости от параметров доказываются так же, но формулируются громоздко.

2. Во всех определениях вместо семейств матриц можно было бы говорить о сечениях расслоения эндоморфизмов слоев данного векторного расслоения. Это удлинило бы формулировки, не меняя доказательств.

3. Аналогичные (но более простые) результаты получаются для семейств прямоугольных матриц (отображений из одного пространства в другое). Здесь минимальное версальное семейство имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_r & & & \\ & \lambda_{11} \dots \lambda_{1l} & & \\ & \dots & \dots & \\ & \lambda_{k1} \dots \lambda_{kl} & & \end{pmatrix},$$

где  $r$  — ранг матрицы  $A_0$ ,  $E_r$  — единичная матрица порядка  $r$ , а  $\lambda_{ij}$  — независимые параметры.

4. В лемме п. 2.3 не существенно ни то, что многообразие  $M$  состоит из матриц, ни то, что группа  $G$  есть группа матриц: важно лишь, что группа Ли  $G$  действует на многообразии  $M$ .

**5.2. Приложения.** Соединяя полученные формулы с теоремой трансверсальности [2], можно получить много результатов о семействах матриц «общего вида».

Например, из версальности семейства п. 5.1.3 получаем

**Следствие.** В пространстве семейств линейных отображений  $A: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$  открытое всюду плотное множество образуют семейства следующего вида. Ранг  $A$  равен  $\min(m, n)$  всюду, кроме «бифуркационной диаграммы», образованной конечным числом гладких подмногообразий  $\Sigma^i$  в пространстве параметров. На  $\Sigma^i$  ранг падает на  $i$  единиц; коразмерность  $\Sigma^i$  равна произведению  $(m - r)(n - r)$ . В окрестности каждой точки стратификация  $\{\Sigma^i\}$  пространства параметров диффеоморфна прямому произведению области в  $\mathbb{C}^k$  и стратификации окрестности нуля в одном из версальных семейств п. 5.1.3.

**Пример.** Пусть  $m = n$  и ранг  $A_0$  равен  $n - 1$ . Тогда бифуркационная диаграмма семейства общего вида в окрестности  $A_0$  — гладкая гиперповерхность  $\Sigma^1$ . Если же ранг  $A_0$  равен  $n - 2$ , то бифуркационная диаграмма состоит из гладкого подмногообразия  $\Sigma^2$  коразмерности 4 и гиперповерхности  $\Sigma^1$ , подходящей к  $\Sigma^2$  так, что в каждой нормальной к  $\Sigma^2$  плоскости  $\Sigma^1$  имеет вблизи  $\Sigma^2$  вид квадратичного конуса.

Нормальные формы §3 и §4 приводят к аналогичным результатам, но чтобы их сформулировать, надо прежде избавиться от непрерывных параметров — от собственных чисел.

**5.3. Пачки орбит.** Назовем *пачкой* множество всех матриц, жордановы нормальные формы которых различаются лишь собственными числами, но у которых количества различных собственных чисел и размеры жордановых клеток одинаковы. Например, все диагонализуемые матрицы с простыми собственными числами образуют одну пачку.

Каждая пачка является полуалгебраическим гладким подмногообразием пространства матриц — пространством расслоения, слой которого — орбита. Базой этого расслоения является конфигурационное пространство, образованное наборами крашенных собственных чисел (два собственных числа красятся в один цвет, если соответствующие жордановы клетки имеют одинаковые размеры).

Разбиение на пачки является конечной полуалгебраической стратификацией пространства  $\mathbb{C}^{n^2}$ , и мы можем пользоваться теоремой трансверсальности. Получается

**Следствие.** *В пространстве семейств матриц порядка  $n$  открытое всюду плотное множество образуют семейства, трансверсальные всем пачкам орбит.*

**5.4. Семейства общего положения.** Семейства матриц, трансверсальные всем пачкам, назовем *семействами общего положения*. Соответственно разбиению пространства матриц на пачки, пространство параметров семейства разбито на подмножества. В семействе общего положения почти все матрицы имеют простые собственные числа. Исключительные значения параметров, которым соответствуют матрицы с кратными собственными числами, образуют подмножество в пространстве параметров. Это подмножество можно назвать *бифуркационной диаграммой*.

Бифуркационная диаграмма семейства общего положения представляет собой конечное объединение гладких многообразий; каждой пачке орбит соответствует свое многообразие в пространстве параметров — многообразие матриц с фиксированными размерами жордановых клеток. Корамерность такого многообразия в пространстве параметров семейства общего положения равна коразмерности соответствующей пачки в пространстве всех матриц.

Особенности бифуркационной диаграммы семейства общего положения такие же, как в бифуркационных диаграммах версальных деформаций.

**Пример.** Предположим, что семейство общего положения содержит жорданову клетку порядка  $n$ . Тогда бифуркационная диаграмма имеет (в некоторой окрестности соответствующего значения параметра) вид прямого произведения ласточкина хвоста<sup>4</sup> нужной размерности и евклидова пространства. Например, на рис. 2 изображена бифуркационная диаграмма семейства общего положения, содержащего жорданову клетку 3-го порядка.

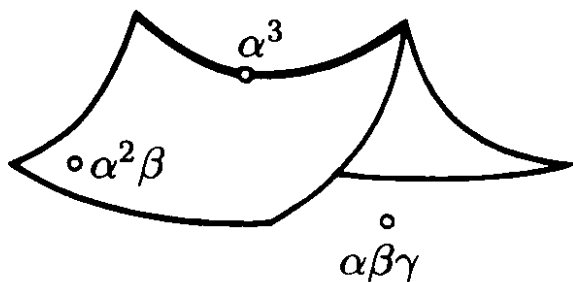


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма семейства общего положения, содержащего жорданову клетку третьего порядка

### 5.5. Коразмерности пачек. Легко доказывается

**Лемма.** Коразмерность пачки выражается через размеры жордановых клеток  $n_1(\lambda) \geq n_2(\lambda) \geq \dots$  по формуле

$$c = 2 \sum_{\lambda} (n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \dots) + \sum_{\lambda} (n_1 + n_2 + \dots - 1).$$

В самом деле,  $c = d - \nu$ , где  $d$  — коразмерность орбиты, а  $\nu$  — число разных собственных чисел  $\lambda$ . Согласно теореме п. 4.4

$$d = \sum_{\lambda} (n_1 + n_2 + \dots) + 2 \sum_{\lambda} (n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \dots), \quad \nu = \sum_{\lambda} 1,$$

откуда и получается указанная формула.

Заметим, что в формулу для коразмерности пачки простые собственные числа дают нулевой вклад. Кроме того, коразмерность пачки не зависит от размера матриц,  $n$ , а зависит только от величин жордановых клеток, соответствующих кратным собственным числам. Поэтому

<sup>4</sup> Ласточкин хвост размерности  $k - 1$  — это гиперповерхность в  $\mathbb{C}^k$ , заданная уравнением  $\Delta(a) = 0$ , где  $\Delta$  — дискриминант многочлена  $z^{k+1} + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k = 0$ . Одномерный ласточкин хвост — это полукубическая парабола; двумерный изображен на рис. 3 слева.

лемма п. 5.5 позволяет быстро перечислять особенности небольшой коразмерности в бифуркационных диаграммах семейств общего вида, не заботясь о порядке матриц.

**5.6. Перечисление особенностей малой коразмерности.** Коразмерность 1 в пространстве всех матриц имеет только пачка матриц, имеющих лишь одно двукратное собственное число. Мы будем обозначать эту пачку через  $\alpha^2$ , не указывая простых собственных чисел, которых может быть сколько угодно. Для краткости мы будем говорить «коразмерность случая» (вместо «коразмерность пачки в пространстве всех матриц»). В случае  $\alpha^2$  бифуркационная диаграмма — гладкая гиперповерхность.

Коразмерность 2 имеют два случая: случай пары жордановых клеток второго порядка с разными собственными числами ( $\alpha^2\beta^2$ ) и случай одной клетки третьего порядка ( $\alpha^3$ ). Соответствующие бифуркационные диаграммы на плоскости — пара пересекающихся прямых и полукубическая парабола.

Согласно следствию п. 5.3 *двупараметрическое семейство общего положения имеет бифуркационную диаграмму с особенностями только двух указанных видов.*

Версальные семейства §4 позволяют исследовать таким же образом особенности бифуркационных диаграмм семейств общего положения с большим числом параметров<sup>5</sup>. С ростом коразмерности с число разных

<sup>5</sup> Заметим, что версальная  $d$ -параметрическая деформация матрицы  $A_0$  трансверсальна орбите и, следовательно, пачке, содержащей матрицу  $A_0$ . Коразмерность с этой пачки меньше  $d$ . Поэтому для построения бифуркационных диаграмм можно рассматривать деформации с меньшим числом параметров, трансверсальные пачке, но не орбите.

Такой деформацией является, например,  $s$ -параметрическое подсемейство версальной деформации теоремы п. 4.4, которое получится, если положить равным нулю один из диагональных параметров матрицы  $B$  (рис. 1, в) для каждого собственного числа  $\lambda$ . Другая  $s$ -параметрическая деформация, трансверсальная к пачке, получится, если в нормальной форме теоремы п. 4.4 ограничиться матрицами  $B$ , у которых равны нулю следы всех блоков, соответствующих разным собственным числам.

Для доказательства рассмотрим векторы, касательные к пачке, но перпендикулярные к орбите. Наши утверждения вытекают из того, что если матрица  $A_0$  имеет только одно собственное число, то такие векторы — это скалярные матрицы, и только они.

пачек  $N$  растет следующим образом:

$c$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N$	1	2	4	7	11	19	30	51	73

Все случаи коразмерности  $c < 5$  исчерпываются следующим списком:

$c$	1	2	3	4
det	$\alpha^2$	$\alpha^3, \alpha^2\beta^2$	$\alpha^4, \alpha\alpha, \alpha^3\beta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2$	$\alpha^5, \alpha^2\alpha, \alpha^4\beta^2, \alpha\alpha\beta^2, \alpha^3\beta^2\gamma^2, \alpha^3\beta^3, \alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2$

Например, столбец  $c = 3$  означает, что бифуркационные диаграммы трехпараметрических семейств общего положения не имеют других особенностей, кроме перечисленных на рис. 3.

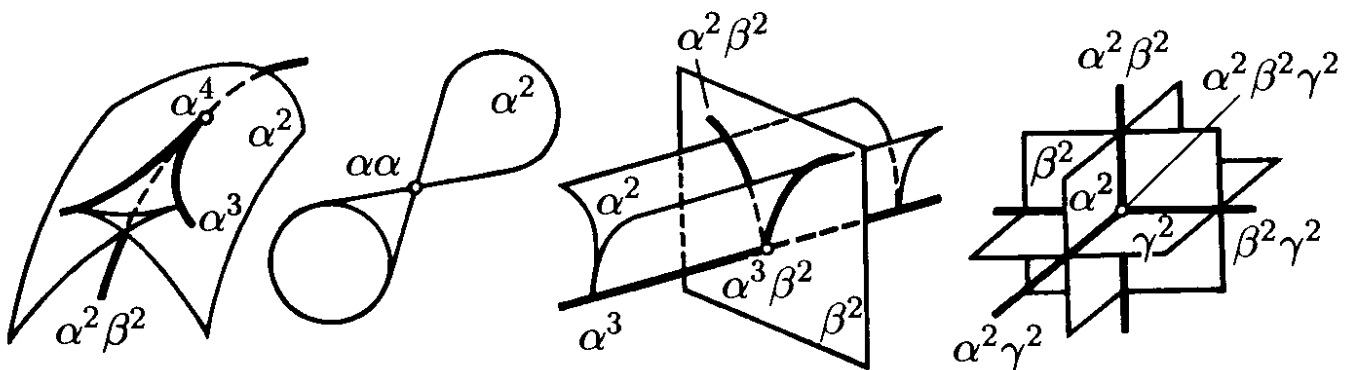


Рис. 3. Особенности бифуркационных диаграмм трехпараметрических семейств общего положения

Заметим, что бифуркационная диаграмма семейства общего положения в случае нескольких разных кратных собственных чисел локально диффеоморфна прямому произведению диаграмм, соответствующих случаям с одним кратным собственным числом.

Назовем пачки, матрицы которых имеют только одно кратное собственное число, *элементарными*. Остальные пачки — это, в сущности, трансверсальные пересечения элементарных. В частности, коразмерность сложного вырождения равна сумме коразмерностей элементарных составляющих.



Размеры жордановых клеток всех элементарных пачек коразмерности  $c < 16$  приведены в следующей таблице:

$c$	1	2	3	...	7	8	...	11	12	...	15	
$\{n_i\}$	2	3	4	...	8	9	...	12	13	...	16	
			1, 1	...	5, 1	6, 1	...	9, 1	10, 1	...	13, 1	
					2, 2	3, 2	...	6, 2	7, 2	...	10, 2	
						1, 1, 1	...	4, 1, 1	5, 1, 1	...	8, 1, 1	
								3, 3	4, 3	...	7, 3	
									2, 2, 1	...	5, 2, 1	
												4, 4
												1, 1, 1, 1

Число  $a_c$  элементарных пачек коразмерности  $c$  можно сосчитать методом Эйлера [9] с помощью производящей функции

$$\sum_{c=-1}^{\infty} a_c x^{c+1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^{k^2})^{-1}.$$

Здесь считается, что  $a_{-1} = a_0 = 1$ . Первые несколько коэффициентов равны

$c$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$a_c$	1	1	2	2	2	2	3	4	4	4	5	6	6	6	8

**5.7. Характеристические полиномы деформаций матриц.** С каждой матрицей можно связать интересное семейство алгебраических многообразий. А именно, сопоставим каждой матрице набор коэффициентов ее характеристического полинома. Пространство всех матриц становится тогда тотальным пространством семейства алгебраических многообразий (слой семейства — множество матриц с фиксированным характеристическим полиномом).

Точно так же база деформации любой матрицы разбивается на подмножества, соответствующие матрицам с одинаковыми характеристическими полиномами. Наши версальные деформации алгебраичны (ли-

нейны), поэтому их базы оказываются тотальными пространствами алгебраических семейств алгебраических многообразий.

Явные формулы версальных деформаций позволяют явно указать уравнения, задающие эти семейства. Вычисления показывают, что уже для простейших матриц получаются весьма замечательные семейства алгебраических многообразий. Покажем, например, как получается на этом пути один из результатов Е. Брискорна [12] о двойных рациональных точках.

Размерность многообразий семейства, построенного по данной матрице, выражается через размеры жордановых клеток по формуле

$$D = d - n = \sum_{\lambda} (2n_2(\lambda) + 4n_3(\lambda) + 6n_4(\lambda) + \dots)$$

(в обозначениях п. 4.2).

Следовательно, построенное семейство будет семейством алгебраических поверхностей ( $D = 2$ ), если и только если каждому собственному числу отвечает одна жорданова клетка, исключая лишь одно собственное число, которому отвечают две жордановых клетки, причем одна из них — порядка 1.

Вычисляя характеристический полином матриц соответствующего версального семейства, мы можем явно выписать уравнения получающегося семейства поверхностей. После небольших преобразований оно записывается в виде

$$xy + z^{k+1} + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k = 0,$$

где  $a_1, \dots, a_k$  — параметры семейства. Но это — стандартная версальная деформация поверхности с двойной рациональной точкой типа  $A_k$ , подробно изученной М. Артином, Е. Брискорном и Г. Н. Тюриной [13]. Итак, семейства алгебраических поверхностей, возникающие из версальных деформаций матриц, — это версальные деформации поверхностей с двойными рациональными точками типа  $A_k$  и только они.

## Литература

- [1] Frobenius G. Über die vertauschbare Matrizen. *Ber. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* (Berlin), 1896, 7–16.
- [2] Особенности дифференцируемых отображений: Сб. переводов. М.: Мир, 1968, 268 с.

- [3] Арнольд В. И. Замечания об особенностях конечной коразмерности в комплексных динамических системах. *Функц. анализ и его прилож.*, 1969, **3**(1), 1–6.
- [4] Sacker R. J. On Invariant Surfaces and Bifurcation of Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations. New York University, 1964.
- [5] Брушлинская Н. Н. Версальное семейство векторных полей области Пуанкаре. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, **4**(1), 6–13.
- [6] Крейн С. Г., Трофимов В. П. О голоморфных оператор-функциях нескольких комплексных переменных. *Функц. анализ и его прилож.*, 1969, **3**(4), 85–86.
- [7] Atkinson F. V. Multiparameter spectral theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1968, **74**, 1–27.
- [8] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 3-е изд. М.: Наука, 1967, 575 с.
- [9] Euler L. De partitione numerorum. *Novi Comment. Acad. Sci. Petrop.*, 1753, **3**, 125–135.
- [10] Wasow W. On holomorphically similar matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1963, **106**, 100–114.
- [11] Khabbaz S., Stengle G. An application of  $K$ -theory to the global analysis of matrix-valued functions. *Math. Ann.*, 1969, **179**, 115–122.
- [12] Brieskorn E. Singular elements of semi-simple algebraic groups. In: Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970). Paris: Gauthier-Villars, 1971, t. 2, 279–284.
- [13] Тюрин Г. Н. Разрешение особенностей плоских деформаций двойных рациональных точек. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, **4**(1), 77–83.



## О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм

Существует интересная связь между расположением ветвей вещественной алгебраической кривой на проективной плоскости, с одной стороны, и топологией некоторых комплексных алгебраических поверхностей — с другой. В настоящей заметке эта связь используется для того, чтобы извлекать из простых соображений четырехмерной топологии и арифметики целочисленных квадратичных форм информацию о расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых.

### 1. Формулировка результата

Рассмотрим неособую вещественную алгебраическую кривую степени  $n$  на вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$ . Такая кривая является компактным гладким одномерным многообразием без края. Его компоненты связности диффеоморфны окружности и называются *овалами*.

А. Харнак [1] доказал, что число овалов не превосходит  $g + 1$ , где  $g = (n - 1)(n - 2)/2$  — род кривой. Кривые с  $g + 1$  овалом существуют, их называют *M-кривыми*.

Вопрос о том, как могут быть расположены овалы, рассматривался многими авторами (в частности, Д. Гильбертом [2], К. Рооном [3], И. Г. Петровским [4] и Д. А. Гудковым [5]), но решен только для кривых степени 6 и ниже (см. обзор в [5]).

Для формулировки результата нам потребуется введенное И. Г. Петровским разделение овалов на положительные и отрицательные. Предположим, что степень кривой четна:  $n = 2k$  (это обозначение сохранится на всем протяжении статьи). Тогда овалы лежат в  $\mathbb{R}P^2$  двусторонне и каждый из них имеет внутреннюю часть (диффеоморфную кругу) и внешнюю (диффеоморфную листу Мёбиуса). Мы будем называть овал

положительным (или четным), если он лежит внутри четного числа других, и отрицательным (или нечетным) — если внутри нечетного числа других овалов. Например, обычная окружность ( $x^2 + y^2 = 1$ ) — четный овал.

**Теорема.** Пусть  $p$  — число положительных, а  $m$  — число отрицательных овалов  $M$ -кривой степени  $2k$ . Тогда имеет место сравнение

$$p - m \equiv k^2 \pmod{4}. \quad (1)$$

Заметим, что сравнение (1) не исчерпывает всех ограничений на расположение овалов. Например, И. Г. Петровский [4] доказал неравенство

$$|2(p - m) - 1| \leq 3k^2 - 3k + 1 \quad (2)$$

для любой кривой степени  $2k$  (с необязательно максимальным числом овалов), а Д. А. Гудков [5] доказал для  $M$ -кривых степени 6 сравнение вида (1) по модулю 8. Другие ограничения см. в §9, пп. 4–6.

Приведенное ниже доказательство сравнения (1) основано на рассмотрении действия инволюций некоторого четырехмерного многообразия  $Y$  на его двумерные гомологии.

## 2. Построение четырехмерного многообразия $Y$

Многообразие  $Y$  — это двулистное накрытие комплексной проективной плоскости, разветвленное вдоль множества комплексных точек рассматриваемой кривой.

Пусть  $f(x, y) = 0$  — аффинное уравнение рассматриваемой кривой. Здесь  $x$  и  $y$  — вещественные переменные, а  $f$  — неоднородный многочлен степени  $2k$  с вещественными коэффициентами. Соответствующее однородное уравнение имеет вид  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ , где  $f(x, y) = F(1, x, y)$ .

Здесь  $F$  — однородный многочлен степени  $2k$  с вещественными коэффициентами. Поскольку степень  $F$  четна, знак  $F$  во всех точках  $(x_0, x_1, x_2)$ , соответствующих одной точке  $(x_0 : x_1 : x_2)$  проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$ , не лежащей на нашей кривой, одинаков. Мы можем выбрать  $F$  так, чтобы в точках, соответствующих неориентируемой компоненте дополнения к кривой в  $\mathbb{R}P^2$ , значения  $F$  были отрицательными. Зафиксируем такой многочлен  $F$ .

Рассмотрим теперь уравнение

$$z^2 = F(x_0, x_1, x_2), \quad (3)$$

где  $x_0, x_1, x_2$  — комплексные переменные, не равные вместе нулю. Это уравнение задает компактную комплексную алгебраическую поверхность  $Y$ , вложенную в трехмерное комплексное пространство  $E$  одномерного векторного расслоения над комплексной проективной плоскостью

$$P' : E \rightarrow (\mathbb{C}P^2 = \{(x_0 : x_1 : x_2)\}),$$

сечениями которого являются однородные функции степени  $k$  от переменных  $x_0, x_1, x_2$ . С вещественной точки зрения поверхность  $Y$  — четырехмерное компактное гладкое ориентируемое связное многообразие без края.

В аффинной карте на  $E$ , соответствующей аффинной карте  $(x, y)$  на  $\mathbb{C}P^2$ , поверхность  $Y$  задается уравнением  $z^2 = f(x, y)$ .

Сужение  $P$  отображения  $P'$  на многообразии  $Y$  задает двулистное разветвленное накрытие комплексной проективной плоскости. Многообразии ветвления есть пересечение многообразия  $Y$  с нулевым сечением расслоения  $P'$ . Обозначим это многообразие ветвления через  $A$ . Из формулы (3) видно, что  $PA$  есть в точности множество комплексных точек рассматриваемой алгебраической кривой  $F = 0$ . Таким образом,  $A$  является гладким ориентируемым связным компактным подмногообразием без края четырехмерного многообразия  $Y$ . Вещественная размерность (и коразмерность в  $Y$ ) многообразия  $A$  равна 2.

### 3. Инволюция $\tau$ и форма $\Phi_\tau$

Умножение  $z$  на  $-1$  задает гладкую инволюцию  $\tau$  многообразия  $Y$ . Множество неподвижных точек есть как раз наша комплексная кривая  $A$ .

Выберем на всех наших комплексных многообразиях ориентацию естественным образом (с помощью формы  $\text{Re } z_1 \wedge \text{Im } z_1 \wedge \dots \wedge \text{Re } z_s \wedge \text{Im } z_s$ ) так, чтобы индексы пересечений комплексных многообразий были неотрицательны. Заметим, что инволюция  $\tau$  сохраняет ориентацию многообразия  $Y$ .

Обозначим через  $H_2(Y) = H_2(Y, \mathbb{Z}) \bmod \text{Tors}$  группу двумерных целочисленных гомологий пространства  $Y$ , приведенную по модулю кру-

чения. Индекс пересечения  $(\cdot, \cdot)$  двумерных циклов задает на  $H_2(Y)$  билинейную целочисленную неособую (двойственность Пуанкаре) форму. Инволюция  $\tau : Y \rightarrow Y$  индуцирует изоморфизм  $\tau_* : H_2(Y) \rightarrow H_2(Y)$ . Определим на  $H_2(Y)$  билинейную форму  $\Phi_\tau$  соотношением

$$\Phi_\tau(a, b) = (\tau_*a, b), \quad a, b \in H_2(Y). \quad (4)$$

**Лемма 1.** *Форма  $\Phi_\tau$  симметрична и неособа ( $\det \Phi_\tau = \pm 1$ ).*

**Доказательство.** Поскольку инволюция  $\tau$  сохраняет ориентацию на  $Y$ ,  $(\tau_*a, b) = \tau_*(\tau_*a, b) = (a, \tau_*b) = (\tau_*b, a)$ . Второе утверждение вытекает из двойственности Пуанкаре.

#### 4. Арифметическая лемма

Пусть  $\Phi : \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}^r \rightarrow \mathbb{Z}$  — целочисленная симметрическая неособая ( $\det \Phi = \pm 1$ ) билинейная форма. Хорошо известна следующая лемма (ср. [6]–[8]).

**Лемма 2.** *Существует элемент  $w \in \mathbb{Z}^r$  такой, что для всех  $x \in \mathbb{Z}^r$*

$$\Phi(x, x) \equiv \Phi(w, x) \pmod{2}. \quad (5)$$

*Элемент  $w$  определен однозначно  $\pmod{2\mathbb{Z}^r}$ . Величина  $\Phi(w, w) \pmod{8}$  не зависит от выбора представителя  $w$  и совпадает по модулю 8 с сигнатурой формы.*

Мы используем ниже только то, что из (5) вытекает

$$\Phi(w', w') \equiv \Phi(w, w) \pmod{8} \quad \text{для } w' = w + 2x. \quad (6)$$

**Доказательство соотношения (6).** Имеем

$$\Phi(w', w') = \Phi(w, w) + 4\Phi(w, x) + 4\Phi(x, x),$$

причем, согласно (5), числа  $\Phi(w, x)$  и  $\Phi(x, x)$  одной четности.

Элемент  $w$  (определенный по модулю 2) будем называть *фундаментальным классом формы  $\Phi$* .



## 5. Вычисление фундаментального класса формы $\Phi_\tau$

Пусть  $\tau : Y^{4s} \rightarrow Y^{4s}$  — сохраняющая ориентацию инволюция ориентированного компактного гладкого  $4s$ -мерного многообразия без края с  $2s$ -мерным ориентированным многообразием неподвижных точек  $A^{2s}$ . Определим форму  $\Phi_\tau$  на  $H_{2s}(Y^{4s})$  формулой (4).

**Лемма 3.** В качестве фундаментального класса формы  $\Phi_\tau$  можно взять класс гомологий  $[A^{2s}]$ , представленный циклом  $A^{2s}$ .

**Доказательство.** Каждой не лежащей на  $A^{2s}$  точке пересечения  $Q$  циклов  $a$  и  $\tau a$  отвечает вторая точка,  $\tau Q$ . В точках же пересечения  $a$  с  $A^{2s}$  можно добиться попарной трансверсальности  $A^{2s}$ ,  $a$  и  $\tau a$  малым шевелением  $a$ . Поэтому индексы пересечения  $a$  с  $\tau a$  и с  $A^{2s}$  совпадают по модулю 2.

Пусть теперь  $A \subset Y$  — многообразия из §3.

**Лемма 4.** Индекс самопересечения цикла  $A$  в  $Y$  равен половине квадрата степени алгебраической кривой  $PA$ :

$$\Phi_\tau([A], [A]) = (A, A) = 2k^2.$$

**Доказательство.** Рассмотрим проекцию  $PA$  кривой  $A$  на  $\mathbb{C}P^2$ . Пусть  $A'$  и  $A''$  — гомологичные  $PA$  кривые в  $\mathbb{C}P^2$ , пересекающиеся трансверсально и не на  $PA$ . Тогда индекс пересечения  $A'$  с  $A''$  в  $\mathbb{C}P^2$  равен квадрату степени кривой  $PA$ , т.е.  $4k^2$ . Следовательно, индекс пересечения циклов  $P^{-1}A'$  и  $P^{-1}A''$  в  $Y$  равен  $8k^2$ . Но в  $Y$  имеем  $P^{-1}A' \sim 2A \sim P^{-1}A''$ , поэтому  $(A, A) = 2k^2$ .

## 6. Вещественная часть $\Pi$ многообразия $Y$

Исследуем теперь множество вещественных точек многообразия  $Y$ , т.е. точек, которым соответствуют вещественные значения координат  $z$  и  $x_0 : x_1 : x_2$ .

Рассмотрим на вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  множество  $S$  точек, которым соответствуют значения  $F \geq 0$ . Множество  $S$  представляет собой в  $\mathbb{R}P^2$  гладкое двумерное подмногообразие, краем которого являются изучаемые овалы. Многообразие  $S$ , вообще говоря, несвязно; в силу сделанного в §2 соглашения о знаке  $F$  оно ориентируемо. Заметим, что эйлерова характеристика многообразия  $S$  равна

как раз разности  $p - m$  между числом положительных и отрицательных овалов.

**Лемма 5.** Множество  $\Pi$  вещественных точек многообразия  $Y$  представляет собой гладкое компактное двумерное ориентируемое многообразие без края, гладко вложенное в  $Y$ . Многообразию  $\Pi$  диффеоморфно дублю многообразия с краем  $S$ .

Доказательство вытекает из формулы (3) и тривиальности расслоения  $P$  над  $S$ ; последняя гарантируется выбором знака  $F$ .

**Лемма 6.** Индекс самопересечения вещественного ориентируемого компактного гладкого аналитического многообразия  $M$  размерности  $2s$  в его комплексификации равен  $(-1)^s \chi$ , где  $\chi$  — эйлерова характеристика многообразия  $M$ .

**Доказательство.** Построим на  $M$  касательное векторное поле с простыми особыми точками и умножим его на  $i$ . Знак  $(-1)^s$  соответствует разнице между двумя ориентациями  $S^{2s}$ : можно брать сначала все вещественные орты, а потом мнимые, а можно выбирать ориентацию, как указано в §3.

**Лемма 7.** Эйлерова характеристика поверхности  $\Pi$  выражается через числа положительных и отрицательных овалов по формуле

$$\chi = 2(p - m).$$

Для доказательства заметим, что  $p - m$  есть эйлерова характеристика многообразия с краем  $S$ , и воспользуемся леммой 5.

Соединяя леммы 6 и 7, получаем следующий результат.

**Лемма 8.** Индекс самопересечения поверхности  $\Pi$  в многообразии  $Y$  равен  $(\Pi, \Pi) = 2(m - p)$ .

## 7. Гомология между циклами $A$ и $\Pi$

**Лемма 9.** Классы гомологий, представленные поверхностями  $A$  и  $\Pi$  в  $Y$ , совпадают по модулю 2; точнее,

$$[A] = [\Pi] \in H_2(Y) \otimes \mathbb{Z}_2.$$

**Доказательство.** Обозначим через  $\infty$  «бесконечно удаленную» комплексную прямую  $x_0 = 0$  в  $\mathbb{C}P^2$  с координатами  $x_0 : x_1 : x_2$  из формулы (3). Мы будем предполагать, что эта прямая пересекает кривую  $PA$  трансверсально, в  $n = 2k$  точках. Мы можем рассматривать прямую  $\infty$  как цикл (с коэффициентами из  $\mathbb{Z}$  или из  $\mathbb{Z}_2$ ).

Обозначим через  $[\infty]$  класс гомологий цикла  $\infty$  в  $H_2(\mathbb{C}P^2)$ . Каждый цикл  $c$  из  $H_2(\mathbb{C}P^2)$  гомологичен  $(c, \infty)[\infty]$ . Например,  $PA \sim 2k[\infty]$ .

Далее, обозначим через  $\infty_Y$  цикл  $P^{-1}\infty$  в  $Y$ , а через  $[\infty_Y]$  — его класс гомологий в  $H_2(Y)$ . Лемма 8 вытекает из следующих двух соотношений:

$$[A] = k[\infty_Y] \in H_2(Y), \quad (7)$$

$$[\Pi] = k[\infty_Y] \in H_2(Y, \mathbb{Z}_2). \quad (8)$$

Для доказательства соотношения (7) заметим, что целочисленный цикл  $PA - 2k\infty$  является границей некоторой целочисленной трехмерной цепи  $K_3$  в  $\mathbb{C}P^2$ . Положим  $K'_3 = P^{-1}K_3$ . Тогда  $\partial K'_3 = 2A - 2k\infty_Y$ , т.е.  $[A] - k[\infty_Y]$  — элемент второго порядка в  $H_2(Y, \mathbb{Z})$ , что и доказывает равенство (7) (напомним, что  $H_2(Y)$  — профакторизованная по кручению группа гомологий).

Для доказательства соотношения (8) заметим, что овалы делят  $M$ -кривую  $PA$  на две части, переводящиеся друг в друга при комплексном сопряжении (это устанавливается при доказательстве теоремы Харнака). Пусть  $B$  — одна из этих частей.  $B$  представляет собой связное компактное ориентированное двумерное многообразие с краем. Краем  $B$  являются как раз овалы кривой  $F = 0$  на  $\mathbb{R}P^2$ .

Рассмотрим поверхность  $B + C$ , где  $C$  — подмногообразие в  $\mathbb{R}P^2$ , краем которого тоже являются овалы кривой  $F = 0$  (многообразие  $C$  определено в §6). Негладкая поверхность  $B + C$  является комбинаторным, вообще говоря неориентируемым, связным компактным двумерным подмногообразием без края в  $\mathbb{C}P^2$ . Поэтому поверхность  $B + C$  определяет в  $\mathbb{C}P^2$  цикл с коэффициентами из  $\mathbb{Z}_2$ .

Покажем, что индекс пересечения циклов  $B + C$  и  $\infty$  в  $\mathbb{C}P^2$  равен  $k \pmod 2$ .

Действительно, если овалы не пересекают бесконечно удаленную прямую, то из  $2k$  точек пересечения  $PA$  и  $\infty$  в  $B$  попадает ровно половина (комплексное сопряжение переставляет внутренности  $B$  и  $PA - B$ ). Если же овалы пересекают бесконечно удаленную прямую, то, приводя эту прямую в общее положение с  $B + C$ , можно добиться того, что

она будет пересекаться только с  $B$ , притом трансверсально и ровно в  $k$  точках.

Для доказательства выберем вещественные аффинные координаты  $(x, y)$  так, чтобы прямая  $\infty$  имела уравнение  $x = 0$  и чтобы ее бесконечно удаленная точка лежала вне  $C$ . Прямая  $x = i\varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, гомологична прямой  $x = 0$ , не пересекает  $C$  и трансверсально пересекает  $B$  в точности в  $k$  точках. Действительно, ориентируем касательным полем  $\xi$  каждый овал. Тогда при движении в направлении  $\xi$  вдоль овала по плоскости  $(x, y)$  мы переходим прямую  $x = 0$  слева направо столько же раз, сколько справа налево. Пересечениям одного типа соответствуют точки пересечения  $PA$  с прямой  $x = i\varepsilon$ , лежащие на  $B$ , а другого — на  $PA - B$  (это следует из того, что  $i\xi$  есть нормальное оснащение овала в  $B$ ). Невещественные же точки пересечения  $PA$  с  $x = i\varepsilon$  лежат в  $B$  и  $PA - B$  поровну, если  $\varepsilon$  достаточно мало (ибо это так при  $\varepsilon = 0$ ).

Итак, выделенное выше утверждение доказано. Из него вытекает, что  $[B + C] = k[\infty] \in H_2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z}_2)$ . Поэтому цикл  $B + C - k\infty$  гомологичен 0 как  $\mathbb{Z}_2$ -цепь: существует трехмерная  $\mathbb{Z}_2$ -цепь  $L_3$  в  $\mathbb{C}P^2$ , для которой

$$\partial L_3 = B + C - k\infty.$$

Полагая  $L'_3 = P^{-1}L_3$ , находим

$$\partial L'_3 = 2(P^{-1}B) + \Pi - k\infty_Y, \quad \text{т.е. } [\Pi] = k[\infty_Y] \in H_2(Y, \mathbb{Z}_2).$$

Лемма 9 доказана.

## 8. Доказательство теоремы

Применим лемму 2 к форме  $\Phi_\tau$  и классам гомологий  $w = [A] \in H_2(Y)$ ,  $w' = [\Pi] \in H_2(Y)$ .

Согласно лемме 1, форма симметрична и неособа; согласно лемме 3, класс  $w$  фундаментальный. По лемме 9 класс  $w'$  отличается от  $w$  на четный элемент. Итак, лемма 2 применима, и мы находим из формулы (6), что

$$\Phi_\tau([A], [A]) \equiv \Phi_\tau([\Pi], [\Pi]) \pmod{8}.$$

Заметим, что  $\tau_* w = w$ ,  $\tau_* w' = -w'$  (изменение знака  $z$  меняет ориентацию  $\Pi$ ). Итак,  $\Phi_\tau([A], [A]) = (A, A)$ ,  $\Phi_\tau([\Pi], [\Pi]) = -(\Pi, \Pi)$ . Поэтому

$(A, A) + (\Pi, \Pi) \equiv 0 \pmod{8}$ . Подставляя значения индексов самопересечения  $(A, A) = 2k^2$  из леммы 4 и  $(\Pi, \Pi) = 2(m - p)$  из леммы 8, находим

$$2k^2 + 2(m - p) \equiv 0 \pmod{8},$$

что и требовалось доказать.

## 9. Замечания

1. Утверждение (1) (с заменой модуля 4 на 8) было сформулировано Д. А. Гудковым в виде гипотезы, подтвержденной большим количеством примеров. Хотя доказательство сравнения (1) не использует результатов Д. А. Гудкова, настоящая работа не могла бы быть выполнена, если бы Д. А. Гудков не сообщил автору о своей гипотезе.

2. Многообразии  $Y$  изучалось В. А. Рохлиным в недавней работе [9] с помощью сигнатурных формул Хирцебруха–Атьи–Зингера [10, §6]. Соединяя эти вычисления с нашими и с формулой Лефшеца–Дольда–Атьи–Ботта, приведенной Хирцебрухом в [11], можно получить дополнительную информацию о многообразии  $Y$  и его инволюциях.

Заметим, что вещественный дифференцируемый тип многообразия  $Y$  и его инволюции  $\tau$  зависят только от степени кривой  $A$ , которая может даже не быть действительной. Однако комплексное сопряжение  $\sigma : Y \rightarrow Y$  уже зависит от расположения вещественных овалов кривой.

Инволюции  $\sigma$  и  $\tau$  коммутируют, так что на  $Y$  действует группа  $H = \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$  из четырех элементов  $1, \sigma, \tau, \sigma\tau$ . Обозначим через  $\Phi_h$  (где  $h \in H$ ) форму  $\Phi_h(x, y) = (h_*x, y)$  на  $H_2(Y)$ . Обозначим через  $\Pi'$  подмногообразие, состоящее из тех точек в  $Y$ , для которых точка  $x_0 : x_1 : x_2$  вещественна, а  $z$  чисто мнимо. Тогда для любой вещественной кривой  $F = 0$  (не обязательно с максимальным числом овалов) выполняются следующие соотношения:

$h$	1	$\sigma$	$\tau$	$\sigma\tau$
Неподвижные точки инволюции $h$	$Y$	$\Pi$	$A$	$\Pi'$
Фундаментальный класс формы $\Phi_h$	$(k + 1)[\infty_Y]$	$k[\infty_Y]$	$k[\infty_Y]$	$(k + 1)[\infty_Y]$
След инволюции $h_*$	$2 + 2g$	$2(p - m) - 2$	$-2g$	$2(m - p)$
Сигнатура формы $\Phi_h$	$2 - 2k^2$	$2(m - p)$	$2k^2$	$2(p - m) - 2$

Все эти результаты не участвуют в приведенном доказательстве сравнения (1), однако без вычислений В. А. Рохлина это доказательство вряд ли было бы найдено. Именно, формулировка леммы 9 была угадана в результате сопоставления приведенной таблицы с гипотезой Д. А. Гудкова.

3. Обнаруженную связь расположения овалов с инволюциями четырехмерного многообразия  $Y$  можно использовать и в обратную сторону, чтобы получать информацию об инволюциях многообразия  $Y$ , основываясь на сведениях о вещественной кривой. Например, из соотношений (1) и (2) находим

$$2 + \text{Tr } \sigma_* \equiv 2k^2 \pmod{8} \quad (\text{для } M\text{-кривых}); \quad |1 + \text{Tr } \sigma_*| \leq 3k^2 - 3k + 1.$$

Из приведенной таблицы следует также, что формы  $\Phi_\sigma$  и  $\Phi_\tau$  имеют ту же четность, что число  $k$ , а формы  $\Phi_1$  и  $\Phi_{\sigma\tau}$  — что  $k + 1$ . Действительно, при четных  $k$  сигнатура формы  $\Phi_1$ , а при нечетных — сигнатура формы  $\Phi_\tau$  не делится на 8. Следовательно, при всех  $k$  существует цикл, индекс пересечения которого с  $\infty\gamma$  нечетен. Соединяя эту информацию с видом фундаментальных классов, получаем выделенное утверждение.

Из таблицы, сравнения (1) и неравенства (2) видно, что формы  $\Phi_1$  и  $\Phi_{\sigma\tau}$  не бывают знакоопределенными, а формы  $\Phi_\sigma$ ,  $\Phi_\tau$  знакоопределены только при  $k = 1$  и  $k = 2$ . Теоремы о структуре квадратичных форм [8, гл. 5] позволяют поэтому полностью восстановить канонический вид форм  $\Phi_1$ ,  $\Phi_\sigma$ ,  $\Phi_\tau$ ,  $\Phi_{\sigma\tau}$  при всех  $k$ . Например, при  $k = 2$  (т.е. для кривых степени 4) форма  $-\Phi_\sigma = \Phi_\tau$  есть в обозначениях [8] форма  $\Gamma_8$ , соответствующая алгебре Ли  $E_8$ .

4. Интересно отметить, что рассмотрение инволюции  $\sigma$  позволяет дать простое доказательство неравенства И. Г. Петровского (2). Рассмотрим с этой целью линейное пространство  $E = H_2(Y, \mathbb{R})$  со скалярным произведением, заданным индексом пересечения. Инволюция  $\sigma_*$  действует в  $E$ , сохраняя скалярное произведение, поэтому  $E$  разлагается в прямую сумму двух ортогональных собственных подпространств  $E_1$ ,  $E_{-1}$ , соответствующих собственным числам 1 и  $-1$  оператора  $\sigma_*$ .

Заметим, что скалярное произведение не вырождено. Поэтому каждое из пространств  $E_1$ ,  $E_{-1}$  можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств, на которых скалярный квадрат положительно (отрицательно) определен:

$$E_1 = E_1^+ + E_1^-, \quad E_{-1} = E_{-1}^+ + E_{-1}^-.$$

Введем теперь следующие обозначения:  $\dim E_1^+ = a$ ,  $\dim E_1^- = b$ ,  $\dim E_{-1}^+ = c$ ,  $\dim E_{-1}^- = d$ . В этих обозначениях

$$\begin{aligned} \text{Tr } \sigma_* &= a + b - c - d, & \text{Tr } 1_* &= a + b + c + d, \\ \text{Sgn } \Phi_\sigma &= a - b - c + d, & \text{Sgn } \Phi_1 &= a - b + c - d. \end{aligned}$$

Подставим в левые части этих равенств значения следов и сигнатур из таблицы п. 2. Складывая и вычитая полученные равенства, находим

$$a = (k-1)(k-2)/2, \quad c = a+1, \quad b+d = 3k^2 - 3k + 1, \quad b-d = 2(p-m) - 1.$$

Поскольку  $b$  и  $d$  неотрицательны,  $|b-d| \leq b+d$ , что и доказывает неравенство (2).

5. Наши построения приводят также к новым ограничениям на расположения овалов. Чтобы сформулировать эти ограничения, разделим все овалы на три класса в зависимости от знака эйлеровой характеристики той компоненты дополнения к кривой, для которой овал является внешней границей. Обозначим числа положительных овалов, ограничивающих области с положительной, нулевой и отрицательной эйлеровой характеристикой, соответственно через  $p_+$ ,  $p_0$ ,  $p_-$ , а числа отрицательных овалов — через  $m_+$ ,  $m_0$ ,  $m_-$ , так что

$$p = p_+ + p_0 + p_-, \quad m = m_+ + m_0 + m_-.$$

Например,  $p_+$  — это число положительных овалов, не содержащих внутри себя других овалов.

**Теорема.** Для любой кривой степени  $2k$

$$p_- \leq \frac{(k-1)(k-2)}{2}, \quad m_- \leq \frac{(k-1)(k-2)}{2}, \quad p_+ \leq b, \quad m_+ \leq d,$$

где числа  $b$  и  $d$  определены в п. 4.

**Доказательство.** Рассмотрим компоненту связности  $\Pi_i$  поверхности  $\Pi$ , проектирующуюся в ограниченную снаружи данным овалом  $\gamma_i$  область в  $\mathbb{R}P^2$ . Из  $p$  поверхностей  $\Pi_i$  отрицательную эйлерову характеристику имеют  $p_-$ .

Представленные этими  $p_-$  поверхностями (как-либо ориентированными) классы гомологий  $[\Pi_i] \in H_2(Y)$  попарно  $\Phi_1$ -ортогональны, и квадратичная форма  $\Phi_1$  на  $p_-$  классах  $[\Pi_i]$  принимает положительные значения. Кроме того,  $\sigma_*[\Pi_i] = [\Pi_i]$ .

Отсюда вытекает, что  $p_-$  классов  $[\Pi_i]$  линейно независимы, и что на натянутой на них плоскости  $L$  форма  $\Phi_1$  положительно определена, а  $\sigma_* = 1$ . Поэтому

$$p_- = \dim L \leq \dim E_1^+ = \frac{(k-1)(k-2)}{2},$$

что и доказывает первое неравенство.

Остальные три неравенства доказываются аналогично (при рассмотрении  $m_-$  нужно учесть неориентируемую компоненту дополнения).

6. Из линейной независимости всех  $\Pi_i$  вытекают бы более сильные неравенства

$$\begin{aligned} p_- + p_0 &\leq \frac{(k-1)(k-2)}{2}, & m_- + m_0 &\leq \frac{(k-1)(k-2)}{2}, \\ p_+ + p_0 &\leq b, & m_+ + m_0 &\leq d \end{aligned}$$

и для  $M$ -кривых степени  $2k$  следующая оценка числа пустых овалов снизу:  $p_+ + m_+ \geq k^2$ .

Согласно Д. А. Гудкову, во всех известных примерах  $M$ -кривых  $p_+ + m_+ \geq k^2 + \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ , причем для любого нечетного  $k$  существует  $M$ -кривая степени  $2k$  с  $p_+ = k^2$ ,  $p_0 = m_+ = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ .

7. Заметим также, что факторпространство  $X = Y/\tau\sigma$  из естественно возникающей коммутативной диаграммы двулистных разветвленных накрытий

$$\begin{array}{ccc} Y & \rightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^2 & \rightarrow & S^4 \end{array}$$

является замкнутым связным односвязным ориентированным четырехмерным гладким многообразием, для которого

$$\text{Sgn } X = \frac{1}{2}(\text{Sgn } Y + \text{Sgn } \Phi_{\tau\sigma}) = p - m - k^2 = a - d,$$

причем для всех известных  $M$ -кривых

$$a \leq d, \quad c \leq b, \quad a - d \equiv 0 \pmod{8}.$$

Из справедливости этих соотношений для всех  $M$ -кривых вытекало бы как справедливость гипотезы Гудкова mod 8, так и неравенство

$$|p - m - 1| \leq k^2 - 1,$$



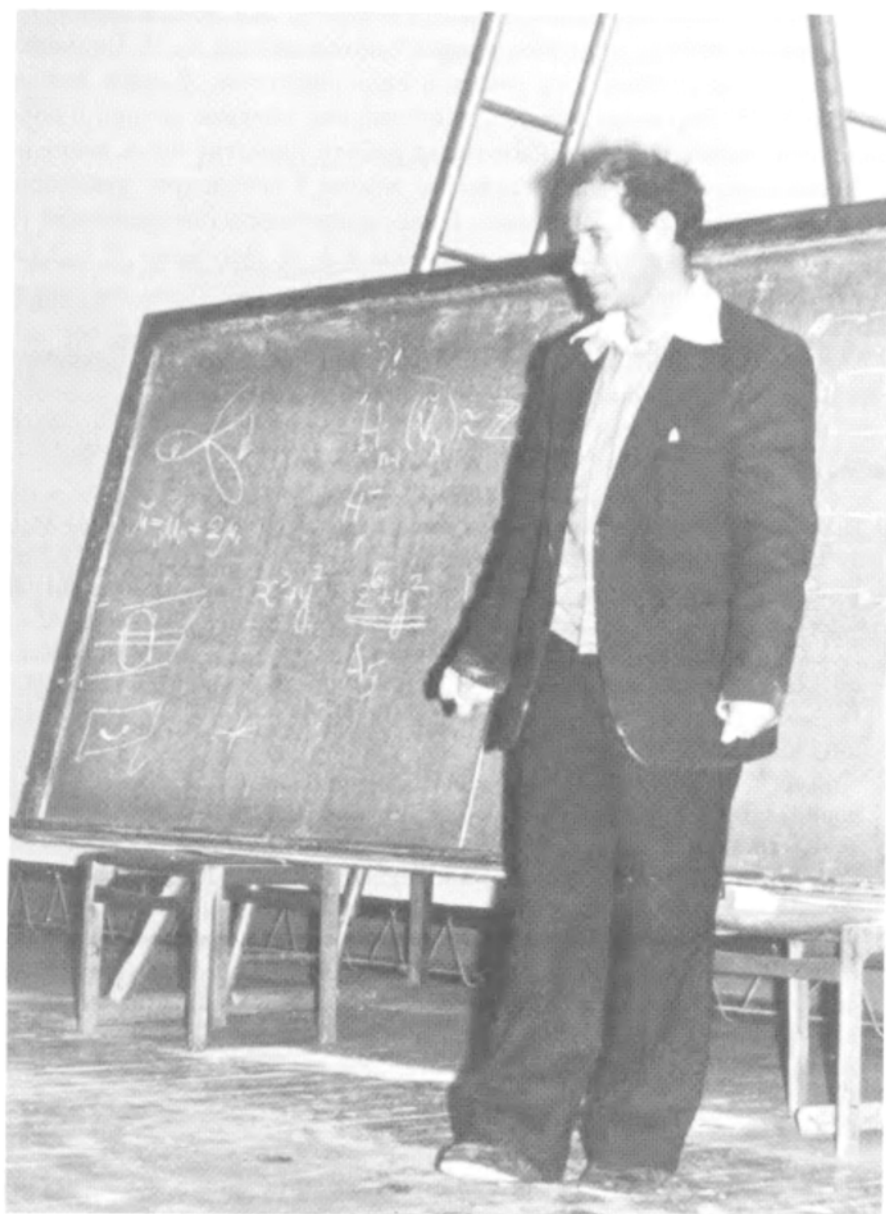
являющееся усилением неравенства Петровского для  $M$ -кривых.

8. Первым доказательством леммы 9 автор обязан А. Н. Варченко, которому автор сообщил эту лемму в виде гипотезы. Хотя в доказательстве А. Н. Варченко имелись пробелы, оно убедило автора в справедливости леммы, без чего настоящая работа не могла быть выполнена. Приведенное выше доказательство леммы 9 использует некоторые идеи рассуждения А. Н. Варченко. Итак, доказательство сравнения (1) явилось итогом совместных усилий автора и А. Н. Варченко. К сожалению, А. Н. Варченко не согласился считать себя соавтором настоящей работы.

Автор благодарен А. Н. Варченко, Д. А. Гудкову, В. А. Рохлину и Д. Б. Фуксу за многочисленные обсуждения и поддержку.

## Литература

- [1] Harnack A. Über die Vieltheitkeit der ebenen algebraischer Kurven. *Math. Ann.*, 1876, **10**, 189–199.
- [2] Hilbert D. Über die reellen Züge algebraischer Kurven. *Math. Ann.*, 1891, **38**, 115–138.
- [3] Rohn K. Die Maximalzahl und Anordnung der Ovale bei der ebenen Kurve 6 Ordnung und bei der Fläche 4 Ordnung. *Math. Ann.*, 1913, **73**, 177–229.
- [4] Petrovsky I. On the topology of real plane algebraic curves. *Ann. Math.*, 1938, **39**(1), 187–209.
- [5] Гудков Д. А. В кн.: Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка. К 16-й проблеме Гильберта. Горький, 1969, 5–153. (Уч. зап. Горьковск. ун-та, 87)
- [6] Hirzebruch F., Mayer K. H.  $O(n)$ -Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1968, 89–91. (Lecture Notes in Math., 57)
- [7] Milnor J. On simply connected 4-manifolds. In: Symposium International de Topologia Algebraica. Mexico City: Universidad Nacional Autónoma de México, 1958, 122–128.
- [8] Serre J.-P. Cours d'arithmétique. Paris: Presses Universitaires de France, 1970.
- [9] Рохлин В. А. Двумерные подмногообразия четырехмерных многообразий. *Функц. анализ и его прилож.*, 1971, **5**(1), 48–60.
- [10] Атья М. Ф., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов. III. *УМН*, 1969, **24**(1), 127–182.
- [11] Хирцебрух Ф. Эллиптические дифференциальные операторы на многообразиях. *УМН*, 1968, **23**(1), 191–209.



## Моды и квазимоды

Цель настоящей заметки — обратить внимание на то, что квазиклассические представления о форме высокочастотных собственных колебаний ограниченных областей находятся в противоречии с общими соображениями симметрии. Эти соображения основаны на изучении стратификации многообразия эллипсоидов в соответствии с различными группами симметрий. Они применимы к колебательным системам с конечным и бесконечным числом степеней свободы и вообще ко всем задачам, в которых встречаются квадратичные формы, зависящие от параметров.

Выход из указанного выше противоречия между квазиклассической асимптотикой и соображениями симметрии и общего положения состоит, видимо, в том, что функции, построенные по квазиклассическому рецепту, являются не модами (собственными функциями) и не близки ни к каким модам, а являются лишь квазимодами: при заданных этими функциями начальных условиях колебания будут в течение длительного времени напоминать стоячие волны.

Следует заметить, что появление квазимод вместо приближений к настоящим собственным функциям не исключает правильности квазиклассических приближений к собственным числам.

### 1. Многообразия эллипсоидов вращения

Обозначим через  $Q$  множество всех вещественных квадратичных форм в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^N$ . Это множество  $Q$  само является линейным пространством (размерности  $N(N+1)/2$ ).

Расклассифицируем квадратичные формы по кратностям собственных чисел. Пусть  $\nu = (\nu_2, \nu_3, \dots)$  — набор целых чисел; обозначим через  $Q_\nu$  множество квадратичных форм, имеющих  $\nu_2$  двукратных собственных чисел,  $\nu_3$  трехкратных и т.д. Легко доказывается

**1.1. Лемма.** Множество  $Q_\nu$  является гладким полуалгебраическим<sup>1</sup> подмногообразием пространства всех квадратичных форм  $Q$ ; многообразие  $Q_\nu$  имеет в  $Q$  коразмерность

$$\text{codim } Q_\nu = 2\nu_2 + 5\nu_3 + 9\nu_4 + \dots = \sum \frac{1}{2}(i-1)(i+2)\nu_i.$$

Заметим, что если есть хотя бы одно кратное собственное число, то  $\text{codim } Q_\nu \geq 2$ . (Простейшим проявлением этого является тот факт, что дискриминант характеристического уравнения симметрической матрицы второго порядка есть сумма двух квадратов.) В частности, множество эллипсоидов вращения не делит многообразие всех эллипсоидов<sup>2</sup>.

Соединяя лемму 1.1 со «слабой теоремой трансверсальности» [2, с. 35], получаем

**1.2. Следствие<sup>3</sup>.** Множество эллипсоидов, все полуоси которых имеют разные длины, связно. В пространстве однопараметрических семейств эллипсоидов всюду плотное множество образуют такие семейства, в которых нет эллипсоидов вращения (т.е. длины всех полуосей различны).

Иными словами, если в однопараметрическом семействе эллипсоидов встречаются эллипсоиды вращения, то от них можно избавиться сколь угодно малой деформацией семейства.

**1.3. Замечание.** В двухпараметрических семействах общего вида эллипсоиды вращения ( $\nu_2 = 1$ ) появляются при отдельных значениях параметра. При увеличении числа параметров появляются (неустраняемым малым шевелением семейства образом) и более симметричные эллипсоиды. В следующей таблице приведены все симметрии, коразмерность  $k$  которых не превосходит 12 (в  $(k+l)$ -параметрическом семействе симметрия коразмерности  $k$  наблюдается на  $l$ -мерном подмного-

<sup>1</sup> Полуалгебраическим множеством называется конечное объединение множеств, каждое из которых задано конечной системой полиномиальных уравнений или неравенств относительно декартовых координат.

<sup>2</sup> Легко видеть, что результаты 1.1 и 3.4 остаются справедливыми, если вместо всех форм рассматривать только положительно определенные.

<sup>3</sup> В сущности, это — теорема Вигнера–Неймана о пересечении электронных термов. См. [3, §79].

образии):

$k = \text{codim } Q_\nu$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\{i_{\nu_i}\}$	$2_1$	—	$2_2$	$3_1$	$2_3$	$2_1 3_1$	$2_4$	$\begin{matrix} 2_2 3_1 \\ 4_1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2_5 \\ 3_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3_1 \\ 2_3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2_6 \\ 2_1 3_2 \end{matrix}$

Здесь символ вроде  $2_i 3_j$  соответствует  $i$  различным двукратным и  $j$  трехкратным собственным числам.

Из таблицы видно, например, что если в каждой точке трехмерного евклидова пространства задан эллипсоид (более общим образом, симметрический 2-тензор), то, вообще говоря, эллипсоиды вращения будут встречаться на отдельных линиях, а сферы не будут встречаться вовсе.

В двенадцатипараметрических семействах общего положения при отдельных значениях параметров встречаются эллипсоиды с шестью парами равных осей, а также с одной парой и двумя тройками.

**1.4. Замечание.** При подходе к многообразию эллипсоидов с большей симметрией многообразию  $Q_\nu$  имеет сложную особенность. Ниже описано в качестве примера, как множество  $A$  эллипсоидов с двумя равными осями подходит к множеству  $B$  эллипсоидов с тремя равными осями.

Проведем через точку  $B'$  из  $B$  трансверсальное к  $B$  сечение размерности 5 (равной коразмерности  $B$ ). В полученном пятимерном пространстве многообразию  $A$  (коразмерности 2) высечет трехмерное многообразие  $A'$ . Замыкание многообразия  $A'$  имеет особую точку  $B'$ .

Вычисления показывают, что многообразию  $A'$  имеет вид двуполого конуса над вещественной проективной плоскостью  $\mathbb{RP}^2$ , вложенной в  $\mathbb{R}^5$  с помощью пяти сферических функций второй степени (пяти независимых на сфере  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  линейных комбинаций функций  $x_i x_j$ , ортогональных единице).

**1.5. Замечание.** Фундаментальная группа пространства всех вещественных квадратичных форм с некратными собственными числами в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^N$  такая же, как у многообразия эллипсоидов в  $\mathbb{R}^N$ , не являющихся эллипсоидами вращения.

При  $N > 2$  эту группу естественно назвать клиффордовой, так как она имеет центр из двух элементов  $(1, -1)$  и  $N - 1$  образующую  $e_1, \dots, e_{N-1}$  с определяющими соотношениями  $e_i^2 = -1$ ,  $e_i e_j = -e_j e_i$ .

Порядок клиффордовой группы в  $\mathbb{R}^N$  равен  $2^N$ . При  $N = 3$  получается группа кватернионов Гамильтона. Образующая  $e_i$  реализуется следующим путем в пространстве эллипсоидов: нужно поворачивать эллипсоид на  $180^\circ$  в плоскости, натянутой на  $i$ -ю и  $N$ -ю главные оси.

## 2. Применения к теории колебаний

Из результатов §1 вытекает, что если дано семейство колебательных систем, зависящих «общим образом» от параметров, то для столкновения двух собственных чисел нужно менять два параметра (а не один, как кажется на первый взгляд).

При этом под семейством «общего вида» понимается такое семейство, что задающее его отображение<sup>4</sup> пространства параметров в пространство квадратичных форм  $Q$  трансверсально<sup>5</sup> к многообразиям  $Q_\nu$  всевозможных эллипсоидов вращения.

**2.1. Пример.** Рассмотрим плоскую (диффеоморфную кругу) мембрану с границей  $\Gamma$ . Все такие мембраны образуют семейство, пространством параметров которого является функциональное пространство  $M$  кривых  $\Gamma$ . Потенциальная энергия, соответствующая кривой  $\Gamma$ , — это интеграл Дирихле по ограниченной кривой области

$$U = \frac{1}{2} \int \int (\nabla u)^2 dx,$$

кинетическая энергия задается формулой  $T = \frac{1}{2} \int \int u^2 dx$ .

**2.2. Гипотеза трансверсальности.** *Отображение  $M \rightarrow Q$ , соответствующее семейству всевозможных мембран, трансверсально всем подмногообразиям  $Q_\nu$ .*

<sup>4</sup> Здесь для простоты считается, что системы семейства различаются потенциальными энергиями, а кинетическая энергия фиксирована. Семейство задается тогда отображением пространства параметров в пространство квадратичных форм: каждому значению параметра сопоставляется потенциальная энергия. Случай, когда от параметров зависит также кинетическая энергия (или она одна), рассматривается аналогично.

<sup>5</sup> Отображение  $f$  многообразия  $X$  в многообразии  $Y$  трансверсально подмногообразию  $Z$  в  $Y$ , если сумма касательного пространства к  $Z$  и образа касательного пространства к  $X$  в каждой точке пересечения  $f(X)$  с  $Z$  составляет все касательное пространство к  $Y$ . Грубо говоря, это означает, что  $f(X)$  и  $Z$  лежат «в общем положении» в  $Y$ .

Эта гипотеза означает, грубо говоря, что любое конечное число частот мембраны можно двигать независимо друг от друга, деформируя подходящим образом границу мембраны.

(Для аккуратной формулировки гипотезы 2.2 нужно сначала отождествить конфигурационные пространства всех мембран из  $M$  так, чтобы кинетические энергии стали одинаковыми. Делается это с помощью диффеоморфизма произвольной мембраны на стандартную, имеющего постоянный якобиан.)

Другие семейства колебательных систем, где также естественно ожидать трансверсальности, — это семейства всевозможных римановых метрик на фиксированном гладком многообразии.

Простейшей моделью является система, заданная формами

$$U = \frac{1}{2} \int [(\nabla u)^2 + b(x)u^2] dx, \quad T = \frac{1}{2} \int u^2 dx$$

в пространстве функций на торе  $T^n$ ; содержится уже случай  $n = 1$  (задача Штурма–Лиувилля). Роль параметра играет функция  $b$ .

Гипотезу трансверсальности приходится принять без доказательства. Из нее<sup>6</sup> и из леммы 1.1 вытекает

**2.3. Следствие.** *При колебании мембран общего вида каждой собственной частоте отвечает одно собственное колебание. Каждые две мембраны общего вида можно соединить друг с другом непрерывным семейством мембран так, чтобы ни у одной из мембран семейства не было кратного спектра. Если однопараметрическое семейство, соединяющее две мембраны общего вида, содержит мембраны с кратным спектром, то сколь угодно малым изменением семейства можно добиться того, что спектр всех мембран семейства станет простым.*

Таким образом, от каждого собственного колебания одной мембраны общего вида можно перейти непрерывным образом к определенному собственному колебанию другой, не встретившись ни разу с кратным спектром. При таком непрерывном продолжении из  $k$ -го по величине собственного числа первой мембраны получится  $k$ -е по величине собственное число второй, независимо от пути продолжения.

<sup>6</sup> Для приложений достаточно даже ослабленной гипотезы трансверсальности, в которой допускается нарушение трансверсальности на множестве мембран, имеющем коразмерность бесконечность в пространстве всех мембран.

Однако продолжения собственных *функций* уже зависят от пути. А именно, *знак* получающейся в результате продолжения собственной функции зависит от того, как наш путь обходит множество мембран с кратным спектром в пространстве всех мембран.

Само собой разумеется, аналогичные выводы получаются для других колебательных систем, например, для семейства уравнений Шрёдингера с потенциалами общего вида.

### 3. Влияние симметрий на кратность спектра

Кратный спектр является исключением в системах общего вида, но он появляется неустранимым малым шевелением образом в случаях, когда данная система симметрична и деформации сохраняют симметрию.

Рассмотрим, например, круглую мембрану. Как известно, большинство собственных чисел — двукратные (простые собственные числа соответствуют зависящим лишь от радиуса собственным функциям). Предположим теперь, что мы меняем форму мембраны, сохраняя поворотную симметрию третьего порядка (так что мембрана совмещается сама с собой при повороте на  $120^\circ$ ). Как будет меняться спектр при деформациях общего вида, сохраняющих указанную симметрию?

**3.1. Формализация.** С точки зрения теории особенностей гладких отображений (см. [2], [4]) речь идет о следующей задаче. Рассматривается отображение  $\varphi : M \rightarrow Q \times O(N)$ , сопоставляющее каждой точке  $x$  связного многообразия параметров  $M$  пару, состоящую из квадратичной формы  $q$  (потенциальной энергии, соответствующей заданному значению параметров) и ортогонального преобразования  $g$  конфигурационного пространства, сохраняющего форму  $q$  и удовлетворяющего условию  $g^3 = E$  ( $g$  задает действие группы симметрии задачи на конфигурационном пространстве<sup>7</sup>). Требуется изучить точки «общего положения» в функциональном пространстве  $\Phi$  отображений  $\varphi$ .

**3.2. Исключение деформации представления.** Из дискретности множества классов ортогональных представлений группы симметрий (в нашем примере  $\mathbb{Z}_3$ ) следует, что все преобразования  $g(x)$  подобны в  $O$  (лежат в одной орбите  $G$  присоединенного представления).

<sup>7</sup> В общем случае произвольной группы симметрий вместо  $O$  нужно рассматривать  $O^k$ , а вместо одного преобразования  $g$  — сразу  $k$  образующих группы симметрий.



Следовательно,  $\Phi$  есть пространство отображений в пространство расслоения с базой  $G$  и типовым слоем  $F$ , состоящим из всех квадратичных форм, остающихся на месте при фиксированном преобразовании  $g \in O$ .

Таким образом, задача сводится к изучению точек общего положения в пространстве гладких отображений  $\varphi : M \rightarrow F$ , где  $M$  — многообразие параметров, а  $F$  — пространство всех квадратичных форм, выдерживающих фиксированное (не с точностью до эквивалентности, а точно фиксированное) представление группы симметрий в  $O(N)$ .

Заметим, что  $F$  — *линейное подпространство* пространства  $Q$  всех квадратичных форм. Поэтому к отображениям в  $F$  применима теорема трансверсальности.

Заметим также, что  $F$  наследует из  $Q$  стратификацию<sup>8</sup> по кратностям собственных чисел. Наша ближайшая цель — изучить получающуюся стратификацию пространства  $F$ .

**3.3. Пример.** Рассмотрим представление группы  $\mathbb{Z}_3$  (вращений равностороннего треугольника) в виде движений евклидова пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , причем образующая  $g$  поворачивает на  $120^\circ$  каждую из  $n$  двумерных ортогональных плоскостей (так что представление распадается на  $n$  двумерных неприводимых<sup>9</sup>).

Исследование  $g$ -инвариантных квадратичных форм основывается на следующем замечании. Оператор поворота на  $90^\circ$

$$I = \frac{2g + E}{\sqrt{3}} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad I^2 = -E$$

задает в  $\mathbb{R}^{2n}$  структуру комплексного пространства  $\mathbb{C}^n$ . Эллипсоиды, инвариантные относительно  $g$  (или  $I$ ), находятся во взаимно однозначном соответствии с эрмитовыми скалярными произведениями в  $\mathbb{C}^n$ .

Отсюда видно, что число осей такого эллипсоида любой фиксированной длины четно.

Будем называть *комплексной кратностью* оси эллипсоида (собственного числа формы) комплексную размерность наибольшего комплексного подпространства пространства  $\mathbb{C}^n$ , натянутого на оси

<sup>8</sup> Стратификацией здесь и далее называется разбиение на конечное число полуалгебраических подмножеств; обычно эти подмножества будут гладкими подмногообразиями.

<sup>9</sup> Здесь и далее все представления — ортогональные вещественные; в том же  $O(N)$ -смысле понимаются эквивалентность и неприводимость.

данной длины. Ось комплексной кратности  $k$  повторяется фактически  $2k$  раз.

Обозначим через  $H$  множество всех вещественных квадратичных форм в  $\mathbb{R}^{2n}$ , инвариантных относительно  $I$  (что то же, относительно  $g$ ). Множество  $H$  является линейным подпространством размерности  $n^2$  в пространстве всех квадратичных форм в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Пусть  $\mu = (\mu_2, \mu_3, \dots)$  — набор целых чисел. Обозначим через  $H_\mu$  множество форм из  $H$  (т.е.  $g$ -инвариантных квадратичных форм на евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$ ), имеющих  $\mu_2$  разных собственных чисел комплексной кратности 2,  $\mu_3$  — кратности 3 и т.д. Легко доказывается

**3.4. Лемма.** *Множество  $H_\mu$  является гладким вещественным полуалгебраическим подмногообразием пространства  $H$ . Многообразие  $H_\mu$  имеет в  $H$  коразмерность*

$$\text{codim } H_\mu = 3\mu_2 + 8\mu_3 + 15\mu_4 + \dots = \sum (i^2 - 1)\mu_i.$$

Соединяя этот результат с теоремой трансверсальности, получаем

**3.5. Следствие.** *В пространстве гладких отображений  $\varphi : M \rightarrow H$  многообразия параметров  $M$  в пространство  $H$   $g$ -симметричных эллипсоидов открытое всюду плотное множество образуют такие отображения, для которых эллипсоиды с осями комплексной кратности больше 1 встречаются лишь на подмногообразиях коразмерности 3 и выше в пространстве параметров.*

В частности, в одно- и дупараметрических семействах общего вида вообще нет эллипсоидов с осями комплексной кратности больше 1.

В семействах с большим числом параметров  $k$  могут встречаться большие комплексные кратности  $i$ . Вырождения коразмерности, не большей 20, исчерпываются следующей таблицей ( $k = \text{codim } H_\mu$ ):

$k$	3	6	8	9	11	12	14	15	16	17	18	20
$\{i_{\mu_i}\}$	$2_1$	$2_2$	$3_1$	$2_3$	$2_1 3_1$	$2_4$	$2_2 3_1$	$\begin{smallmatrix} 2_5 \\ 4_1 \end{smallmatrix}$	$3_2$	$2_3 3_1$	$\begin{smallmatrix} 2_6 \\ 2_1 4_1 \end{smallmatrix}$	$2_4 3_1$

Символу вроде  $2_i 3_j$  отвечают эллипсоиды, группа унитарных симметрий которых есть

$$(U(1))^{\mu_1} (U(2))^i (U(3))^j = (S^1)^{\mu_1+i+j} (S^3)^i (SU(3))^j.$$

Из таблицы видно, например, что в двадцатипараметрических семействах общего вида при отдельных значениях параметров могут появиться эллипсоиды с четырьмя комплексно-двукратными и одной комплексно-трехкратной осью.

**3.6. Замечание.** Особенность множества  $A$  эллипсоидов с комплексно-двукратной осью при подходе к множеству  $B$  эллипсоидов с комплексно-трехкратной осью можно изучить так же, как это делалось в §1 для вещественного случая.

В трансверсальном сечении  $\mathbb{R}^8$  возникает пятимерное многообразие  $A'$  с изолированной особой точкой  $B'$ , имеющее вид конуса над комплексной проективной плоскостью  $\mathbb{C}P^2$ , вложенной в  $\mathbb{R}^8$  с помощью 9 функций  $z_i \bar{z}_j$  (из комплексных линейных комбинаций которых можно образовать 8 вещественных функций, линейно независимых на сфере в  $\mathbb{C}^3$  и ортогональных единице).

**3.7. Замечание.** В «физических» терминах следствие 3.5 означает, что:

1) В системах общего вида с поворотной симметрией третьего порядка, в которых нет полностью симметричных колебаний, все собственные числа двукратные.

2) Каждому собственному числу соответствуют при этом три моды, переводящиеся друг в друга поворотом на  $120^\circ$  и дающие в сумме нуль.

3) Чтобы столкнуть два (двукратных) собственных числа, сохраняя симметрию, нужно менять три параметра, три — восемь, и т.д.

**3.8. Замечание.** Аналогичным образом можно рассмотреть другие группы симметрий и различные случаи «распада симметрии» [5].

## 4. Случай неэквивалентных представлений

Может случиться, что представление группы симметрий в конфигурационном пространстве распадается на неприводимые представления разных видов. Например, в случае мембран с поворотной симметрией третьего порядка имеются как двумерные, так и одномерные представления группы  $\mathbb{Z}_3$ . Легко доказывается и хорошо известна

**4.1. Лемма.** Если квадратичная форма выдерживает ортогональную сумму нескольких ортогональных представлений  $T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_k$  компактной группы, кратных попарно различным неприводимым, то

эта квадратичная форма есть прямая сумма квадратичных форм, заданных на пространствах представлений  $T_i$ .

**4.2. Следствие.** Функциональное пространство отображений  $\varphi : M \rightarrow Q(T)$  пространства параметров  $M$  в пространство квадратичных форм, инвариантных относительно ортогонального представления  $T$  компактной группы, является прямой суммой пространств отображений  $\varphi : M \rightarrow Q(T_i)$ , где  $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_k$  — разложение  $T$  в ортогональную прямую сумму представлений, кратных разным неприводимым.

Иными словами, собственные числа, соответствующие неэквивалентным представлениям, при деформациях движутся независимо одно от другого. В частности, коразмерности вырождений в семействах общего вида можно вычислять суммированием по неэквивалентным представлениям.

**4.3. Пример.** Рассмотрим представления группы  $Z_3$  в пространстве  $\mathbb{R}^{3k}$ . Такое представление распадается в прямую сумму  $l$  одномерных и  $n$  двумерных (где  $3k = l + 2n$ ). Множество представлений состоит из дискретно лежащих в  $O(3k)$  подмногообразий разных размерностей. Подсчет показывает, что наибольшую размерность имеет многообразие представлений с  $l = k$  (если  $l = k + 2s$ , размерность меньше на  $s(3s - 1)$ ). Можно сказать, что в «наиболее вероятном» представлении группы  $Z_3$  размерность пространства, в котором представление тривиально, составляет треть полной размерности пространства представления.

Из следствия 4.2 и результатов §§ 1–3 вытекает

**4.4. Следствие.** Колебательная система «общего вида» с группой симметрий  $Z_3$ , представленной суммой  $l$  одномерных и  $n$  двумерных представлений, имеет  $l$  простых и  $n$  двукратных собственных частот (для «наиболее вероятного» представления доля простых частот — треть от всех).

В общих однопараметрических семействах таких систем при отдельных значениях параметра одна из простых собственных частот может проходить сквозь одну из двукратных, однако две простые частоты не могут столкнуться друг с другом так же, как и две двукратные (ср. [3, §79]).

*В двухпараметрических семействах возможно уже столкновение друг с другом двух простых частот, а в трехпараметрических — двукратных. Для столкновения в какой-нибудь точке  $i$  простых и  $j$  двукратных частот нужно  $\frac{1}{2}(i-1)(i+2) + j^2$  параметров.*

## **5. Применения к колебаниям симметричных мембран**

Вернемся к задаче §3 о поведении частот круглой мембраны при деформациях, сохраняющих симметрию третьего порядка.

Обозначим через  $M_G$  пространство всех мембран, выдерживающих преобразования данной компактной группы движений  $G$ .

Пусть  $T$  — представление группы  $G$  в конфигурационном пространстве мембран, и пусть  $Q_G$  — пространство квадратичных форм на этом конфигурационном пространстве, инвариантных относительно  $G$ .

**5.1. Гипотеза трансверсальности.** *Отображение  $\varphi : M_G \rightarrow Q_G$ , заданное интегралом Дирихле, трансверсально стратификации пространства  $Q_G$  по кратностям собственных чисел.*

Эта гипотеза означает, что деформация границы мембраны (с сохранением симметрии) является деформацией достаточно общего вида в пространстве квадратичных форм предписанной симметрии.

Соединяя гипотезу 5.1 с результатами §§ 1–4, получаем следующий результат.

**5.2. Теорема.** *Если верна гипотеза трансверсальности 5.1, то:*

1. *Для мембран общего вида, выдерживающих поворот на  $120^\circ$ , треть собственных частот простая и соответствующие собственные функции выдерживают поворот на  $120^\circ$ . Остальные собственные частоты двукратные; двукратной собственной частоте соответствуют три собственные функции, в сумме равные нулю и переходящие друг в друга при повороте на  $120^\circ$ .*

2. *В однопараметрических семействах общего вида таких симметричных мембран встречаются при изолированных значениях параметров столкновения однократной частоты с двукратной, но не встречаются ни столкновения однократных частот друг с другом, ни столкновения друг с другом двукратных частот.*

3. *Числа параметров семейств, в которых реализуются (неустрашимо посредством сохраняющего симметрию малого шевеления) более*

сложные столкновения собственных частот, вычисляются по формулам пп. 1.1, 3.4 и 4.4.

В частности, при малой общей  $\mathbb{Z}_3$ -симметричной деформации круглой мембраны сразу же распадется треть<sup>10</sup> двукратных собственных чисел (соответствующих собственным функциям с азимутальной частью  $\sin 3k\varphi$  и  $\cos 3k\varphi$ ). При дальнейшей деформации простые и двукратные собственные числа могут проходить друг сквозь друга, однако ни два простых, ни два двукратных собственных числа друг с другом не сталкиваются.

Аналогичным образом можно исследовать задачи теории колебаний других симметричных областей. Было бы, вероятно, полезно составить таблицы бифуркационных диаграмм для всевозможных групп  $G$  вращений  $\mathbb{R}^3$  и всевозможных распадов симметрии (пар  $G \supset G_1$ ), соответствующих вырождениям небольшой коразмерности.

## 6. Сравнение с квазиклассикой

В последние годы появилась надежда понять асимптотические свойства высокочастотных собственных функций с помощью «квазиклассического» приближения [6]–[8]. Эта надежда основана не на математических теоремах, а на физических рассуждениях. Приведенный ниже пример<sup>11</sup> показывает, что получающиеся на этом пути результаты противоречат соображениям симметрии и гипотезе трансверсальности, а потому, скорее всего, неверны.

Рассмотрим мембрану общего вида с поворотной симметрией третьего порядка, скажем, в виде равностороннего треугольника со скругленными вершинами. Если скругляющая кривая достаточно пологая, то высота треугольника определит устойчивую периодическую бильярдную траекторию. Согласно представлениям квазиклассики, существует серия высокочастотных собственных колебаний («мод»), для которых собственные функции сосредоточены вблизи устойчивой траектории (т.е. вблизи высоты).

Повернув такую моду на  $120^\circ$  и  $240^\circ$ , мы получим еще две моды с той же частотой. Сумма собственных функций, соответствующих

<sup>10</sup> Таким образом, реализуется именно то представление группы  $\mathbb{Z}_3$ , которое мы назвали в §4 наиболее вероятным. Такое совпадение вряд ли случайно.

<sup>11</sup> Этот пример предложен А. И. Шнирельманом при обсуждении результатов предыдущих параграфов.

этим трем колебаниям, отлична от нуля (иначе каждая из мод была бы сосредоточена вблизи центра треугольника).

Полученный результат противоречит результатам §5, согласно которым для мембраны общего вида с группой симметрий  $\mathbb{Z}_3$  трехкратных собственных частот нет.

Результаты §5 опираются на недоказанную гипотезу трансверсальности. Выделенное выше квазиклассическое утверждение тоже никогда не было строго доказано для систем с неразделяющимися переменными. Противоречие показывает, что либо гипотеза трансверсальности, либо квазиклассический вывод (либо то и другое) неверны.

Соображения в пользу гипотезы трансверсальности кажутся все же более убедительными, так что, по-видимому, неверно квазиклассическое представление о характере собственных колебаний.

С другой стороны, известно, что физики с успехом пользуются этим (по-видимому, неверным) представлением при расчете лазеров и других систем [9]. Одно из возможных объяснений состоит в следующем.

Построенная по рецептам квазиклассики функция  $u$ , сосредоточенная вблизи замкнутой траектории, не является собственной функцией (модой) и не близка ни к какой собственной функции; она лишь квазисобственная в том смысле, что величина  $\Delta u + \omega^2 u$  мала.

Вследствие этого, если задать  $u$  в качестве начального условия, то колебания в течение длительного времени (хотя и не вечно) будут похожи на стоячие волны. Постепенно, однако, энергия начнет перекачиваться, возбудятся колебания иной формы, уже не сосредоточенные вблизи высоты треугольника или сосредоточенные вблизи второй и третьей высот.

Таким образом, определяемая по рецепту квазиклассики функция  $u$  является не модой, а квазимодой, подобной колебанию одного из двух одинаковых маятников, связанных слабой связью. Настоящие же моды устроены, вероятно, по-другому: они могут нигде не быть сосредоточенными (колеблется вся мембрана).

Знание квазимод, устроенных достаточно просто и живущих достаточно долго, может быть полезнее рассмотрения вечных, но сложно устроенных настоящих мод, при интерференции которых возникают квазимоды. Квазиклассическое исследование квазимод должно было бы включать оценку времени их жизни.

Автор благодарен М. А. Исаковичу, А. И. Шнирельману, Л. Д. Фаддееву, А. М. Веселовой и С. П. Новикову за полезные обсуждения.

## Литература

- [1] Perrin R. Selection rules for the splitting of the degenerate pairs of natural frequencies of thin circular rings. *Acustica*, 1971, **25**(2), 69–72.
- [2] Том Р., Левин Г. Особенности дифференцируемых отображений. В кн.: Особенности дифференцируемых отображений: Сб. статей. М.: Мир, 1968, 9–101. (Библиотека сб. «Математика»)
- [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 9-ти тт. Т. 3: Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963, 702 с.
- [4] Арнольд В. И. Особенности гладких отображений. *УМН*, 1968, **23**(1), 3–44.
- [5] Thom R. Les symétries brisées en physique macroscopique et le mécanique quantique. Publ. IHES, 1970.
- [6] Keller J. B., Rubinow S. I. Asymptotic solution of eigenvalue problems. *Ann. Phys.*, 1960, **9**(1), 24–75.
- [7] Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1971, 544 с.
- [8] Бабич В. М., Булдырев В. С., Лазуткин В. Ф. Приложение методов математической теории дифракции к проблеме асимптотики собственных чисел и функций оператора Лапласа. В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. СО АН СССР. М., 1970.
- [9] Быков В. П. Геометрическая оптика трехмерных колебаний в открытых резонаторах. В кн.: Электроника больших мощностей. Сб. 4. М.: Наука, 1965, 66–92.  
Вайнштейн Л. А. Лучевые потоки в трехосном эллипсоиде. Там же, 93–105.  
Вайнштейн Л. А. Дифракция в открытых резонаторах с софокусными зеркалами. I, II, III. Там же, 106–156.  
Вайнштейн Л. А. Возбуждение электромагнитных колебаний в открытых резонаторах. Там же, 157–172.



## Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей

Рассматриваются уравнения Эйлера трехмерного движения идеальной несжимаемой жидкости, линеаризованные вблизи стационарного течения. Указан класс стационарных течений, для которых эти линеаризованные уравнения допускают точные решения в явном виде. Анализ полученных решений показывает, что нарастание возмущений для некоторых стационарных течений резко отличается от того, какое имеет место для большинства рассматриваемых в теории гидродинамической устойчивости случаев: появляется сразу бесконечное количество неустойчивых форм, течение плохо прогнозируемо (в том смысле, что для приближенного определения развития возмущения со временем требуется быстро растущее количество информации о начальном условии) и т.п. Причина этих отличий состоит в различии геометрии стационарных течений. Во вновь построенных стационарных течениях частица жидкости при движении вытягивается в нить или ленту, длина которой растет со временем экспоненциально, тогда как для обычно рассматриваемых течений эта длина растет как линейная функция времени. В двумерных стационарных течениях явление экспоненциального растяжения частиц невозможно; показано, что оно невозможно также и в трехмерных стационарных течениях, у которых векторы скорости и вихря неколлинеарны.

**1. Линеаризованное уравнение Эйлера. Укороченное уравнение.** Уравнение Эйлера запишем в форме уравнения для вихря

$$\partial \mathbf{r} / \partial t = \{ \mathbf{v}, \mathbf{r} \} \quad (\mathbf{r} = \text{rot } \mathbf{v}), \quad (1.1)$$

где скобка Пуассона двух векторных полей определяется условием

$$D_{\{a,b\}} = D_b D_a - D_a D_b,$$

в котором  $D_{\mathbf{q}}$  — дифференцирование по направлению поля  $\mathbf{q}$ . Рассмотрим малое возмущение  $\mathbf{u}$  стационарного течения  $\mathbf{v}$ . Пусть  $\mathbf{s}$  — поле

возмущения вихря:  $\text{rot}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{r} + \mathbf{s}$ . Линеаризованное в окрестности течения  $\mathbf{v}$  уравнение (1.1) имеет вид

$$\partial \mathbf{s} / \partial t = \{\mathbf{v}, \mathbf{s}\} + \{\text{rot}^{-1} \mathbf{s}, \mathbf{r}\}. \quad (1.2)$$

Под операцией  $\text{rot}^{-1}$  понимается восстановление бездивергентного векторного поля по его полю вихря. В неодносвязном случае вместо поля вихря нужно рассматривать совокупность циркуляций поля скоростей по всевозможным замкнутым контурам (не обязательно гомологичным нулю), т.е. поле вихря с циркуляциями поля скоростей по базисным одномерным циклам. В случае, когда область течения имеет край, поле скоростей предполагается касающимся края.

Изучим поведение решений этого линейного относительно  $\mathbf{s}$  уравнения.

Заметим, что первое слагаемое в правой части (1.2) — более сильный линейный оператор относительно  $\mathbf{s}$ , чем второе. Поэтому второе слагаемое можно рассматривать как возмущение первого. Таким образом приходим к укороченному уравнению

$$\partial \mathbf{s} / \partial t = \{\mathbf{v}, \mathbf{s}\}. \quad (1.3)$$

Если стационарное течение потенциально ( $\mathbf{r} = 0$ ), то второе слагаемое в уравнении (1.2) исчезает, так что в этом случае укороченное уравнение (1.3) совпадает с линеаризованным уравнением Эйлера (1.2). По соображениям теории возмущений [1] естественно ожидать, что в общем случае укороченное уравнение отвечает за непрерывную часть спектра уравнения (1.2).

Укороченное уравнение (1.3) означает, что вектор  $\mathbf{s}$  переносится стационарным течением. Поэтому оно решается в явном виде, если известна геометрия стационарного течения  $\mathbf{v}$ . Пусть  $\{g^t\}$  — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, осуществляемых стационарным течением, т.е.  $g^t(x)$  — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} g^t(x) = \mathbf{v}(g^t(x)), \quad g^0(x) = x. \quad (1.4)$$

Тогда решение  $\mathbf{s}$  укороченного уравнения (1.3) выражается через свои начальные условия по формуле

$$\mathbf{s}(t, x) = g_*^t \mathbf{s}(0, g^{-t}(x)), \quad (1.5)$$

где  $g_*^t$  — производная отображения  $g^t$ .

**2. Переменные действие — угол.** Геометрия стационарных течений идеальной жидкости рассмотрена в [2]. Там доказано, что если поля  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$  не коллинеарны тождественно ни в какой области, то пространство, заполненное жидкостью, разбивается на ячейки, в каждой из которых линии тока и линии ротора лежат на торических поверхностях<sup>1</sup>. В каждой из таких ячеек можно ввести криволинейные координаты, аналогичные переменным действие — угол классической механики.

Будем обозначать эти координаты через  $\varphi$  и  $z$ . Координаты  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \bmod 2\pi$  — угловые координаты вдоль торов, а  $z$  — «переменная действия», нумерующая торы. Координаты  $\varphi_1, \varphi_2, z$  можно выбрать так, чтобы элемент объема имел вид  $d\varphi_1 d\varphi_2 dz$ , а поля  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$  — вид

$$\mathbf{v} = v_1(z) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + v_2(z) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}, \quad \mathbf{r} = r_1(z) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + r_2(z) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.$$

В координатах  $\varphi, z$  уравнения (1.4) интегрируются. Получаем из (1.5) для компонент поля  $\mathbf{s}$  в координатах  $\varphi, z$

$$s(t; \varphi, z) = s_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + s_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + s_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

выражения

$$s_{1,2}(t; \varphi, z) = s_{1,2}(0; \varphi_0, z) + tv'_{1,2} s_3(0; \varphi_0, z), \quad s_3(t; \varphi, z) = s_3(0; \varphi_0, z) \\ (\varphi_0 = \varphi - \mathbf{v}t), \tag{2.1}$$

где штрих — производная по  $z$ .

Формулы (2.1) показывают, что обычно (при  $\mathbf{v}' \neq 0$ ) решения укороченного уравнения (1.3) растут со временем линейно. Таким образом, обычная (экспоненциальная) неустойчивость линеаризованного уравнения Эйлера может возникнуть лишь под влиянием второго слагаемого в формуле (1.2). При этом, по соображениям теории возмущений, естественно ожидать появления конечного числа дискретных неустойчивых собственных значений (строго это не доказано).

Интересным исключением является течение Куэтта между двумя цилиндрами в неустойчивом случае (на это исключение указал автору В. И. Юдович).

<sup>1</sup> В случае течения на многообразии с краем возможны еще ячейки другого рода, в которых все линии тока замкнуты; здесь этот случай не рассматривается.

В течении Куэтта составляющая скорости основного течения вдоль оси цилиндра равна нулю и поэтому не меняется при изменении постоянной Бернулли. Это приводит к вырождению целого отрезка непрерывного спектра в одну точку: в формуле (3.1) продольная составляющая скорости  $v_m$  при некоторых значениях волнового вектора  $m$  не зависит от  $z$ .

Гипотеза о конечности числа неустойчивых форм относится к случаю невырожденного непрерывного спектра, когда продольная составляющая скорости меняется с постоянной Бернулли, т.е. в (3.1)  $v'_m \neq 0$ . Для такой невырожденности достаточно, например, чтобы кривизна плоской кривой  $v_1 = v_1(z)$ ,  $v_2 = v_2(z)$  не обращалась в нуль и чтобы эта кривая была регулярной.

Вопрос о сохранении обнаруженной выше медленной неустойчивости при переходе от укороченного уравнения (1.3) к полному уравнению (1.2) обсуждается ниже в §4. Другая возможность экспоненциальной неустойчивости связана с коллинеарностью  $v$  и  $g$ , когда нельзя ввести переменные действие — угол, и геометрия стационарного течения отлична от описанной выше (ср. [3]). Этот вид неустойчивости рассмотрен в §5.

**3. Спектр укороченного уравнения.** Для более подробного исследования решений уравнения (1.3) естественно разложить  $s$  в ряд Фурье по  $\varphi$ . С этой целью введем следующие обозначения. Пусть  $m$  — пара целых чисел  $m_1, m_2$ . Будем называть  $m$  волновым вектором. Через  $(m, \varphi)$  обозначим  $m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2$ , через  $m$  — число  $\sqrt{m_1^2 + m_2^2}$ , через  $n$  — пару  $n_1 = -m_2, n_2 = m_1$ .

Для каждого волнового вектора  $m$  определим «продольное», «поперечное» и «нормальное» векторные поля

$$e_m = \frac{m_1}{m} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{m_2}{m} \frac{\partial}{\partial \varphi_2}, \quad e_n = -\frac{m_2}{m} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{m_1}{m} \frac{\partial}{\partial \varphi_2}, \quad e_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

(при  $m = 0$  положим, например,  $e_m = \partial/\partial\varphi_1$ ,  $e_n = \partial/\partial\varphi_2$ ). Поле  $s$  можно тогда записать в виде ряда Фурье

$$s = \sum_m (A_m e_m + B_m e_n + C_m e_z) e^{i(m, \varphi)},$$

где  $A_m, B_m, C_m$  — функции от  $z$ .

Легко проверить, что поля  $\mathbf{e}_m$ ,  $\mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{e}_z$  имеют дивергенцию нуль (это следует из того, что элемент объема имеет вид  $d\varphi_1 d\varphi_2 dz$ ). Поэтому

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = \sum_m (imA_m + DC_m) e^{i(m, \varphi)} \quad \left( D = \frac{d}{dz} \right).$$

Следовательно, бездивергентные поля определяются условием « $imA_m + DC_m = 0$  при всех  $m$ ».

В соответствии с этим условием можно принять за «координаты» в пространстве бездивергентных полей набор функций  $B_m, C_m$  (при  $m = 0$  будет  $C_0 = \text{const}$ , но нужно добавить  $A_0$ ). В этих координатах уравнение (1.3) распадается на ряд треугольных систем

$$\begin{cases} \dot{B}_m = -imv_m B_m + v'_n C_m \\ \dot{C}_m = -imv_m C_m, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{v} = v_m \mathbf{e}_m + v_n \mathbf{e}_n$  — поле скоростей стационарного течения (при  $m = 0$  добавляется уравнение  $\dot{A}_0 = v'_0 C_0$ ); штрих означает производную по  $z$ , точка — по  $t$ .

Формула (3.1) снова указывает на неэкспоненциальную неустойчивость уравнения (1.3). Кроме того, она содержит описание спектра уравнения (1.3): каждому волновому вектору  $m$  отвечает отрезок непрерывного спектра на мнимой оси. Соответствующие «частоты»  $mv_m$  равны всевозможным значениям частот  $(m, v)$  стационарного течения на разных торах, отвечающих разным значениям координаты  $z$ . Кратность каждого отрезка по меньшей мере равна двум ( $B$ -компонента и  $C$ -компонента имеют одинаковые частоты).

**4. Теорема Сквайра для течений с широм.** Введенные выше координаты удобны для исследования укороченного уравнения (1.3), однако оператор  $\operatorname{rot}^{-1}$  в криволинейных координатах имеет сложный вид, поэтому исследовать полное уравнение (1.2) в общем случае трудно.

Существует частный случай, когда это исследование можно свести к одномерной задаче — случай течений с прямолинейными линиями тока. К этому классу течений относятся все плоские прямолинейные течения, а также более общие течения, в которых жидкость течет по параллельным плоскостям со скоростью, постоянной на каждой плоскости, но меняющейся не только по величине, но и по направлению при

переходе от одной плоскости к другой. Изучение этого класса течений можно рассматривать как приближенное исследование общего течения торической геометрии, при котором пренебрегается кривизной тора, но учитывается шир (изменение направления линий тока от тора к тору).

Итак, пусть  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $z$  — декартовы координаты:  $dl^2 = d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + dz^2$ . В этом случае естественно рассматривать периодические течения с периодами, не обязательно равными  $2\pi$  (например, можно считать период по  $\varphi_1$  равным  $2\pi X_1$ , а по  $\varphi_2$  равным  $2\pi X_2$ ). В формулы §3 при этом придется внести лишь то изменение, что волновой вектор  $\mathbf{m}$  будет пробегать не решетку целых точек, а решетку  $\{(m_1/X_1, m_2/X_2)\}$ .

В сделанных предположениях разложение поля вихря  $\mathbf{r}$  по ортам  $\mathbf{e}_m$ ,  $\mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{e}_z$  имеет вид  $\mathbf{r} = -\mathbf{v}'_n \mathbf{e}_m + \mathbf{v}'_m \mathbf{e}_n$ .

Далее, оператор  $\text{rot}$  в координатах  $B_m$ ,  $C_m$  и оператор скобки Пуассона с  $\mathbf{r}$  имеют соответственно матрицы

$$im \begin{pmatrix} 0 & -E + m^{-2}D^2 \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad - \begin{pmatrix} imv'_n & v''_m \\ 0 & imv'_n \end{pmatrix},$$

где  $E$  — тождественное преобразование. Поэтому в наших координатах линеаризованное уравнение Эйлера (1.2) распадается на набор систем уравнений, соответствующих разным  $m$ . После вычислений получаем для  $m \neq 0$  треугольную систему

$$\begin{aligned} \dot{B}_m &= \left[ imv_m + \frac{v''_m}{im} (E - m^{-2}D^2)^{-1} \right] B_m, \\ \dot{C}_m &= imv_m C_m + v'_n (E - m^{-2}D^2)^{-1} B_m. \end{aligned} \quad (4.1)$$

При  $m = 0$  получаем систему  $\dot{A}_0 = \dot{B}_0 = \dot{C}_0 = 0$ .

Первое уравнение отщепляется, и если в  $B$ -компоненте нет экспоненциальной неустойчивости, то ее нет и в  $C$ -компоненте (это видно из получающегося для  $C_m$  линейного неоднородного уравнения).

Заметим теперь, что в уравнение для  $B_m$  входит только продольная составляющая скорости —  $v_m$ . Поэтому уравнение для  $B_m$  совпадает с уравнением, получающимся при исследовании двумерного параллельного течения идеальной жидкости, профиль скоростей которого — составляющая  $v_m(z)$  вектора скорости трехмерного течения в направлении волнового вектора  $\mathbf{m}$ .

Итак, прямолинейное трехмерное течение экспоненциально неустойчиво тогда и только тогда, когда экспоненциально неустойчиво хотя бы одно из течений двумерной идеальной жидкости, получающихся при замене вектора скорости  $\mathbf{v}$  его продольной составляющей  $v_m$ .

Тем самым задача об экспоненциальной неустойчивости рассматриваемого класса трехмерных течений идеальной жидкости сведена к такой же задаче для серии двумерных течений, соответствующих разным значениям волнового вектора.

В частном случае течений без шира (направление  $\mathbf{v}$  постоянно) все получающиеся профили скоростей пропорциональны друг другу и полученный вывод совпадает с теоремой Сквайра [4] для идеальной жидкости.

Жорданова структура системы (4.1) указывает, видимо, на то, что в трехмерных течениях, в отличие от двумерных, даже в отсутствие экспоненциальной неустойчивости правилом является линейный рост возмущений вихря со временем.

**5. Стационарное течение с экспоненциальным растяжением частиц.** Областью течения будет трехмерное компактное многообразие  $M$ , которое строится следующим образом<sup>2</sup>.

Рассмотрим вначале обычное трехмерное пространство с координатами  $x, y, z$ . Определим следующие три диффеоморфизма этого пространства:

$$\begin{aligned} T_1(x, y, z) &= (x + 1, y, z), & T_2(x, y, z) &= (x, y + 1, z), \\ T_3(x, y, z) &= (2x + y, x + y, z + 1). \end{aligned}$$

Каждый из них переводит в себя решетку точек с целыми координатами  $x, y, z$ . отождествим между собой все точки  $(x, y, z)$ -пространства, которые можно получить друг из друга последовательным применением  $T_i$  и  $T_i^{-1}$  (в любом порядке). В результате возникает компактное аналитическое многообразие  $M$ , которое можно себе представлять также как произведение двумерного тора  $\{(x, y) \bmod 1\}$  на отрезок  $0 \leq z \leq 1$ , торцевые торы которого отождествлены по формуле  $(x, y, 0) \equiv (2x + y, x + y, 1)$ .

<sup>2</sup> Рассматриваемое многообразие стало играть существенную роль в современной качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений после работ Смейла, которому указал на этот пример Том.

Введем теперь на полученном многообразии риманову метрику. С этой целью построим на  $(x, y, z)$ -пространстве риманову метрику, инвариантную относительно всех  $T_i$ .

Рассмотрим линейное преобразование плоскости  $(x, y)$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование  $A$  имеет собственные числа  $\lambda_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/2$ . Заметим, что  $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  и что собственные направления взаимно ортогональны. Пусть  $(p, q)$  — декартова система координат на плоскости  $(x, y)$ , причем ось  $p$  направлена по собственному вектору с собственным числом  $\lambda_1 > 1$ , а ось  $q$  — по собственному вектору с собственным числом  $\lambda_2 < 1$ .

Положим

$$ds^2 = e^{-2\mu z} dp^2 + e^{2\mu z} dq^2 + dz^2 \quad (\mu = \ln \lambda_1). \quad (5.1)$$

Метрика  $ds^2$  инвариантна относительно преобразований  $T_i$  и поэтому определяет на введенном трехмерном компактном многообразии  $M$  аналитическую риманову структуру.

Рассмотрим теперь векторное поле  $\partial/\partial z$  в  $(x, y, z)$ -пространстве. Это поле инвариантно относительно преобразований  $T_i$  и, следовательно, определяет векторное поле  $\mathbf{v}$  на многообразии  $M$ . Поле  $\mathbf{v}$  на римановом многообразии  $M$  — гармоническое:  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ . Следовательно,  $\mathbf{v}$  может служить полем скоростей стационарного потенциального течения идеальной жидкости. При движении в этом поле каждая частица жидкости экспоненциально растягивается в  $q$ -направлении и экспоненциально сжимается в  $p$ -направлении, как следует из формулы (5.1).

**6. Исследование линеаризованного уравнения Эйлера.** Рассматриваемое течение потенциально, поэтому линеаризованное уравнение Эйлера (1.2) совпадает с укороченным уравнением (1.3). Ввиду простой геометрии течения последнее уравнение решается по формуле (1.5). Чтобы записать ответ, удобно ввести следующие обозначения. Рассмотрим векторные поля в  $(p, q, z)$ -пространстве

$$\mathbf{e}_p = e^{\mu z} \frac{\partial}{\partial p}, \quad \mathbf{e}_q = e^{-\mu z} \frac{\partial}{\partial q}, \quad \mathbf{e}_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$



Эти поля инвариантны относительно всех преобразований  $T_i$  и поэтому могут рассматриваться как векторные поля на многообразии  $M$ . Направления полей  $e_p$ ,  $e_q$ ,  $e_z$  инвариантны относительно фазового потока  $g^t$  поля  $e_z$  (в координатной записи  $g^t(p, q, z) = (p, q, z + t)$ ). Сами поля под действием потока преобразуются по формулам

$$g_*^t e_p = e^{-\mu t} e_p, \quad g_*^t e_q = e^{\mu t} e_q, \quad g_*^t e_z = e_z.$$

В соответствии с этим направление поля  $e_q$  называют растягивающимся, поля  $e_p$  — сжимающимся, а поля  $e_z$  — нейтральным.

Всякое векторное поле  $w$  на  $M$  можно разложить по этим направлениям:

$$w = w_p e_p + w_q e_q + w_z e_z,$$

где  $w_p$ ,  $w_q$  и  $w_z$  — функции на многообразии  $M$ .

Во введенных обозначениях формула (1.5) в применении к стационарному течению  $v = e_z$  записывается в виде

$$s_p(t) = e^{-\mu t} U^t s_p(0), \quad s_q(t) = e^{\mu t} U^t s_q(0), \quad s_z(t) = U^t s_z(0), \quad (6.1)$$

где  $U^t$  — линейный оператор, действующий на функции на многообразии  $M$  по формуле « $(U^t f)(\xi) = f(g^{-t}\xi)$  для любой точки  $\xi$  из  $M$ ». Заметим, что поток  $g^t$  сохраняет объем, поэтому оператор  $U^t$  унитарен.

Формула (6.1) позволяет получить весьма полные ответы на всевозможные вопросы о нарастании возмущений стационарного течения  $v$ . Прежде всего, из нее видно, что  $q$ -компонента возмущения вихря со временем экспоненциально растет, а  $p$ -компонента экспоненциально затухает.

Далее спектр оператора  $U^t$  легко изучить разложением в ряд Фурье по  $(x, y)$  при фиксированном  $z$ , а для не зависящих от  $x, y$  функций — в ряд Фурье по  $z$ . Этот спектр имеет счетнократную непрерывную (лебеговскую) компоненту на единичной окружности и еще дискретную серию собственных значений, соответствующую собственным функциям  $\varphi_m = e^{2\pi i m z}$  ( $m$  — целые). Отсюда вытекает, что линеаризованное вблизи стационарного течения  $v = e_z$  уравнение Эйлера (1.2) имеет счетную серию неустойчивых собственных чисел  $\mu - 2\pi i m$ , соответственно счетному набору растущих возмущений вихря  $s = \varphi_m(z) e_q$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Из формулы (6.1) следует также плохая предсказуемость решений линеаризованного уравнения Эйлера (1.2) для течений с экспоненциальным растяжением частиц: для приближенного нахождения решения

через время  $t$  требуется очень точно знать быстро растущее с  $t$  число гармоник высокого порядка в начальном возмущении  $s(0)$ . Сравнение формул (6.1) и (2.1) показывает, что экспоненциальное растяжение частиц резко ухудшает предсказуемость нарастания возмущений по сравнению с обычными течениями с линейным растяжением частиц, рассматривавшимися в §§ 2–4.

Явления, подобные обнаруженным в рассмотренном примере, должны наблюдаться и для других течений с экспоненциально растягиваемыми частицами, а такие течения возможны и в областях обычного трехмерного пространства. Экспериментальные подтверждения тому можно найти в работах [5], [6]. Например, машинные эксперименты [5] указывают, по-видимому, на то, что стационарное течение идеальной жидкости, заданное формулами [2]

$$v_x = A \sin z + C \cos y, \quad v_y = B \sin x + A \cos z, \quad v_z = C \sin y + B \cos x,$$

обладает свойством экспоненциального растяжения частиц.

Автор благодарен Л. Д. Фаддееву и В. И. Юдовичу за полезные обсуждения.

## Литература

- [1] Фаддеев Л. Д. К теории устойчивости стационарных плоскопараллельных течений идеальной жидкости. В кн.: Зап. научн. семинаров ЛОМИ, т. 21: Краевые задачи математической физики, (5). Л.: Наука, 1971, 164–172.
- [2] Arnold V. I. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1966, **16**(1), 319–361.
- [3] Grad H. Mathematical problems arising in plasma physics. In: Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970). Paris: Gauthier-Villars, 1971, t. 3, 105–113.
- [4] Squire H. B. On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls. *Proc. Roy. Soc. A*, 1933, **142**, 621–628.
- [5] Hénon M. Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particulier. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1966, **262**, 312–314.
- [6] Froeschlé C. A numerical study of the stochasticity of dynamical systems with two degrees of freedom. *Astronom. Astrophys.*, 1970, **9**, 15–23.

## Критические точки функций и классификация каустик

1. Доклад был посвящен в основном обзору результатов статей [1]–[5]. Две теоремы, не вошедшие в эти статьи, формулируются ниже.

2. **Теорема 1** (О. В. Ляшко). *Пространство комплексных функций Морса имеет в окрестности функций  $A_\mu$ ,  $D_\mu$ ,  $E_\mu$  (см. [2]) локальный гомотопический тип пространства  $K(\pi, 1)$ . При этом  $\pi$  — подгруппа конечного индекса  $\nu$  в группе кос Артина из  $\mu$  нитей; здесь  $\nu = \mu!h^\mu/|W|$ , где  $h$  — число Кокстера, а  $|W|$  — порядок группы Вейля. Таким образом,  $\nu$  имеет следующие значения:*

Тип особенности	$A_\mu$	$D_\mu$	$E_6$	$E_7$	$E_8$
$\nu$	$(\mu + 1)^{\mu-1}$	$2(\mu - 1)^\mu$	$2^9 \cdot 3^4$	$2 \cdot 3^{12}$	$2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^7$

Пространство  $K(\pi, 1)$ , о котором идет речь в теореме 1, можно описать следующим образом. Пусть  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{C}^n$  — взвешенно-однородный многочлен с критической точкой  $x = 0$  одного из типов  $A_\mu$ ,  $D_\mu$ ,  $E_\mu$ . Пусть  $F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_\mu e_\mu$  —  $\mu$ -параметрическая версальная деформация функции  $f$ , где  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\mu) \in \mathbb{C}^\mu$  — параметр, а  $e_s(x)$  — мономы.

Обозначим через  $G$  множество всех значений  $\lambda \in \mathbb{C}^\mu$ , для которых функция  $F(\cdot, \lambda) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  не имеет ни кратных критических точек, ни кратных критических значений. Тогда  $G$  — пространство  $K(\pi, 1)$ .

3. **Теорема 2.** *Всякая голоморфная функция двух переменных с изолированной критической точкой 0 с 3-струей  $x^3$  приводится биголоморфной в окрестности точки 0 заменой координат к одной из нормальных форм следующего списка:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 J_{k,2} \leftarrow J_{k,3} \leftarrow J_{k,4} \leftarrow \dots & & & & J_{k+1,2} \leftarrow J_{k+1,3} \leftarrow \dots & & \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 \dots \leftarrow J_{k,1} \leftarrow E_{6k} \leftarrow E_{6k+1} \leftarrow E_{6k+2} \leftarrow J_{k+1,0} \leftarrow J_{k+1,1} \leftarrow E_{6(k+1)} \leftarrow \dots & & & & & & 
 \end{array}$$

Здесь буквами обозначены следующие функции переменных  $x, y$ :

$$\begin{aligned} E_{6k} &= x^3 + y^{3k+1} + a(y)xy^{2k+1}, & k \geq 1; \\ E_{6k+1} &= x^3 + xy^{2k+1} + a(y)y^{3k+2}, & k \geq 1; \\ E_{6k+2} &= x^3 + y^{3k+2} + a(y)xy^{2k+2}, & k \geq 1; \\ J_{k,l} &= x^3 + x^2y^k + a(y)y^{3k+l}, & k > 1, \quad l > 0, \quad a_1 \neq 0; \\ J_{k,0} &= x^3 + bx^2y^k + y^{3k} + c(y)xy^{2k+1}, & k > 1, \quad 4b^3 + 27 \neq 0, \end{aligned}$$

где  $a(y) = a_1 + a_2y + \dots + a_{k-1}y^{k-2}$ ,  $c(y) = c_1 + c_2y + \dots + c_{k-2}y^{k-3}$ .

Модальность ростков всех указанных функций в 0 равна  $k - 1$ ; кратность (число Милнора) дается формулами  $\mu(J_{k,l}) = 6k + l - 2$ ,  $\mu(E_s) = s$ .

4. Пользуюсь случаем указать некоторые из опечаток в [1]–[4]. В [2] на с. 13 на строках 24 и 26 и на с. 14 на строке 27 вместо  $x_1x_2^4$  должно быть  $ax_1x_2^4$ ; в [4] на с. 32, на строке 5 снизу должно быть  $-2$  вместо  $+2$ . На той же с. 32 неверно нарисованы диаграммы  $X_9$  и  $J_{10}$ ; правильные диаграммы  $X_9 = T_{2,4,4}$  и  $J_{10} = T_{2,3,6}$  имеются на следующей странице (т.е. на с. 33 в [4]).

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Интегралы быстро осциллирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(3), 61–62.
- [2] Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля  $A_k, D_k, E_k$  и лагранжевы особенности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(4), 3–25.
- [3] Арнольд В. И. Классификация унимодальных критических точек функций. *Функц. анализ и его прилож.*, 1973, **7**(3), 75–76.
- [4] Арнольд В. И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера. *УМН*, 1973, **28**(5), 17–44.
- [5] Арнольд В. И. Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек. *УМН*, 1974, **29**(2), 11–49.

## Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения

Классический инвариант Хопфа различает гомотопические классы непрерывных отображений трехмерной сферы на двумерную и равен коэффициенту зацепления двух кривых, являющихся прообразами каких-либо двух регулярных точек двумерной сферы.

Асимптотический инвариант Хопфа является инвариантом векторного поля дивергенции нуль на трехмерном многообразии с фиксированным элементом объема. Он инвариантен относительно группы диффеоморфизмов, сохраняющих объемы, и характеризует «спиральность» поля, т.е. среднюю асимптотику вращения фазовых кривых друг вокруг друга. Для стандартного векторного поля, касательного к расщеплению Хопфа, асимптотический инвариант Хопфа совпадает с классическим. В общем случае асимптотический инвариант Хопфа может принимать всевозможные вещественные значения (тогда как классический инвариант Хопфа — целое число).

Асимптотический инвариант Хопфа можно также рассматривать как квадратичную форму на алгебре Ли группы диффеоморфизмов трехмерного многообразия, сохраняющих объемы, инвариантную относительно присоединенного действия группы на алгебре.

В настоящем докладе приводятся определение и простейшие свойства асимптотического инварианта Хопфа, а также некоторые его приложения к одной нестандартной вариационной задаче, возникающей в магнитной гидродинамике и указанной автору Я. Б. Зельдовичем. В связи с этими вопросами возникает целый ряд нерешенных математических задач, некоторые из которых кажутся трудными. Обсуждение этих нерешенных задач составляет основную цель доклада, все теоремы, приведенные в докладе, очевидны.

Первым обратил внимание на рассматриваемый здесь инвариант Л. Вольтер [10] в связи с магнитной гидродинамикой. Применения в обычной гидродинамике указаны Х. К. Моффатом [6]–[8] и Р. Х. Крейганом [3]–[5]. Автор благодарен участникам семинара Я. Б. Зельдовича и Е. А. Новикову, указавшим на эти работы, за полезные обсуждения.

## 1. Задача о минимуме магнитной энергии замороженного поля

Пусть  $M$  — трехмерное замкнутое риманово многообразие и  $\xi$  — векторное поле дивергенции нуль на  $M$ . Энергией поля называется интеграл

$$E = \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle = \frac{1}{2} \int_M (\xi, \xi) d\mu.$$

Требуется найти поле минимальной энергии среди всех полей, получающихся из данного поля действием группы сохраняющих объемы диффеоморфизмов многообразия  $M$ .

Здесь действие сохраняющего объемы диффеоморфизма  $g : M \rightarrow M$  сопоставляет полю дивергенции нуль  $\xi$  на  $M$  новое бездивергентное поле  $g_*\xi$  так, что поток поля  $\xi$  через любую площадку  $\sigma$  равен потоку поля  $g_*\xi$  через  $g\sigma$ . Иными словами, поле заморожено в заполняющую  $M$  несжимаемую жидкость: вектора поля можно представить себе нарисованными на элементах жидкости и растягивающимися вместе с этими элементами.

Двумерный аналог формулируется следующим образом: найти функцию с минимальным интегралом Дирихле

$$E = \frac{1}{2} \langle \nabla u, \nabla u \rangle = \frac{1}{2} \int_M (\nabla u, \nabla u) d\mu$$

среди всех функций  $u$  на двумерном замкнутом римановом многообразии  $M$ , получающихся из данной функции  $u_0$  под действием сохраняющих площади диффеоморфизмов  $M$  на себя:

$$u(x) = u_0(g^{-1}x).$$

Разумеется, аналогичные задачи можно ставить для многообразий с краем, например, для функций  $u(x, y)$  в обычном евклидовом круге. Все эти задачи исследованы в математическом отношении весьма неудовлетворительно.

### 1.1. Уравнение Эйлера.

**Теорема.** Экстремалами поставленной выше задачи являются поля дивергенции нуль, коммутирующие со своими роторами.

**Доказательство.** Пусть  $\eta$  — любое поле дивергенции нуль. Вариация поля  $\xi$  под действием инфинитезимального диффеоморфизма, заданного полем  $\eta$ , равна скобке Пуассона:

$$\delta\xi = \{\eta, \xi\} \quad (\text{в координатах } \{\eta, \xi\} = (\xi\nabla)\eta - (\eta\nabla)\xi).$$

Следовательно,  $\delta E = \langle \xi, \delta\xi \rangle = \langle \xi, \{\eta, \xi\} \rangle$ . Но, согласно известной формуле векторного анализа,  $\text{rot}[\eta, \xi] = \{\eta, \xi\} + \eta \text{div} \xi - \xi \text{div} \eta$  на любом трехмерном римановом многообразии. Поскольку наши поля  $\xi$  и  $\eta$  бездивергентны,  $0 = \delta E = \langle \xi, \text{rot}[\eta, \xi] \rangle = \langle \text{rot} \xi, [\eta, \xi] \rangle = \langle \eta, [\xi, \text{rot} \xi] \rangle$ . Поскольку поле  $\eta$  — произвольное бездивергентное, векторное произведение  $[\xi, \text{rot} \xi]$  ортогонально всем полям дивергенции нуль. Следовательно, оно является градиентным полем:

$$[\xi, \text{rot} \xi] = \text{grad} \alpha,$$

откуда, взяв  $\text{rot}$  левой и правой части, находим

$$\{\xi, \text{rot} \xi\} \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

**Замечание 1.** В двумерном случае получается уравнение

$$[\nabla u, \nabla \Delta u] \equiv 0,$$

выражающее коллинеарность градиента экстремальной функции и ее лапласиана.

**Замечание 2.** Аналогичная выкладка дает для второй вариации выражение

$$\delta^2 E = \langle \{\eta, \xi\}, \{\eta, \xi\} \rangle + \langle \{\eta, \xi\}, [\text{rot} \xi, \eta] \rangle$$

(где  $\xi$  — экстремаль, первая и вторая вариации которой даются формулой

$$\xi(\varepsilon) = \xi + \varepsilon\{\eta, \xi\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\{\eta, \{\eta, \xi\}\} + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

через векторное поле  $\eta$  дивергенции нуль).

**1.2. Исследование экстремальных полей.** Пусть  $\xi$  — поле дивергенции нуль на трехмерном замкнутом ориентированном римановом

многообразии  $M$ , для которого  $[\xi, \text{rot } \xi] = \text{grad } \alpha$ . Все такие поля являются экстремалами нашей задачи. Оказывается, линии поля  $\xi$  обладают весьма специальной топологией.

**Теорема.** Каждое некритическое множество уровня функции  $\alpha$  диффеоморфно тору (или объединению нескольких торов). В окрестности такого тора можно задать координаты  $\varphi_1, \varphi_2 \pmod{2\pi}$ ,  $z$  так, что  $\varphi$  — угловые координаты на торе,  $z$  нумерует торы, а поле  $\xi$  (и поле  $\text{rot } \xi$ ) имеет компоненты

$$\xi = \omega_1(z) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \omega_2(z) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}; \quad \text{rot } \xi = \omega'_1(z) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \omega'_2(z) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.$$

При этом координату  $z$  можно выбрать так, что элемент объема примет вид  $d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \wedge dz$ .

**Замечание.** Координаты  $\varphi_1, \varphi_2, z$  аналогичны переменным действие — угол классической механики. Теорема означает, в частности, что как линии поля  $\xi$ , так и линии поля  $\text{rot } \xi$  лежат на торах  $\alpha = \text{const}$ . Такая линия либо замыкается (если отношение частот  $\omega$  рационально), либо всюду плотна на торе.

Доказательство см. в [1]. Из сформулированной теоремы вытекает, что, например, в аналитическом случае при  $\alpha \neq \text{const}$  многообразие  $M$  разбивается критическими множествами уровня функции  $\alpha$  на конечное число ячеек, диффеоморфных произведению тора на интервал, в каждой из которых поля  $\xi$  и  $\text{rot } \xi$  касаются торов и задают периодические или условно периодические обмотки торов. Мы получаем, таким образом, явное описание топологии поля  $\xi$  (и  $\text{rot } \xi$ ).

Остается рассмотреть случай, когда  $\text{grad } \alpha \equiv 0$ . В этом случае  $[\xi, \text{rot } \xi] = 0$ , т.е. поля  $\xi$  и  $\text{rot } \xi$  коллинеарны в каждой точке. Такие поля называются в магнитной гидродинамике *бессиловыми*.

Если бессиловое поле  $\xi$  нигде не обращается в нуль, то  $\text{rot } \xi = c\xi$ , где  $c : M \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция. Но  $\text{div } \text{rot } \xi \equiv 0$ , следовательно,  $(\text{grad } c, \xi) \equiv 0$ , т.е. функция  $c$  — первый интеграл для поля  $\xi$  (а значит, и для  $\text{rot } \xi$ ). Отсюда вытекает, что связные компоненты неособых поверхностей уровня функции  $c$  являются торами, а линии поля  $\xi$  — обмотками этих торов (в соответствующих координатах  $\varphi_1, \varphi_2, z$  постоянным вдоль линий поля  $\xi$  будет отношение частот,  $\dot{\varphi}_1/\dot{\varphi}_2 = \kappa(z)$ ). Таким образом, и в случае бессилового поля линии поля укладываются



на двумерные торы, если только поле не имеет нулей и функция  $c$  — не константа.

Бессиловые поля с  $\operatorname{rot} \xi = \lambda \xi$ , где  $\lambda$  — константа, могут иметь гораздо более сложную топологию. Пример такого поля на трехмерном торе  $\{x, y, z \bmod 2\pi\}$  дается компонентами

$$\xi_x = A \sin z + C \cos y, \quad \xi_y = B \sin x + A \cos z, \quad \xi_z = C \sin y + B \cos x.$$

Топология линий этого поля  $\xi$  была исследована М. Эно [2] экспериментально, при помощи машины Института астрофизики в Париже. В результате обнаружено некоторое количество торов, заполненных линиями поля («магнитных поверхностей»), и наряду с ними целые области трехмерного пространства, которые линии поля заполняют, насколько можно судить по экспериментальным данным, эргодическим, плотным образом.

**1.3. Обсуждение.** Возвращаясь к нашей экстремальной задаче, мы видим, что поле минимальной энергии в данном классе в замороженности должно либо обладать весьма специальной топологией (линии поля должны заполнять торы), либо быть бессиловым специального типа. Но топологические свойства линий поля инвариантны относительно диффеоморфизмов, поэтому если исходное поле было общего положения, без торических интегральных поверхностей, то и всякое получающееся из него диффеоморфизмом поле обладает тем же свойством. Следовательно, поле минимальной энергии либо не существует (в том классе гладких полей, к которым применим предыдущий анализ), либо является бессиловым специального вида.

Но бессиловых полей с  $\operatorname{rot} \xi = \lambda \xi$  весьма мало: это собственные поля оператора  $\operatorname{rot}$  на пространстве бездивергентных полей. Поэтому приходится думать, что наша вариационная задача, по-видимому, не всегда допускает гладкое решение.

В связи с этим рассмотрим следующий пример. Пусть  $M$  — шар в трехмерном евклидовом пространстве, а линии поля  $\xi$  — горизонтальные окружности с центрами на вертикальной оси. Согласно Я. Б. Зельдовичу, энергию такого поля можно сделать сколь угодно малой при помощи подходящего диффеоморфизма, сохраняющего объемы и неподвижного в окрестности края. А именно, разобьем весь шар на много тонких полноторий (баранок), образованных из окружностей полей, и остаток малого объема. Затем продеформируем (сохраняя объемы)

каждое полноторие (нарушая осевую симметрию поля) так, чтобы оно стало толстым и маленьким, уменьшив просвет почти до нуля. Тогда энергия поля в полноториях уменьшится (так как линии поля укорачиваются). Утверждается, что всю конструкцию можно провести так, чтобы энергия поля в остатке малого объема не слишком выросла, так что в результате общая энергия станет сколь угодно малой.

Было бы интересно аккуратно проверить высказанное утверждение.

В связи с указанным примером возникает вопрос, *нельзя ли довести до сколь угодно малого значения энергию любого поля посредством подходящего диффеоморфизма, сохраняющего объемы*. Мы увидим в дальнейшем, что это не так. Препятствие к полному уничтожению энергии можно себе представить, рассмотрев две зацепленные баранки из линий поля. В этом случае сокращение линий поля в одной баранке, уменьшая ее просвет, вызывает удлинение линий поля в другой, так что возникает препятствие к уменьшению энергии. Асимптотический инвариант Хопфа, измеряющий зацепленность линий поля (не обязательно замкнутых), позволяет дать этому соображению количественное выражение в виде оценки энергии снизу.

**1.4. Магнитогидродинамическая трактовка.** В магнитной гидродинамике роль  $\xi$  играет магнитное поле  $H$ , вмороженное в жидкость конечной вязкости, но бесконечной проводимости, заполняющую  $M$ . При соответствующем выборе единиц поле скоростей  $v$  и магнитное поле  $H$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v, v) = -\text{grad } p - \nu \Delta v + [j, H], & \text{div } v = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} = \{v, H\}, & \text{div } H = 0, \quad \text{rot } H = j. \end{cases}$$

В начальный момент заданы магнитное поле  $H$  и поле скоростей  $v$ . С течением времени кинетическая энергия диссипируется за счет вязкости, и движение «в конце концов» прекращается, так что каждая частица переходит в некоторое конечное положение. Магнитное поле, будучи вмороженным, приходит при этом к некоторому конечному значению. Энергия этого конечного поля должна быть минимальной, иначе магнитная энергия перешла бы в кинетическую и за счет силы Лоренца — жидкость начала бы двигаться, пока не диссипировалось бы превышение магнитной энергии над минимумом.

Такое описание поведения решений выписанной системы обычно приводится физиками. К сожалению, предыдущий анализ топологии экстремальных полей оставляет мало надежды на то, что это описание правильно при сколько-нибудь общих начальных условиях: ведь начальное магнитное поле можно взять не имеющим магнитных поверхностей, и тогда предельное поле, если оно есть, должно быть бессильным специального типа, — а таких полей слишком мало, и вряд ли среди них найдется поле с предписанной топологией силовых линий.

По-видимому, для правильного описания реального процесса необходимо учитывать магнитную вязкость, нарушающую замороженность поля и не учтенную в написанной выше системе уравнений.

Вопрос о том, в какой мере можно использовать экстремальные поля при исследовании поведения  $H$  в течение промежутков времени, за которые обычная вязкость успела погасить движение жидкости, но магнитная вязкость еще не погасила  $H$ , является интересной нерешенной задачей.

Я. Б. Зельдович предложил задачу о минимуме магнитного поля в связи с вопросом об эволюции магнитного поля звезды. В этом случае  $M$  есть шар в трехмерном евклидовом пространстве, и поле продолжается на все пространство исходя из условий

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H = 0 \quad \text{вне } M, \quad \operatorname{div} H = 0 \quad \text{вне } M, \\ (H, n) \quad \text{непрерывна на } \partial M \end{aligned}$$

и из условия убывания на бесконечности. Таким образом, диффеоморфизмы  $M$ , сохраняющие объемы, действуют на поле  $H$  во всем пространстве. Минимизировать требуется полную энергию поля  $H$  (т.е. интеграл по всему пространству). Минимальное поле должно доставлять минимум магнитной энергии внутри  $M$  по сравнению с полями, получающимися из данного диффеоморфизмом, неподвижным вблизи границы.

Я не останавливаюсь здесь на вопросе о том, насколько указанная простая модель близка к реальности. В дальнейшем мы ограничимся еще более простым случаем, в котором  $M$  — многообразие без края.

## 2. Определение инварианта

Мы начнем с догматического изложения: рассмотрим данное ad hoc определение инварианта и докажем его простейшие свойства. Содерж-

жательный смысл инварианта (объясняющий, как этот инвариант найден) обсуждается в следующих параграфах.

Пусть  $M$  — трехмерное замкнутое (компактное, без края) ориентированное связное трехмерное многообразие, и пусть  $\mu$  — элемент объема (т.е. ориентирующая 3-форма) на  $M$ . В дальнейшем нам будет удобно считать, что объем всего пространства  $M$  равен 1. Заметим, что мы фиксируем на  $M$  элемент объема, но не фиксируем никакой специальной римановой метрики.

**2.1. Обозначения.** Каждое векторное поле  $\xi$  на  $M$  задает дифференциальную 2-форму  $\omega_\xi$  по формуле

$$\omega_\xi(\eta, \zeta) = \mu(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{для любых } \eta, \zeta,$$

соответствие  $\xi \mapsto \omega_\xi$  — изоморфизм линейных пространств полей и 2-форм. Производная формы  $\omega_\xi$ , как и всякая 3-форма, записывается в виде

$$d\omega_\xi = \varphi\mu,$$

где  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция. Функция  $\varphi$  называется *дивергенцией* поля  $\xi$ :

$$\varphi = \operatorname{div} \xi.$$

Поле скоростей потока, сохраняющего элемент объема на  $M$ , бездивергентное, и обратно, все поля дивергенции нуль на  $M$  являются полями скоростей несжимаемых потоков (т.е. потоков, сохраняющих элемент объема  $\mu$  на  $M$ ).

Бездивергентное векторное поле  $\xi$  на  $M$  называется *гомологичным нулю*, если соответствующая ему 2-форма  $\omega_\xi$  является полным дифференциалом некоторой 1-формы  $\alpha$  на  $M$ :

$$\omega_\xi = d\alpha.$$

1-форму  $\alpha$  мы будем называть *формой-потенциалом*. Поле гомологично нулю тогда и только тогда, когда его поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

**Замечание.** Если на многообразии  $M$  выбрана риманова метрика, то 1-форму  $\alpha$  можно отождествить с векторным полем  $a$ , для которого

$$\alpha(\eta) = (a, \eta) \quad \text{для любого } \eta.$$

В таком случае  $\xi = \text{rot } a$ , и векторное поле  $a$  называется *вектор-потенциалом* поля  $\xi$ . Однако существенно заметить, что формы  $\omega$  и  $\alpha$  (в отличие от поля  $a$ ) зависят не от римановой метрики, но лишь от выбора элемента объема  $\mu$ .

**2.2. Определение.** (Средним) инвариантом Хопфа гомологичного нулю поля  $\xi$  на трехмерном многообразии  $M$  с элементом объема  $\mu$  называется интеграл произведения формы  $\omega_\xi$  и ее формы-потенциала, т.е. число

$$I(\xi) = \int_M \alpha \wedge d\alpha, \quad \text{где } \omega_\xi = d\alpha.$$

Докажем, что это определение корректно, т.е., что значение  $I$  не зависит от специального выбора формы-потенциала  $\alpha$ , но лишь от поля  $\xi$ .

Действительно, если  $\beta = \alpha + \gamma$  — другая форма-потенциал, то  $d\gamma = 0$ , поэтому

$$\int_M (\beta \wedge d\beta - \alpha \wedge d\alpha) = \int_M \gamma \wedge d\alpha = \int_M d(\gamma \wedge \alpha) = \int_{\partial M} \gamma \wedge \alpha = 0.$$

**Замечание.** Если на многообразии  $M$  фиксирована метрика с элементом объема  $\mu$ , то

$$I(\xi) = \int_M (\xi, a) d\mu = \langle \xi, \text{rot}^{-1} \xi \rangle,$$

где  $a$  — любой вектор-потенциал поля  $\xi$ . Таким образом,  $I$  есть скалярное произведение поля со своим вектор-потенциалом. Существенно отметить, однако, что риманова метрика в определении  $I$  не входит.

### 2.3. Инвариантность.

**Следствие.** Всякий сохраняющий объемы диффеоморфизм  $g : M \rightarrow M$  переводит любое гомологичное нулю поле  $\xi$  в поле с таким же значением инварианта Хопфа.

В частности, на римановом многообразии скалярное произведение бездивергентного поля на свой вектор-потенциал сохраняется, когда поле испытывает действие сохраняющего объемы диффеоморфизма.

Таким образом, инвариантность  $I$  относительно сохраняющих элемент объема диффеоморфизмов вытекает из того, что  $I$  можно определить, не используя других структур, кроме гладкой структуры  $M$  и элемента объема  $\mu$ .

**Замечание.** Вопрос о том, сохраняется ли  $I$  при сохраняющих элемент объема гомеоморфизмах (переводящих фазовый поток поля  $\xi$  в фазовый поток другого поля  $\xi'$ ), является интересной нерешенной задачей, равно как и близкий вопрос о том, можно ли определить инвариант  $I$  сразу для однопараметрических групп гомеоморфизмов, сохраняющих элемент объема.

**Замечание.** В случае, когда  $M$  — многообразие с краем, величина  $I$  сохраняется при всех сохраняющих объемы диффеоморфизмах, неподвижных в окрестности края. Если же поле  $\xi$  касается края, то величина  $I$  сохраняется при всех диффеоморфизмах, сохраняющих элемент объема, если только  $M$  односвязно. Вопрос о том, можно ли определить аналогичный  $I$  инвариант для общих бездивергентных полей на многообразии с краем (добавив в  $I$  поверхностное слагаемое), является интересной нерешенной задачей.

**2.4. Примеры.** Если называть поле  $\xi$  магнитным, то мы приходим к выводу, что инвариант Хопфа магнитного поля, замороженного в несжимаемую жидкость, заполняющую замкнутое многообразие, не меняется при любых течениях жидкости.

Если интерпретировать поле  $\xi$  как поле вихря идеальной жидкости, то мы приходим к выводу, что при течении идеальной жидкости на замкнутом трехмерном многообразии скалярное произведение поля скоростей и поля вихря не меняется с течением времени.

Если рассматривать поле  $\xi$  как элемент алгебры Ли группы  $\text{SDiff } M$  сохраняющих объемы диффеоморфизмов трехмерного многообразия  $M$ , то мы приходим к выводу, что на алгебре Ли группы  $\text{SDiff } M$  существует билинейная симметричная форма, инвариантная относительно присоединенного действия группы в алгебре. Если фиксировать на  $M$  риманову метрику, то

$$I(\xi, \eta) = \langle \xi, \text{rot}^{-1} \eta \rangle,$$

где  $\text{rot}^{-1} \eta$  — вектор-потенциал поля  $\eta$ . В частности, для любого бездивергентного поля  $\eta$  имеем

$$\langle \{\xi, \eta\}, \text{rot}^{-1} \xi \rangle = 0,$$

что, конечно, легко проверить непосредственной выкладкой.

Для двумерного многообразия  $M$  вместо симметричной формы получается кососимметрическая.

### 3. Асимптотика коэффициента зацепления с кривой

Пусть  $M$  — замкнутое, ориентированное, связное, односвязное трехмерное многообразие с элементом объема  $\mu$ ,  $\gamma$  — гладко вложенная в  $M$  ориентированная замкнутая кривая, а  $\xi$  — векторное поле дивергенции нуль на  $M$ . Мы определим асимптотический коэффициент зацепления линии поля  $\xi$ , выходящей из точки  $x$ , с кривой  $\gamma$ . Пусть  $\{g^t : M \rightarrow M\}$  — фазовый поток поля  $\xi$ . Зафиксируем 2-цепь  $\sigma$  (из гладких симплексов), для которой  $\partial\sigma = \gamma$ .

**3.1. Асимптотический коэффициент зацепления.** Для любой пары точек  $x, y$  многообразия  $M$  выберем «короткую кривую»  $\Delta(x, y)$ , соединяющую эти точки и обладающую следующими свойствами:

- 1) Если точки  $x, y$  не принадлежат  $\gamma$ , то  $\Delta$  не пересекает  $\gamma$ .
- 2) Число точек пересечения  $\Delta(x, y)$  с  $\sigma$  ограничено константой, не зависящей от  $x$  и  $y$ .

Такую систему «коротких кривых» нетрудно построить; зависимость  $\Delta$  от  $x$  и  $y$  можно сделать измеримой (и даже кусочно-гладкой).

Зафиксируем систему кривых  $\Delta$  и рассмотрим отрезок орбиты  $g^t x$  точки  $x$ , соответствующий  $0 \leq t \leq T$ . Последнюю точку  $g^T x = y$  соединим с первой коротким путем  $\Delta(y, x)$ ; тогда возникнет замкнутая кривая  $\Gamma_T(x)$ . Предположим, что эта кривая не пересекается с  $\gamma$ .

Обозначим через  $N_T(x)$  коэффициент зацепления  $\Gamma_T(x)$  с  $\gamma$  (т.е. индекс пересечения  $\Gamma_T(x)$  с  $\sigma$ ).

**Теорема.** Для почти всех  $x$  из  $M$  существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} N_T(x) = \lambda(x)$$

(где  $T$  пробегает такие значения, что  $\Gamma_T(x)$  не пересекает  $\gamma$ ). Этот предел принадлежит  $L_1(M, \mu)$  и как элемент  $L_1$  не зависит от выбора системы путей  $\Delta$ .

Предел  $\lambda(x)$  называется *асимптотическим коэффициентом зацепления орбиты  $g^t x$  с кривой  $\gamma$* .

Для доказательства теоремы удобно дать другое определение асимптотическому коэффициенту зацепления, а потом доказать его эквивалентность приведенному выше.

**3.2. Второе определение асимптотического коэффициента зацепления.** На многообразии  $M - \gamma$  можно построить замкнутую дифференциальную 1-форму  $\alpha$ , обладающую следующими свойствами:

1) Коэффициент зацепления с  $\gamma$  любой замкнутой кривой  $\delta$  в  $M - \gamma$  равен интегралу формы  $\alpha$  по  $\delta$ .

2) Существует такое диффеоморфное вложение  $u : S^1 \times D^2 \rightarrow M$  прямого произведения окружности на диск в  $M$ , что окружность  $S^1 \times 0$  переходит в  $\gamma$ , а форма  $\alpha$  индуцирует на дополнении к этой окружности стандартную форму  $u^* \alpha = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg}(y/x)$  (где  $x, y$  — координаты в  $D^2$ ).

Зафиксируем форму  $\alpha$ , обладающую этими свойствами, и рассмотрим предел

$$\hat{\lambda}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \alpha \left( \frac{d}{dt} g^t x \right) dt.$$

**Теорема.** Указанный предел существует при почти всех  $x$  и не зависит от выбора 1-формы  $\alpha$ , удовлетворяющей условиям 1) и 2).

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \alpha(\xi(x)), \quad \text{где} \quad \xi(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^t x.$$

Эта функция принадлежит пространству  $L_1(M, \mu)$  ввиду условия 2) на форму  $\alpha$ . По эргодической теореме Биркгофа временное среднее функции  $f$  существует почти всюду. Это и доказывает первую часть теоремы, так как  $\hat{\lambda}(x)$  есть временное среднее функции  $f$ .



Для доказательства второй части заметим, что форма  $\alpha$  определена с точностью до дифференциала однозначной функции на  $M - \gamma$ . Если  $\varphi$  — гладкая функция на  $M - \gamma$ , то

$$\int_0^T d\varphi \left( \frac{d}{dt} g^t x \right) dt = \varphi(g^T x) - \varphi(x).$$

Заметим теперь, что если  $g^t x$  при  $t \rightarrow +\infty$  не стремится асимптотически к  $\gamma$ , то можно выбрать такую последовательность  $T_i \rightarrow +\infty$ , что расстояние точек  $g^{T_i} x$  от  $\gamma$  остается ограниченным снизу. Но функция  $\varphi$  вне  $\varepsilon$ -окрестности кривой  $\gamma$  ограничена сверху константой  $C(\varepsilon)$ . Следовательно, для любой точки  $x$ , не асимптотической к  $\gamma$ , существует последовательность  $T_i \rightarrow +\infty$ , вдоль которой величина  $\varphi(g^{T_i} x)$  остается ограниченной сверху. Значит, предел  $\hat{\lambda}(x)$  одинаков для любых двух 1-форм  $\alpha$  для всех точек  $x$ , исключая асимптотические к  $\gamma$  (и те точки, для которых одного из пределов нет). Но точки, асимптотические к  $\gamma$ , образуют множество меры нуль (ввиду бездивергентности поля  $\xi$ ), и независимость  $\hat{\lambda}$  от  $\alpha$  при почти всех  $x$  доказана.

**3.3. Эквивалентность определений.** Теорема пункта 3.1 вытекает из следующей:

**Теорема.** При почти всех  $x$  предел  $\lambda(x)$  существует и равен  $\hat{\lambda}(x)$ .

**Доказательство.** В силу свойства 1) формы  $\alpha$  достаточно доказать, что для почти всех  $x$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\Delta(g^T x, x)} \alpha(\xi) dt = 0.$$

Но из ограниченности числа пересечений  $\Delta$  с  $\sigma$  (см. свойство 2) кривых  $\Delta$ ) вытекает равномерная ограниченность интегралов формы  $\alpha$  вдоль  $\Delta$ ; следовательно, указанный выше предел (по последовательности  $T$ , для которой путь  $\Delta$  не пересекает  $\gamma$ ) равен нулю, что и доказывает теорему.

**Замечание.** Одновременно доказана независимость числа  $\lambda(x)$  от семейства коротких кривых  $\Delta$ .

**Замечание.** Из приведенных теорем видно, что асимптотический коэффициент зацепления инвариантен относительно сохраняющих объ-

емы диффеоморфизмов в том смысле, что если диффеоморфизм  $h$  переводит систему  $(M, \mu, \gamma, \xi, x)$  в  $(M', \mu', \gamma', \xi', x')$ , то

$$\lambda_{\xi, \gamma}(x) = \lambda_{\xi', \gamma'}(x').$$

Вопрос о том, сохраняется ли асимптотический коэффициент зацепления при гомеоморфизмах, сохраняющих объемы, является нерешенной задачей, равно как и близкий вопрос о возможности определить асимптотический коэффициент зацепления с топологической кривой  $\gamma$  для однопараметрической группы гомеоморфизмов, сохраняющих объемы.

**3.4. Средний коэффициент зацепления с кривой.** Пусть  $\{g^t\}$  — фазовый поток бездивергентного поля  $\xi$  на односвязном трехмерном многообразии  $M$  с элементом объема  $\mu$ . Пусть  $\gamma = \partial\sigma$  — ориентированная гладкая кривая в  $M$ , а  $\sigma$  — кусочно-гладкая 2-цепь. Средним коэффициентом зацепления потока  $\{g^t\}$  с кривой  $\gamma$  называется среднее значение асимптотического коэффициента зацепления по многообразию  $M$ :

$$\lambda = \int_M \lambda(x) \mu.$$

**Теорема.** Средний коэффициент зацепления  $\lambda$  равен потоку поля  $\xi$  через поверхность  $\sigma$ .

**Доказательство.** Величина  $\lambda(x)$  есть временное среднее функции  $f(x) = \alpha(\xi(x))$ . Следовательно, пространственные средние функций  $f$  и  $\lambda$  совпадают, т.е.

$$\lambda = \int_M \alpha(\xi) \mu = \int_M \alpha \wedge \omega_\xi.$$

Теорема вытекает теперь из гомологичности 2-цепи  $\sigma$  и 1-формы  $\alpha$  как потоков Де Рама в  $M - \gamma$  (строго говоря, нужно рассматривать не  $M - \gamma$ , а дополнение в  $M$  к  $\varepsilon$ -окрестности  $\gamma$ , а затем устремить  $\varepsilon$  к 0).

**Замечание.** Аналогичные результаты можно получить в случае, когда  $\gamma$  — не гладко вложенная, а кусочно-гладкая кривая. Более того, многообразие  $M$  можно было бы считать  $n$ -мерным, а цепь  $\gamma$  —  $(n - 2)$ -мерной.

#### 4. Асимптотический коэффициент зацепления пары траекторий

Пусть  $M$  — трехмерное замкнутое односвязное многообразие с элементом объема  $\mu$ , и пусть  $\xi$  — векторное поле дивергенции нуль на  $M$ , а  $\{g^t\}$  — его фазовый поток.

**4.1. Определение асимптотического коэффициента зацепления пары траекторий.** Рассмотрим пару точек  $x_1, x_2$  многообразия  $M$ . Этой паре точек мы сопоставим число, характеризующее «асимптотическое зацепление» выходящих из них траекторий потока  $\{g^t\}$ .

С этой целью мы сперва соединим любые 2 точки многообразия  $M$  «коротким путем», соединяющим эти точки (условия, наложенные на короткие пути, описаны дальше и выполняются при «почти любом» выборе коротких путей).

Зафиксируем большие числа  $T_1, T_2$  и замкнем отрезки  $g^{t_k} x_k$  ( $0 \leq t_k \leq T_k$ ) траекторий, выходящих из точек  $x_1, x_2$ , короткими путями  $\Delta(g^{T_k} x_k, x_k)$  ( $k = 1, 2$ ), так что получатся 2 замкнутые кривые  $\Gamma_k = \Gamma_{T_k}(x_k)$ . Предположим, что эти кривые не пересекаются (что выполнено при почти всех парах  $x_1, x_2$  для почти всех  $T_1, T_2$ ). Тогда определен коэффициент зацепления  $N_{T_1, T_2}(x_1, x_2)$  кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

**Определение.** Асимптотическим коэффициентом зацепления пары траекторий  $g^t x_1, g^t x_2$  называется предел

$$\lambda(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \frac{N_{T_1, T_2}(x_1, x_2)}{T_1 T_2}$$

( $T_1$  и  $T_2$  меняются так, что кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не пересекаются).

Далее мы докажем существование этого предела почти всюду и его независимость от системы коротких путей  $\Delta$  (как элемента из  $L_1(M \times M)$ ).

**4.2. Отступление о формуле Гаусса.** Нам будет полезна формула для коэффициента зацепления двух замкнутых кривых в трехмерном евклидовом пространстве, данная Гауссом. Аналогичная формула существует и в случае односвязного многообразия — см. книгу Де Рама «Дифференцируемые многообразия».

Чтобы написать формулу Гаусса, введем следующие обозначения.

Пусть  $x_1 : S_1^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  и  $x_2 : S_2^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — гладкие отображения окружностей в трехмерное евклидово пространство, причем образы этих отображений не пересекаются. Пусть  $t_1 \pmod{T_1}$  и  $t_2 \pmod{T_2}$  — координаты на первой и второй окружностях соответственно; тогда через  $\dot{x}_1 = \dot{x}_1(t_1)$  обозначим вектор скорости движения по первой, а через  $\dot{x}_2 = \dot{x}_2(t_2)$  — по второй окружности.

Мы будем считать окружности ориентированными выбором параметров  $t_1, t_2$  и фиксируем ориентацию в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда в  $\mathbb{R}^3$  можно определить векторное и смешанное произведения.

**Теорема Гаусса.** Коэффициент зацепления замкнутых кривых  $x_1(S_1^1)$  и  $x_2(S_2^1)$  равен

$$N_{1,2} = +\frac{1}{4\pi} \int_0^{T_2} \int_0^{T_1} \frac{(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3} dt_1 dt_2.$$

**Доказательство.** Рассмотрим отображение тора на сферу

$$f : T^2 \rightarrow S^2,$$

сопоставляющее паре точек  $(t_1, t_2)$  на наших окружностях вектор единичной длины, направленный от точки  $x_2(t_2)$  к точке  $x_1(t_1)$ :

$$f = F/\|F\|, \quad \text{где } F(t_1, t_2) = x_1(t_1) - x_2(t_2).$$

Ориентируем сферу внутренней нормалью, а тор — координатами  $t_1, t_2$ . Степень отображения равна коэффициенту зацепления  $N_{1,2}$ . Действительно, это верно для далеко друг от друга расположенных маленьких окружностей: как коэффициент зацепления, так и степень отображения  $f$  равны 0. Далее легко проверить, что при деформации кривой при каждом трансверсальном прохождении одной кривой сквозь другую как коэффициент зацепления, так и степень меняются на 1, притом в одну сторону. Теперь равенство  $N_{1,2} = \deg f$  доказано, ввиду связности множества гладких отображений  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Докажем, что степень отображения  $f$  дается интегралом формулы Гаусса. Действительно, по определению степени

$$\deg f = \frac{1}{4\pi} \iint_{T^2} f^* \omega^2,$$

где  $\omega^2$  — элемент площади на единичной сфере. Согласно определению  $f$ , значение формы  $f^*\omega^2$  на паре векторов  $\xi_1, \xi_2$ , касающихся тора в точке  $t$ , равно смешанному произведению с вектором  $-f = -f(t)$  (мы ориентируем сферу внутренней нормалью):

$$\omega^2(f_*\xi_1, f_*\xi_2) = (f_*\xi_1, f_*\xi_2, -f).$$

Дифференцируя  $f$ , получаем  $f_*\xi = F_*\xi/\|\xi\| + c(\xi)f$ , поэтому

$$\omega^2(f_*\xi_1, f_*\xi_2) = (F_*\xi_1, F_*\xi_2, -F)/\|F\|^3.$$

Поскольку  $F = x_1 - x_2$ , мы получаем для элемента сферического изображения тора выражение

$$f^*\omega^2 = +(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1 - x_2)\|x_1 - x_2\|^{-3} dt_1 \wedge dt_2,$$

что и требовалось доказать.

**4.3. Второе определение асимптотического коэффициента зацепления.** Пусть  $\{g^t\}$  — фазовый поток, заданный бездивергентным полем  $\xi$  в евклидовой трехмерной компактной области  $M$ . На краю  $M$  поле предполагается касательным к  $M$ . Положим

$$\hat{\lambda}(x_1, x_2) = \lim_{\substack{T_1 \rightarrow \infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} \frac{1}{T_1 T_2} \frac{1}{4\pi} \int_0^{T_2} \int_0^{T_1} \frac{(\dot{g}^{t_1} x_1, \dot{g}^{t_2} x_2, x_1 - x_2)}{\|x_1(t_1) - x_2(t_2)\|^3} dt_1 dt_2.$$

Мы докажем, что:

- 1) предел  $\hat{\lambda}(x_1, x_2)$  существует почти всюду на  $M \times M$ ;
- 2) число  $\hat{\lambda}(x_1, x_2)$  при почти всех  $x_1, x_2$  совпадает с определенным выше числом  $\lambda(x_1, x_2)$ .

Для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что  $\hat{\lambda}$  является «временным средним» от суммируемой функции на многообразии  $M \times M$ , где действует коммутативная группа  $\{g^{t_1}\} \times \{g^{t_2}\}$ .

Функция под интегралом

$$\Phi(x_1, x_2) = (\xi_1, \xi_2, x_1 - x_2)/\|x_1 - x_2\|^3 \quad \left( \xi_k = \frac{d}{dt_k} \Big|_{t_k=0} g^{t_k} x_k \right)$$

имеет на диагонали  $M \times M$  особенность порядка не выше  $r^{-2}$  (где  $r$  — расстояние до диагонали); поскольку коразмерность диагонали равна 3,  $\Phi$  принадлежит пространству  $L_1(M \times M)$ , что и требовалось проверить.

Для сравнения  $\hat{\lambda}$  с  $\lambda$  представим коэффициент зацепления кривых  $\Gamma_{T_1}x_1$  и  $\Gamma_{T_2}x_2$  как интеграл Гаусса, в котором  $0 \leq t_1 \leq T_1 + 1$ ,  $0 \leq t_2 \leq T_2 + 1$  и значения параметра  $t_k$  от  $T_k$  до  $T_k + 1$  использованы для параметризации «короткого пути», соединяющего  $g^{T_k}x_k$  с  $x_k$ .

**Определение.** Системой коротких путей, соединяющих точки  $x, y \in M$ , называется такая система путей, измеримо зависящих от  $x$  и  $y$ , что интегралы типа Гаусса для любой пары непересекающихся путей системы, а также для любой непересекающейся пары (путь системы, отрезок фазовой кривой  $g^t x$ ,  $0 \leq t \leq \tau < 1$ ), ограничены не зависящей от путей константой  $c$ .

Нетрудно проверить, что системы коротких путей существуют (полезно иметь в виду, что интеграл типа Гаусса для пары прямолинейных отрезков остается ограниченным, когда отрезки сближаются).

Теперь разность интегралов типа Гаусса

$$\int_0^{T_2+1} \int_0^{T_1+1} - \int_0^{T_2} \int_0^{T_1}$$

оценивается суммой не более чем  $[T_1] + [T_2] + 3$  слагаемых, каждое из которых не превосходит  $c$ . Следовательно,

$$\lambda(x, y) - \hat{\lambda}(x, y) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \left( \int_0^{T_2+1} \int_0^{T_1+1} - \int_0^{T_2} \int_0^{T_1} \right)$$

(где  $T_1$  и  $T_2$  стремятся к бесконечности по любой последовательности, для которой кривые  $\Gamma_{T_1}x_1$  и  $\Gamma_{T_2}x_2$  не пересекаются).

#### 4.4. Средний коэффициент зацепления.

**Теорема.** Среднее значение асимптотического коэффициента зацепления пары траекторий

$$\iint_{M \times M} \lambda(x_1, x_2) d\mu_1 d\mu_2 \Big/ \iint_{M \times M} d\mu_1 d\mu_2$$

равно асимптотическому инварианту Хопфа поля фазовой скорости

$$I(\xi) = \langle \text{rot}^{-1} \xi, \xi \rangle.$$

**Доказательство.** Рассмотрим интеграл Био–Савара

$$\eta(x_2) = -\frac{1}{4\pi} \int_M \frac{[\xi(x_1), x_1 - x_2]}{\|x_1 - x_2\|^3} d\mu(x_1),$$

где  $[\cdot, \cdot]$  — векторное произведение. Тогда  $\operatorname{rot} \eta = \xi$ , поэтому

$$\langle \eta, \xi \rangle = \langle \operatorname{rot}^{-1} \xi, \xi \rangle = +\frac{1}{4\pi} \iint_{M \times M} \frac{(\xi(x_1), \xi(x_2), x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3} d\mu(x_1) d\mu(x_2),$$

что и требовалось доказать.

**Замечание.** Аналогичные результаты получаются на любом компактном трехмерном римановом односвязном многообразии  $M$ , но интеграл Гаусса нужно заменить интегралом «двойной формы» Де Рама, эту форму не удастся выписать столь явно, но она обладает аналогичными свойствами.

**Замечание.** Вопрос о том, инвариантны ли асимптотический и средний коэффициенты зацепления пары траекторий относительно гомеоморфизмов, сохраняющих элемент объема, остается открытым, равно как и близкий к нему вопрос о том, можно ли определить асимптотический и средний коэффициенты зацепления траекторий однопараметрических групп гомеоморфизмов, сохраняющих объемы.

## 5. Приложения к вариационной задаче

Из существования инварианта Хопфа вытекает некоторая оценка снизу для энергии любого поля, полученного из данного поля сохраняющим объемы диффеоморфизмом. В частности, на каждом трехмерном римановом многообразии можно указать поле, являющееся минимальным в своем классе. А именно, таковы некоторые специальные бессилловые поля.

**5.1. Минимальные бессилловые поля.** Пусть  $M$  — трехмерное замкнутое риманово многообразие. Рассмотрим оператор  $\operatorname{rot}$  на бездивергентных полях, гомологичных нулю (т.е. имеющих однозначный бездивергентный потенциал). По лемме Вейля об ортогональных проекциях на нашем пространстве оператор  $\operatorname{rot}$  однозначно обратим, так

что возникает обратный (интегральный) оператор  $\text{rot}^{-1}$  из пространства гомологичных нулю бездивергентных полей в себя. Этот оператор симметричен, и его спектр накапливается к нулю с двух сторон.

**Теорема.** *Собственное поле оператора  $\text{rot}^{-1}$ , отвечающее наибольшему по модулю собственному числу  $\mu$ , имеет минимальную энергию в классе всех полей дивергенции нуль, получающихся из собственного поля при действии диффеоморфизмов, сохраняющих объемы.*

**Доказательство.** Пусть  $\mu_-$  и  $\mu_+$  — наименьшее и наибольшее собственные числа оператора  $\text{rot}^{-1}$ . Для всякого гомологичного нулю поля  $\xi$  имеем тогда

$$\mu_- \langle \xi, \xi \rangle \leq \langle \text{rot}^{-1} \xi, \xi \rangle \leq \mu_+ \langle \xi, \xi \rangle, \quad \mu_- < 0 < \mu_+.$$

Следовательно, имеем оценку энергии через инвариант Хопфа

$$\langle \xi, \xi \rangle \geq \langle \text{rot}^{-1} \xi, \xi \rangle / \mu,$$

где  $\mu$  означает то из чисел  $\mu_+$ ,  $\mu_-$ , модуль которого больше.

Для собственного поля с собственным числом  $\mu$  неравенство обращается в равенство. Правая часть неравенства инвариантна относительно сохраняющих объемы диффеоморфизмов (см. §2). Следовательно, при действии такого диффеоморфизма на собственное поле с собственным числом  $\mu$  энергия поля может только увеличиться. Теорема доказана.

**5.2. Примеры.** Рассмотрим в качестве многообразия  $M$  трехмерную сферу со стандартной римановой метрикой. Собственные поля оператора  $\text{rot}^{-1}$  можно вычислить явно. Собственные поля с наибольшим и наименьшим собственными числами — это поле Хопфа и симметричное ему поле (отвечающее инварианту Хопфа  $-1$ ). Модули этих собственных чисел равны.

**Следствие.** *Хопфовское поле на трехмерной сфере имеет минимальную энергию по сравнению со всяким полем, получающимся из него при действии диффеоморфизма, сохраняющего объемы. Линии хопфовского поля — окружности, и коэффициент зацепления любых двух из них равен 1.*

В качестве другого примера рассмотрим трехмерный тор со стандартной римановой метрикой. Собственные поля оператора  $\text{rot}^{-1}$  с



наибольшим и наименьшим собственными числами пишутся явно через синусы и косинусы. Мы получаем

**Следствие.** *Каждое из полей с компонентами*

$$\xi_x = A \sin z + C \cos y, \quad \xi_y = B \sin x + A \cos z, \quad \xi_z = C \sin y + B \cos x$$

*на трехмерном торе имеет минимальную энергию по сравнению со всеми полями, получающимися из него сохраняющими объемы диффеоморфизмами.*

Таким образом, минимальные бессилловые поля могут иметь сложную топологию линий поля, обычную для неинтегрируемых систем (некоторые линии поля заполняют плотно двумерные торы, другие же укладываются на двумерные поверхности: см. описание эксперимента Эно в п. 1.2).

Заметим в заключение, что из асимптотического коэффициента зацепления  $\lambda(x, y)$  можно извлечь больше инвариантов, чем средний коэффициент зацепления  $\lambda$ , — например, таким инвариантом является мера множества меньших значений  $m(\lambda_0) = \{(x, y) \in M \times M : \lambda(x, y) < \lambda_0\}$ , или значения инварианта Хопфа для разных областей, инвариантных относительно потока, заданного полем  $\xi$ . Через такие инварианты можно иногда дать более точные оценки снизу минимальной энергии поля, полученного из данного поля  $\xi$  действием диффеоморфизмов, сохраняющих объемы, чем через один инвариант Хопфа.

**Добавление от 6 июня 1985 г.** Обзор современных обобщений асимптотического инварианта Хопфа дан в [9]. В простейшем случае рассматриваются две замкнутые 2-формы  $a$  и  $b$  на  $S^4$  такие, что  $a^2 = a \wedge b = b^2 = 0$ , и изучается функционал

$$I(a, b) = p \int a \wedge d^{-1}a \wedge d^{-1}b + q \int b \wedge d^{-1}a \wedge d^{-1}b.$$

Такие формы определяют два расслоения сферы  $S^4$  на поверхности, пересекающиеся вдоль кривых, и функционал  $I$ , по всей видимости, допускает асимптотическое эргодическое описание, подобное тому, которое было приведено здесь для инварианта Хопфа.

## Литература

- [1] Arnold V. I. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1966, **16**(1), 319–361.
- [2] Hénon M. Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particulier. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1966, **262**, 312–314.
- [3] Kraichnan R. H. Helical turbulence and absolute equilibrium. *J. Fluid Mech.*, 1973, **59**(4), 745–752.
- [4] Kraichnan R. H. Diffusion of passive-scalar and magnetic fields by helical turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1976, **77**(4), 753–768.
- [5] Kraichnan R. H. Lagrangian velocity covariance in helical turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1977, **81**(2), 385–398.
- [6] Moffatt H. K. The degree of knottedness of tangled vortex lines. *J. Fluid Mech.*, 1969, **35**(1), 117–129.
- [7] Moffatt H. K. (ed.). Report on the NATO Advanced Study Institute on magnetohydrodynamic phenomena in rotating fluids. *J. Fluid Mech.*, 1973, **57**(4), 625–649.
- [8] Moffatt H. K. Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. Part 1. Fundamentals. *J. Fluid Mech.*, 1985, **159**, 359–378.
- [9] Новиков С. П. Аналитический обобщенный инвариант Хопфа. Многозначные функционалы. *УМН*, 1984, **39**(5), 97–106.
- [10] Voltjer L. A theorem on force-free magnetic fields. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 1958, **44**, 489–491.  
Voltjer L. On hydromagnetic equilibrium, *ibid.*, 833–841.

## Критические точки гладких функций и их нормальные формы: общий обзор

Дан обзор исследований критических точек гладких функций и их бифуркаций. Указаны приложения в теории лагранжевых особенностей (каустик), лежандровых особенностей (волновых фронтов) и асимптотик осциллирующих интегралов (метод стационарной фазы). Описаны связи с группами, порожденными отражениями, с автоморфными формами и с вырождениями эллиптических кривых.

### Содержание

1. Классификация критических точек . . . . .	238
2. Фактор-особенности . . . . .	241
3. Квадратичные формы особенностей . . . . .	242
4. Странная двойственность . . . . .	244
5. Версальная деформация и бифуркационное множество нулей	244
6. Трансверсаль к орбите и бифуркационное множество функций	247
7. Лагранжевы особенности и классификация каустик . . . . .	249
8. Лежандровы особенности и классификация фронтов . . . . .	250
9. Нормальные формы для каустик и фронтов . . . . .	252
10. Интегралы осциллирующих функций . . . . .	255
11. Полуквазиоднородные функции и диаграмма Ньютона . . . . .	257
Литература . . . . .	259

*Критической точкой* гладкой функции называется точка, в которой дифференциал функции равен 0. Критическая точка называется *невырожденной*, если второй дифференциал — невырожденная квадратичная форма. Всякая вырожденная критическая точка при малом шевелении (так называемой *морсовизации*) распадается на несколько невырожденных.

Функции общего положения имеют лишь невырожденные критические точки. Вырожденные критические точки появляются естественным образом только в тех случаях, когда функции зависят от параметров. Например, семейство функций  $f(x, t) = x^3 - tx$  имеет при нулевом значении параметра  $t$  вырожденную критическую точку, и всякое близкое семейство при некотором близком значении параметра также имеет вырожденную критическую точку. При большем числе параметров появляются более сложные критические точки.

Исследование семейств функций, зависящих от параметров, встречается в анализе (или математической физике) повсеместно. Ниже будет рассказано о трех приложениях: к исследованию *лагранжевых особенностей* (или *каустик*), *лежандровых особенностей* (или *волновых фронтов*) и *осциллирующих интегралов* (или *метода стационарной фазы*).

Классификация простейших особенностей во всех этих задачах оказывается связанной с группами Ли, Кокстера и Вейля серий  $A$ ,  $D$ ,  $E$ , с теорией кос Артина и Брискорна и с классификацией правильных многогранников в обычном трехмерном пространстве.

Появление диаграмм  $A$ ,  $D$ ,  $E$  и групп Кокстера в столь различных ситуациях, как теория простых групп Ли, классификация простых категорий линейных пространств (в работах П. Габриэля, И. М. Гельфанда и В. И. Пономарёва, А. В. Ройтера и Л. А. Назаровой), классификация Кодаиры вырождений эллиптических кривых, теория правильных многогранников и теория простых особенностей кажется удивительной цепью совпадений результатов независимо проведенных классификаций. Как мы сейчас увидим, классификация более сложных особенностей также приводит к удивительным совпадениям, в которых участвуют уже треугольники Лобачевского и автоморфные функции.

## 1. Классификация критических точек

Пусть  $f$  — росток гладкой функции в изолированной критической точке  $O \in \mathbb{C}^n$ . *Кратностью* (или *числом Милнора*)  $\mu$  критической точки  $O$  называется число невырожденных критических точек, на которые распадается критическая точка  $O$  при морсовизации.

Два ростка функций в  $O$  называются *эквивалентными*, если один из них переходит в другой при диффеоморфизме пространства аргумента, оставляющем на месте точку  $O$ .

Струя (полином Тейлора) функции в  $O$ , определяющая росток функции в  $O$  с точностью до эквивалентности, называется *достаточной*.

Комплексная функция с изолированной критической точкой всегда эквивалентна полиному, а именно, отрезку своего ряда Тейлора, и имеет достаточную струю (Тужрон [79], Артин [14], [3], [67]).

Таким образом, задача классификации изолированных критических точек сводится к алгебраическим задачам о действии конечномерных групп Ли на конечномерных пространствах струй (Том [74], Мазер [54], Сирсма [69]).

Классификация простейших особенностей дискретна, но сильно вырожденные особенности имеют модули.

Модальностью  $m$  точки  $x \in X$  при действии группы Ли  $G$  на многообразии  $X$  называется наименьшее число  $m$  такое, что достаточно малая окрестность точки  $x$  покрыта конечным числом  $m$ -параметрических семейств орбит. Точка  $x$  называется *простой*, если ее модальность равна 0, т.е. если ее окрестность пересекается с конечным числом орбит.

Модальность ростка функции в критической точке  $O$  с критическим значением 0 определяется как модальность достаточной струи в пространстве струй функций с критической точкой  $O$  и критическим значением 0.

Два ростка называются *стабильно эквивалентными*, если они становятся эквивалентными после прямого сложения с невырожденными квадратичными формами от подходящего числа переменных.

**Теорема I** (см. [6]). *Простые ростки (ростки с  $m = 0$ ) исчерпываются, с точностью до стабильной эквивалентности, следующим списком:*

$$A_k : f(x) = x^{k+1}, \quad k \geq 1; \quad D_k : f(x, y) = x^2 y + y^{k-1}, \quad k \geq 4;$$

$$E_6 : f(x, y) = x^3 + y^4; \quad E_7 : f(x, y) = x^3 + xy^3; \quad E_8 : f(x, y) = x^3 + y^5.$$

**Теорема II** (см. [7]). *Унимодальные ростки (ростки с  $m = 1$ ) исчерпываются, с точностью до стабильной эквивалентности, трехиндексной серией однопараметрических семейств*

$$T_{p,q,r} : f(x, y, z) = axyz + x^p + y^q + z^r, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1, \quad a \neq 0;$$

$$T_{3,3,3} : f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + axyz, \quad a^3 + 27 \neq 0;$$

$$T_{2,4,4} : f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^2 + ax^2 y^2, \quad a^2 \neq 4;$$

$$T_{2,3,6} : f(x, y, z) = x^3 + y^6 + z^2 + ax^2 y^2, \quad 4a^3 + 27 \neq 0,$$

и еще 14-ю исключительными однопараметрическими семействами, перечисленными в таблице 1 на с. 240 (смысл столбцов которой разъяснен ниже).

Расклассифицированы также все функции 2 переменных с отличной от 0 3-струей [9] или с отличной от 0 4-струей<sup>1</sup>. Аналогичные таблицы имеются и в вещественном случае.

Далее, имеет место

**Теорема III** (см. [6], [7]). Множество непростых ростков функций  $n \geq 3$  переменных имеет коразмерность 6, а ростков модальности большей 1 — коразмерность 10 в пространстве ростков функций с критическим значением 0.

Таблица 1

Обозначение	Нормальная форма	Показатели однородности	Число Кокстера	Числа Долгачева	Числа Габриэлова	Двойственный класс
$Q_{10}$	$x^2z + y^3 + z^4 + ayz^3$	8 9 6	-24	2 3 9	3 3 4	$E_{14}$
$Q_{11}$	$x^2z + y^3 + yz^3 + az^5$	7 6 4	-18	2 4 7	3 3 5	$Z_{13}$
$Q_{12}$	$x^2z + y^3 + z^5 + ayz^4$	6 5 3	-15	3 3 6	3 3 6	$Q_{12}$
$S_{11}$	$x^2z + yz^2 + y^4 + ay^3z$	6 5 4	-16	2 5 6	3 4 4	$W_{13}$
$S_{12}$	$x^2z + yz^2 + xy^3 + ay^5$	5 4 3	-13	3 4 5	3 4 5	$S_{12}$
$U_{12}$	$x^3 + y^3 + z^4 + axyz^2$	4 4 3	-12	4 4 4	4 4 4	$U_{12}$
$Z_{11}$	$x^3y + y^5 + z^2 + axy^4$	15 8 6	-30	2 3 8	2 4 5	$E_{13}$
$Z_{12}$	$x^3y + xy^4 + z^2 + ay^6$	11 6 4	-22	2 4 6	2 4 6	$Z_{12}$
$Z_{13}$	$x^3y + y^6 + z^2 + axy^5$	9 5 3	-18	3 3 5	2 4 7	$Q_{11}$
$W_{12}$	$x^4 + y^5 + z^2 + ax^2y^3$	10 5 4	-20	2 5 5	2 5 5	$W_{12}$
$W_{13}$	$x^4 + xy^4 + z^2 + ay^6$	8 4 3	-16	3 4 4	2 5 6	$S_{11}$
$E_{12}$	$x^3 + y^7 + z^2 + axy^5$	21 14 6	-42	2 3 7	2 3 7	$E_{12}$
$E_{13}$	$x^3 + xy^5 + z^2 + ay^8$	15 10 4	-30	2 4 5	2 3 8	$Z_{11}$
$E_{14}$	$x^3 + y^8 + z^2 + axy^6$	12 8 3	-24	3 3 4	2 3 9	$Q_{10}$

Таким образом, всякое  $s$ -параметрическое семейство функций, где  $s < 6$  ( $s < 10$ ), можно сколь угодно малым шевелением привести в общее положение так, что ростки функций семейства во всех критических точках будут стабильно эквивалентны росткам теоремы I (теорем I и II) с точностью до аддитивных постоянных.

<sup>1</sup> См. §13 статьи автора в УМН, 1975, 30(5), 3-65. — Прим. ред.

## 2. Фактор-особенности

Группа  $SU(2)$  линейно действует на  $\mathbb{C}^2$ . Дискретные подгруппы группы  $SU(2)$  называются *бинарными группами* многоугольника, диэдра, тетраэдра, куба и икосаэдра (при факторизации по центру  $\{\pm E\}$  они переходят в соответствующие группы вращений сферы).

Фактор-многообразие  $M = \mathbb{C}^2/\Gamma$  пространства  $\mathbb{C}^2$  по действию бинарной группы  $\Gamma$  является алгебраической поверхностью с особой точкой. Кольцо многочленов от двух переменных, инвариантных относительно  $\Gamma$ , имеет 3 образующие. Соотношение (сизигия), связывающее эти 3 образующие, и есть уравнение фактор-многообразия  $M$  как поверхности в  $\mathbb{C}^3$ . Со времен Шварца известна

**Теорема IV** (см. [43], [45], [57]). *Фактор-многообразие  $\mathbb{C}^2/\Gamma$  имеет простую особенность одного из типов  $A_k$  (для многоугольника),  $D_k$  (для диэдра),  $E_6$  (для тетраэдра),  $E_7$  (для куба),  $E_8$  (для икосаэдра).*

Группа  $SU(1, 1)$  унимодулярных матриц второго порядка, сохраняющих форму  $|z_1|^2 - |z_2|^2$ , действует на множестве  $P$  векторов в  $\mathbb{C}^2$ , на которых форма положительна. Каждая дискретная группа  $\Gamma_0$  движений плоскости Лобачевского (с компактной фундаментальной областью) определяет «бинарную группу»  $\Gamma \subset SU(1, 1)$  и алгебраическую фактор-поверхность  $M = (P/\Gamma) \cup O$  с особой точкой  $O$ . Можно показать, что координатное кольцо  $M$  изоморфно алгебре целых автоморфных форм относительно  $\Gamma_0$  (И. В. Долгачев).

Пусть  $\Delta$  — треугольник Лобачевского с углами  $\pi/r$ ,  $\pi/q$ ,  $\pi/t$ . Отражения в сторонах  $\Delta$  порождают дискретную группу. Движения составляют в ней подгруппу индекса 2; назовем ее группой треугольника  $\Delta$ .

В  $SU(1, 1)$  ей соответствует бинарная группа треугольника,  $\Gamma(\Delta)$ .

Анализ классификации исключительных особенностей привел И. В. Долгачева к следующему результату:

**Теорема V** (см. [28]). *Существует ровно 14 треугольников Лобачевского, для которых фактор-поверхность  $M$  вкладывается в трехмерное пространство (в иных терминах — ровно 14 треугольников, для которых алгебра целых автоморфных форм имеет 3 образующие). Эти фактор-поверхности  $M$  имеют в  $O$  исключительные унимодальные особенности (см. теорему II).*

Соответствующие числа  $(p, q, r)$  указаны в графе «числа Долгачева» таблицы 1 на с. 240.

### 3. Квадратичные формы особенностей

С каждой изолированной критической точкой голоморфной функции связано многообразие  $V$  с краем  $\partial V$ , называемое *неособым многообразием уровня*. А именно, рассмотрим достаточно малый шар с

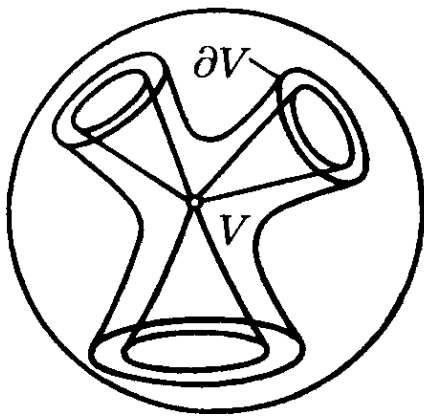


Рис. 1

центром в критической точке. Тогда лежащая внутри шара часть множества уровня, достаточно близкого к критическому, является гладким многообразием с краем (рис. 1).

(Край  $\partial V$  доставляет стандартные примеры в дифференциальной топологии. Например, для простой особенности  $E_8$  в  $\mathbb{C}^5$  многообразии  $\partial V$  — это экзотическая семимерная сфера Милнора, гомеоморфная, но не диффеоморфная  $S^7$ . Стянув край  $V$  ( $E_8$ ) в  $\mathbb{C}^7$  в точку, получаем 12-мерное несглаживаемое

топологическое многообразие. См. [44], [19], [57], [46].)

Милнор [57] доказал, что многообразию  $V^{2n-2}$  гомотопически эквивалентно букету  $\mu$  сфер  $S^{n-1}$  средней размерности, так что  $H_{n-1}(V, *) = \mathbb{Z}^\mu$ . Индекс пересечения определяет на  $H_{n-1}$  целочисленную билинейную форму.

*Квадратичной формой особенности* называется индекс самопересечения в гомологиях неособого многообразия уровня функции от  $n \equiv \equiv 3 \pmod{4}$  переменных, стабильно эквивалентной данной (поведение индекса пересечения при дописывании квадратов новых переменных описывается теоремой Тома–Себастиани [73]; при дописывании двух квадратов индекс пересечения «меняет знак»).

Особенность называется *эллиптической* (параболической, гиперболической), если ее квадратичная форма отрицательно определена (полуопределена, имеет положительный индекс инерции 1).

**Теорема VI** (см. [76], [6], [7]). *Эллиптические особенности — это в точности простые особенности, параболические (гиперболические) — это*

$$T_{p,q,r} \text{ с } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 \left( \text{с } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1 \right).$$

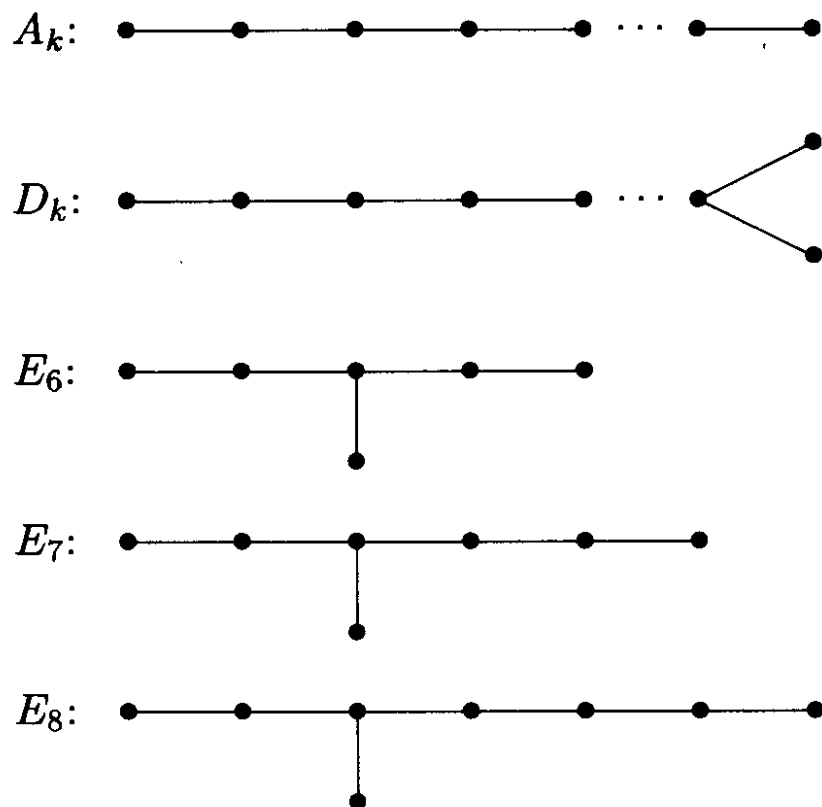


Утверждение о параболических особенностях было высказано Дж. Милнором в виде гипотезы, основанной на работе Ваграйха [83].

Квадратичные формы особенностей удобно описывать при помощи диаграмм Дынкина. Диаграмма представляет собой граф, вершины которого соответствуют исчезающим циклам (базисным векторам с квадратом  $-2$ ). Две вершины соединены  $k$  простыми (соответственно пунктирными) ребрами, если скалярное произведение соответствующих векторов равно  $k$  (соответственно  $-k$ ). Например, диаграмма  $\bullet \text{---} \bullet$  соответствует форме  $-2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$ .

Очень эффективные методы вычисления диаграмм Дынкина разработаны А. М. Габриэловым [34], [36] и С. М. Гусейн-Заде [39], [40]. Метод последнего позволяет рисовать диаграмму любой функции двух переменных непосредственно по картине линий уровня вещественной морсовизации. (На конгрессе в Ванкувере А'Кампо сообщил, что он независимо нашел метод Гусейн-Заде.)

Квадратичные формы простых особенностей  $A$ ,  $D$ ,  $E$  задаются обычными диаграммами Дынкина (см. Хирцебрух [43]):



Квадратичные формы всех унимодальных особенностей найдены А. М. Габриэловым [34], [35]. Обозначим через  $\tau_{p,q,r}$  квадратичную форму с диаграммой в виде буквы  $T$ , на трех отрезках которой имеется соответственно  $p$ ,  $q$ ,  $r$  вершин (например,  $E_7 = \tau_{2,3,4}$ ).

**Теорема VII** (см. [7]). Квадратичная форма каждой гиперболической или параболической особенности  $T_{p,q,r}$  есть прямая сумма  $\tau_{p,q,r} \oplus 0$ , где  $0$  — нулевая форма 1 переменной. Квадратичная форма каждой из 14 исключительных особенностей есть прямая сумма  $\tau_{p,q,r} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , где  $p, q, r$  указаны в графе «числа Габриэлова» теоремы II.

#### 4. Странная двойственность

Сравнение чисел Долгачева и чисел Габриэлова 14 исключительных особенностей приводит к следующим выводам:

**Теорема VIII.** Числа Габриэлова каждой исключительной особенности совпадают с числами Долгачева некоторой (вообще говоря, другой) особенностью, причем числа Габриэлова последней совпадают с числами Долгачева первой.

Таким образом, на множестве 14 особенностей действует инволюция

$$Q_{10} \leftrightarrow E_{14}, \quad Q_{11} \leftrightarrow Z_{13}, \quad Z_{11} \leftrightarrow E_{13}, \quad S_{11} \leftrightarrow W_{13},$$

оставляющая на месте все 6 особенностей с  $\mu = 12$ . Заметим, что априори не видно никакой связи ни между двойственными друг другу особенностями (или треугольниками, или квадратичными формами), ни между числами Габриэлова и Долгачева.

Анализируя таблицу чисел Долгачева, Д. Б. Фукс заметил, что их сумма с  $\mu$  всегда равна 24 (это наблюдение позволило исправить ошибку в первоначальных вычислениях).

Таким образом, сумма всех 6 чисел Габриэлова и Долгачева каждой из 14 особенностей также равна 24. Замечу еще, что двойственны друг другу в точности те особенности, у которых совпадают числа Кокстера (определяемые ниже). Теория особенностей на современной стадии — экспериментальная наука.

#### 5. Версальная деформация и бифуркационное множество нулей

Деформацией функции  $f$  называется росток в  $O$  гладкого отображения конечномерного пространства (базы деформации) в функциональное пространство, переводящее  $O$  в  $f$ . Деформация называется

версальной, если это отображение трансверсально к орбите  $f$  под действием (псевдо)группы диффеоморфизмов пространства аргументов; если размерность базы минимальна (равна коразмерности орбиты), то деформация называется *миниверсальной*.

Росток функции  $f$  в критической точке  $O$  конечной кратности  $\mu$  всегда имеет  $\mu$ -параметрическую миниверсальную деформацию ([77], [54], [47], [87]).

*Локальным кольцом* роста функции  $f$  в критической точке  $O \in \mathbb{C}^n$  называется фактор-кольцо кольца (формальных или сходящихся) степенных рядов от координат в  $O$  по идеалу, натянутому на ряды частных производных  $f$ . Размерность этого кольца над  $\mathbb{C}$  равна кратности  $\mu$  (В. П. Паламонов [61]).

В качестве миниверсальной деформации функции  $f$  можно взять деформацию  $\lambda \mapsto f + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_\mu e_\mu$ , где функции  $e_s$  порождают локальное кольцо  $f$  в  $O$  как  $\mathbb{C}$ -модуль. Всякая деформация функции  $f$  эквивалентна индуцированной из версальной.

Зафиксируем какую-либо миниверсальную деформацию роста  $f$  в  $O$ .

*Бифуркационным множеством нулей* для  $f$  называется росток в  $O$  гиперповерхности в базе, образованный теми  $\lambda$ , для которых  $0$  — критическое значение соответствующей функции вблизи  $O$ .

Дополнение к бифуркационному множеству нулей является базой расслоения, слой которого — неособое многообразие уровня  $f$ . Действие фундаментальной группы базы этого расслоения на гомологии слоя называется *монодромией* особенности, а его образ — *группой монодромии*.

**Теорема IX** (см. [6]). *Дополнение к бифуркационному множеству нулей простой особенности имеет гомотопический тип  $K(\pi, 1)$ , где  $\pi$  — группа кос Артина-Брискорна (см. [21]–[23]). Это дополнение является многообразием регулярных орбит действия соответствующей группы Кокстера на комплексификацию евклидова пространства. Группа монодромии простой особенности — это естественное представление группы кос в группу Кокстера.*

Доказательство теоремы IX в случаях  $E$  не просто: оно основано на теоремах Делиня [26] и Брискорна [20]. Топология дополнений к бифуркационным множествам мало исследована (см. [4], [22]), но обнаруженные связи с пространствами петель (Сигал [68], Д. Б. Фукс [32], [33]), с

псевдоизотопиями (Серф [25], Том [75]) и с алгебраической  $K$ -теорией (И. А. Володин [82], Вагонер [84], Хатчер [41]) кажутся многообещающими.

Вернемся к бифуркационному множеству нулей  $\Sigma$  для произвольной особенности. Прямая  $\mathbb{C}^1$  общего положения в базе пересекает  $\Sigma$  в  $\mu$  точках вблизи  $O$ . Назовем эти точки *отмеченными*.

Зафиксируем на прямой  $\mathbb{C}^1$  еще базисную точку; этой точке отвечает неособый слой  $V$ . Выберем  $\mu$  непересекающихся *отмеченных путей* в  $\mathbb{C}^1$ , ведущих из базисной точки в отмеченные (рис. 2). В слое над точкой отмеченного пути, близкой к концу пути, определен *исчезающий цикл* Пикара–Лефшеца (сфера средней размерности). Перенеся его вдоль пути в слой над базисной точкой, мы определим и там *исчезающий над отмеченным путем цикл*. Полученные  $\mu$  циклов образуют *отмеченный базис* гомологий слоя (Ламотке, А. М. Габриэлов [34]).

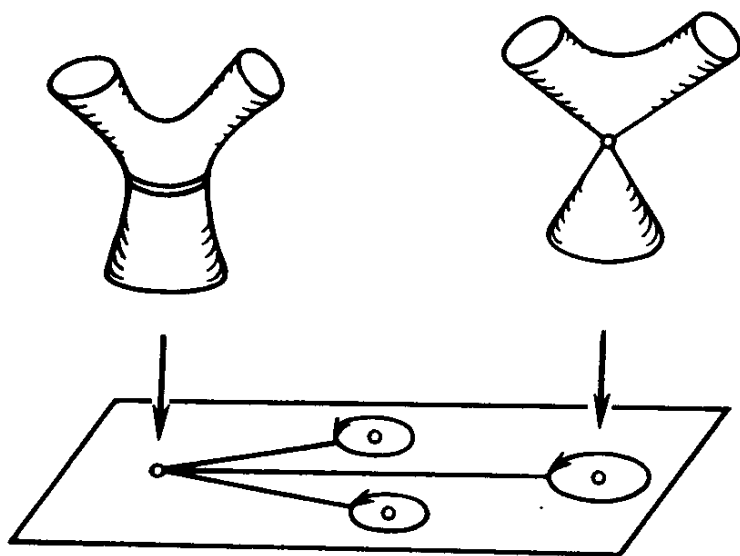


Рис. 2

Фундаментальная группа дополнения к бифуркационному множеству порождена  $\mu$  *отмеченными петлями* на  $\mathbb{C}^1$ ; они получаются из отмеченных путей, если, не дойдя до отмеченной точки, обойти ее и вернуться назад (теорема Зариского [88], см. также [80], [49]).

Предположим для простоты, что число переменных  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Тогда действие каждой отмеченной образующей на гомологии слоя сводится к отражению в ортогональном дополнении к отмеченному исчезающему циклу (теорема Пикара–Лефшеца).

Таким образом, для вычисления группы монодромии особенности достаточно указать диаграмму Дынкина какого-либо отмеченного базиса. Первые примеры найдены Ф. Фамом (см. [62], [10]), исследовавшим функции  $f = \sum x_i^{a_i}$ ; указанный Фамом базис в действительности является отмеченным. Работы А. М. Габриэлова [34], [35] и С. М. Гусейн-Заде [39], [40] содержат много других примеров. Лаццери [48] доказал, что диаграмма Дынкина отмеченного базиса всегда связна, а С. М. Гусейн-Заде [40] доказал, что эту диаграмму для любой функции двух переменных можно получить из картины линий уровня вещественной морсовизации.

*Оператором монодромии* особенности называется действие на  $H_{n-1}(V)$  произведения отмеченных образующих фундаментальной группы. Этот оператор связан с асимптотикой интегралов, в которые входит  $f$ , и его вычислению посвящено много работ (Милнор и Орлик [58], Брискорн [24], А'Кампо [2]).

А'Кампо доказал, что оператор монодромии любой вырожденной особенности нетривиален. Вычисление оператора монодромии по диаграмме Дынкина отмеченного базиса сводится к умножению матриц. Оператор монодромии простой особенности — это элемент Кокстера соответствующей группы Кокстера. Его порядок называется *числом Кокстера* простой особенности.

## 6. Трансверсаль к орбите и бифуркационное множество функций

Рассмотрим множество  $m^2$  ростков в  $O \in \mathbb{C}^n$  функций с критической точкой  $O$  и критическим значением 0. Группа оставляющих на месте  $O$  ростков диффеоморфизмов пространства аргумента действует на  $m^2$ . Минимальная трансверсаль к орбите функции  $f$  в  $m^2$  имеет размерность  $\mu - 1$ . Эта трансверсаль  $T$  задает  $(\mu - 1)$ -параметрическую деформацию функции  $f$ . Эта деформация, как и любая другая, индуцирована из миниверсальной деформации функции  $f$  при некотором отображении баз  $\tau : T^{\mu-1} \rightarrow \mathbb{C}^\mu$ .

*Бифуркационное множество нулей*  $\Sigma$  есть в точности образ трансверсали при отображении  $\tau$ . Множество  $\Sigma$  неприводимо и имеет неособую нормализацию  $T$  (см. [36], [71]).

Далее, рассмотрим множество  $m$  функций, равных 0 в точке  $O$ . Деформации в классе таких функций будем называть *ограниченными*.

Миниверсальная ограниченная деформация имеет  $\mu - 1$  параметр, и если прибавить к функциям семейства еще произвольную постоянную, то получится *пополненная* ( $\mu$ -параметрическая) миниверсальная в обычном смысле деформация.

Зафиксируем миниверсальную ограниченную деформацию функции  $f$ . Точка базы  $\mathbb{C}^{\mu-1}$  этой деформации называется *бифуркационной для функций*, если этой точке соответствует функция с менее чем  $\mu$

критическими значениями вблизи  $O$ . Множество всех таких точек образует гиперповерхность  $\Delta$  в окрестности точки  $O \in \mathbb{C}^{\mu-1}$  (рис. 3). Эта гиперповерхность (точнее, ее росток в  $O$ ) называется *бифуркационным множеством функций для  $f$* .

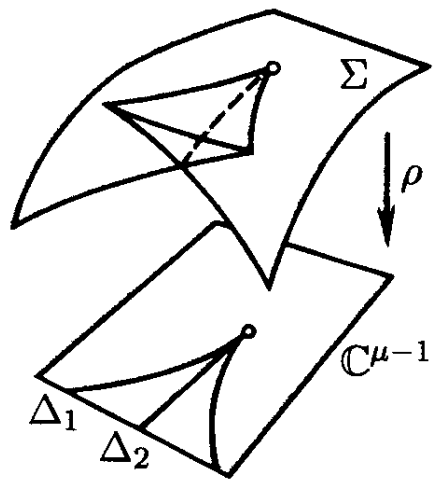


Рис. 3

**Теорема X** (см. [48], [36]). *Проекция  $\rho$  базы пополненной миниверсальной деформации на базу ограниченной, суженная на бифуркационное множество нулей,  $\Sigma$ , задает  $\mu$ -листное накрытие над дополнением к  $\Delta$ . Группа этого накрытия симметрическая,  $S(\mu)$ .*

**Теорема XI** (Ляшко [9], Лойенга [51]). *Для простых функций дополнение к бифуркационному множеству функций,  $\mathbb{C}^{\mu-1} - \Delta$ , является пространством  $K(\pi, 1)$ , где  $\pi$  — подгруппа конечного индекса  $\nu = \mu! N^\mu W^{-1}$  ( $N$  — число Кокстера,  $W$  — порядок группы Вейля) в группе кос Артина из  $\mu$  нитей.*

Бифуркационное множество  $\Delta$  естественно разбивается на две гиперповерхности:  $\Delta_1$  соответствует функциям с кратными критическими точками,  $\Delta_2$  — функциям с совпадающими критическими значениями.

Гладкое отображение  $\rho \cdot \tau : T^{\mu-1} \rightarrow \mathbb{C}^{\mu-1}$  трансверсали к орбите в  $m^2$  на базу ограниченной деформации имеет множеством критических значений в точности  $\Delta_1$  и задает  $\mu$ -листное накрытие над дополнением к  $\Delta_1$  вблизи  $O$ .

Гиперповерхность  $\Delta_1$  называется *каустикой*, а  $\Delta_2$  — *местом пересечений* или *стратом Максвелла*.

## 7. Лагранжевы особенности и классификация каустик

Каустики хорошо видны на стене, освещенной лучами, отраженными от кривой поверхности (например, от внутренности чашки). Двигая чашку, можно убедиться в том, что каустики общего положения имеют стандартные особенности, не исчезающие при малом шевелении.

Анализ каустик входит в теорию лагранжевых особенностей (см. [6], а также работы Гукенхеймера [38] и Вейнштейна [85]), аналогичную обычной теории особенностей Уитни [86] – Тома [72] – Мазера [54].

Напомню, что *симплектическим многообразием* называется гладкое многообразие  $M^{2n}$  с замкнутой невырожденной 2-формой  $\omega$ . *Лагранжевым подмногообразием* в  $M^{2n}$  называется подмногообразие размерности  $n$ , на котором форма  $\omega$  равна 0. Расслоение  $p : M^{2n} \rightarrow B^n$  называется *лагранжевым расслоением*, если его слои лагранжевы. Стандартный пример — кокасательное расслоение  $T^*B \rightarrow B$  (фазовое пространство классической механики).

Пусть  $i : L \rightarrow M$  — вложение лагранжева подмногообразия в пространство лагранжева расслоения  $p : M \rightarrow B$ . Проекция  $p \cdot i : L \rightarrow B$  называется тогда *лагранжевым отображением*. Множество критических значений лагранжева отображения называется *каустикой*.

Два лагранжевых отображения эквивалентны, если соответствующие лагранжевы многообразия переводятся друг в друга диффеоморфизмом расслоений, сохраняющим 2-форму; каустики в этом случае, очевидно, диффеоморфны. Лагранжево отображение *устойчиво* в точке  $O$ , если всякое близкое лагранжево отображение имеет в какой-либо точке вблизи точки  $O$  росток, эквивалентный ростку данного отображения в  $O$ .

Лагранжев росток *прост*, если все близкие ростки принадлежат конечному числу классов эквивалентности. (Простой росток может быть неустойчивым, а устойчивый не простым.)

**Теорема XII** (см. [6]). *Простые устойчивые лагранжевы ростки классифицируются по сериям A, D, E. Всякое лагранжево отображение с  $n < 6$  аппроксимируется таким, росток которого в каждой точке прост и устойчив.*

Описание лагранжевых особенностей A, D, E приведено ниже (§9) в координатной форме. Из этого описания вытекает, в частности, что устойчивые особенности каустик в трехмерном пространстве — это

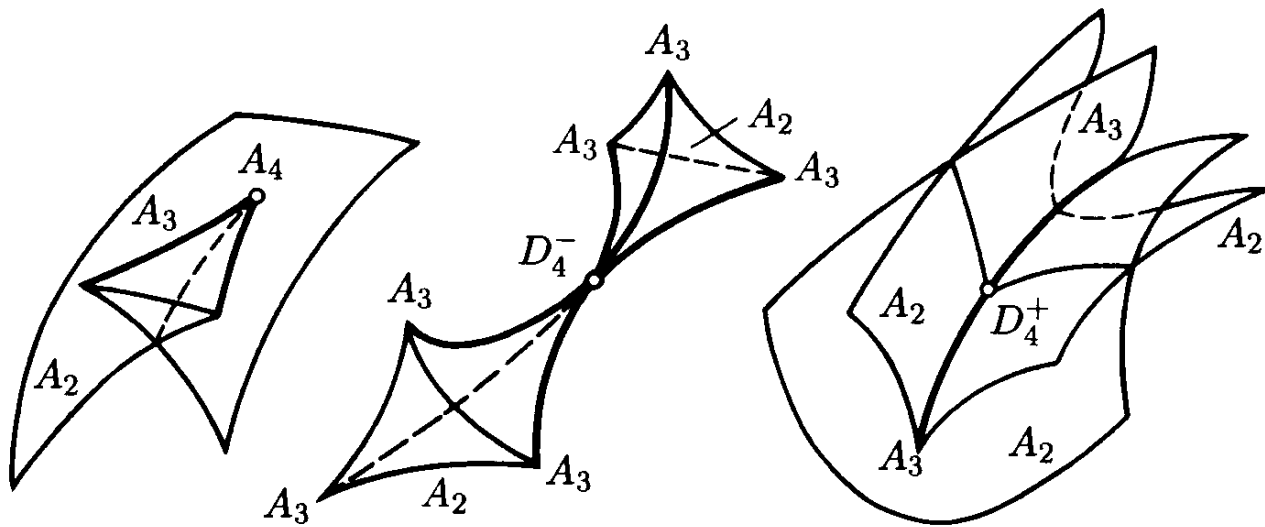


Рис. 4

только ребра возврата ( $A_3$ ), ласточкины хвосты ( $A_4$ ) и точки касания трех ребер возврата, два из которых могут быть мнимыми ( $D_4^\pm$ ) (рис. 4). Все другие особенности распадаются на перечисленные при малом шевелении.

## 8. Лежандровы особенности и классификация фронтов

Примером фронта является кривая, которая получится, если отложить на каждой внутренней нормали к эллипсу отрезок длины  $t$ . Легко убедиться, что фронт может иметь особенности, и что эти особенности неустранимы малой деформацией исходного эллипса.

Анализ особенностей фронтов входит в теорию лежандровых особенностей (см. [10], [11]).

Теория лежандровых особенностей параллельна теории лагранжевых особенностей со следующими отличиями: роль симплектической структуры играет контактная, роль аффинной — проективная, роль градиента — преобразование Лежандра, роль функций — гиперповерхности и т.д.

Аналогия между обеими теориями есть не что иное, как «оптико-механическая аналогия» Гамильтона.

Напомню, что *контактное многообразие* — это нечетномерное многообразие  $M^{2n+1}$ , снабженное максимально неинтегрируемым «контактным полем» гиперплоскостей (если контактное поле локально задается формой  $\alpha$ , то форма  $\alpha \wedge (d\alpha)^n$  не вырождена). Стандартные примеры контактных многообразий — это пространство проективного



кокасательного расслоения  $PT^*B^{n+1}$  и многообразии 1-струй функций  $J^1(W^n, \mathbb{R})$  с естественными контактными полями (задающими «условия интегрируемости»).

Интегральное многообразие контактного поля на  $M^{2n+1}$  называется *лежандровым*, если оно имеет наивысшую возможную размерность (т.е.  $n$ ). Расслоение  $p : M^{2n+1} \rightarrow B^{n+1}$  называется *лежандровым расслоением*, если его слои лежандровы (примером является проективное кокасательное расслоение  $PT^*B \rightarrow B$ ). Все лежандровы расслоения одной размерности локально лежандрово эквивалентны.

Если  $i : L^n \rightarrow M^{2n+1}$  — вложение лежандра подмногообразия в пространство лежандра расслоения  $p : M^{2n+1} \rightarrow B^{n+1}$ , то  $p \cdot i : L^n \rightarrow B^{n+1}$  называется *лежандровым отображением*, а его образ — *фронтом*.

Устойчивость и простота определяются как в лагранжевом случае.

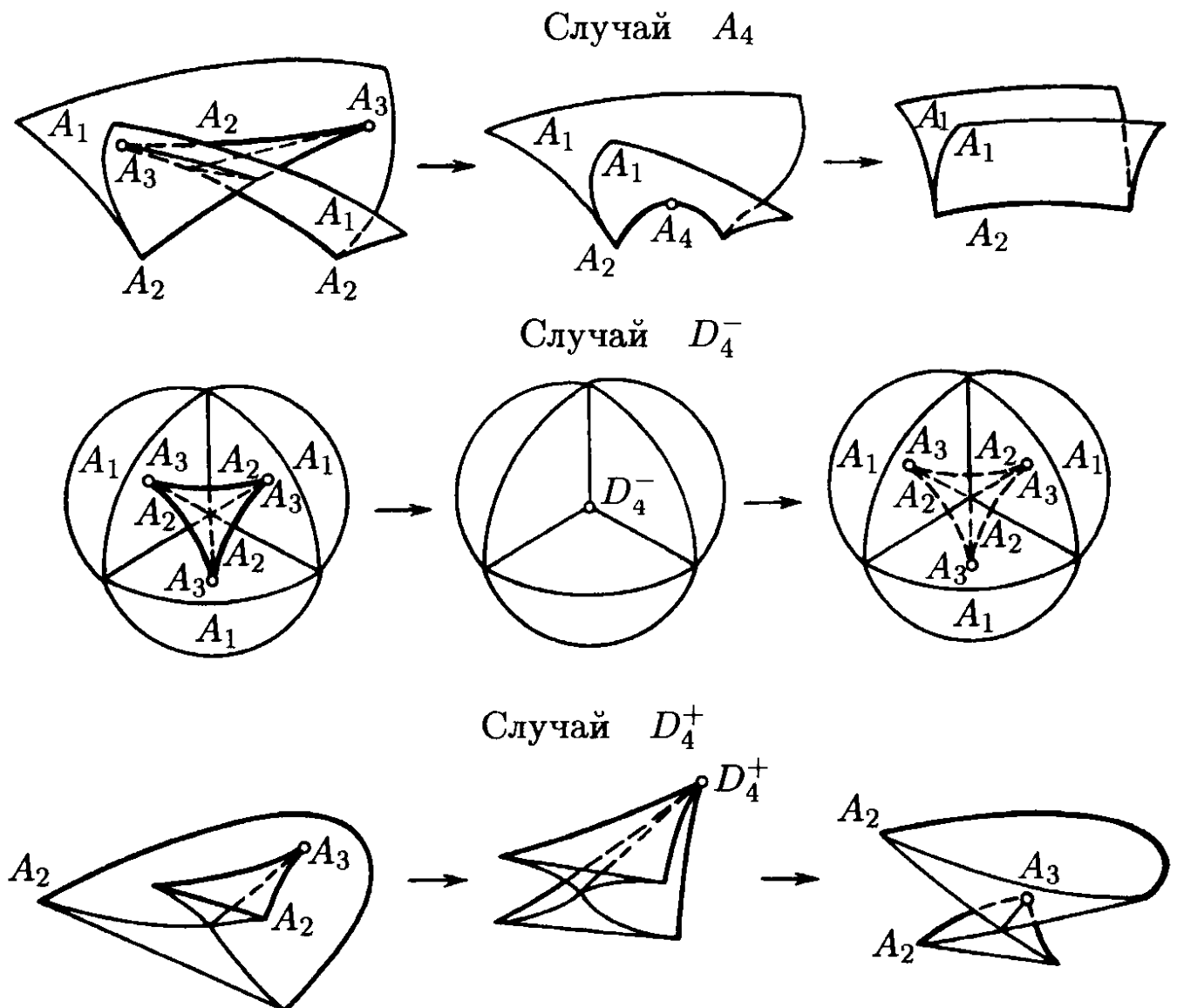


Рис. 5

**Теорема XIII.** *Простые устойчивые лежандровы ростки классифицируются по сериям  $A$ ,  $D$ ,  $E$ . Всякое лежандрово отображение с  $n < 6$  аппроксимируется отображением с простыми устойчивыми ростками.*

В трехмерном пространстве фронты общего положения могут иметь лишь самопересечения, ребра возврата ( $A_2$ ) и ласточкины хвосты ( $A_3$ ); при распространении фронта его особенности скользят по каустике и в некоторые моменты времени происходят перестройки трех типов  $A_4$ ,  $D_4^\pm$  (рис. 5).

Заметим, что существует функтор симплектизации, сопоставляющий контактному  $M^{2n+1}$  симплектическое  $E^{2n+2}$ , лежандровым подмногообразиям — лагранжевы и т.д. Однако симплектизация переводит лежандровы особенности общего положения в весьма специальные «конические» лагранжевы особенности. Правильный способ получить лежандровы особенности — контактизацией  $M^{2n} \mapsto E^{2n+1}$  (функтор контактизации определен лишь для ростков или для многообразий с целочисленным классом  $\omega$ ).

## 9. Нормальные формы для каустик и фронтов

Будем пользоваться старинными координатными обозначениями. Рассмотрим деформацию  $F(x, \lambda)$  функции  $f(x)$  переменного  $x \in \mathbb{R}^k$  с параметром  $\lambda \in \mathbb{R}^l$ . Пусть  $n = k + l$ . Рассмотрим симплектическое пространство  $\mathbb{R}^{2n}$  с координатами  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $y \in \mathbb{R}^{k*}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^l$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}^{l*}$  и с 2-формой

$$\omega = dx \wedge dy + d\kappa \wedge d\lambda$$

(в понятных сокращенных обозначениях). Уравнения

$$y = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \kappa = -\frac{\partial F}{\partial \lambda} \quad (1)$$

задают лагранжево подмногообразие, а вместе с лагранжевым расслоением  $(x, y, \lambda, \kappa) \mapsto (y, \lambda)$  — лагранжево отображение  $L$ .

По деформации  $F$  построим еще два семейства функций от  $x$ :

$$\Phi(x; \lambda, y, z) = F(x, \lambda) - z - xy$$

с параметрами  $\lambda \in \mathbb{R}^l$ ,  $y \in \mathbb{R}^{k*}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ;

$$G(x; a, \lambda) = F(a + x, \lambda) - F(a, \lambda) - xF'_a(a, \lambda)$$

с параметрами  $a \in \mathbb{R}^k$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^l$ .

Пусть  $G(x; O, O) = g(x)$ .

**Теорема XIV.** Следующие условия эквивалентны:

- 1) росток  $L$  в точке  $x = O$ ,  $\lambda = O$  лагранжево устойчив;
- 2) деформация  $G$  трансверсальна к орбите функции  $g$  в  $\mathfrak{m}^2$ .

Если  $f \in \mathfrak{m}^2$ , то условия 1), 2) эквивалентны условию

- 3) деформация  $\Phi$  версальна.

**Теорема XV.** Простые устойчивые ростки лагранжевых отображений эквивалентны росткам вида (1), где  $F$  — такая деформация простого ростка функции  $f$ , что  $\Phi$  версальна.

(Например, для  $f = x^4$  (тип  $A_3$ ) можно взять  $F = x^4 + \lambda x^2$ , полная таблица функций  $F$  для всех случаев  $A$ ,  $D$ ,  $E$  имеется в [6].)

Расширим теперь  $\mathbb{R}^{2n}$  до  $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n} + \mathbb{R}^1$  и обозначим через  $z$  координату в  $\mathbb{R}^1$ . Определим в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  контактную структуру формой  $\alpha = x dy + \kappa d\lambda + dz$ . Формула

$$y = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \kappa = -\frac{\partial F}{\partial \lambda}, \quad z = F - x \frac{\partial F}{\partial x} \quad (2)$$

задает лежандрово подмногообразие, а вместе с лежандровым расслоением  $(x, y, \lambda, \kappa; z) \mapsto (y, \lambda; z)$  — лежандрово отображение  $L'$ .

**Теорема XVI** (см. [11]). Простые устойчивые ростки лежандровых отображений эквивалентны росткам вида (2), где  $F$  — те же, что в предыдущей теореме.

На пространстве функций от  $x$  действует наряду с группой диффеоморфизмов пространства-прообраза группа умножений на не обращающиеся в 0 функции и, значит, — прямое произведение этих двух групп. Деформация ростка функции называется *версальной для поверхностей уровня*, если она трансверсальна орбите этой (псевдо)группы.

В качестве такой деформации ростка  $f$  в  $O$  можно взять

$$\lambda \mapsto f + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r,$$

где  $e_s$  порождают фактор-кольцо кольца степенных рядов в  $O$  по идеалу  $(f, \partial f / \partial x)$  как  $\mathbb{R}$ -модуль.

Прямое произведение группы умножений и группы оставляющих на месте  $O$  диффеоморфизмов действует в  $\mathfrak{m}^2$ .

**Теорема XVII.** Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) росток  $L'$  в точке  $x = 0$ ,  $\lambda = 0$  лежандрово устойчив;
- 2) деформация  $G$  трансверсальна к орбите функции  $g$  под действием группы-произведения в то же, что и  $m^2$ .

Если же  $f \in m^2$ , то каждое из условий 1), 2) эквивалентно условию

- 3) деформация  $\Phi$  версальна для поверхностей уровня.

Сравнивая формулы (1) и (2) с результатами §§ 5 и 6, приходим к следующим выводам:

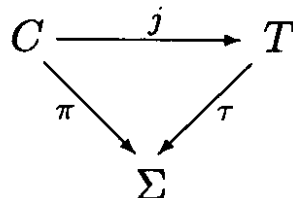
**Теорема XVIII.** *Отображение  $\tau$  трансверсали к орбите в базу миниверсальной деформации задает устойчивый лежандров росток; бифуркационное множество нулей — это его фронт. Отображение  $\rho \cdot \tau$  трансверсали к орбите в базу ограниченной миниверсальной деформации задает устойчивый лагранжев росток; бифуркационное множество  $\Delta_1$  — это его каустика.*

Таким образом, исследование топологии бифуркационных множеств  $\Sigma$  и  $\Delta_1$  в базах версальных деформаций и топологии каустик и фронтов устойчивых лагранжевых и лежандровых отображений — это одна задача.

Сказанное станет, быть может, более ясным, если рассмотреть еще росток *ограниченного критического множества деформации*  $F(x, \lambda)$ , определенный как

$$C = \{x, \lambda : \partial F / \partial x = 0, F(x, \lambda) = 0\}.$$

Если деформация  $F$  миниверсальна, то  $C$  — росток гладкого многообразия размерности  $\mu - 1$ . Естественная проекция  $(x, \lambda) \mapsto \lambda$  определяет отображение  $\pi : C \rightarrow \Sigma$ . Система координат  $x$  определяет диффеоморфизм  $j : C \rightarrow T$  на трансверсаль к орбите ( $j$  определяется с помощью перенесения критической точки в начало координат). Диаграмма



коммутативна. Поэтому  $\pi$ , как и  $\tau$ , нормализует  $\Sigma$ , отображение  $\rho \cdot \pi$  обладает свойствами  $\rho \cdot \tau$  и т.д.

## 10. Интегралы осциллирующих функций

Определение интенсивности света в окрестности каустики приводит к задаче об асимптотике интегралов от быстро осциллирующих функций типа интегралов Френеля или Эйри

$$I(h, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\frac{\lambda}{h}F(x, \lambda)} \varphi dx, \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l,$$

зависящих от параметра  $\lambda$ , при стремлении к 0 длины волны (т.е. при  $h \rightarrow 0$ ). Параметр  $\lambda$  обозначает здесь точку наблюдения,  $\varphi$  — функция с компактным носителем,  $F$  — гладкая вещественная «фазовая функция». Разумеется, подобные интегралы встречаются и в других областях физики и математики, например, в теории чисел и уравнений с частными производными (см. [81], [55], [42]).

Если свет настолько интенсивен, что может разрушить среду, то разрушение будет происходить в точках каустик с наибольшим  $I$ . Таким образом, возникает вопрос об асимптотике при  $h \rightarrow 0$  наибольших по  $\lambda$  значений  $I$ , встречающихся неустрашимым образом для фазовых функций  $F$  общего положения. Классификация простых особенностей была найдена как побочный продукт при решении этой задачи, сообщенной автору В. П. Масловым (см. [56], [5]).

Согласно принципу стационарной фазы основной вклад в асимптотику дают критические точки  $F$  по  $x$  (при постоянном  $\lambda$ ). В отсутствие параметров ( $l = 0$ ) для функции общего положения критические точки морсовские и  $I$  убывает при  $h \rightarrow 0$  как  $h^{k/2}$  (Френель [31]).

Если параметр есть, то вырожденные критические точки становятся неустрашимыми, и при отдельных «каустических» значениях параметра интеграл убывает медленнее, как  $h^{\frac{k}{2}-\beta}$ . Определенное таким образом число  $\beta$  называется *показателем особенности* соответствующей критической точки.

Точнее говоря, для конечнократных особенностей интеграл  $I(h)$  при фиксированном  $\lambda$  допускает асимптотическое разложение (см. работы И. Н. Бернштейна и С. И. Гельфанда [16], М. Атьи [15], И. Н. Бернштейна [17], Б. Мальгранжа [52], [53])

$$I \sim \sum_{\alpha, \kappa} c_{\alpha, \kappa} h^{\frac{k}{2}-\alpha} \ln^{\kappa} h,$$

где  $\alpha$  пробегает конечное число рациональных арифметических прогрессий,  $0 \leq \kappa \leq k - 1$ . Показатель особенности  $\beta$  есть минимум  $\alpha$ , для

которых  $c_{\alpha, \kappa} \neq 0$  при некоторых  $\varphi$ , сосредоточенных в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой критической точки  $x$ .

**Теорема XIX** (см. [5], [7]). Для простых особенностей  $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ , где  $N$  — число Кокстера:

$$N(A_k) = k+1, \quad N(D_k) = 2k-2, \quad N(E_6) = 12, \quad N(E_7) = 18, \quad N(E_8) = 30.$$

Для параболических и гиперболических особенностей  $\beta = \frac{1}{2}$ .

Для всех остальных особенностей, по-видимому,  $\beta > \frac{1}{2}$ .

Мы определяем число Кокстера любой особенности,  $N$ , формулой  $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ , где  $\beta$  — показатель особенности.

**Теорема XX** (см. [7]). При  $l \leq 10$ ,  $k \geq 3$  наибольший показатель особенности, встречающийся неустранимо в семействах общего положения, имеет вид

$$\beta_l = \frac{1}{2} - \frac{1}{N},$$

где число  $N$  дается таблицей

$l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10, $k=3$	11, $k=3$	10, $k>3$
$N$	+2	+3	+4	+6	+8	+12	$\infty$	$\infty$	-24	-16	-12	-8	-6

Все числа  $\beta_l = \beta_l(k)$  рациональны. При достаточно больших  $k$  число  $\beta_l$  не зависит от  $k$ .

Вычисление всех рациональных чисел  $\beta_l$  кажется очень трудным; по-видимому,  $\beta_l \sim \sqrt{2l/6}$ . Кажется правдоподобной полунепрерывность  $\beta$  по  $\lambda$  и равномерная по  $\lambda$  вблизи  $\lambda_0$  оценка

$$|I(h, \lambda)| \leq C(\varepsilon, \varphi) h^{\frac{k}{2} - \beta(\lambda_0) - \varepsilon}$$

для любого  $\varepsilon > 0$ .

Такая оценка доказана для простых особенностей серии А И. М. Виноградовым [81], а для всех простых особенностей Дюистермаатом [30].

## 11. Полуквазиоднородные функции и диаграмма Ньютона

Первоначальные доказательства всех перечисленных классификационных теорем были основаны на длинных вычислениях. Эти вычисления можно заменить своеобразной геометрической техникой, связанной с диаграммой Ньютона.

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется квазиоднородной степени  $d$  типа  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , если  $f(t^{\alpha_1}x_1, \dots, t^{\alpha_n}x_n) = t^d f(x_1, \dots, x_n)$ . Здесь  $0 < \alpha_s \leq 1/2$  — рациональные числа. (О квазиоднородных функциях см. [8], а также работы Сайто [65], [66], Милнора и Орлика [58], Орлика и Ваграйха [60].)

Функция  $f$  полуквазиоднородна, если  $f = f_0 + f'$ , где  $f_0$  квазиоднородна степени 1 и имеет в  $O$  конечнократную особенность, а все мономы  $f'$  имеют степень выше 1.

**Теорема XXI** (см. [8]). Полуквазиоднородная функция приводится диффеоморфизмом к нормальной форме  $f_0 + c_1 e_1 + \dots + c_r e_r$ , где  $c_s$  — числа, а  $e_s$  — базисные мономы локального кольца функции  $f_0$ , имеющие степень больше 1.

Диаграмма Ньютона произвольного ростка  $f$  строится по показателям мономов, входящих в тейлоровское разложение  $f$ , и содержит много полезной информации. Я сформулирую здесь только один результат А. Г. Кушниренко, позволяющий вычислять кратности.

Предположим, что диаграмма Ньютона функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  имеет по точке на каждой из координатных осей (это не является ограничением, поскольку  $f$  имеет достаточную струю).

**Теорема XXII** (А. Г. Кушниренко). Обозначим через  $V$  объем  $n$ -мерной области положительного ортанта ниже диаграммы Ньютона, через  $V_i$  —  $(n-1)$ -мерный объем под диаграммой Ньютона на  $i$ -й координатной плоскости, через  $V_{i,j}$  —  $(n-2)$ -мерный объем на координатной плоскости, не содержащей  $i$ -го и  $j$ -го базисных векторов, и т.д. Тогда для всех функций  $f$  с данной диаграммой Ньютона

$$\mu(f) \geq n!V - (n-1)! \sum_i V_i + (n-2)! \sum_{i < j} V_{i,j} - \dots \pm 1,$$

причем для почти всех  $f$  имеет место равенство.

Например, для почти всех функций двух переменных с фиксированной диаграммой Ньютона  $\mu = 2S - a - b + 1$ , где  $S$  — площадь под диаграммой, а  $a$  и  $b$  — координаты точек диаграммы на осях (рис. 6).

В самое последнее время Д. Н. Бернштейн, А. Г. Кушниренко и А. Г. Хованский получили далеко идущие обобщения этой теоремы. В частности, число решений системы полиномиальных уравнений  $P_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, P_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ , для которых ни одна из координат  $x_s$  не равна нулю, равно умноженному на  $n!$  смешанному объему Минковского выпуклых оболочек носителей многочленов  $P_s$  (для почти всех наборов многочленов  $P_s$  с данными выпук-

лыми оболочками носителей). Получены также аналогичные формулы, выражающие через геометрию многогранников другие числовые инварианты аффинных полных пересечений. Например, число голоморфных форм на гиперповерхности равно числу целых точек внутри выпуклой оболочки носителя (для почти всех гиперповерхностей с данной выпуклой оболочкой носителя).

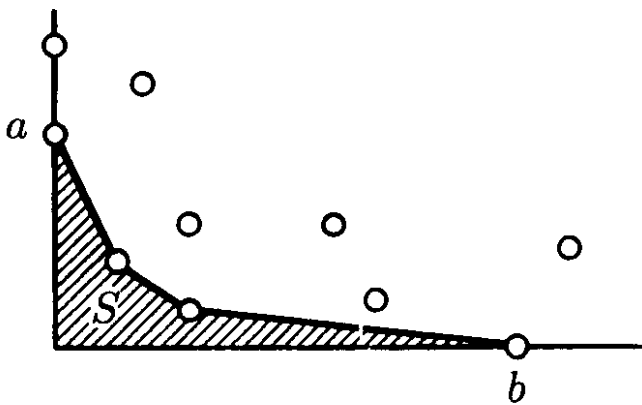


Рис. 6

Среди многочисленных нерешенных задач теории особенностей выделяется задача о гладкости страта  $\mu = \text{const}$  в базе миниверсальной деформации.

Ле и Раманужам [50] доказали, что при  $n \neq 3$  вдоль страта  $\mu = \text{const}$  не меняется ни топологический тип особого множества уровня, ни топологический тип «расслоения Милнора», образованного неособыми слоями. Вероятно, не меняется также ни топологический тип функции, ни показатель особенности  $\beta$ . Изменение топологии бифуркационных множеств вдоль страта  $\mu = \text{const}$  отметил Фам [63]. А. М. Габриэлов [36] доказал, что размерность страта  $\mu = \text{const}$  равна модальности особенности. Используя результаты Тесье, Кушниренко и Габриэлов доказали, что для (полу)однородных особенностей эта размерность равна числу образующих мономиального базиса локального кольца на диаграмме Ньютона и выше [37]. По-видимому, тот же результат верен для (полу)квазиоднородных функций.

Высказанная в [8] гипотеза, что модальность функции двух переменных равна числу точек между диаграммой Ньютона и координатны-



ми лучами, проведенными через точку  $(2, 2)$ , считая граничные точки (для почти всех функций с данной диаграммой), доказана А. Г. Кушниренко с помощью некоторых результатов А. Н. Варченко и Ле Дунг Транга.

В этом обзоре остались в стороне многие важные вопросы теории критических точек функций, особенно алгебраические (см. толстый том «Особенностей в Каргезе» [71]). Из перечисленных выше результатов видна сила «трансцендентных», топологических методов, основанных на анализе иерархии особенностей, детальном изучении классов малой коразмерности, соображениях полунепрерывности и общего положения, восходящих к теории бифуркаций Пуанкаре [12] и формализованных в теоремах трансверсальности Тома. К исследованию особых точек гиперповерхностей эти идеи впервые применила Г. Н. Тюринна (см. [76]–[78], [13]).

## Литература

- [1] A'Campo N. Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes. *Invent. Math.*, 1973, **20**, 147–169.
- [2] A'Campo N. Le nombre de Lefschetz d'une monodromie. *Indag. Math.*, 1973, **35**, 113–118.
- [3] Арнольд В. И. Особенности гладких отображений. *УМН*, 1968, **23**(1), 3–44.
- [4] Арнольд В. И. О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций. *Труды Моск. матем. об-ва*, 1970, **21**, 27–46.
- [5] Арнольд В. И. Интегралы быстро осциллирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(3), 61–62.
- [6] Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  и лагранжевы особенности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(4), 3–25.
- [7] Арнольд В. И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера. *УМН*, 1973, **28**(5), 17–44.
- [8] Арнольд В. И. Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек. *УМН*, 1974, **29**(2), 11–49.
- [9] Арнольд В. И. Критические точки функций и классификация каустик. *УМН*, 1974, **29**(3), 243–244.
- [10] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974, 432 с.

- [11] Арнольд В. И. Контактные многообразия, лежандровы отображения и особенности волновых фронтов. *УМН*, 1974, **29**(4), 153–154.
- [12] Арнольд В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах. *УМН*, 1972, **27**(5), 119–184.
- [13] Арнольд В. И., Гельфанд И. М., Манин Ю. И., Мойшензон Б. Г., Новиков С. П., Шафаревич И. Р. Галина Николаевна Тюриня (некролог). *УМН*, 1971, **26**(1), 207–211.
- [14] Artin M. On the solutions of analytic equations. *Invent. Math.*, 1968, **5**, 277–291.
- [15] Atiyah M. F. Resolution of singularities and division of distributions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1970, **23**(2), 145–150.
- [16] Бернштейн И. Н., Гельфанд С. И. Мероморфность функций  $P^\lambda$ . *Функц. анализ и его прилож.*, 1969, **3**(1), 84–85.
- [17] Бернштейн И. Н. Аналитическое продолжение обобщенных функций по параметру. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(4), 26–40.
- [18] Brieskorn E. Rationale Singularitäten komplexer Flächen. *Invent. Math.*, 1967/68, **4**(5), 336–358.
- [19] Brieskorn E. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. *Invent. Math.*, 1966, **2**(1), 1–14.
- [20] Brieskorn E. Singular elements of semi-simple algebraic groups. In: Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970). Paris: Gauthier-Villars, 1971, t. 2, 279–284.
- [21] Brieskorn E. Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe. *Invent. Math.*, 1971, **12**(1), 57–61.
- [22] Brieskorn E. Sur les groupes de tresses (d'après V. I. Arnol'd). In: Séminaire N. Bourbaki 1971/1972, **24**, n° 401.
- [23] Brieskorn E., Saito K. Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen. *Invent. Math.*, 1972, **17**, 245–271.
- [24] Brieskorn E. Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. *Manuscripta Math.*, 1970, **2**, 103–161.
- [25] Cerf J. La stratification naturelle des espaces des fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie. *IHES Publ. Sci.*, 1970, **39**, 5–173.
- [26] Deligne P. Les immeubles des groupes de tresses généralisés. *Invent. Math.*, 1972, **17**, 273–302.
- [27] Demazure M. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sc. École Norm. Sup. (4)*, 1970, **3**(4), 507–588.
- [28] Долгачев И. В. Факторконические особенности комплексных гиперповерхностей. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, **8**(2), 75–76.
- [29] Долгачев И. В. Автоморфные формы и квазиоднородные особенности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, **9**(2), 67–68.

- [30] Duistermaat J. J. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities. Preprint, 1973.
- [31] Fresnel A. J. Mémoire sur la diffraction de la Lumière. *Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris*, 1821–1822, 5, 339–353.
- [32] Фукс Д. Б. Квиленизация и бордизмы. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, 8(1), 36–42.
- [33] Фукс Д. Б. Когомологии групп кос mod 2. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, 4(2), 63–72.
- [34] Габриэлов А. М. Матрицы пересечений для некоторых особенностей. *Функц. анализ и его прилож.*, 1973, 7(3), 18–32.
- [35] Габриэлов А. М. Диаграммы Дынкина унимодальных особенностей. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, 8(3), 1–6.
- [36] Габриэлов А. М. Бифуркации, диаграммы Дынкина и модальность изолированных особенностей. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, 8(2), 7–12.
- [37] Габриэлов А. М., Кушниренко А. Г. Описание деформаций с постоянным числом Милнора для однородных функций. *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, 9(4), 67–78.
- [38] Guckenheimer J. Catastrophes and partial differential equations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1973, 23(2), 31–59.
- [39] Гусейн-Заде С. М. Матрицы пересечений для некоторых особенностей функций двух переменных. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, 8(1), 11–15.
- [40] Гусейн-Заде С. М. Диаграммы Дынкина для особенностей функций двух переменных. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, 8(4), 23–30.
- [41] Hatcher A. E. Parametrized  $h$ -cobordism theory. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1973, 23(2), 61–74.
- [42] Hörmander L. Fourier integral operators. I. *Acta Math.*, 1971, 127(1–2), 71–183.
- [43] Hirzebruch F. The topology of normal singularities of an algebraic surface (d'après Mumford). In: Séminaire N. Bourbaki 1962/1963, 15, n° 250.
- [44] Hirzebruch F., Mayer K. H.  $O(n)$ -Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1968, 132 p. (Lecture Notes in Mathematics, 57)
- [45] Klein F. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert. Berlin, 1926–1927.
- [46] Kuiper N. H. Algebraic equations for nonsmoothable 8-manifolds. *IHES Publ. Math.*, 1967, 33, 139–155.
- [47] Latur F. Stabilité des champs d'applications différentiables généralisation d'un théorème de J. Mather. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1969, 268(22), 1331–1334.

- [48] Lazzeri F. A theorem on the monodromy of isolated singularities. In: *Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. Études Sci. de Cargèse, 1972*. Paris: Soc. Math., 1973, 269–275. (Astérisque, 7, 8)
- [49] Lê Dũng Tráng. Les théorèmes de Zariski du type de Lefschetz. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), 1973, 6, 317–355.
- [50] Lê Dũng Tráng, Ramanujam C. P. The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type. *Amer. J. Math.*, 1976, 98(1), 67–78.
- [51] Looijenga E. J. N. The complement of the bifurcation variety of a simple singularity. *Invent. Math.*, 1974, 23(2), 105–116.
- [52] Malgrange B. Intégrales asymptotiques et monodromie. In: *Séminaire Leray, 1972/1973*. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), 1974, 7, 405–430.
- [53] Мальгранж Б. О полиномах И. Н. Бернштейна. *УМН*, 1974, 29(4), 81–88.
- [54] Mather J. N. Stability of  $C^\infty$  mappings. I–VI. *Ann. of Math.*, 1968, 87, 89–104; *Ann. of Math.*, 1969, 89, 254–291; *IHES Publ. Math.*, 1968, 35, 279–308; *IHES Publ. Math.*, 1969, 37, 223–248; *Advan. in Math.*, 1970, 4, 301–336; In: *Proceeding of Liverpool Singularities Symposium, I (1969/70)*. Berlin: Springer, 1971, 207–253. (Lect. Notes in Math., 192)  
(Русский перевод в кн.: Особенности дифференцируемых отображений. М.: Мир, 1968, 198–267; В кн.: Математика: Период. сб. перев. ин. статей. М., 1970, 14(1), 145–175; *УМН*, 1973, 28(6), 165–190; *УМН*, 1974, 29(1), 127–158.)
- [55] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965, 553 с.
- [56] Маслов В. П. О фокусировке энергии в кристаллической решетке. *УМН*, 1972, 27(6), 224.
- [57] Milnor J. *Singular points of complex hypersurfaces*. Princeton, NJ: Princeton University Press; Tokyo: University of Tokyo Press, 1968, 122 p. (Ann. of Math. Studies, 61)
- [58] Milnor J., Orlik P. Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials. *Topology*, 1970, 9(2), 385–393.
- [59] Ньютон И. Математические работы. М.-Л.: ОНТИ. Главн. ред. техн.-теорет. лит-ры, 1937, 34.
- [60] Orlik P., Wagreich P. Isolated singularities of algebraic surfaces with  $C^*$  action. *Ann. Math.*, 1971, 93(2), 205–228.
- [61] Паламодов В. П. О кратности голоморфного отображения. *Функц. анализ и его прилож.*, 1967, 1(3), 54–65.
- [62] Pham F. Formules de Picard–Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. *Bull. Soc. Math. de France*, 1965, 93, 333–367.
- [63] Pham F. Remarque sur l'équisingularité universelle. *Faculté des Science, Nice (1970)*. Paris: Gauthier-Villars, 1971, 1–24.
- [64] Пуанкаре А. Избранные труды. В 3-х тт. Т. II. М.: Наука, 1972, 829–836.
- [65] Saito K. Einfach-elliptische Singularitäten. *Invent. Math.*, 1974, 23, 289–325.

- [66] Saito K. Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen. *Invent. Math.*, 1971, **14**, 123–142.
- [67] Самойленко А. М. Об эквивалентности гладкой функции полиному Тейлора в окрестности критической точки конечного типа. *Функц. анализ и его прилож.*, 1968, **2**(4), 63–69.
- [68] Segal G. Configuration-spaces and iterated loop-spaces. *Invent. Math.*, 1973, **21**, 213–222.
- [69] Siersma D. The singularities of  $C^\infty$ -functions of right-codimension smaller or equal than eight. *Indag. Math.*, 1973, **35**(1), 31–37.
- [70] Singularités à Cargèse. Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. Études Sci. de Cargèse, 1972. Paris: Soc. Math., 1973. (Astérisque, 7, 8)
- [71] Teissier B. Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. In: Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. Études Sci. de Cargèse, 1972. Paris: Soc. Math., 1973, 285–362. (Astérisque, 7, 8)
- [72] Thom R., Levine H. Stability of differentiable mappings. I. *Bonner Math. Schriften*, 1959, **6**.
- [73] Thom R., Sebastiani M. Un résultat sur la monodromie. *Invent. Math.*, 1971, **13**, 90–96.
- [74] Thom R. Stabilité Structurelle et Morphogénèse. Essai d'une théorie générale des modèles. Mathematical Physics Monograph. Series W. A. Benjamin. Mass: Inc. Reading, 1972, 362 p.
- [75] Thom R. The bifurcation subset of a space of maps. In: Manifolds (Amsterdam, 1970). Berlin: Springer, 1971, 202–208. (Lecture Notes in Math., 197)
- [76] Тюрин Г. Н. О топологических свойствах изолированных особенностей комплексных пространств коразмерности один. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1968, **32**(3), 605–620.
- [77] Тюрин Г. Н. Локально полууниверсальные плоские деформации изолированных особенностей комплексных пространств. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1969, **33**(5), 1026–1058.
- [78] Тюрин Г. Н. Разрешение особенностей плоских деформаций двойных рациональных точек. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, **4**(1), 77–83.
- [79] Tougeron J. C. Idéaux de fonctions différentiables. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1968, **18**(1), 171–240.
- [80] Варченко А. Н. Теоремы топологической эквисингулярности семейств алгебраических многообразий и семейств полиномиальных отображений. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1972, **36**(5), 957–1019.
- [81] Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1971, 159 с.
- [82] Володин И. А. Обобщенные группы Уайтхеда и псевдоизотопии. *УМН*, 1972, **27**(5), 229–230.
- [83] Wagreich P. Singularities of complex surfaces with solvable local fundamental group. *Topology*, 1971, **11**, 51–72.

- 
- [84] Wagoner J. B. Algebraic invariants for pseudo-isotopies. In: Proceedings of Liverpool Singularities Symposium, II (1969/70). Berlin: Springer, 1971, 164–190. (Lecture Notes in Math., 209)
- [85] Weinstein A. Singularities of families of functions. In: Differential Geometrie im Grossen. Ber. Tagung. Math. Forschungsinst (Oberwolfach, 1969), Heft 4. Mannheim: Oberwolfach, Bibliographisches Inst., 1971, 323–330.
- [86] Whitney H. On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. *Ann. Math.*, 1955, **62**, 374–410.
- [87] Закалюкин В. М. Теорема версальности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1973, **7(2)**, 28–31.
- [88] Zariski O. On the Poincaré group of a projective hypersurface. *Ann. Math.*, 1937, **38(1)**, 131–141.
- [89] Куликов В. С. Вырождения эллиптических кривых и разрешение уни- и бимодальных особенностей. *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, **9(1)**, 72–73.
- [90] Кушниренко А. Г. Многогранник Ньютона и числа Милнора. *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, **9(1)**, 74–75.

## Спектральная последовательность для приведения функций к нормальной форме

Приведение функций к нормальным формам в окрестности критических точек связано с большими вычислениями (см. [1]–[3]). Эти вычисления в сколько-нибудь сложных случаях удастся провести лишь при помощи спектральной последовательности, определенной подходящей фильтрацией некоторого подкомплекса комплекса Кошуля, построенного по производным данной функции. Ниже приведены формулировки и примеры приложения соответствующих теорем.

### 1. Определения и обозначения

Квазиоднородная фильтрация  $A_0 \supset A_1 \supset \dots$  типа  $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^n$  в кольце  $A = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$  задается градуировкой  $\deg x_k = w_k$ . Индуцированная фильтрация  $\dots \supset \mathcal{A}_{-1} \supset \mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \dots$  в алгебре Ли  $\mathcal{A}$  формальных векторных полей вида  $\sum a_s \partial/\partial x_s$  ( $a_s \in A$ ) задается условием  $a \in \mathcal{A}_p \iff aA_q \subset A_{p+q} \forall q$ .

Пусть  $f \in A_N$ . Рассмотрим комплекс  $0 \rightarrow \mathcal{A}_0 \rightarrow A_N \rightarrow 0$ , заданный дифференциалом  $\partial a = af \forall a \in \mathcal{A}_0$ . Дифференциал  $\partial$  и фильтрации в  $\mathcal{A}_0$  и в  $A_N$  определяют спектральную последовательность. Мы будем записывать  $r$ -й член этой последовательности в виде  $d^r : S_p^r \rightarrow A_{p+r}^r$  ( $r \geq 0, p \geq 0$ ),  $S_p^0 = \mathcal{A}_p/\mathcal{A}_{p+1}$ ,  $A_p^0 = A_{N+p}/A_{N+p+1}$  (стандартные обозначения [4]:  $S_p^r = E_{-p,p+1}^r$ ,  $A_p^r = E_{-p,p}^r$ ). Разложение  $f$  на квазиоднородные составляющие степеней  $N, N+1, \dots$  обозначается ниже как  $f = f_0 + f_1 + \dots$

### 2. Формулировки результатов

**Предложение.** Для каждого  $p \geq 0$  пространства  $S_p^r$  и  $A_p^r$  стабилизируются при  $r \rightarrow \infty$ , причем возникающие  $A$ -модули  $\bigoplus S_p^\infty$  и  $\bigoplus A_p^\infty$  изоморфны градуированным  $A$ -модулям, присоединенным к ядру и коядру  $\partial$ ; эти изоморфизмы определяются естественными отображениями  $A_{N+p} \rightarrow A_p^r$ ,  $(\text{Ker } \partial) \cap \mathcal{A}_p \rightarrow S_p^r$ .

**Теорема  $T_{r,p}$ .** Пусть  $p > r \geq 0$ . Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — квазиоднородные многочлены степени  $N + p$ ,  $\mathbb{C}$ -порождающие  $A_p^{r+1}$  при естественном отображении  $A_{N+p} \rightarrow A_p^{r+1}$ . Тогда существует формальный диффеоморфизм

$$y_1 = x_1 + g_1, \quad \dots, \quad y_n = x_n + g_n, \quad \text{где} \quad \sum g_k \partial / \partial x_k \in \mathfrak{A}_{p-r},$$

такой, что ряд  $f = f_0 + f_1 + \dots$  после подстановки  $y$  принимает вид

$$f(y_1, \dots, y_n) = f_0(x) + \dots + f_{p-1}(x) + \sum c_i e_i(x) + R,$$

где  $R \in A_{N+p+1}$  и  $c_i \in \mathbb{C}$ .

**Теорема  $T_r$ .** Пусть  $r \geq 0$ . Пусть  $e_1, e_2, \dots$  — квазиоднородные многочлены всевозможных степеней  $N + p$ , где  $p > r$ , порождающие над  $\mathbb{C}$  все пространства  $A_p^{r+1}$  при естественных отображениях  $A_{N+p} \rightarrow A_p^{r+1}$ . Тогда существует формальный диффеоморфизм  $y_1 = x_1 + g_1, \dots, y_n = x_n + g_n$ , где  $\sum g_k \partial / \partial x_k \in \mathfrak{A}_0$ , такой, что ряд  $f = f_0 + f_1 + \dots$  после подстановки  $y$  принимает вид

$$f(y_1, \dots, y_n) = f_0(x) + \dots + f_r(x) + \sum c_i e_i,$$

где  $\deg e_i > N + r$  и  $c_i \in \mathbb{C}$ .

**Определение.** Отрицательной алгеброй Ли  $\mathfrak{A}^-$  (соответственно нулевой алгеброй  $\mathfrak{A}^0$ ) типа  $w$  называется алгебра полей вида  $\sum a_s \partial / \partial x_s$ , где  $a_s$  — многочлены,  $\deg a_s \leq w_s$  (соответственно  $= w_s$ ).

**Определение.** Ряд  $f = f_0 + f_1 + \dots \in A_N$  удовлетворяет условию  $C$  (соответственно условию  $B$ ), если стационарная алгебра точки  $f_0$  при действии отрицательной (соответственно нулевой) алгебры Ли на пространстве многочленов квазиоднородной степени, меньшей (соответственно равной)  $N$ , тривиальна, т.е. равна 0.

Условие  $B$  можно записать также в виде  $S_0^1 = 0$ .

**Теорема  $BT$ .** Если  $f$  удовлетворяет условию  $B$ , то теорема  $T_{r,p}$  справедлива и при  $p = r \geq 1$ , а в теореме  $T_r$  можно условие  $p > r$  заменить на  $p \geq r \geq 1$ , одновременно заменив в заключении  $f_r$  на  $f_{r-1}$  и  $\deg e_i > N + r$  на  $\deg e_i \geq N + r$ .

**Теорема  $CT$ .** Если  $f$  удовлетворяет условию  $C$ , то  $\mathfrak{A}_0 f = A_N \cap \mathfrak{A} f$ . Если  $e_1, e_2, \dots$  — квазиоднородные многочлены всевозможных степеней  $N + p$  ( $p \geq 0$ ), определяющие  $\mathbb{C}$ -базисы в пространствах  $A_p^\infty$  при естественных отображениях  $A_{N+p} \rightarrow A_p^\infty$ , то образы  $e_i$  в локальном кольце  $A/\mathfrak{A} f$   $\mathbb{C}$ -линейно независимы.



### 3. Пример

Пусть

$$f_0 = x^4 + x^2 y^{2k+1}, \quad k \geq 1.$$

Эта функция квазиоднородна, с весами  $\deg x = 2k + 1$ ,  $\deg y = 2$ , степени  $N = \deg f_0 = 8k + 4$ . Она удовлетворяет условиям *B* и *C*.

**Теорема *W*.** *Всякий формальный ряд  $f = f_0 + f_1 + \dots$ , где  $\deg f_p = N + p$ , формальным диффеоморфизмом приводится либо к нормальной форме*

$$W_{k,i} = x^4 + x^2 y^{2k+1} + \mathbf{a} x^3 y^{k+1} + \mathbf{b} y^{4k+2+i},$$

где  $\mathbf{a} = a_0 + \dots + a_{k-2} y^{k-2}$ ,  $\mathbf{b} = b_0 + \dots + b_{2k-1} y^{2k-1}$  ( $i > 0$ ,  $b_0 \neq 0$ ;  $\mathbf{a} = 0$  при  $k = 1$ ), либо к аналогичной форме с  $\mathbf{b} \equiv 0$  (последнее лишь в случае, когда кратность  $\mu$  критической точки  $O$  бесконечна). Число модулей (см. [2]) ряда  $f$  не меньше, чем число параметров в нормальной форме (т.е. чем  $3k - 1$ ).

**Доказательство.** Для сокращения обозначений будем отождествлять фактор-пространства  $A_p/A_{p+1}$  и  $\mathcal{A}_p/\mathcal{A}_{p+1}$  с пространствами квазиоднородных многочленов и векторных полей степени  $p$  соответственно. Пусть  $s_p$  — квазиоднородное поле степени  $p$ . Тогда  $d^0 s_p = s_p f_0$ . Из этого легко выводится

**Лемма 1.** *Однородный идеал  $\mathcal{A}_0 f_0$  содержит одночлены  $x^4$ ,  $x^3 y^{2k}$ ,  $x^2 y^{2k+1}$ ,  $x y^{4k+1}$ . Пространства  $A_p^1$  ( $p \geq 0$ ) порождаются над  $\mathbb{C}$  классами смежности мономов  $x^3 y^\alpha$  ( $k + 1 \leq \alpha \leq 2k - 1$ ) и  $y^\beta$  ( $\beta \geq 4k + 2$ ).*

Согласно теореме  $T_0$  и лемме 1 можно привести  $f$  к виду  $F = f_0 + \mathbf{a} x^3 y^{k+1} + b$ , где  $\mathbf{a} = a_0 + a_1 y + \dots + a_{k-2} y^{k-2}$  и где  $b$  — ряд по степеням  $y$ , начинающийся с членов степени выше  $4k + 2$  по  $y$ . Обозначим через  $4k + 2 + i$  показатель степени  $y$  в первом ненулевом члене ряда  $b$ ,  $b_0 y^{4k+2+i}$ .

**Лемма 2.** *В спектральной последовательности ряда  $F$   $d^1 = \dots = d^{2i-1} = 0$  и  $d^{2i}[s_p] = [s_p b_0 y^{4k+2+i}]$ . (Квадратные скобки здесь и далее означают классы смежности.)*

Для доказательства леммы 2 заметим, что стационарная алгебра функции  $f_0$  в  $\mathcal{A}$  порождается над  $A$  полем степени  $4k$ :

$$v = x y^2 (2k + 1) \partial / \partial x - (4x^2 + 2y^{2k+1}) \partial / \partial y.$$

Поэтому  $S_p^1 = 0$  при  $p < 4k$ . Значит, для любого поля  $s = s_p + s_{p+1} + \dots$ , для которого  $0 \neq s_p \in [s_p] \in S_p^r$  ( $r > 0$ ), имеем  $s \in \mathfrak{A}_{4k}$ .

Но  $\mathfrak{A}_{4k}(ax^3y^{k+1}) \subset \mathfrak{A}_0 f_0$ . Действительно, все элементы идеала в левой части делятся на  $x^2$  и имеют степень не ниже  $10k + 4$ , а элементы  $x^4$ ,  $x^3y^{2k}$ ,  $x^2y^{2k+1}$  идеала в правой части имеют степень ниже  $10k + 4$ . Поэтому каждый моном каждого элемента идеала в левой части делится на один из трех указанных мономов, что и доказывает приведенное включение. Итак, слагаемое  $ax^3y^{k+1}$  в нормальной форме не влияет на спектральную последовательность, откуда и вытекает утверждение леммы.

**Лемма 3.** При  $r = 2i$ ,  $p \geq 4k$  имеет место равенство  $d^r S_p^r = A_{p+r}^r$ , и, следовательно,  $d^q = 0$  при  $q > 2i$ .

Действительно, по лемме 2,  $d^{2i} S_{4k}^{2i} \supset [Cvy^{4k+2+i}]$ . Но  $[vy^{4k+2+i}] = [(-4x^2 + 2y^{2k+1})cy^{4k+1+i}]$ , где  $c \neq 0$ . Далее,  $x^2y^{4k+1} \in \mathfrak{A}_0 f_0$ . Поэтому  $[Cvy^{4k+2+i}] = [Cy^{6k+2+i}] = A_{4k+2i}^{2i}$ . Лемма доказана.

Теорема  $W$  вытекает из теорем  $T_{2i}$  и  $CT$ .

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  и лагранжевы особенности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, 6(4), 3–25.
- [2] Арнольд В. И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера. *УМН*, 1973, 28(5), 17–44.
- [3] Арнольд В. И. Классификация бимодальных критических точек функций. *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, 9(1), 49–50.
- [4] Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966, 543 с.

# Бифуркации инвариантных многообразий дифференциальных уравнений и нормальные формы окрестностей эллиптических кривых

## 1. Описание результатов

Существует интересная связь между инвариантными поверхностями векторных полей в  $\mathbb{C}^3$  вблизи особой точки типа Зигеля (или инвариантными кривыми локальных гиперболических автоморфизмов  $\mathbb{C}^2$ ) с одной стороны и вложениями эллиптических кривых с нулевыми индексами самопересечения в комплексно-аналитические поверхности — с другой. Эту связь можно использовать в обоих направлениях.

А) По инвариантному многообразию строится эллиптическая кривая. Это приводит к доказательству расходимости рядов Пуанкаре, линеаризующих поле или автоморфизм, в случае накопления инвариантных многообразий к особой точке (что наблюдается при «ненормально хорошей соизмеримости» собственных чисел).

Б) Пусть эллиптическая кривая вложена в комплексно-аналитическую поверхность. Оказывается, задача классификации таких вложений является задачей с «малыми знаменателями», и ее решение зависит от теории диофантовых приближений. Мы применяем стандартные методы оценок малых знаменателей из теории нормальных форм дифференциальных уравнений в окрестности особой точки и стандартные представления этой теории. Получаются следующие результаты.

а) *Линеаризация.* Достаточно малая окрестность эллиптической кривой, вложенной в поверхность с индексом самопересечения 0, биголоморфно эквивалентна окрестности нулевого сечения нормального расслоения для почти всех<sup>1</sup> нормальных расслоений.

<sup>1</sup> Всех, исключая множество лебеговой меры нуль в пространстве модулей одномерных векторных расслоений на эллиптических кривых (это пространство модулей имеет комплексную размерность два).

б) *Материализация резонансов.* В указанном пространстве модулей выделено всюду плотное объединение счетного множества гиперповерхностей, называемых резонансными. (Расслоение резонансное, если оно становится аналитически тривиальным после перехода к некоторому конечнолистному циклическому накрытию.)

При общем непрерывном изменении пары (эллиптическая кривая, поверхность) в момент прохождения через резонанс к эллиптической кривой приближается другая эллиптическая кривая, топологически ее накрывающая.

в) *Расходимость рядов.* Некоторые нерезонансные точки пространства модулей лежат «ненормально близко» к резонансным гиперповерхностям. Вследствие этого в любой окрестности соответствующей эллиптической кривой на поверхности имеется бесконечно много эллиптических кривых, отвечающих различным резонансам и топологически накрывающих исходную кривую все более и более многолистно. В таком случае окрестность эллиптической кривой формально эквивалентна нормальному расслоению, но соответствующие ряды всюду расходятся.

Автор благодарен Ю. С. Ильяшенко, В. П. Паламодову, А. Н. Тюрину, А. С. Пяртли, А. Д. Брюно, Ф. А. Богомолу за полезные обсуждения.

## 2. Резонансы и бифуркации

**2.1. Нерезонансный случай.** Рассмотрим голоморфное векторное поле  $v$  с особой точкой  $O \in \mathbb{C}^n$ . Обозначим через  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  собственные числа линеаризации поля  $v$  в точке  $O$ .

**Определение [2].** Особая точка  $O$  типа Пуанкаре (типа Зигеля), если выпуклая оболочка набора  $\{\lambda_k\}$  не содержит (содержит)  $0$ .

*Резонансом* называется целочисленное соотношение  $\lambda_k = (m, \lambda)$ ,  $m_i \geq 0$ ,  $\sum m_i \geq 2$ .

Рассмотрим пространство  $\mathbb{C}^n$  с координатами  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Каждый резонанс определяет резонансную плоскость в этом пространстве. Особым точкам типа Пуанкаре (Зигеля) отвечают в  $\mathbb{C}^n$  область Пуанкаре и область Зигеля. В области Пуанкаре резонансные плоскости лежат дискретно, а в области Зигеля — всюду плотно.

Если  $\{\lambda_k\}$  — нерезонансный набор собственных чисел, то существует формальная замена переменных, превращающая поле в его линейную часть.

**Теорема Пуанкаре [10].** *Если набор  $\{\lambda_k\}$  — нерезонансный и принадлежит области Пуанкаре, то поле в биголоморфным в окрестности точки  $O$  диффеоморфизмом превращается в линейное.*

**Теорема Зигеля [8].** *Для почти всех наборов  $\{\lambda_k\}$  в области Зигеля поле в биголоморфным в окрестности точки  $O$  диффеоморфизмом превращается в линейное.*

Зигель [9] указал также примеры нерезонансных наборов  $\{\lambda_k\}$ , для которых существуют нелинеаризуемые биголоморфным диффеоморфизмом векторные поля. Эти наборы «ненормально близки к резонансным» и образуют множество лебеговой меры нуль. Много примеров такого рода построил А. Д. Брюно [5].

**2.2. Прохождение через резонанс между двумя собственными числами.** Векторное поле общего положения нерезонансное. Резонансы встречаются неустрашимым образом лишь в том случае, когда рассматривается поле, зависящее от параметров. Таким образом, возникает вопрос о том, что происходит с векторным полем, зависящим от параметра, когда параметр проходит через резонансное значение.

Простейший случай резонансов в области Пуанкаре рассмотрен в [2]. Выяснилось, что хотя топология фазовых кривых в вещественной области при прохождении резонанса в особой точке типа Пуанкаре и не меняется, в комплексной области происходит топологическая бифуркация.

Точнее, рассмотрим малую сферу с центром в особой точке векторного поля в комплексном пространстве  $\mathbb{C}^2$ . Если особая точка типа Пуанкаре, то комплексные фазовые кривые пересекают поверхность сферы трансверсально. На этой поверхности образуется семейство гладких вещественных кривых. При прохождении резонанса  $\lambda_1 = n\lambda_2$  от одного из предельных циклов на сфере ответвляется другой цикл, обходящий вокруг исходного  $n$  раз. Этот ответвляющийся цикл является материализацией резонанса в случае Пуанкаре.

В случае Зигеля ситуация гораздо сложнее. Оптимистическая гипотеза о материализации резонансов, высказанная в [2], неверна [6]. Однако А. С. Пяртли [11] установил следующие результаты.

1) При прохождении резонанса  $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = 0$  в  $\mathbb{C}^2$  в общем случае происходит ответвление от сепаратрис особой точки инвариантного многообразия, уравнение которого имеет в первом приближении вид

$$z_1^{k_1} z_2^{k_2} = \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  характеризует отклонение от резонанса, а  $z_1, z_2$  — фазовые координаты.

2) Аналогичный результат для того же резонанса получен в  $\mathbb{C}^n$  при ограничительных условиях на остальные собственные числа.

3) Для «ненормально соизмеримых»  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  общим случаем является существование бесконечного числа инвариантных многообразий, соответствующих разным резонансам, в любой окрестности особой точки, что влечет расходимость рядов Пуанкаре.

Частный случай резонанса  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  с чисто мнимыми  $\lambda$  был ранее подробно исследован Пуанкаре, А. А. Андроновым [1] и Э. Хопфом [12] в вещественной области в связи с изучением мягкой потери устойчивости. Работа А. С. Пяртли основана на методе Э. Хопфа. Другие доказательства первых двух результатов А. С. Пяртли предложил А. Д. Брюно [6].

**2.3. Резонанс между тремя собственными числами.** Следующий по сложности резонанс

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0,$$

где треугольник с вершинами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  содержит 0, также исследовался А. С. Пяртли и А. Д. Брюно. Здесь также доказано ответвление от сепаратрис особой точки инвариантного многообразия при  $n = 3$ . Пусть  $z_1, z_2, z_3$  — фазовые координаты, а  $\varepsilon$  — параметр деформации (резонанс соответствует  $\varepsilon = 0$ ). Тогда инвариантные многообразия заполняют в пространстве с координатами  $(z, \varepsilon)$  голоморфную гиперповерхность, уравнение которой имеет в первом приближении вид

$$z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} = \varepsilon$$

(в подходящей системе координат).

А. С. Пяртли доказал, что для «ненормально соизмеримых»  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , образующих треугольник Зигеля, в общем случае в любой окрестности положения равновесия  $O \in \mathbb{C}^3$  имеется бесконечно много

инвариантных многообразий описанного вида, соответствующих различным резонансам.

Из дальнейшего будет видно, что наличие в окрестности нерезонансной точки  $O \in \mathbb{C}^3$  достаточно большого куска резонансного инвариантного многообразия препятствует сходимости рядов Пуанкаре–Зигеля в этой окрестности. Поэтому из цитированного результата Пяртли вытекает, что при «ненормально соизмеримых»  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  общим случаем является расходимость указанных рядов в любой окрестности начала координат.

**2.4. Случай дискретного времени.** Рассмотрим локальный автодиффеоморфизм  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  в окрестности неподвижной точки  $O$ . Обозначим через  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  собственные числа линеаризации  $A$  в  $O$ .

Предыдущая теория переносится на этот случай со следующими изменениями.

*Резонансы:*  $\lambda_k = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n}$  ( $m_i \geq 0; \sum m_i \geq 2$ ).

*Область Пуанкаре:* все  $|\lambda_s| > 1$  или все  $|\lambda_s| < 1$ .

*Область Зигеля:* существуют  $|\lambda_i| \geq 1$  и  $|\lambda_j| \leq 1$ .

**Замечание.** Линейному векторному полю в  $\mathbb{C}^n$  соответствует линейное преобразование в  $\mathbb{C}^{n-1}$  («функция последования Пуанкаре»). А именно, пусть поле задает дифференциальное уравнение

$$\dot{z}_1 = \alpha_1 z_1, \quad \dots, \quad \dot{z}_n = \alpha_n z_n,$$

где  $\alpha_n \neq 0$ . Рассмотрим решения с начальными условиями при  $t = 0$  на плоскости  $z_n = 1$ . Значение решения при  $t = 2\pi i / \alpha_n$  принадлежит той же плоскости  $\mathbb{C}^{n-1}$ . Полученное отображение  $A : \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$  имеет собственные числа  $\lambda_s = e^{2\pi i \alpha_s / \alpha_n}$  ( $s = 1, \dots, n-1$ ).

Аналогичная конструкция функции последования имеется (при небольших дополнительных предположениях) и в нелинейном случае. Поэтому результаты об инвариантных многообразиях и бифуркациях для отображений влекут соответствующие результаты для векторных полей.

Впрочем, в большинстве случаев отмеченную связь между уравнениями и отображениями лучше использовать как эвристическое средство для угадывания результатов в одной области по имеющимся результатам в другой, доказательства же удобнее проводить независимо в обеих ситуациях.

**2.5. Бифуркация инвариантных многообразий диффеоморфизма.** Резонанс между тремя собственными числами векторного поля, рассмотренный в п. 2.3:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0,$$

соответствует в дискретном случае резонансу вида

$$\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} = 1,$$

причем в области Зигеля  $m_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$ ,  $|\lambda_1| \neq 1 \neq |\lambda_2|$ . Мы предположим, что  $\lambda_1$  по модулю больше 1, а  $\lambda_2$  меньше 1.

Результаты Пярти и Брюно в этом случае означают существование инвариантных многообразий, заполняющих в пространстве с координатами  $(\varepsilon, z_1, z_2)$  поверхность, уравнение которой начинается с членов вида

$$\varepsilon = z_1^{m_1} z_2^{m_2}.$$

Здесь  $\varepsilon$  — отклонение от резонанса, а  $z_1, z_2$  — подходящие (гладко зависящие от  $\varepsilon$ ) фазовые координаты. При фиксированном  $\varepsilon \neq 0$  построенное инвариантное многообразие гомеоморфно цилиндру. Коэффициенты зацепления направляющей окружности этого цилиндра с координатными осями в  $\mathbb{C}^2$  равны  $m_1$  и  $m_2$ .

Мы покажем, что существование достаточно большого куска такого резонансного инвариантного многообразия в окрестности нерезонансной неподвижной точки диффеоморфизма препятствует линейризации диффеоморфизма в этой окрестности. Следовательно, в случае, когда резонансные многообразия имеются в любой окрестности неподвижной точки, линейризующие ряды всюду расходятся.

Заметим, что топологически все отображения  $\mathbb{C}^2$  с  $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$  эквивалентны друг другу. В частности, все они линейризуются и имеют много инвариантных цилиндров. Однако аналитические инвариантные цилиндры являются, как мы увидим, большой редкостью.

### 3. Основная конструкция

Мы собираемся связать с резонансным инвариантным многообразием отображения  $\mathbb{C}^2$  эллиптическую кривую, вложенную в голоморфную поверхность. С этой целью введем некоторые определения.



**3.1. Локальные сдвиги.** Рассмотрим цилиндр  $S^1 \times \mathbb{R}$ . *Стандартным сдвигом* цилиндра называется прибавление 1 ко второй координате. Пусть  $D_0$  — область на цилиндре, содержащая  $S^1 \times [0, 1]$ . Сужение стандартного сдвига на  $D_0$  задает диффеоморфизм  $t : D_0 \rightarrow D_1 = t(D_0)$ . Заметим, что пересечение  $D_0 \cap D_1$  содержит окружность  $S^1 \times 1$ . Обозначим через  $D$  объединение  $D_0 \cup D_1$ .

Пусть  $M$  — двумерное многообразие,  $M_0$  и  $M_1$  — его области,  $f : M_0 \rightarrow M_1$  — гомеоморфизм.

**Определение.** Гомеоморфизм  $f$  называется *локальным сдвигом*, если существует гомеоморфизм  $h : M \rightarrow D$ , переводящий  $M_0$  в  $D_0$ ,  $M_1$  в  $D_1$  и  $f$  в  $t$ .

Очевидно

**Предложение 1.** Пусть  $M$  — комплексная кривая и  $f : M_0 \rightarrow M_1$  — голоморфный локальный сдвиг. Тогда склеивание каждой точки  $z \in M_0$  с ее образом  $f(z) \in M_1$  определяет компактную комплексную кривую, гомеоморфную тору, т.е. эллиптическую кривую  $\Gamma = M/f$ .

Рассмотрим теперь прямое произведение цилиндра на плоскость  $(S^1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ . Пусть  $T : (S^1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow (S^1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$  — сдвиг на 1 вдоль  $\mathbb{R}$ ,  $E_0$  — окрестность  $D_0 \times 0$ ,  $E_1 = TE_0$ ,  $E = E_0 \cup E_1$ .

Пусть  $N$  — гладкое вещественное четырехмерное многообразие,  $M \subset N$  — двумерное подмногообразие,  $N_1$  и  $N_2$  — области в  $N = N_1 \cup N_2$ ,  $F : N_1 \rightarrow N_2$  — вещественный гомеоморфизм.

**Определение.** Гомеоморфизм  $F$  называется *локальным сдвигом*  $N$  вдоль  $M$ , если существует вещественный гомеоморфизм  $H : N \rightarrow E$ , переводящий  $N_0$  в  $E_0$ ,  $N_1$  в  $E_1$ ,  $F$  в  $T$  и  $M$  в  $D$ .

**Предложение 2.** Пусть  $N$  — комплексная поверхность,  $M \subset N$  — комплексная кривая,  $F : N_0 \rightarrow N_1$  — голоморфный локальный сдвиг. Тогда склеивание каждой точки  $z \in N_0$  с ее образом  $F(z) \in N_1$  определяет голоморфную комплексную поверхность  $\Sigma = N/F$ , являющуюся окрестностью эллиптической кривой  $\Gamma = M/f$ .

**3.2. Построение эллиптической кривой по резонансному инвариантному многообразию линейного преобразования.** Пусть  $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  — линейное преобразование с собственными числами

$\lambda_1, \lambda_2, |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ . Предположим, что собственные числа удовлетворяют резонансному соотношению  $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} = 1$ , где  $m_1$  и  $m_2$  взаимно просты. Тогда цилиндр с уравнением  $z_1^{m_1} z_2^{m_2} = 1$  (где  $z_1, z_2$  — координаты в собственном базисе) инвариантен относительно  $A$ .

Заметим, что сужение  $A$  на этот цилиндр задает голоморфный сдвиг. Действительно, униформируем кривую  $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} = 1$  параметром  $\Lambda \neq 0$  по формуле  $\lambda_1 = \Lambda^{m_2}, \lambda_2 = \Lambda^{-m_1}$ ; на цилиндре введем параметр  $Z \neq 0$  по формуле  $z_1 = Z^{m_2}, z_2 = Z^{-m_1}$ . Тогда действие  $A$  на цилиндре принимает вид

$$Z \mapsto \Lambda Z.$$

Это преобразование является голоморфным сдвигом, так как  $|\Lambda| > 1$ . Соответствующая эллиптическая кривая есть  $\mathbb{C}^* / \{\Lambda\} \cong \mathbb{C} / 2\pi\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$ , где  $\Lambda = e^{i\omega}$ .

Заметим, что линейное преобразование имеет в случае резонанса целое однопараметрическое семейство голоморфных инвариантных цилиндров  $z_1^{m_1} z_2^{m_2} = c$  ( $c \neq 0$ ). Эллиптические кривые, построенные по всем этим цилиндрам, изоморфны.

Подходящая окрестность любого такого цилиндра (или его достаточно большого конечного куска) превращается при факторизации по действию  $A$  в окрестность эллиптической кривой на комплексной поверхности. Эта поверхность — прямое произведение эллиптической кривой на  $\mathbb{C}$ . Действительно, гомотетии  $z \mapsto kz$  определяют проекцию на эллиптическую кривую, а отображение  $z \mapsto z_1^{m_1} z_2^{m_2}$  — проекцию на второй сомножитель.

В частности, индекс самопересечения эллиптической кривой в построенной поверхности равен 0.

**3.3. Построение эллиптической кривой по резонансному инвариантному многообразию нелинейного преобразования.** Пусть  $A(\varepsilon) : U \rightarrow \mathbb{C}^2$  — биголоморфное отображение области  $U \subset \mathbb{C}^2$  в  $\mathbb{C}^2$ , голоморфно зависящее от параметра  $\varepsilon$ . Мы предполагаем, что  $\varepsilon$  меняется в окрестности нуля в  $\mathbb{C}$  и что все отображения  $A(\varepsilon)$  оставляют на месте начало координат в  $\mathbb{C}^2$ .

Обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2$  собственные числа линеаризации отображения  $A(0)$  в  $O$ . Мы предполагаем, что  $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$  и что  $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} = 1$ , где  $m_1$  и  $m_2$  взаимно просты.

Для семейства  $A$  общего положения при прохождении при  $\varepsilon = 0$  резонанса от сепаратрис неподвижной точки ответвляется инвариантный

голоморфный резонансный цилиндр (см. п. 2.5). Зафиксируем достаточно малое  $\varepsilon$  и рассмотрим сужение  $A(\varepsilon)$  на этот цилиндр. Можно проверить, что  $A(\varepsilon)$  индуцирует на соответствующей части цилиндра локальный голоморфный сдвиг (это следует из того, что 1) цилиндр имеет в первом приближении уравнение  $z_1^{m_1} z_2^{m_2} = c(\varepsilon)$ ; 2)  $A(\varepsilon)$  близко к линеаризации  $A(0)$  в  $O$ ; 3) линеаризация  $A(0)$  в  $O$  действует на цилиндре  $z_1^{m_1} z_2^{m_2} = c$  как локальный сдвиг (см. п. 3.2)).

Итак, при достаточно малых  $|\varepsilon|$  отображение  $A(\varepsilon)$  определяет эллиптическую кривую  $\Gamma(\varepsilon)$ , вложенную в поверхность  $\Sigma(\varepsilon)$ . В гомологиях кривой  $\Gamma(\varepsilon)$  имеется отмеченная окружность (образ направляющей окружности цилиндра). Кривую  $\Gamma(\varepsilon)$  можно представить в виде

$$\Gamma(\varepsilon) \approx \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z} + \omega(\varepsilon)\mathbb{Z},$$

где  $2\pi$  соответствует отмеченной окружности. Функция  $\omega(\varepsilon)$  имеет при  $\varepsilon \rightarrow 0$  предел  $\omega_0$ . Из формул п. 3.2 следует, что  $\lambda_1 = e^{i\omega_0 m_2}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\omega_0 m_1}$ .

Индекс самопересечения кривой  $\Gamma(\varepsilon)$  в поверхности  $\Sigma(\varepsilon)$  равен нулю (см. п. 3.2). Поэтому топологически  $\Sigma(\varepsilon)$  является прямым произведением  $\Gamma(\varepsilon)$  на диск. Однако аналитически  $\Sigma(\varepsilon)$  — не обязательно прямое произведение. Более того,

1)  $\Sigma(\varepsilon)$  может не быть голоморфным расслоением над  $\Gamma(\varepsilon)$ ; окрестность  $\Gamma(\varepsilon)$  в  $\Sigma(\varepsilon)$  может не допускать голоморфных отображений на  $\Gamma(\varepsilon)$ , тождественных на  $\Gamma(\varepsilon)$ .

Так будет, например, в случае, когда рядом с  $\Gamma(\varepsilon)$  в  $\Sigma(\varepsilon)$  есть семейство эллиптических кривых с разными значениями модуля  $\omega$ .

2)  $\Gamma(\varepsilon)$  может не допускать в  $\Sigma(\varepsilon)$  деформаций, отличных от сдвигов  $\Gamma(\varepsilon)$  по себе.

Так будет, например, в случае, когда нормальное расслоение  $\Gamma(\varepsilon)$  в  $\Sigma(\varepsilon)$  аналитически нетривиально.

Положительные результаты о строении  $\Sigma(\varepsilon)$  приведены в §4.

### 3.4. Нелинеаризуемость отображения в области, содержащей резонансный цилиндр.

**Теорема 1.** *Если эллиптическая кривая  $\Gamma(\varepsilon)$  недеформируема в своей окрестности  $\Sigma(\varepsilon)$ , то отображение  $A$  не линеаризуется биголоморфной заменой переменных в окрестности точки  $O$ , содержащей часть голоморфного инвариантного цилиндра, нужную для построения  $\Gamma(\varepsilon)$ .*

Действительно, голоморфный инвариантный цилиндр линейного отображения всегда можно продеформировать посредством малой гомотетии.

Таким образом, мы получаем оценку радиуса сходимости рядов Пуанкаре–Зигеля сверху через голоморфный инвариантный цилиндр с нетривиальным нормальным расслоением соответствующей эллиптической кривой.

Другое доказательство нелинеаризуемости указал мне Ю. С. Ильяшенко, которому я сообщил предыдущие результаты.

**Теорема 2** (Ю. С. Ильяшенко). *Если линейное отображение имеет голоморфный инвариантный цилиндр, направляющая окружность которого имеет с собственными осями коэффициенты зацепления  $m_1, m_2$ , а соответствующая эллиптическая кривая есть*

$$\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$$

(причем  $2\pi$  соответствует направляющей цилиндра), то собственные числа равны  $\lambda_1 = e^{i\omega m_2}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\omega m_1}$ , и, следовательно, имеет место резонанс  $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} = 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $z_1, z_2$  — собственные координаты. Дифференциальные формы  $dz_k/z_k$  на цилиндре голоморфны и инвариантны относительно отображения, следовательно, определяют голоморфные формы на эллиптической кривой.

Вычислим интегралы этих форм по образующим группы гомологий тора. Одна из образующих соответствует направляющей окружности  $\gamma$  на цилиндре. Для нее

$$\oint dz_1/z_1 = 2\pi i m_2, \quad \oint dz_2/z_2 = -2\pi i m_1,$$

так как коэффициент зацепления  $\gamma$  с осью  $z_1 = 0$  равен  $m_2$ , а с осью  $z_2 = 0$  равен  $m_1$ . Вторая образующая соответствует отрезку  $\delta$ , соединяющему точку  $z$  с ее образом  $Az$  на поверхности цилиндра. Для нее

$$\int dz_1/z_1 = \ln \lambda_1, \quad \int dz_2/z_2 = \ln \lambda_2$$

(эти соотношения определяют ветви логарифмов). Но все голоморфные формы на эллиптической кривой пропорциональны. Итак,

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\ln \lambda_1}{2\pi i m_2} = -\frac{\ln \lambda_2}{2\pi i m_1},$$

что и требовалось доказать.

**Следствие.** Пусть  $A$  — диффеоморфизм с неподвижной точкой  $O$ ,  $\lambda_{1,2}$  — собственные числа. Предположим, что в некоторой окрестности  $U$  неподвижной точки имеется голоморфный инвариантный относительно  $A$  цилиндр, и пусть  $\omega$  — модуль соответствующей эллиптической кривой. Тогда если  $\lambda$  и  $\omega$  не связаны соотношением теоремы 2 (где  $m_1, m_2$  — коэффициенты зацепления с сепаратрисами особой точки), то диффеоморфизм  $A$  в области  $U$  аналитически не эквивалентен линейному.

**3.5. Расходимость рядов Пуанкаре.** Из полученных результатов вытекает

**Теорема 3.** Если в сколь угодно малой окрестности нерезонансной неподвижной точки  $O$  локального диффеоморфизма  $\mathbb{C}^2$  имеются голоморфные инвариантные цилиндры, на которых диффеоморфизм действует как локальный сдвиг, то этот диффеоморфизм аналитически не эквивалентен линейному ни в какой окрестности неподвижной точки  $O$ , и, следовательно, ряды Пуанкаре всюду расходятся.

А. С. Пяртли установил, что такое накопление инвариантных цилиндров к особой точке является общим случаем для отображений, собственные числа которых «ненормально хорошо аппроксимируются резонансными». Следовательно, для таких собственных чисел расходимость рядов Пуанкаре всюду также является общим случаем.

Результаты этого параграфа легко переносятся на векторные поля в  $\mathbb{C}^3$  вблизи особой точки типа Зигеля. Материализацией резонанса  $m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 = 0$  является эллиптическая кривая. Точки этой кривой — фазовые кривые поля, лежащие на инвариантной резонансной поверхности

$$z_1^{m_1} z_2^{m_2} z_3^{m_3} = c\varepsilon + \dots$$

## 4. Строение окрестности эллиптической кривой

**4.1. Предварительная нормальная форма.** Рассмотрим эллиптическую кривую

$$\Gamma = \{\varphi \in \mathbb{C} \bmod 2\pi\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}\},$$

где  $\omega = \sigma + i\tau$  ( $\tau > 0$ ). Чтобы построить вложение  $\Gamma$  в голоморфную поверхность  $\Sigma$ , рассмотрим биголоморфное отображение

$$\begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \mapsto \begin{cases} r\lambda e^{ip\varphi}(1 + ra(r, \varphi)), \\ \varphi + \omega + rb(r, \varphi). \end{cases}$$

Здесь  $p$  — целое число,  $\lambda$  — комплексное число, не равное 0,  $a$  и  $b$  — голоморфные функции, определенные в произведении полосы  $|\operatorname{Im} \varphi| < \rho$  на круг  $|r| < \kappa$  и периодические периода  $2\pi$  по  $\varphi$ . Склеивая каждую точку  $(r, \varphi)$  с ее образом, мы получим из подходящей достаточно малой окрестности плоскости комплексного переменного  $\varphi$  окрестность  $\Sigma$  эллиптической кривой  $\Gamma$ .

**Предложение.** *Каждая пара  $(\Gamma, \Sigma)$ , где  $\Gamma$  — эллиптическая кривая, вложенная в голоморфную поверхность  $\Sigma$ , локально (вблизи  $\Gamma$ ) биголоморфно эквивалентна одной из построенных выше пар.*

Это предложение вытекает из следующих фактов а) и б).

а) *Всякое голоморфное вложение цилиндра в голоморфную поверхность локально биголоморфно эквивалентно вложению в прямое произведение цилиндра на комплексную прямую.*

(Доказывается последовательной нормализацией струй все более и более высокого порядка. В. П. Паламодов объяснил мне, что это стандартное следствие того факта, что кольцо является многообразием Штейна. Ю. С. Ильяшенко дал прямое доказательство.)

б) *Все голоморфные одномерные векторные расслоения над эллиптическими кривыми аналитически эквивалентны расслоениям, получающимся из отображений*

$$\begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \mapsto \begin{cases} \lambda e^{ip\varphi} r \\ \varphi + \omega. \end{cases}$$

(А. Н. Тюрин сообщил мне, что этот результат принадлежит Н. Г. Абелю.)

Пользуясь а), мы получаем  $\Sigma$  склейкой точек

$$\begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \mapsto \begin{cases} rA(r, \varphi), \\ \varphi + \omega + rB(r, \varphi). \end{cases}$$

Применим б) к нормальному расслоению  $\Gamma$  в  $\Sigma$ . Мы заключаем, что после подходящей замены координат  $A(0, \varphi)$  принимает вид  $\lambda e^{ip\varphi}$ , что и доказывает сформулированное выше предложение.

Индекс самопересечения кривой  $\Gamma$  в  $\Sigma$  равен  $-p$ , если  $\text{Im } \omega > 0$ . Следовательно, окрестность эллиптической кривой с нулевым индексом самопересечения в комплексной поверхности получается при помощи склейки

$$\begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \mapsto \begin{cases} r\lambda(1 + ra(r, \varphi)), \\ \varphi + \omega + rb(r, \varphi). \end{cases}$$

#### 4.2. Формальная нормальная форма.

**Определение.** Пара чисел  $(\lambda, \omega)$  называется *резонансной*, если  $\lambda^n e^{ik\omega} = 1$  при некоторых целых  $n$  и  $k$ , не равных вместе 0.

Заметим, что резонансные пары образуют всюду плотное множество в пространстве всех пар комплексных чисел  $(\lambda, \omega)$ . Соответствующее резонансной паре  $(\lambda, \omega)$  одномерное голоморфное векторное расслоение тривиально над некоторым конечным циклическим накрытием исходной эллиптической кривой.

**Определение.** *Формальной склейкой* называется «отображение»

$$f \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rA(r, \varphi) \\ \varphi + \omega + rB(r, \varphi) \end{pmatrix},$$

где  $A$  и  $B$  — формальные степенные ряды по  $r$  с аналитическими на вещественной оси  $\varphi$   $2\pi$ -периодическими по  $\varphi$  коэффициентами,  $A(0, \varphi) \neq 0$ .

*Формальной заменой переменных* называется «отображение»

$$g \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rC(r, \varphi) \\ \varphi + rD(r, \varphi) \end{pmatrix},$$

где  $C$  и  $D$  — формальные степенные ряды по  $r$  с аналитическими в полосе  $0 \leq \text{Im } \varphi \leq \text{Im } \omega$   $2\pi$ -периодическими по  $\varphi$  коэффициентами,  $C(0, \varphi) \neq 0$ .

Формальная замена переменных  $g$  действует на формальную склейку  $f$  по формуле  $f \mapsto g \circ f \circ g^{-1}$  (правая часть определяется естественной подстановкой формальных рядов и сама является формальной склейкой).

**Теорема.** Если пара  $(\lambda, \omega)$  нерезонансная, то всякая формальная склейка

$$\begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \mapsto \begin{cases} r\lambda(1 + ra(r, \varphi)), \\ \varphi + \omega + rb(r, \varphi) \end{cases}$$

формальной заменой переменных приводится к линейной нормальной форме

$$\begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \mapsto \begin{cases} \lambda r, \\ \varphi + \omega. \end{cases}$$

**Лемма.** Рассмотрим уравнение относительно  $u$ :

$$\lambda^n u(\varphi + \omega) - u(\varphi) = v(\varphi),$$

где  $v$  —  $2\pi$ -периодическая функция, аналитическая в полосе  $\alpha \leq \text{Im} \varphi \leq \beta$ . Если  $\tau = \text{Im} \omega > 0$ ,  $\lambda \neq 0$  и  $\lambda^n e^{ik\omega} \neq 1$  при целых  $k$ , то уравнение имеет  $2\pi$ -периодическое решение  $u$ , аналитическое в полосе  $\alpha < \text{Im} \varphi < \beta + \tau$ .

**Доказательство леммы.** Пусть  $v(\varphi) = \sum v_k e^{ik\varphi}$ ,  $u(\varphi) = \sum u_k e^{ik\varphi}$ . Тогда  $u_k = \frac{v_k}{\lambda^n e^{ik\omega} - 1}$ . При  $k \rightarrow +\infty$   $v_k$  убывает, как  $e^{k\alpha}$ , а  $e^{ik\omega}$  стремится к 0. Значит,  $u_k$  убывает, как  $e^{k\alpha}$ . При  $k \rightarrow -\infty$   $v_k$  убывает, как  $e^{-|k|\beta}$ , а  $e^{ik\omega}$  растёт, как  $e^{|k|\tau}$  ( $\tau = \text{Im} \omega > 0$ ). Следовательно,  $u_k$  убывает, как  $e^{-|k|(\beta + \tau)}$ . Отсюда следует сходимость ряда Фурье для  $u$  при  $\alpha < \text{Im} \varphi < \beta + \tau$ .

**Доказательство теоремы.** Пусть  $ra = r^n a_n(\varphi) + \dots$ ,  $rb = r^n b_n(\varphi) + \dots$ , где точками обозначены члены порядка выше  $n$ . Сделаем формальную замену переменных, в которой  $C(r, \varphi) = 1 + r^n C_n(\varphi)$ ,  $rD(r, \varphi) = r^n D_n(\varphi)$ . Непосредственной подстановкой убеждаемся, что коэффициенты при  $r^n$  в  $ra$  и в  $rb$  после замены имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n(\varphi) &= a_n(\varphi) + \lambda^n C_n(\varphi + \omega) - C_n(\varphi), \\ \tilde{b}_n(\varphi) &= b_n(\varphi) + \lambda^n D_n(\varphi + \omega) - D_n(\varphi). \end{aligned}$$

Найдем  $C_n(\varphi)$  и  $D_n(\varphi)$  из уравнений  $\tilde{a}_n(\varphi) = 0$ ,  $\tilde{b}_n(\varphi) = 0$ . По лемме эти уравнения имеют аналитические в полосе  $0 \leq \text{Im} \varphi \leq \tau$  решения.



Мы построили формальную замену, после которой степень членов низшего порядка в  $ra$ ,  $rb$  увеличивается.

Повторяя это построение при  $n = 1, 2, \dots$ , получаем формальную замену переменных, после которой  $ra$  и  $rb$  исчезают полностью.

### 4.3. Аналитическая нормальная форма.

**Определение.** Пара комплексных чисел  $(\lambda, \omega)$ , где  $\text{Im} \omega \neq 0$ ,  $\lambda \neq 0$ , называется *нормальной*, если существуют постоянные  $c > 0$ ,  $\nu > 0$  такие, что

$$|\lambda^n e^{ik\omega} - 1| > c(|n| + |k|)^{-\nu}$$

при всех целых  $k$  и  $n$  ( $n \neq 0$ ).

Легко доказывается

**Предложение.** *Ненормальные пары образуют всюду плотное множество лебеговой меры нуль.*

**Теорема.** *Если  $(\lambda, \omega)$  — нормальная пара, то всякая голоморфная склейка*

$$\begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \mapsto \begin{cases} r\lambda(1 + ra(r, \varphi)), \\ \varphi + \omega + rb(r, \varphi) \end{cases}$$

*приводится к линейной нормальной форме*

$$\begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \mapsto \begin{cases} \lambda r, \\ \varphi + \omega \end{cases}$$

*голоморфной заменой переменных.*

Переведем эту теорему на язык вложений эллиптической кривой.

**Определение.** Голоморфное векторное расслоение  $\xi$  называется *жестким*, если для всякого вложения с нормальным расслоением  $\xi$  базы в комплексное многообразии достаточно малая окрестность вложенной базы биголоморфно эквивалентна окрестности нулевого сечения расслоения  $\xi$ .

Из сформулированных выше предложения и теоремы вытекает

**Следствие.** *Почти все (в смысле меры Лебега) одномерные векторные расслоения степени 0 над эллиптической кривой жесткие.*

Доказательство теоремы проводится стандартным после работы А. Н. Колмогорова методом Ньютона (см., например, [3], [4]). Автор благодарен Ю. С. Ильяшенко и А. С. Пяртли, которые провели необходимые оценки; они будут опубликованы в другом месте (в более общей ситуации, когда  $r$  и  $\varphi$  многомерны).

**4.4. Материализация резонансов.** Предположим теперь, что нормальное расслоение эллиптической кривой  $\Gamma$  в поверхности  $\Sigma$  резонансное, т.е. что во введенных выше обозначениях при некотором  $n > 0$  и целом  $k$

$$\lambda^n e^{ik\omega} = 1.$$

Такой резонанс является исключительным явлением. Но если мы рассматриваем не одну кривую  $\Gamma \subset \Sigma$ , а однопараметрическое семейство вложений  $\Gamma(\varepsilon) \subset \Sigma(\varepsilon)$ , то прохождение резонанса при изменении  $\varepsilon$  неустранимо малым шевелением семейства. Оказывается, при прохождении такого резонанса в общем однопараметрическом семействе вложений  $\Gamma(\varepsilon) \subset \Sigma(\varepsilon)$  от эллиптической кривой  $\Gamma(0)$  ответвляется эллиптическая кривая, являющаяся «материализацией» резонанса.

Уравнение этой кривой (в предыдущих обозначениях) имеет вид

$$r^n e^{ik\varphi} = \varepsilon$$

(после выбора подходящего параметра семейства  $\varepsilon$  и после подходящей замены координат  $(r, \varphi)$ , зависящей от  $\varepsilon$ ; мы считаем, что резонанс соответствует  $\varepsilon = 0$  и что отсутствуют резонансы меньшего порядка:  $\lambda^m e^{il\omega} \neq 1$  при  $0 < m < n$ ).

Приведем здесь вывод уравнения ответвляющейся кривой на уровне формальных рядов. Рассуждая, как в п. 4.2, мы приведем склейку к виду

$$\begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \mapsto \begin{cases} r\lambda(1 + \alpha\varepsilon + a\omega + A), \\ \varphi + \omega + \beta\varepsilon + b\omega + B, \end{cases}$$

где  $\alpha, \beta, a, b$  — константы,  $\omega = r^n e^{ik\varphi}$ ,  $A$  и  $B$  — ряды по степеням  $\varepsilon$  и  $\omega$ , начинающиеся с членов степени 2. Такая подстановка переводит  $w$  в  $w(1 + \gamma\varepsilon + c\omega + C)$ , где  $\gamma = n\alpha + ik\beta$ ,  $c = na + ikb$ ,  $C$  — члены второй и более высоких степеней по  $\varepsilon$  и  $w$ .

Уравнение  $\gamma\varepsilon + c\omega + C = 0$  определяет ответвляющуюся кривую. Для семейства общего положения  $\gamma \neq 0$ ,  $c \neq 0$ . После подходящей замены координат  $\varepsilon$  и  $r$  это уравнение принимает вид  $r^n e^{ik\varphi} = \varepsilon$ .

Сходимость исследуется так же, как в цитированных работах Пяртли и Брюно.

**Замечание.** Нетрудно проверить, что условие  $\lambda^n e^{ik\omega} = 1$  означает в точности, что нормальное расслоение аналитически тривиально над некоторым конечнолистным циклическим накрытием эллиптической кривой.

Топологически все рассматривавшиеся расслоения тривиальны. В частности, ответвившаяся при резонансе эллиптическая кривая проектируется (неголоморфно) на кривую  $\Gamma(\varepsilon)$  «вдоль  $r$ -направления». Эта проекция является топологическим конечнолистным циклическим накрытием тора. Это — то самое накрытие, над которым нормальное расслоение становится тривиальным в момент прохождения резонанса.

В случае, когда  $(n, k) = d > 1$  (но нет резонансов меньших порядков,  $\lambda^m e^{il\omega} = 1$ ,  $0 < m < n$ ), ответвляющаяся кривая несвязна. В этом случае она состоит из  $d$  компонент, каждая из которых  $n/d$ -листно топологически накрывает исходный тор.

**4.5. Расходимость линеаризации.** Для некоторых нерезонансных расслоений (т.е. пар  $(\lambda, \omega)$ ) ряды п. 4.2, приводящие склейку к нормальной форме, расходятся. Для специально подобранных голоморфных склеек это можно проверить методами Зигеля [9] или Брюно [5] (см. также [13]).

Ответвление материализующих резонанс кривых позволяет «объяснить» расходимость линеаризующих склейку рядов следующим образом. Предположим, что пара  $(\lambda, \omega)$  нерезонансная, но очень близка к резонансу. Тогда в малой окрестности исходной эллиптической кривой имеется, вообще говоря, еще одна эллиптическая кривая, а именно, кривая, материализующая резонанс. Если пара  $(\lambda, \omega)$  достаточно близка к бесконечному числу резонансов, то в произвольно малой окрестности исходной эллиптической кривой есть бесконечное число кривых, материализующих различные резонансы и циклически накрывающих исходную кривую.

Между тем нормальное расслоение исходной кривой нерезонансное. Нерезонансные нормальные расслоения степени 0 не имеют сечений ни над каким циклическим конечнолистным накрытием эллиптической кривой. Поэтому в нормальном расслоении исходной эллиптической кривой нет эллиптических кривых, циклически накрывающих исходную кривую. Следовательно, никакая окрестность исходной кривой на

поверхности не отображается биголоморфно на окрестность нулевого сечения нормального расслоения; поэтому ряды п. 4.2 расходятся для склеек общего положения, если пара  $(\lambda, \omega)$  слишком хорошо аппроксимируется резонансными парами.

**4.6. Обобщения.** Результаты п. 4.3 допускают обобщение на случай многомерной переменной  $r$  (т.е. на случай вложения эллиптической кривой в многомерное многообразие с «чисто нулевым» нормальным расслоением). Наши методы позволяют также дать для случая эллиптических кривых простое доказательство известной теоремы (Грауерта) о жесткости отрицательных расслоений [7]. По-видимому, жесткость с вероятностью 1 имеет место и для сумм отрицательных и нулевых расслоений.

Вопрос о нормальной форме окрестностей кривых рода больше 1 также заслуживает исследования (в этом случае вместо кольца следует рассматривать униформизацию Шоттки).

Возможны обобщения и на случай многомерной переменной  $\varphi$ . Частным случаем одного из таких обобщений является теорема Зигеля о линеаризации отображения в окрестности неподвижной точки.

Отмечу также аналогию между компактными комплексными подмногообразиями аналитических многообразий и предельными циклами дифференциальных уравнений: подобно тому, как предельный цикл может исчезнуть, лишь если оператор монодромии имеет собственное число 1, эллиптическая кривая на поверхности, имеющая нулевой индекс самопересечения, не исчезает при малых деформациях объемлющей поверхности, если нормальное расслоение аналитически нетривиально. Ф. А. Богомоллов указал мне следующую общую формулировку: компактное подмногообразие комплексного многообразия не исчезает при малой деформации объемлющего многообразия, если одномерные гомологии нормального пучка тривиальны.

## Литература

- [1] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра. В кн.: Ученые записки Горьк. ун-та, т. 3, 1939.

См. также в кн.: Андронов А. А. Собрание трудов. М., 1956, 188–216.

- [2] Арнольд В. И. Замечания об особенностях конечной коразмерности в комплексных динамических системах. *Функц. анализ и его прилож.*, 1969, **3**(1), 1–6.
- [3] Арнольд В. И. Особенности гладких отображений. *УМН*, 1968, **23**(1), 3–44.
- [4] Арнольд В. И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1961, **25**(1), 21–86.
- [5] Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений. *Труды Моск. матем. об-ва*, 1971, **25**, 120–262.
- [6] Брюно А. Д. Нормальная форма дифференциальных уравнений с малым параметром. *Матем. заметки*, 1974, **16**(3), 407–414.
- [7] Grauert H. Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.*, 1962, **146**, 331–368.
- [8] Siegel C. L. Iteration of analytic functions. *Ann. Math.*, 1942, **43**, 607–612.
- [9] Siegel C. L. On the integrals of canonical systems. *Ann. Math.*, 1941, **42**, 806–822.
- [10] Poincaré H. Thèse, 1879. In: Poincaré H. Oeuvres de Henri Poincaré. T. 1. Paris, 1928, 132 + 382 p.
- [11] Пяртли А. С. Рождение комплексных инвариантных многообразий вблизи особой точки векторного поля, зависящего от параметра. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(4), 95–96.
- [12] Hopf E. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung. *Berich. Sächs. Akad. Wiss., Leipzig, Math.-Phys. Kl.*, 1942, **94**(19), 3–22.
- [13] Ogus A. The formal Hodge filtration. *Invent. Math.*, 1975/76, **31**(3), 193–228.

THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY

has elected

Vladimir Igorevich Arnol'd

an Honorary Member of the Society  
in recognition of eminent services to Mathematics

London, sealed in Council  
this 19th day of November 1976

Michael Atiyah  
President

David Brauer  
Secretary

## Эволюция волновых фронтов и эквивариантная лемма Морса

### 1. Введение

Простейшая задача о бифуркациях особенностей волновых фронтов формулируется следующим образом. Рассмотрим плоскую полукубическую параболу и гладкую кривую, содержащую точку возврата параболы. Мы хотим привести эту кривую в окрестности точки возврата к некоторой простейшей нормальной форме при помощи сохраняющего параболу локального диффеоморфизма плоскости.

Такие задачи естественно появляются при изучении бифуркаций особенностей каустик и волновых фронтов. В этих случаях известны нормальные формы особых многообразий, образованных движущимися каустиками или волновыми фронтами в пространстве-времени (в предыдущем примере это многообразие — полукубическая параболола, а пространство-время — плоскость). Задача состоит в том, чтобы найти нормальные формы функции времени (гладкая кривая из предыдущего примера — это множество уровня функции времени).

Мы приводим явные решения этих задач в простейших (и наиболее важных) случаях. Например, любая гладкая плоская кривая, трансверсальная касательной к полукубической парабололе в точке возврата, некоторым сохраняющим параболу диффеоморфизмом локально переводится в прямую, ортогональную этой касательной (см. рис. 1).

Для формулировки более общего результата нам необходимо следующее

**Определение.** *Ласточкиным хвостом*  $\Sigma \subset \mathbb{C}^k$  называется комплексная гиперповерхность

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}^k : \Delta(\lambda) = 0\},$$

где  $\Delta$  — дискриминант многочлена

$$p = z^{k+1} + \lambda_1 z^{k-1} + \dots + \lambda_k,$$

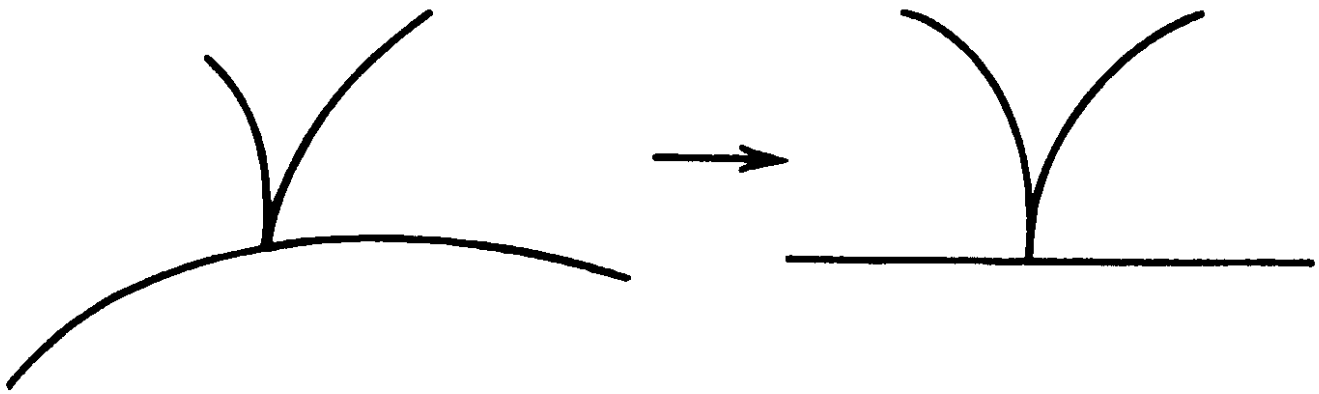


Рис. 1

а  $\lambda_j$  — координаты на  $\mathbb{C}^k$  (при  $k = 2$  это плоская полукубическая парабола, при  $k = 3$  — обычная поверхность ласточкина хвоста в  $\mathbb{C}^3$ ).

**1.1. Теорема.** Рассмотрим функцию  $f$ , голоморфную в начале координат  $\lambda = 0$  пространства  $\mathbb{C}^k \supset \Sigma$  и такую, что  $f(0) = 0$ ,  $\partial f / \partial \lambda_1(0) \neq 0$ . Функция  $f$  в окрестности начала координат приводится к нормальной форме  $f = \lambda_1$  некоторым локальным голоморфным диффеоморфизмом  $\mathbb{C}^k$ , сохраняющим ласточкин хвост  $\Sigma$ .

Ключевым моментом доказательства является рассмотрение координат  $\lambda_i$  как инвариантов симметрической группы. Теорема 1.1 эквивалентна результату о симметрических функциях, который немедленно распространяется на инварианты произвольного действия компактной группы.

**1.2. Теорема.** Предположим, что компактная группа Ли  $G$  линейно действует на  $\mathbb{C}^k$ . Тогда любая  $G$ -инвариантная голоморфная функция, имеющая в начале координат  $0$  невырожденную критическую точку с критическим значением  $0$ , приводится к своей квадратичной части некоторой  $G$ -инвариантной заменой координат, биголоморфной в  $0$ .

Аналогичные теоремы справедливы в вещественно-аналитическом, формальном и дифференцируемом случаях.

Доказательства теорем 1.1 и 1.2 приведены в разделе 2. В разделе 3 мы излагаем другой метод доказательства этих теорем. Эти методы позволяют найти нормальные формы для «простых» критических точек



симметрических функций (раздел 3), работать с вещественным случаем (раздел 4) и изучать бифуркации особенностей в однопараметрических семействах гладких отображений коранга 1 (раздел 5). В качестве других применений в разделе 5 мы приводим нормальные формы типичных особенностей однопараметрических семейств кривых и поверхностей в точках огибающих, а в разделах 6 и 7 указываем нормальные формы бифуркаций особенностей в однопараметрических семействах лагранжевых и лежандровых отображений (т.е. в однопараметрических семействах каустик и волновых фронтов). В разделе 7 мы также обсуждаем теорию Зельдовича рождения «галактик» в средах, состоящих из невзаимодействующих частиц. Все эти теоремы (из разделов 4–7) являются примерами применения общих методов, развитых в разделах 2–3. В сочетании с техникой спектральных последовательностей, описанной в [4], эти методы приводят к многим другим результатам о нормальных формах бифуркаций особенностей.

За последние годы появилось много публикаций, посвященных теории бифуркаций особенностей и теории эквивариантных особенностей (см., например, [6], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [17], [19], [20], [23]).

Новым в настоящей работе является использование связи между двумя этими теориями. Эта связь была неожиданна (по крайней мере для автора), до тех пор пока трудоемкими прямыми вычислениями в [5] не была доказана теорема 1.1.

Теорема 1.1 является простым следствием легкой теоремы 1.2, однако кажется невозможным получить теорему 1.1 таким образом до тех пор, пока не известен ответ.

Доказательства элементарны: мы не используем ни продвинутые разделы теории инвариантов, ни продвинутые разделы теории особенностей.

Автор благодарен А. М. Габриэлову, В. М. Закалюкину, Я. Б. Зельдовичу, В. Я. Лину, Д. Б. Фуксу, Я. М. Элиашбергу и Х. Хамму за полезные обсуждения.

## 2. Нормальные формы $G$ -инвариантных функций

**2.1. Доказательство теоремы 1.2.** Предположим, что  $H + F$  есть  $G$ -инвариантная функция, где  $H$  — ее невырожденная квадратичная часть, а  $F$  — сумма членов 3-го порядка и выше в нуле. Мы хотим

построить некоторое  $G$ -инвариантное (т.е. коммутирующее с  $G$ ) семейство  $g_t$  локальных диффеоморфизмов, сохраняющих 0 и удовлетворяющих тождеству

$$(H + tF)(g_t x) = H(x), \quad g_0(x) = x, \quad t \in [0, 1]. \quad (1)$$

Зависящее от времени векторное поле  $\xi$ , соответствующее  $g_t$ , определяется формулой

$$\xi(g_t x, t) = \frac{\partial}{\partial t} g_t x.$$

Дифференцируя (1) по  $t$ , мы получаем линейное (не дифференциальное) уравнение на  $\xi$ :

$$\xi(H + tF) + F = 0 \quad (2)$$

( $\xi H$  обозначает производную  $H$  вдоль  $\xi$ ).

Так как  $H$  невырождено, это уравнение на  $\xi$  разрешимо (в классе, быть может, неэквивариантных векторных полей). Действительно, рассмотрим локальные координаты, в которых  $H = x_1^2 + \dots + x_k^2$ . Уравнение (2) на компоненты  $\eta_i$  неизвестного векторного поля  $\eta$  принимает вид

$$-F = \sum \eta_i y_i, \quad y_i = 2x_i + t \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Якобиан  $\det(\partial y_i / \partial (2x_j))|_{x=0}$  равен 1 для любого  $t$ , так как  $dF(0) = d^2F(0) = 0$ . Поэтому  $(y_i, t)$  являются локальными координатами в некоторой окрестности оси  $t$  в  $\mathbb{C}^{k+1} = \{(x, t)\}$ . Так как  $F(0) = 0$ , существуют, согласно лемме Адамара, такие  $\eta_i$ , что  $-F = \sum \eta_i y_i$ ,  $\eta_i(0) = 0$ . Таким образом, мы построили некоторое (неэквивариантное) решение  $\eta$  уравнения (2).

Для нахождения эквивариантного решения проинтегрируем  $\eta$  по мере Хаара на  $G$ :

$$\xi = \int_{g \in G} g \eta dg, \quad (g\eta)(x) = g_*(g^{-1}x)\eta(g^{-1}x).$$

В результате получаем  $G$ -инвариантное решение  $\xi$  уравнения (2), равное нулю при  $x = 0$  тождественно по  $t$ . Соответствующие диффеоморфизмы  $g_t$  определены в некоторой окрестности начала координат для любого  $t \in [0, 1]$ . Из (1) следует, что  $g_1$  является искомым диффеоморфизмом.

**Замечания.** (а) Для вещественно-аналитического и гладкого случаев доказательство не изменяется.

(б) Предположение о том, что действие  $G$  линейно, не является обязательным: это действие становится линейным после подходящей замены координат (см. [8]).

В качестве применения теоремы 1.2 рассмотрим следующую ситуацию. Предположим, что  $G$  есть конечная неприводимая группа, порожденная отражениями и действующая на комплексном линейном пространстве  $M \approx \mathbb{C}^k$ . Обозначим через  $\rho_1, \dots, \rho_k$  базисные однородные инварианты. Зададим отображение  $\pi : M \rightarrow N \approx \mathbb{C}^k$  формулами

$$\lambda_1 = \rho_1(x), \dots, \lambda_k = \rho_k(x),$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — координаты на  $N$ .

*Дискриминантом*  $\Sigma \subset N$  называется множество критических значений  $\pi$  (т.е. образ зеркал).

Из теоремы 1.2 вытекает

**2.2. Следствие.** *Предположим, что функция  $f$  голоморфна в  $0 \in N$ , и что  $f(0) = 0$ ,  $\partial f / \partial \lambda_1(0) \neq 0$ , где координата  $\lambda_1$  соответствует инварианту минимальной степени.*

*Тогда  $f$  приводится (в некоторой окрестности начала координат) к нормальной форме  $f = \lambda_1$  биголоморфным диффеоморфизмом, сохраняющим  $\Sigma$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим  $F(x) = f(\pi x)$ . Функция  $F$  удовлетворяет условиям теоремы 1.2. (С точностью до постоянного множителя существует единственный инвариант степени 2, так как группа неприводима; степени всех остальных инвариантов больше, чем 2.) Следовательно, квадратичная часть  $H$  функции  $F$  не вырождена. Согласно теореме 1.2,

$$F(gx) = H(x)$$

для некоторого  $G$ -инвариантного диффеоморфизма  $g$ . Имеем

$$H(x) = c\rho_1(x),$$

следовательно,

$$F(gc^{-1/2}x) = \rho_1(x).$$

Теперь искомый диффеоморфизм  $h$  задается формулой

$$h(\pi x) = \pi(gc^{-1/2}x).$$

### 2.3. Доказательство теоремы 1.1. Рассмотрим пространство

$$M = \{Z \in \mathbb{C}^{k+1} : \sigma_1(Z) = 0\},$$

где  $\sigma_i$  — элементарные симметрические функции координат  $Z_1, \dots, Z_{k+1}$ . Группа  $G$  перестановок координат действует на  $M$ . Выберем базисные инварианты

$$(\sigma_2 | \sigma_1 = 0), \quad (-\sigma_3 | \sigma_1 = 0), \quad \dots, \quad (\pm\sigma_{k+1} | \sigma_1 = 0).$$

В этом случае дискриминант  $\Sigma$  является ласточкиным хвостом, и теорема 1.1 вытекает из следствия 2.2.

Теперь рассмотрим ту же ситуацию с параметрами. Через  $\tau \in \mathbb{C}^p$  обозначим параметр, а через  $N \times \mathbb{C}^p \approx \mathbb{C}^{k+p}$  — пространство, содержащее дискриминантный цилиндр  $\Sigma \times \mathbb{C}^p \subset N \times \mathbb{C}^p$ . Из теоремы 1.2 вытекает

**2.4. Следствие.** *Типичная функция  $\Phi : N \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}$  в любой точке ребра  $0 \times \mathbb{C}^p$  приводится к одной из двух нормальных форм*

$$\Phi = \tau_1 + C, \quad \Phi = \lambda_1 + \tau_1^2 + \dots + \tau_p^2 + C$$

*некоторым диффеоморфизмом, сохраняющим дискриминантный цилиндр (здесь  $C = \text{const}$ ,  $\tau_i$  — координаты на  $\mathbb{C}^p$ , а  $\lambda_1$  — такое же, как в следствии 2.2).*

**Доказательство.** Рассмотрим ограничение  $\Phi$  на ребро  $0 \times \mathbb{C}^p$ . В не критической точке ограничения мы можем выбрать координату  $\tau_i = \Phi$ . Для типичной функции  $\Phi$  все критические точки ограничения  $\Phi|_{0 \times \mathbb{C}^p}$  не вырождены. В некоторой окрестности такой точки рассмотрим  $\Phi$  как семейство функций на  $\mathbb{C}^p$ , зависящих от параметра  $\lambda \in N$ . Согласно лемме Морса с параметрами (доказательство которой аналогично доказательству теоремы 1.2), существуют координаты  $\tau_i = \tau_i(\tau, \lambda)$ , в которых  $\Phi$  принимает вид  $\tau_1^2 + \dots + \tau_p^2 + \alpha(\lambda)$ .

Далее, для типичной функции  $\Phi$  функция  $\alpha - \alpha(0)$  удовлетворяет условиям следствия 2.2. Заменой переменных  $\Lambda = \Lambda(\lambda)$ , сохраняющей  $\Sigma$ , приводим  $\alpha$  к виду  $\lambda_1 + C$ .

### 3. Поднимаемые и опускаемые векторные поля и диффеоморфизмы

Рассмотрим гладкое отображение  $h : M \rightarrow N$ .

**Определение.** Диффеоморфизмы  $r : M \rightarrow M$  и  $l : N \rightarrow N$  называются  $h$ -согласованными, если и только если  $hr = lh$ . В этом случае  $l$  называется  $h$ -поднимаемым, а  $r$  —  $h$ -опускаемым.

Векторные поля  $W$  на  $M$  и  $V$  на  $N$  называются  $h$ -согласованными, если и только если  $hW = V$ . В этом случае поле  $V$  называется  $h$ -поднимаемым, а поле  $W$  —  $h$ -поднятием поля  $V$ ; поле  $W$  называется  $h$ -опускаемым, а поле  $V$  —  $h$ -опусканием поля  $W$ .

Отображение складки (Уитни)  $h : M \rightarrow N$  задается формулами

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2, \quad \dots, \quad y_n = x_n,$$

где  $(x_1, \dots, x_n)$  — подходящие локальные координаты на  $M$ , а  $(y_1, \dots, y_n)$  — подходящие локальные координаты на  $N$ . Критические значения  $h$  образуют видимый контур в  $N$ . Предположим, что  $h$  — отображение складки.

**3.1. Лемма.** Голоморфное векторное поле на  $N$  локально  $h$ -поднимаемо в точке видимого контура отображения складки ( $y_1 = 0$ ), если и только если это поле касается контура.

**Доказательство.** Пусть  $V = \sum V_i \partial / \partial y_i$  и  $W = \sum W_i \partial / \partial x_i$ . Условия согласованности имеют вид

$$V_1(h(x)) = 2x_1 W_1(x), \quad V_j(h(x)) = W_j(x), \quad j > 1.$$

Для  $h$ -поднимаемого поля  $V_1 = 0$  в точках, где  $y_1 = 0$ . Следовательно,  $V_1(y) = y_1 U(y)$ . Тогда предыдущие формулы задают гладкое поднятое поле  $W$ .

**3.2. Лемма.** Рассмотрим голоморфное отображение  $h : M \rightarrow N$  пространств одинаковой размерности и предположим, что коразмерность множества всех критических точек  $h$ , не являющихся точками складки, не меньше, чем 2. Тогда голоморфное векторное поле  $V$  на  $N$  является  $h$ -поднимаемым, если и только если оно касается видимого контура.

**Доказательство.** В некоторой окрестности не критической точки  $h$  поднятие определяется автоматически, а в некоторой окрестности точки складки — согласно лемме 3.1. Следовательно, согласно теореме Гартогса, полученное поле может быть продолжено на множество всех остальных критических точек (корузмерность которых не меньше, чем 2).

Очевидно, что опущенное поле касается видимого контура.

**3.3. Пример.** *Отображение Виета  $h : M \rightarrow N$  задается формулами*

$$\lambda_1 = (\sigma_2 | \sigma_1 = 0), \quad \lambda_2 = (-\sigma_3 | \sigma_1 = 0), \quad \dots, \quad \lambda_k = (\pm \sigma_{k+1} | \sigma_1 = 0),$$

где  $M = \{x \in \mathbb{C}^{k+1} : \sigma_1(x) = 0\}$ , а  $\lambda_i$  — координаты на  $N \approx \mathbb{C}^k$ .

*Отображение Уитни  $h : \mathbb{C}^k \rightarrow N$  задается формулами*

$$\lambda_1 = x_1, \quad \dots, \quad \lambda_{k-1} = x_{k-1}, \quad \lambda_k = -(x_k^{k+1} + x_1 x_k^{k-1} + \dots + x_{k-1} x_k).$$

Видимые контуры обоих отображений совпадают (это — ласточкин хвост в  $N$ ). Критические точки, не являющиеся точками складки, в обоих случаях образуют множество коразмерности 2. Из леммы 3.2 вытекает

**3.4. Следствие.** *Множества всех Виета-поднимаемых и Уитни-поднимаемых голоморфных векторных полей (или их ростков в 0) совпадают с множеством всех векторных полей (соответственно ростков), касающихся ласточкина хвоста; таким образом, любое Уитни-поднимаемое поле (или росток) является Виета-поднимаемым.*

**Доказательство.** Следует из теоремы 1.1 и леммы 3.2.

Часто бывает полезным знание явных формул для поднимаемых полей. Мы начнем с одного очевидного замечания.

**3.5. Лемма.** *Предположим, что  $\rho_i = (\sigma_i | \sigma_1 = 0)$ ,  $i = 2, \dots, k+1$ , суть базисные симметрические функции на  $M$ . Тогда векторные поля  $W_i = \nabla \rho_{i+2}$  являются Виета-опускаемыми.*

Здесь  $\nabla$  обозначает градиент, задаваемый инвариантной метрикой.

**Определение.** Векторные поля  $W_i$  называются *основными симметрическими векторными полями*.

Мы выбрали индексы для основных симметрических векторных полей  $W_0, \dots, W_{k-1}$  таким образом, что дифференцирование вдоль  $W_i$  повышает степени на  $i$ .

Соответствующие поля на  $N$  называются *основными поднимаемыми векторными полями*. Их мы обозначаем через  $V_i, i = 0, \dots, k-1$ .

**3.6. Теорема.** *Для любой функции  $F$ , голоморфной в  $0 \in N$  и равной нулю в  $0$ , существует поднимаемое векторное поле  $V$  в некоторой окрестности точки  $0 \in N$  такое, что  $V\lambda_1 = F$ .*

**Доказательство.** Во-первых, вычислим производные базисной функции  $\rho_2$  вдоль основных полей  $W_i$ .

**3.7. Лемма.** *Для  $i = 0, \dots, k-1$*

$$W_i \rho_2 = -(i+2)\rho_{i+2}.$$

**Доказательство.** Производные базисных функций вдоль основных полей образуют симметричную матрицу:

$$W_i \rho_{j+2} = (\nabla \rho_{i+2}, \nabla \rho_{j+2}).$$

Далее,

$$\rho_2 = (\sigma_2 | \sigma_1 = 0) = (-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2) | \sigma_1 = 0).$$

Следовательно,  $-\nabla \rho_2$  является эйлеровым полем,  $-W_0 = (\sum x_i \partial / \partial x_i | \sigma_1 = 0)$ . Согласно теореме Эйлера об однородных функциях,

$$W_0 \rho_i = -i \rho_i.$$

По симметрии,  $W_0 \rho_i = W_{i-2} \rho_2$ .

Чтобы закончить доказательство теоремы, рассмотрим  $F = \sum \lambda_i F_i$ . Тогда требуемое поле имеет вид  $V = \sum f_i V_i$ ,  $f_i = (-1)^i (i+2)^{-1} F_i$ .

**3.8. Замечание.** Таким же образом можно доказать теорему 1.2. Для построения  $G$ -инвариантного поля  $\xi$ , удовлетворяющего соотношению  $\xi H = \rho$  (для данного однородного инварианта  $\rho$  и невырожденной квадратичной формы  $H = \frac{1}{2}(Ax|x)$ ,  $A: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^{k*}$ ), мы полагаем

$$\xi = (\deg \rho)^{-1} A^{-1}(d\rho).$$

Теорему 3.6 также можно вывести из теоремы 1.2 или доказать аналогичным образом. Преимущество настоящих вычислений состоит в том, что они позволяют рассмотреть также вырожденные случаи.

Например, мы получаем следующее начало иерархии функций в точке возврата полукубической параболы  $4\lambda_1^3 + 27\lambda_2^2 = 0$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & \leftarrow & \text{II} & \leftarrow & \text{III}_2 & \leftarrow & \text{III}_3 & \leftarrow & \dots \\ & & & & \uparrow & & & & \\ & & & & \text{IV} & \leftarrow & \text{V} & & \end{array}$$

Тип	Нормальная форма	$m_f$	$m_h$	codim
I	$\pm\lambda_1$	0	0	0
II	$\pm\lambda_2$	0	0	1
III <sub>n</sub>	$\pm\lambda_1^2 + a\lambda_2^n, a \neq 0$	1	0	$n$
IV	$\pm\lambda_1\lambda_2 + a\lambda_1^3$	1	0	3
V	мономы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^2, \lambda_1\lambda_2$ отсутствуют	$\geq 2$	$\geq 2$	4

Здесь  $m_f$  и  $m_h$  — числа модулей для функции и для гиперповерхности (относительно действия группы ростков диффеоморфизмов плоскости, сохраняющих полукубическую параболу, на пространстве ростков функций, обращающихся в нуль в точке возврата, см. [3]).

Приведенный выше список может рассматриваться как начало классификации  $S(3)$ -инвариантных функций. Например, критические точки, появляющиеся в типичных 3-параметрических семействах  $S(3)$ -симметрических функций, имеют один из типов I, II, III<sub>2</sub>, III<sub>3</sub> и IV.

Начало классификации  $S(4)$ -инвариантных функций (или классификации функций на  $\mathbb{C}^3$  относительно действия диффеоморфизмов, сохраняющих ласточкин хвост) имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & \leftarrow & \text{II}_2 & \leftarrow & \text{II}_3 & \leftarrow & \dots \\ & & \uparrow & & & & \\ & & \text{III} & \leftarrow & \text{IV} & & \end{array}$$

Тип	Нормальная форма	$m_f$	$m_h$	codim
I	$\pm\lambda_1$	0	0	0
II <sub>n</sub>	$\pm\lambda_2 + a\lambda_1^n, a \neq 0$	1	0	$n - 1$
III	$\pm\lambda_1^2 + a\lambda_3 + b\lambda_1\lambda_3, \Delta(a) \neq 0$	2	1	2



Более сложные особенности (IV) появляются только в семействах функций, зависящих от трех или более параметров.

Для  $S(5)$  мы получаем  $I \leftarrow II \leftarrow III$ ,  $I = \pm \lambda_1$ ,  $II = \pm \lambda_2 + a\lambda_1^2$ ,  $m_h(III) > 1$ . Кажется правдоподобным, что при  $n > 5$  единственными  $S(n)$ -инвариантными функциями с  $m_h < 2$  будут  $\pm \lambda_1$ .

Формулы из этого раздела позволяют найти также нормальные формы функций, инвариантных относительно присоединенного представления  $SL(n)$  или  $SU(n)$ .

Доказательства основываются на технике работ [3], [4] и на использовании матриц из замечания 3.9.

**3.9. Замечание.** Производные базисных симметрических функций вдоль основных симметрических векторных полей образуют симметричную матрицу. Ее элементы

$$L_{i,j} = (\nabla \rho_{i+1}, \nabla \rho_{j+1})$$

являются симметрическими функциями, и часто бывает полезным знать, как они выражаются через базисные симметрические функции  $\rho_\alpha$ . Например, строки этих матриц могут рассматриваться как состоящие из компонент основных Виета- или Уитни-поднимаемых векторных полей  $V_i$ .

Первые 5 матриц (для  $k = 1, \dots, 5$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} & (-2\rho_2), \quad \begin{pmatrix} -2\rho_2 & -3\rho_3 \\ -3\rho_3 & \frac{2}{3}\rho_2^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2\rho_2 & -3\rho_3 & -4\rho_4 \\ -3\rho_3 & \rho_2^2 - 4\rho_4 & \frac{1}{2}\rho_2\rho_3 \\ -4\rho_4 & \frac{1}{2}\rho_2\rho_3 & \frac{3}{4}\rho_3^2 - 2\rho_2\rho_4 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} -2\rho_2 & -3\rho_3 & -4\rho_4 & -5\rho_5 \\ -3\rho_3 & \frac{6}{5}\rho_2^2 - 4\rho_4 & \frac{4}{5}\rho_2\rho_3 - 5\rho_5 & \frac{2}{5}\rho_2\rho_4 \\ -4\rho_4 & \frac{4}{5}\rho_2\rho_3 - 5\rho_5 & \frac{6}{5}\rho_3^2 - 2\rho_2\rho_4 & \frac{3}{5}\rho_3\rho_4 - 3\rho_2\rho_5 \\ -5\rho_5 & \frac{2}{5}\rho_2\rho_4 & \frac{3}{5}\rho_3\rho_4 - 3\rho_2\rho_5 & \frac{4}{5}\rho_4^2 - 2\rho_3\rho_5 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} -2\rho_2 & -3\rho_3 & -4\rho_4 & -5\rho_5 & -6\rho_6 \\ -3\rho_3 & \frac{4}{3}\rho_2^2 - 4\rho_4 & \rho_2\rho_3 - 5\rho_5 & \frac{2}{3}\rho_2\rho_4 - 6\rho_6 & \frac{1}{3}\rho_2\rho_5 \\ -4\rho_4 & \rho_2\rho_3 - 5\rho_5 & \frac{3}{2}\rho_3^2 - 2\rho_2\rho_4 - 6\rho_6 & \rho_3\rho_4 - 3\rho_2\rho_5 & \frac{1}{2}\rho_3\rho_5 - 4\rho_2\rho_6 \\ -5\rho_5 & \frac{2}{3}\rho_2\rho_4 - 6\rho_6 & \rho_3\rho_4 - 3\rho_2\rho_5 & \frac{4}{3}\rho_4^2 - 2\rho_3\rho_5 - 4\rho_2\rho_6 & \frac{2}{3}\rho_4\rho_5 - 3\rho_3\rho_6 \\ -6\rho_6 & \frac{1}{3}\rho_2\rho_5 & \frac{1}{2}\rho_3\rho_5 - 4\rho_2\rho_6 & \frac{2}{3}\rho_4\rho_5 - 3\rho_3\rho_6 & \frac{5}{6}\rho_5^2 - 2\rho_4\rho_6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Общий ответ мне сообщил Д. Б. Фукс: в случае  $k+1 = n$  переменной, при  $i \leq j$ ,

$$L_{i,j} = \frac{i(n-j)}{n} \rho_i \rho_j (1 - \delta_{1,i}) - \sum (\beta - \alpha) \rho_\alpha \rho_\beta$$

(суммирование ведется по  $\alpha$  и  $\beta$  таким, что  $\alpha + \beta = i + j$ ,  $0 \leq \alpha < i$ ,  $\beta \leq n$ ,  $\alpha \neq 1$ ;  $\delta_{1,i} = 0$  при  $i \neq 1$  и  $\delta_{1,1} = 1$ ).

Доказательство основывается на тождестве

$$\sum_{s=1}^n \sigma_i(\hat{s}) \sigma_j(\hat{s}) = (n-j) \sigma_i \sigma_j - \sum_{r=0}^{i-1} (i+j-2r) \sigma_r \sigma_{i+j-r},$$

где  $\sigma_0 = 1$ ,  $\sigma_p = 0$  при  $p > n$ ,  $\sigma_i(\hat{s}) = \sigma_i(x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n)$ .

Д. Б. Фукс также доказал, что для алгебры Ли  $A$  симметрических векторных полей

$$\text{codim}_A[A, A] = 1, \quad A = [A, A] \oplus \{W_0\}, \quad H^q(A, \mathbb{R}) = 0 \quad \text{при } q > 1.$$

**3.10. Уитни-опускаемые поля.** Отображение Уитни  $h : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$  задается формулами

$$\lambda_1 = x_1, \quad \dots, \quad \lambda_{k-1} = x_{k-1}, \quad -\lambda_k = x_k^{k+1} + x_1 x_k^{k-1} + \dots + x_{k-1} x_k,$$

где  $x_s$  и  $\lambda_s$  — координаты на прообразе и на образе. В этом разделе мы приводим явные формулы для Уитни-опускаемых векторных полей. Эти формулы играют ключевую роль в теории огибающих (см. раздел 5).

Для Уитни-опускаемого поля  $u$  и опущенного поля  $hu$  построим строку из компонент  $u$  и  $hu$  в координатах  $x_s$  и  $\lambda_s$ . Для  $k = 1, 2, 3$  находим матрицы компонент основных Уитни-опускаемых полей  $u_i$  и опущенных полей  $hu_i$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ :

$$\begin{aligned} & (x_1 | 2\lambda_1), \\ & \left( \begin{array}{cc|cc} 2x_1 & x_2 & 2\lambda_1 & 3\lambda_2 \\ -3p & x_2^2 + \frac{2}{3}x_1 & 3\lambda_2 & -\frac{2}{3}\lambda_1^2 \end{array} \right), \quad p = x_2^3 + x_1 x_2, \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2x_1 & 3x_2 & x_3 & 2\lambda_1 & 3\lambda_2 & 4\lambda_3 \\ 3x_2 & -x_1^2 - 4q & x_3^2 + \frac{1}{2}x_1 & 3\lambda_2 & -\lambda_1^2 + 4\lambda_3 & -\frac{1}{2}\lambda_1 \lambda_2 \\ -4q & -\frac{1}{2}x_1 x_2 & x_3^3 + x_1 x_3 + \frac{3}{4}x_2 & 4\lambda_3 & -\frac{1}{2}\lambda_1 \lambda_2 & -\frac{3}{4}\lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_3 \end{array} \right), \\ & q = x_3^4 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3. \end{aligned}$$

Например, первая строка второй матрицы обозначает Уитни-опускаемое поле  $u_0 = 2x_1\partial/\partial x_1 + x_2\partial/\partial x_2$ .

Мы нормируем основные Уитни-опускаемые поля  $u_0, \dots, u_{k-1}$  условием

$$(hu_i)\lambda_1 = (i+2)\lambda_{i+1}, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Тогда последняя компонента поля  $u_i$  равна

$$(u_i)_k = x_k^{i+1} + x_1x_k^{i-1} + \dots + x_{i-1}x_k + \frac{i+1}{k+1}x_i.$$

Значения других компонент в точке  $x$  равны значениям соответствующих компонент поля  $hu_i$  в точке  $h(x)$ . Матрица компонент полей  $hu_i$  может быть вычислена с помощью матриц из замечания 3.9: вместо  $\rho_i$  в замечании 3.9 нужно подставить  $(-1)^i\lambda_{i-1}$ , а затем изменить знаки элементов, стоящих на пересечении одновременно четных или нечетных строк и столбцов.

Все сказанное выше следует из соотношения  $hu_i = (-1)^{i+1}V_i$  для основных поднимаемых полей  $V_i$  (см. лемму 3.5).

**3.11. Замечание.** Основные симметрические голоморфные векторные поля (ростки) порождают все симметрические голоморфные векторные поля (ростки) как модуль над алгеброй голоморфных симметрических функций (ростков). Этот модуль свободен, а основные поля образуют его свободный базис (см. [16]). Следовательно, росток любого Виета-поднимаемого (или Уитни-опускаемого) голоморфного векторного поля представим в виде линейной комбинации ростков основных полей с голоморфными коэффициентами, причем такое представление единственно.

## 4. Вещественный случай

**4.1. Определение.** Вещественным дискриминантом  $\Sigma \subset \mathbb{R}^k$  называется гиперповерхность

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{R}^k : \Delta(\lambda) = 0\},$$

где  $\Delta$  — дискриминант многочлена

$$p = z^{k+1} + \lambda_1 z^{k-1} + \dots + \lambda_k.$$

Вещественное отображение Виета  $h : M \rightarrow N$  задается формулами

$$\lambda_1 = (\sigma_2 | \sigma_1 = 0), \quad \dots, \quad \lambda_k = (\pm \sigma_{k+1} | \sigma_1 = 0),$$

где  $M = \{x \in \mathbb{R}^{k+1} : \sigma_1(x) = 0\}$ , а  $\lambda_j$  — координаты на  $N \approx \mathbb{R}^k$ .

Вещественное отображение Уитни  $h : M \rightarrow N$  задается формулами

$$\lambda_1 = x_1, \quad \dots, \quad \lambda_{k-1} = x_{k-1}, \quad \lambda_k = -(x_k^{k+1} + x_1 x_k^{k-1} + \dots + x_{k-1} x_k),$$

где  $x_s$  — координаты на  $M \approx \mathbb{R}^k$ , а  $\lambda_s$  — на  $N \approx \mathbb{R}^k$ .

**4.2. Замечание** (А. М. Габриэлов). Через  $\Sigma_V$  и  $\Sigma_W$  обозначим множества критических значений вещественных отображений Виета и Уитни. Тогда

$$\Sigma_V \subset \Sigma_W \subset \Sigma.$$

В отличие от комплексного случая, в вещественном случае эти 3 множества, вообще говоря, различны.

Рассмотрим, например, размерность  $k = 3$ . При  $k = 3$  поверхность  $\Sigma$  является множеством всех вещественных точек комплексного ласточкина хвоста (рис. 2). Ласточкин хвост имеет линию самопересечения. Продолжение этой линии за начало координат 0 принадлежит  $\Sigma$ , но не принадлежит множеству  $\Sigma_W$  критических значений отображения Уитни. Все вещественно-аналитические поля, касающиеся  $\Sigma_W$ , касаются

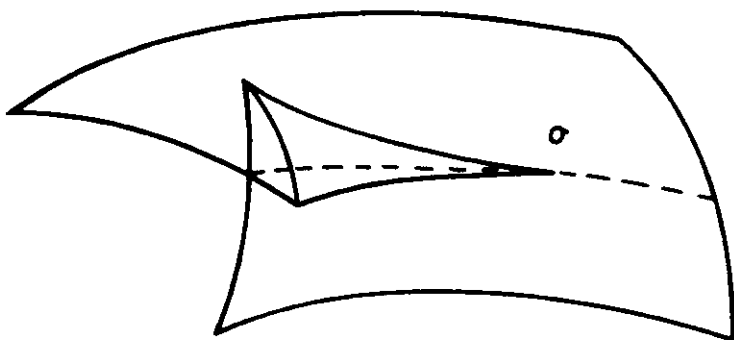


Рис. 2

этого продолжения линии самопересечения, так как  $\Sigma$  неприводимо в 0. С другой стороны,  $C^\infty$  Уитни-поднимаемое поле может иметь произвольные значения в точках этого продолжения.

Множество  $\Sigma_V$  критических значений отображения Виета состоит только из тех точек ласточкина хвоста, которые образуют границу пирамидальной части дополнения (эта часть соответствует многочленам с четырьмя вещественными корнями).

Таким образом, в  $C^\infty$ -случае существуют Виета-поднимаемые поля, не являющиеся Уитни-поднимаемыми. Кроме того, ни ростки Виета-

(Уитни-) поднимаемых  $C^\infty$ -полей, ни ростки  $C^\infty$ -полей, касающихся  $\Sigma_V$  ( $\Sigma_W$ ), не образуют конечного модуля над алгеброй ростков  $C^\infty$ -функций (в то время как в случаях аналитических функций или формальных степенных рядов соответствующие модули конечно порождены).

Несмотря на эти замечания, справедливо следующее обобщение теоремы 1.1:

**4.3. Теорема.** *Рассмотрим гладкую функцию  $f$  в некоторой окрестности начала координат  $\lambda = 0$  в  $\mathbb{R}^k$  и предположим, что  $f(0) = 0$ ,  $\partial f / \partial \lambda_1(0) \neq 0$ . Тогда  $f$  приводится к нормальной форме  $f = \pm \lambda_1$  посредством некоторого диффеоморфизма, сохраняющего вещественное дискриминантное многообразие  $\Sigma$  и являющегося Уитни- и Виета-поднимаемым.*

**Доказательство.** Пусть  $f = H + F$ , где  $H = c\lambda_1$ ,  $c \neq 0$  и  $\partial F / \partial \lambda_1 = 0$ . Мы хотим построить однопараметрическое семейство диффеоморфизмов  $g_t$ , сохраняющих начало координат  $0 \in \mathbb{R}^k$  и удовлетворяющих тождеству

$$(H + tF)(g_t(x)) = H(x), \quad g_0(x) = x, \quad t \in [0, 1]. \quad (3)$$

Рассмотрим зависящее от времени поле скоростей

$$\xi(g_t(x), t) = \frac{\partial}{\partial t} g_t(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (3), получим линейное (не дифференциальное) уравнение на  $\xi$

$$\xi(H + tF) + F = 0. \quad (5)$$

Для доказательства того, что последнее уравнение разрешимо, рассмотрим основные поднимаемые поля  $V_i$  (см. раздел 3). Определим функции  $\Lambda_i = \Lambda_i(\lambda, t)$ , полагая

$$\Lambda_i = V_i(H + tF), \quad i = 0, \dots, k - 1.$$

Докажем, во-первых, следующее утверждение (а): отображение  $(\lambda, t) \mapsto (\Lambda(\lambda, t), t)$  является диффеоморфизмом некоторой окрестности оси  $t$ .

Для доказательства (а) введем веса  $\deg \lambda_j = j + 1$ . Эти веса задают квазиоднородную фильтрацию. Имеем:  $\deg F > 2 = \deg H$ , дифференцирование вдоль  $W_i$  повышает степени на  $i$ . Далее,

$$\Lambda_i = P_i \lambda_i + t \omega_i(\lambda), \quad \deg \omega_i > \deg \lambda_i,$$

( $P_i$  — ненулевые константы). Таким образом, на оси  $t$  якобиан  $\det(\partial \Lambda_i / \partial \lambda_j)$  является ненулевой константой, из чего вытекает (а).

По лемме Адамара любая гладкая функция  $\Phi$ , равная нулю на оси  $t$ , представима в виде

$$\Phi(\lambda, t) = \sum \Phi_i(\lambda, t) \Lambda_i(\lambda, t),$$

где  $\Phi_i$  — гладкие функции. Следовательно,  $F = \sum F_i \Lambda_i$ . Поле  $\xi = -\sum F_i V_i$  удовлетворяет (5), равно нулю в  $\lambda = 0$  тождественно по  $t$ , касается  $\Sigma$  и является Виета- и Уитни-поднимаемым (ввиду того, что все это выполняется для основных полей  $V_i$ ).

Определим  $g_t$  как решения уравнения (4) и приведем  $f$  к  $H = c \lambda_1$ . Наконец, заменим  $\lambda_i$  на  $\theta^{i+1} \lambda_i$  (это — поднимаемый диффеоморфизм), приводя  $c \lambda_1 t$  к  $\pm \lambda_1$ .

**Замечание.** В вещественно-аналитическом случае мы построили вещественно-аналитический диффеоморфизм.

**4.4. Определение.** Цилиндрическим вещественным дискриминантом  $\Sigma \times \mathbb{R}^p \subset N \times \mathbb{R}^p$  и цилиндрическими отображениями Виета и Уитни  $M^k \times \mathbb{R}^p \rightarrow N^k \times \mathbb{R}^p$  называются прямые произведения вещественного ласточкина хвоста  $\Sigma \subset N$  и вещественных отображений Виета и Уитни  $M \rightarrow N$ , соответственно, на пространство параметров  $\mathbb{R}^p$  в первом случае и на тождественное отображение пространства параметров во втором и третьем.

Из теоремы 4.3 вытекает

**4.5. Следствие.** Типичная гладкая функция  $\Phi : N \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  в каждой точке ребра  $0 \times \mathbb{R}^p$  вещественного цилиндрического дискриминанта приводится к одной из двух нормальных форм

$$\Phi = \tau_1 + c \quad \text{или} \quad \Phi = \pm \lambda_1 \pm \tau_1^2 \pm \dots \pm \tau_p^2 + c$$

при помощи некоторого диффеоморфизма, сохраняющего цилиндрический дискриминант и являющегося Виета- и Уитни-поднимаемым.

(Здесь  $c$  — константа,  $\tau_i$  — координаты на  $\mathbb{R}^p$ , а  $\lambda_1$  — координата из определения 4.1.)

Доказательство аналогично доказательству следствия 2.4.

**4.6. Пример.** В пространстве  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $(x, y, z)$  рассмотрим цилиндр над полукубической параболой  $x^2 = y^3$ . В любой точке ребра  $(x = y = 0)$  типичная функция  $\Phi(x, y, z)$  приводится к виду

$$\Phi = z \quad \text{или} \quad \Phi = \pm y \pm z^2 + \text{const.}$$

Если считать  $z$  временной координатой, то вторую формулу можно рассматривать как описывающую перестройку следа дискриминанта на поверхности  $\Phi = t$  при меняющемся  $t$ .

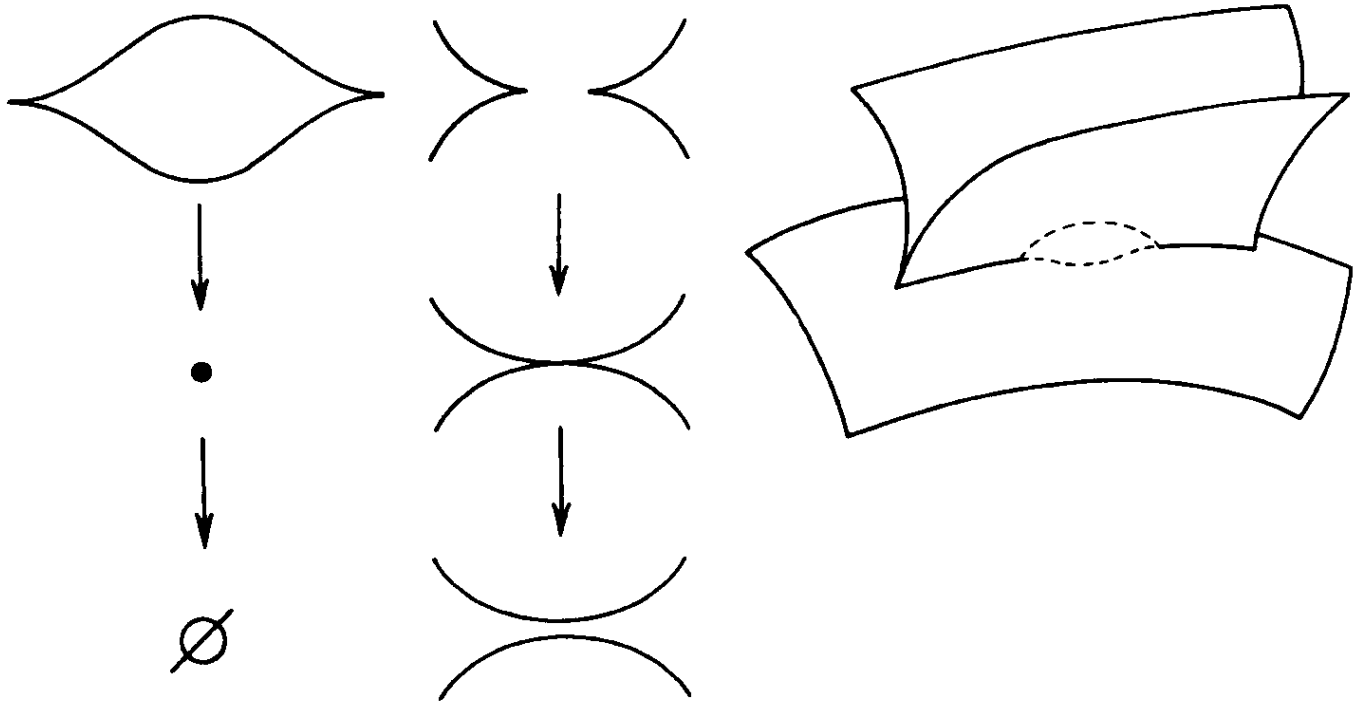


Рис. 3

В зависимости от знака, бифуркация состоит в рождении или исчезновении двух точек возврата (рис. 3). Образующие след кривые могут быть повернуты друг к другу (рождение или исчезновение «губ» в терминологии Тома) или друг от друга («клюв к клюву» в терминологии Тома).

Функции  $\Phi$ , которые не могут быть приведены к этим нормальным формам, образуют тощее множество в пространстве всех функций.

**4.7. Замечание.** Обобщение теоремы 4.3 на все группы отражений следует немедленно. В этом случае  $\Sigma \subset \mathbb{R}^k$  есть вещественная часть

дискриминанта, а  $\lambda_1$  есть вещественный инвариант минимальной (второй) степени.

Особый интерес для приложений представляют группы  $A_k$ ,  $D_k$  и  $E_k$ . В этих случаях дискриминант  $\Sigma$  явно описывается следующим образом.

Точка  $\lambda \in \mathbb{R}^k$  принадлежит  $\Sigma$ , если и только если 0 является критическим значением комплексного отображения  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , задаваемого следующей функцией от двух комплексных переменных  $z_1, z_2$ :

$$A_k : z_1^{k+1} + z_2^2 + \lambda_1 z_1^{k-1} + \dots + \lambda_k,$$

$$D_k : z_1^2 z_2 \pm z_2^{k-1} + \lambda_1 z_1 z_2^{k-2} + \dots + \lambda_{k-1} + \lambda_k z_1,$$

$$E_6 : z_1^3 + z_2^4 + \lambda_1 z_1 z_2^2 + \lambda_2 z_1 z_2 + \lambda_3 z_2^2 + \lambda_4 z_1 + \lambda_5 z_2 + \lambda_6,$$

$$E_7 : z_1^3 + z_1 z_2^3 + \lambda_1 z_2^4 + \lambda_2 z_2^3 + \lambda_3 z_1 z_2 + \lambda_4 z_2^2 + \lambda_5 z_1 + \lambda_6 z_2 + \lambda_7,$$

$$E_8 : z_1^3 + z_2^5 + \lambda_1 z_1 z_2^3 + \lambda_2 z_1 z_2^2 + \lambda_3 z_2^3 + \lambda_4 z_1 z_2 + \lambda_5 z_2^2 + \lambda_6 z_1 + \lambda_7 z_2 + \lambda_8.$$

Только в случае  $D_k$  с четным  $k$  дискриминант имеет две различные вещественные формы.

Во всех этих случаях нормальная форма функций  $f(\lambda)$  таких, что  $f(0) = 0$  и  $\partial f / \partial \lambda_1(0) \neq 0$ , равна  $f = \pm \lambda_1$ .

В параметрическом случае (см. следствие 4.5) нормальные формы таковы:

$$\Phi = \tau_1 + C, \quad \Phi = \pm \lambda_1 \pm \tau_1^2 \pm \dots \pm \tau_p^2 + C.$$

**4.8. Замечание** (А. М. Габриэлов). Несмотря на то, что  $C^\infty$ -поля, касающиеся  $\Sigma_W$  или  $\Sigma_V$ , не порождаются основными полями над алгеброй функций, они являются Уитни- (или Виета-) поднимаемыми.

**4.9. Замечание.** Кажется правдоподобным, что теоремы 1.1, 1.2 и 4.3 должны иметь обобщения на случай действий групп на особых многообразиях, по крайней мере тогда, когда соответствующие факторпространства совпадают с  $\mathbb{C}^k$  или  $\mathbb{R}^k$ .

Другие обобщения теоремы 1.1 были найдены В. М. Закалюкиным [22].

**4.10. Замечание.** Я. М. Элиашберг использовал следствие 4.5 в своей очень интересной статье [10] (лемма 3.2.Б из [10]). Однако, как он сообщил мне, он не смог доказать эту лемму. Таким образом, результаты этого раздела служат некоторым основанием для работы [10].



### 5. Приложения к классификации диаграмм отображений

Мы будем рассматривать диаграммы вида  $M \rightarrow N \rightarrow \mathbb{R}$  или  $\mathbb{R} \leftarrow M \rightarrow N$ .

Эквивалентностью двух диаграмм (одинакового типа) называется коммутативная диаграмма, например,

$$\begin{array}{ccccccc}
 M_1 & \rightarrow & N_1 & \rightarrow & \mathbb{R}_1 & & \mathbb{R}_1 \leftarrow M_1 \rightarrow N_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 M_2 & \rightarrow & N_2 & \rightarrow & \mathbb{R}_2, & & \mathbb{R}_2 \leftarrow M_2 \rightarrow N_2,
 \end{array}$$

где вертикальные стрелки — диффеоморфизмы,  $\mathbb{R}_1 \approx \mathbb{R}_2 \approx \mathbb{R}$ .

Аналогичные определения даются для ростков.

Если отображение  $\mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_2$  в эквивалентности является сдвигом ( $t_2 = t_1 + \text{const}$ ), то такую эквивалентность назовем *сильной эквивалентностью*.

Результаты разделов 2–4 имеют много следствий, касающихся классификации таких диаграмм с точностью до эквивалентности (или сильной эквивалентности) в случае, когда  $M \rightarrow N$  есть отображение Уитни.

**5.1. Теорема** (ср. [9], [17]). *Предположим, что  $\dim M = \dim N = k \leq 3$ . Тогда для типичных отображений  $M \rightarrow N \rightarrow \mathbb{R}$  соответствующий росток диаграммы в любой точке  $0 \in M$  сильно эквивалентен ростку в нуле одной из следующих диаграмм:*

$k$	$h : M \rightarrow N, \quad y = h(x)$	$f : N \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(y)$
1	$y = x$ $y = x^2$	$y, \pm y^2$ $\pm y$
2	$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2$ $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2^2$ $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2^3 + x_1 x_2$	$y_1, \pm y_1^2 \pm y_2^2$ $y_1, \pm y_1^2 \pm y_2$ $\pm y_1$
3	$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3$ $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2^2, \quad y_3 = x_3$ $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2^3 + x_1 x_2, \quad y_3 = x_3$ $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3^4 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3$	$y_1, \pm y_1^2 \pm y_2^2 \pm y_3^2$ $y_1, \pm y_1^2 \pm y_3^2 \pm y_2$ $y_3, \pm y_3^2 \pm y_1$ $\pm y_1$

**Доказательство.** При  $k \leq 3$  типичное отображение  $h : M^k \rightarrow N^k$  имеет только стандартные особенности Уитни; они приводятся к нормальным формам столбца « $h$ » из приведенной выше таблицы (см., например, [11]). После этого  $f$  может быть приведено к нормальным формам

столбца « $f$ » при помощи некоторого Уитни-поднимаемого диффеоморфизма  $N \rightarrow N$  (см. следствие 4.5).

Теорема 5.1 описывает все бифуркации особенностей в типичных однопараметрических семействах отображений  $M^{k-1} \rightarrow N^{k-1}$  при  $k \leq 3$ . Из следствия 4.5 получаем аналогичные нормальные формы для отображений коранга меньше, чем 2, и любого  $k$ .

**5.2. Теорема** (ср. [5]). *Предположим, что  $\dim M = \dim N = k \leq 3$ . Тогда для типичных отображений  $\mathbb{R} \leftarrow M \rightarrow N$  соответствующий росток диаграммы для любой точки  $0 \in M$  эквивалентен ростку в нуле одной из следующих диаграмм:*

$k$	$h: M \rightarrow N, \quad y = h(x)$	$f: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x)$
1	$y = x$ $y = x^2$	$x, x^2$ $x + \phi(x^2)$
2	$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2$ $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2^2$ $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2^3 + x_1x_2$	$x_1, \quad \pm x_1^2 \pm x_2^2$ $x_1 + x_2, \quad \pm x_1^2 + x_2,$ $x_1 + x_2^3 \pm x_1x_2$ $\pm x_2 + \phi(h(x))$
3	$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3$ $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2^2, \quad y_3 = x_3$ $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2^3 + x_1x_2, \quad y_3 = x_3$ $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3^4 + x_1x_3^2 + x_2x_3$	$x_1, \quad \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2$ $x_1 + x_2, \quad x_2 \pm x_1^2 \pm x_3^2,$ $x_1 + x_2x_3,$ $x_1 \pm x_1x_2 + x_2^3 \pm x_2x_3^2$ $x_2 + x_3, \quad x_2 \pm x_3^2 + \phi(h_{1,2}(x)),$ $x_3 \pm x_2^2 + x_2\phi(h_{1,2}(x))$ $\pm x_3 + \phi(h(x))$

В теории огибающих однопараметрических семейств гиперповерхностей в  $N^k$  функция  $f: M^k \rightarrow \mathbb{R}$  является расслоением. В этом случае  $\mathbb{R}$  представляет пространство параметров; значению  $t \in \mathbb{R}$  соответствует гиперповерхность  $h(f^{-1}(t))$ .

Из теоремы 5.2 вытекает, например, что в типичном семействе плоских кривых в регулярных точках огибающей встречаются только следующие две перестройки: (i) переход «от  $\gamma$  к  $U$ » через точку возврата и (ii) переход «от  $W$  к  $U$ » с уничтожением двух точек касания на огибающей (см. рис. 4).

В точке возврата огибающей возникает «функциональный модуль»  $\phi$  (вероятно, существует столько топологически различных типов глад-

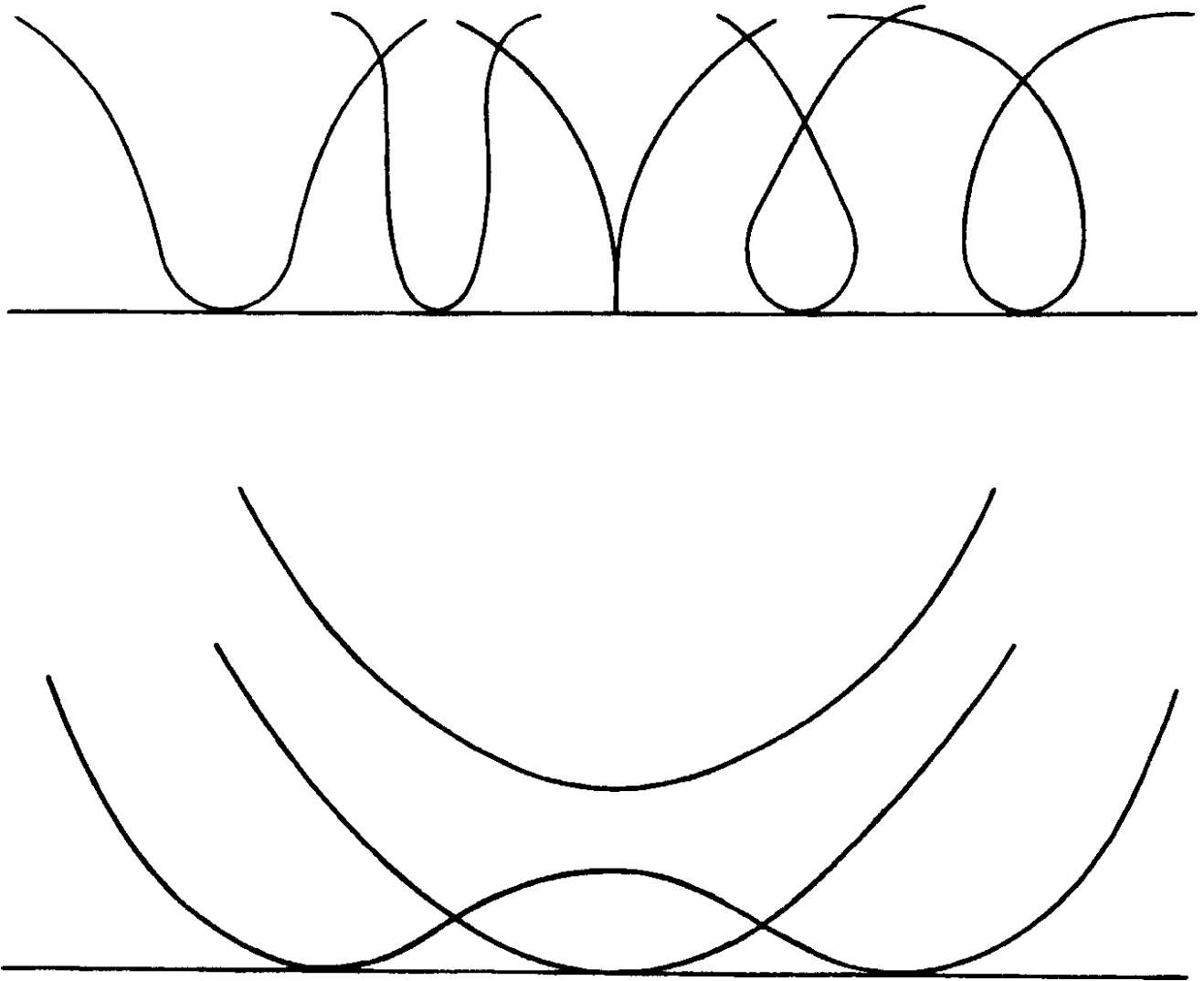


Рис. 4

ких семейств, сколько существует различных функций от двух переменных). Доказательство теоремы 5.2 основывается на использовании формул пункта 3.11; оно будет опубликовано позже в другой статье.

Согласно Н. А. Никишину, нормальные формы для типичных функций  $f$  в точках складки отображения  $h$  при  $k \geq 3$  имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1 + x_k, & \quad x_1 + x_1 x_k \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_k^2, \\ x_k \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_{k-1}^2, & \quad x_1 + x_2 x_k. \end{aligned}$$

Здесь  $y_1 = x_1, \dots, y_k = x_k^2$ .

## 6. Приложения к эволюции волновых фронтов

Типичные особенности волновых фронтов описаны в [2], [3], [21]. В этих работах приведено геометрическое изложение соответствующей

теории в терминах контактных многообразий, лежандровых расслоений и лежандровых особенностей. В процессе временной эволюции фронта его особенности могут перестраиваться. Здесь мы опишем все бифуркации особенностей в типичных однопараметрических семействах волновых фронтов при условии, что размерность объемлющего пространства меньше 6.

Мы будем использовать старомодные координатные обозначения. Рассмотрим гладкую функцию  $F = F(x, \lambda)$  от  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^l$ .

**6.1. Определение.** Фронтом, задаваемым производящей функцией  $F$ , называется следующая гиперповерхность в  $\mathbb{R}^{k+l+1}$ :

$$\Sigma = \left\{ (y, \lambda, z) \mid \exists x : y_i = F_{x_i}, z = F - \sum_i x_i F_{x_i} \right\}.$$

**6.2. Пример.** Производящие функции для фронтов, имеющих особенности типов  $A_\mu$ ,  $D_\mu$ ,  $E_\mu$ , задаются следующими формулами:

$$A_\mu : F = \pm x_1^{\mu+1} + \lambda_1 x_1^{\mu-1} + \dots + \lambda_{\mu-2} x_1^2,$$

$$D_\mu : F = \pm x_1^2 x_2 \pm x_2^{\mu-1} + \lambda_1 x_2^{\mu-2} + \dots + \lambda_{\mu-3} x_2^2,$$

$$E_6 : F = \pm x_1^3 \pm x_2^4 + \lambda_1 x_1 x_2^2 + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3 x_2^2,$$

$$E_7 : F = \pm x_1^3 \pm x_1 x_2^3 + \lambda_1 x_2^4 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_1 x_2 + \lambda_4 x_2^2,$$

$$E_8 : F = \pm x_1^3 \pm x_2^5 + \lambda_1 x_1 x_2^3 + \lambda_2 x_1 x_2^2 + \lambda_3 x_2^3 + \lambda_4 x_1 x_2 + \lambda_5 x_2^2.$$

Здесь  $\mu \leq k + l + 1$ ,  $k = 1$ ,  $\mu \geq 1$  для  $A_\mu$  и  $k = 2$ ,  $\mu \geq 4$  в остальных случаях.

Известно, что все особенности типичных волновых фронтов в пространствах размерности, меньшей 7, локально диффеоморфны особенностям  $A_\mu$ ,  $D_\mu$ ,  $E_\mu$ ,  $\mu < 7$  (разумеется, различные ветви волнового фронта могут также пересекать друг друга) (см. [2], [3], [21]).

Однопараметрическое семейство волновых фронтов локально задается однопараметрическим семейством производящих функций  $F = F(x, \lambda; t)$  (где  $t \in \mathbb{R}$  — параметр).

**6.3. Определение.** Большим фронтом  $\Sigma$  семейства фронтов, заданного семейством функций  $F = F(x, \lambda; t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^l$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , называется гиперповерхность в  $\mathbb{R}^{k+l+2}$ , заданная формулой  $\Sigma = \{(y, \lambda, z, t) \mid \exists x : y_i = F_{x_i}, z = F - \sum_i x_i F_{x_i}\}$ .

Таким образом, большой фронт может рассматриваться либо как дизъюнктивное объединение мгновенных фронтов, либо как один фронт в пространстве большей размерности (в последнем случае  $t$  рассматривается в качестве  $\lambda_{l+1}$ ).

Пространство  $\mathbb{R}^{k+l+2}$ , содержащее большой фронт, назовем *пространством-временем* и обозначим через  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом, большой фронт  $\Sigma$  является гиперповерхностью в пространстве-времени  $\mathbb{R}^n$ , а время  $t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является функцией на пространстве-времени, не имеющей критических точек.

Рассмотрим два однопараметрических семейства фронтов и обозначим через  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  их большие фронты в пространствах  $\mathbb{R}_1^n$  и  $\mathbb{R}_2^n$ , на которых заданы соответствующие функции времени  $t_{1,2}: \mathbb{R}_{1,2}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение.** Перестройки особенностей волновых фронтов в мировых точках  $O_1 \in \Sigma_1$  и  $O_2 \in \Sigma_2$  называются *эквивалентными*, если и только если существует локальный диффеоморфизм  $(\mathbb{R}_1^n, O_1) \rightarrow (\mathbb{R}_2^n, O_2)$ , отображающий  $\Sigma_1$  в  $\Sigma_2$  и  $t_1$  в  $t_2 + \text{const}$ .

Для описания перестроек особенностей волновых фронтов с точностью до этой эквивалентности рассмотрим сначала некоторые примеры.

**6.4. Список примеров.** В качестве большого фронта  $\Sigma$  рассмотрим цилиндрическое дискриминантное множество  $\Sigma_0 \times \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{\mu+p}$ , где  $\Sigma_0$  обозначает дискриминантное множество для  $A_\mu$ ,  $D_\mu$  или  $E_\mu$ , описанное в замечании 4.7.

В качестве функции времени  $t$  рассмотрим одну из следующих функций:

$$t = \tau_1 \quad \text{или} \quad t = \pm \lambda_1 \pm \tau_1^2 \pm \dots \pm \tau_p^2, \quad p \geq 0,$$

где  $\tau_s$  — координаты на пространстве параметров  $\mathbb{R}^p$ .

**6.5. Теорема.** Для типичного однопараметрического семейства волновых фронтов, большой фронт которого  $\Sigma$  имеет в точке 0 особенность одного из типов  $A_\mu$ ,  $D_\mu$  или  $E_\mu$ , пара  $(\Sigma, t)$  в нуле локально эквивалентна одной из пар списка 6.4.

**6.6. Теорема.** Для типичных однопараметрических семейств волновых фронтов в пространствах размерности  $q$ , меньшей 6, все перестройки особенностей в любой точке большого фронта  $\Sigma$  локально эквивалентны одной из перестроек, приведенных в списке 6.4, где  $\mu + p = q + 1 < 7$ .

**Доказательства.** Большой фронт диффеоморфен вещественной форме одного из дискриминантных многообразий соответствующей группы Кокстера (см. [2], [3], [21]). Таким образом, теорема 6.5 следует из замечания 4.7.

Теорема 6.6 вытекает из теоремы 6.5 и общих результатов пункта 6.2.

Все локальные перестройки особенностей, встречающиеся в типичных однопараметрических семействах волновых фронтов в  $\mathbb{R}^3$ , изображены на рис. 5 (ср. также [3], [18]). Разумеется, на рисунках показана только одна ветвь волнового фронта.

## 7. Приложения к эволюции каустик и рождению галактик

Типичные особенности каустик описаны в [1], [3], [21]. В этих работах излагается геометрическая интерпретация соответствующей теории в терминах симплектических многообразий, лагранжевых расслоений и лагранжевых особенностей. В процессе эволюции каустики во времени ее особенности могут перестраиваться. Здесь мы опишем все перестройки особенностей, встречающиеся в типичных однопараметрических семействах каустик в пространствах размерности меньше 4.

Мы снова будем использовать старомодные координатные обозначения. Рассмотрим гладкую функцию  $F = F(x, \lambda)$  от переменных  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^l$ .

**7.1. Определение.** *Каустикой*, задаваемой производящей функцией  $F$ , называется гиперповерхность  $\Delta \subset \mathbb{R}^{k+l}$ , образованная критическими значениями отображения  $(x, \lambda) \mapsto (y = F_x, \lambda)$ .

Типичные особенности каустик в пространствах размерности, меньшей 6, локально диффеоморфны особенностям каустик, задаваемых производящими функциями  $F$  типов  $A_\mu$ ,  $D_\mu$ ,  $E_\mu$ ,  $\mu < 6$ , приведенными в разделе 6 (см. [1], [2], [3], [21]). (Различные ветви каустики могут также пересекаться друг с другом, но мы будем рассматривать только одну ветвь.)

Однопараметрическое семейство каустик локально задается производящим семейством функций  $F = F(x, \lambda; t)$  (здесь  $t \in \mathbb{R}$  — параметр).

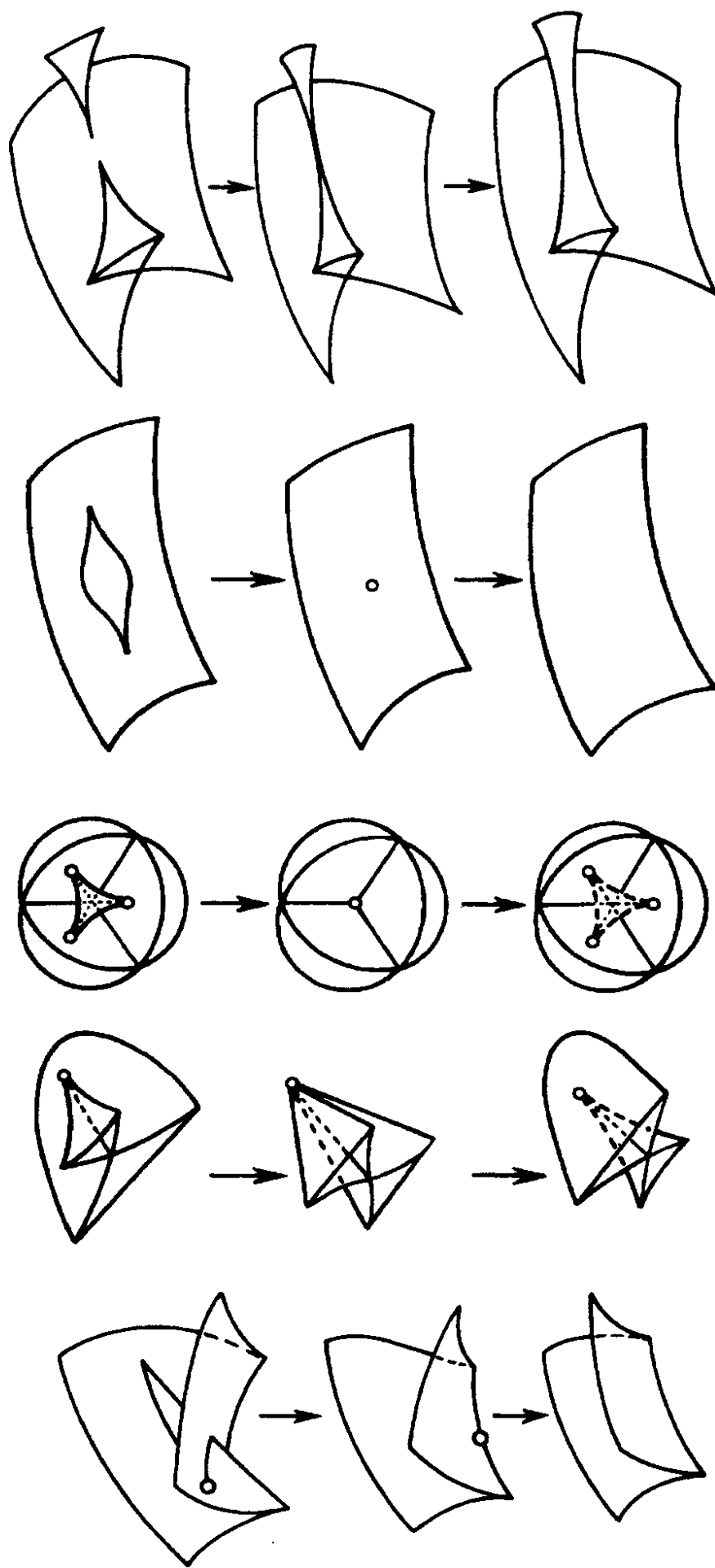


Рис. 5

**7.2. Определение.** Большой каустикой  $\Delta$  семейства, заданного функцией  $F = F(x, \lambda; t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^l$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , называется гиперповерхность в  $\mathbb{R}^{k+l+1}$ , являющаяся множеством критических значений отображения  $(x, \lambda; t) \mapsto (y = F_x, \lambda; t)$ .

Таким образом, большая каустика может рассматриваться либо как дизъюнктное объединение мгновенных каустик, либо как одна каустика в пространстве-времени  $\mathbb{R}^{k+l+1} = \mathbb{R}^n$ . Функция  $t$  — это функция на пространстве-времени  $\mathbb{R}^n$ , не имеющая критических точек.

**7.3. Определение.** Перестройкой особенностей каустики называется пара ростков отображений  $(\Delta, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  (где первая стрелка — включение большой каустики, а вторая — функция времени). Эквивалентностью таких перестроек называется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1 & \rightarrow & \mathbb{R}_1^n & \rightarrow & \mathbb{R}_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_2 & \rightarrow & \mathbb{R}_2^n & \rightarrow & \mathbb{R}_2, \end{array}$$

вертикальные стрелки которой — ростки диффеоморфизмов. Эквивалентность называется *сильной*, если последняя вертикальная стрелка является сдвигом ( $t_2 = t_1 + \text{const}$ ).

**7.4. Список перестроек особенностей каустик.** В качестве большой каустики  $\Delta$  рассмотрим произведение  $\Delta_0 \times \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{\mu-1} \times \mathbb{R}^p$ , где  $\Delta_0$  — каустика одного из типов  $A_\mu$  или  $D_\mu$  (соответствующие производящие функции перечислены в пункте 6.2).

В качестве времени  $t$  рассмотрим одну из следующих функций.

*Случай  $A_\mu$ :*

$$(1) \quad t = \tau_1 \text{ или } t = \pm \lambda_1 \pm \tau_1^2 \pm \dots \pm \tau_p^2.$$

*Случай  $D_\mu$ :*

$$(2) \quad t = \tau_1 \text{ или } t = \pm \lambda_1 + y_1 + a\lambda_2 \pm \tau_1^2 \pm \dots \pm \tau_p^2,$$

$$(3) \quad t = \tau_1 \text{ или } t = \pm \lambda_1 + Py_1 + Q \pm \tau_1^2 \pm \dots \pm \tau_p^2.$$

Здесь  $P = 1 + a_1\lambda_2 + \dots + a_\nu\lambda_2^\nu$ ,  $Q = b_1\lambda_2 + \dots + b_\nu\lambda_2^\nu$ ,  $\mu = 2\nu + 2, 2\nu + 3$ , а  $\tau_s$  — координаты на  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 0$ ; при  $\mu = 4$  в (2) и (3) нужно заменить  $a\lambda_2$  на  $ay_2$  ( $y_i = F_{x_i}$ , см. пример 6.2); при  $\mu = 4$  и  $5$   $\nu = 1$ ,  $P = 1 + a_1\lambda_2$ ,  $Q = b_1\lambda_2$ .



**7.5. Теорема** (В. М. Закалюкин). Для типичного однопараметрического семейства каустик в точке, где большая каустика имеет особенность типа  $A_\mu$  или  $D_\mu$ , перестройка особенностей мгновенных каустик локально эквивалентна одной из перестроек, задаваемых функцией времени (1) или (2), и сильно локально эквивалентна одной из перестроек, задаваемых функцией времени (1) или (3).

**7.6. Следствие.** Все типичные перестройки особенностей каустик в однопараметрических семействах в пространствах размерности  $q < 4$  локально эквивалентны перестройкам, задаваемым функциями времени (1) или (2), и сильно эквивалентны перестройкам, задаваемым функциями времени (1) или (3), где  $\mu + p = q + 2 < 6$ .

**7.7. Пример.** В трехмерном пространстве типичные перестройки каустик эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} A_3 : F &= x^4 + \lambda_1 x^2, & t &= \tau_1 \text{ или } \pm \lambda_1 \pm \tau_1^2 \pm \tau_2^2, \\ A_4 : F &= x^5 + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2, & t &= \tau_1 \text{ или } \pm \lambda_1 \pm \tau_1^2, \\ D_4 : F &= x_1^2 x_2 \pm x_2^3 \pm \lambda_1 x_2^2, & t &= \tau_1 \text{ или } \pm \lambda_1 + y_1 + ay_2 \pm \tau_1^2, \\ A_5 : F &= x^6 + \lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2, & t &= \pm \lambda_1, \\ D_5 : F &= x_1^2 x_2 + x_2^4 + \lambda_1 x_2^3 + \lambda_2 x_2^2, & t &= \pm \lambda_1 + y_1 + a\lambda_2. \end{aligned}$$

Доказательства основываются на методах раздела 2 и на технике спектральных последовательностей из [4]; они будут опубликованы позднее в другой статье.

**7.8. Теория Зельдовича** (см. [24], [25]). Рассмотрим среду, состоящую из невзаимодействующих частиц в  $\mathbb{R}^3$ . Обозначим начальное распределение скоростей через  $v = v(x)$ , а распределение плотности — через  $\rho = \rho(x)$ ;  $\rho$  и  $v$  — соответственно гладкая функция и гладкое векторное поле.

Движение частиц по инерции задает зависящее от времени отображение  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $x \mapsto x + tv(x)$ . Для малых  $t$  это отображение является диффеоморфизмом (если  $v$  не является слишком плохим на бесконечности). Но в некоторый момент  $t$  появляются особенности. Критическими значениями этого отображения являются точки сгущения частиц (в таких точках плотность становится бесконечной).

После этого момента физическое предположение о том, что частицы не взаимодействуют, перестает быть реалистичным. Для описания

дальнейшего движения должны быть сформулированы некоторые физические условия, описывающие соударения. Мы, тем не менее, будем считать, что частицы не взаимодействуют даже после появления особенностей.

В теории Зельдовича начальное векторное поле потенциально:  $v = \nabla S$ . Таким образом, критические значения образуют каустику зависящего от времени лагранжева отображения  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$x \mapsto x + t\partial S/\partial x. \quad (6)$$

Изучим перестройки особенностей соответствующих каустик для типичных потенциалов  $S$ .

Формулы из примера 7.6 описывают эти перестройки с точностью до эквивалентности (т.е. с точностью до гладкой замены переменных в пространстве-времени). Например, простейшая формула

$$A_3: \quad F = x^4 + \lambda x^2, \quad t = \lambda_1 + \tau_1^2 + \tau_2^2$$

описывает большую каустику  $\Delta$ , являющуюся цилиндром над полукубической параболой ( $27y^2 + 8\lambda^3 = 0$ ), в пространстве-времени с координатами  $(y, \lambda, \tau_1, \tau_2)$ . При  $t < 0$  пересечение этого цилиндра с многообразием  $t = \text{const}$  пусто. При  $t > 0$  появляется поверхность, имеющая форму линзы, похожая на поверхность вращения губ вокруг короткой оси (см. рис. 6).

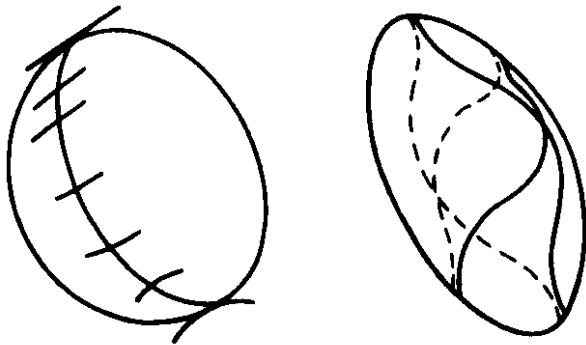


Рис. 6

**7.9. Замечание.** Строго говоря, для применения теоремы 7.5 к рождению галактик нужно доказать, что типичные функции  $S$  задают типичные семейства каустик.

Наиболее важный результат, а именно, что первой появляется имеющая форму линзы особенность типа  $A_3$ , был получен Я. Б. Зельдовичем с помощью следующих рассуждений.

Рассмотрим критические точки отображения (6). Точка  $x$  становится критической в момент  $t$ , если и только если  $-1/t$  является собственным значением гессиана  $\partial^2 S/\partial x_i \partial x_j$  в  $x$ . Ядро производной нашего отображения в точке  $x$  в этом случае порождается собственными векторами с собственным значением  $-1/t$ .

Для типичной функции  $S$  собственные значения гессиана образуют трехзначную вещественную функцию. Ее ветви пересекаются вдоль кривых (соответствующих  $D_4$  в наших обозначениях).

Для времени  $t$ , меняющегося от 0 до  $+\infty$ , число  $-1/t$  меняется от  $-\infty$  до 0.

Следовательно, первая особенность отвечает минимальному (отрицательному) собственному значению гессиана.

Это минимальное собственное значение соответствует одной из трех ветвей функции собственных значений. Для типичного потенциала  $S$  эта ветвь является гладкой функцией в точке минимума, и этот минимум не вырожден.

Таким образом, после рождения первой особенности критическое множество имеет форму малого эллипсоида с центром в точке минимума. Ядра производной отображения (6) во всех его критических точках почти параллельны друг другу (так как они почти не отличаются от ядра производной отображения в точке минимума).

Из этого следует, что после первого момента рождения особенности на этом эллипсоиде, состоящем из критических точек, существует кривая, в точках которой ядра касаются эллипсоида. Эта кривая близка к эллипсу, а особенности нашего отображения на этой кривой — это особенности сборки Уитни. Сразу после первого рождения особенностей других особенностей нет.

Из этого описания нетрудно видеть, что множество критических значений имеет форму линзы (рис. 6). Обе длинные оси (в общем случае не равные друг другу) имеют порядок  $(t - t_0)^{1/2}$ , в то время как короткая ось имеет порядок  $(t - t_0)^{3/2}$ .

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  и лагранжевы особенности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(4), 3–25.
- [2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974, 432 с.
- [3] Арнольд В. И. Критические точки гладких функций и их нормальные формы. *УМН*, 1975, **30**(5), 3–65.
- [4] Арнольд В. И. Спектральная последовательность для приведения функций к нормальной форме. *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, **9**(3), 81–82.
- [5] Арнольд В. И. О теории огибающих. *УМН*, 1976, **31**(3), 248–249.

- [6] Baas N. Structural stability of composed mappings. Preprint.
- [7] Bierstone E. Smooth functions, invariant under the action of a finite group. Preprint, 1975.
- [8] Bochner S. Compact groups of differentiable transformations. *Ann. Math., Ser. 2*, 1945, **46**(3), 372–381.
- [9] Chincaro E. Bifurcation of Whitney maps and critical Pareto sets. Preprint, 1975.
- [10] Элиашберг Я. М. Хирургия особенностей гладких отображений. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1972, **36**(6), 1321–1347.
- [11] Morin B. Formes canoniques des singularités d'une application différentiable. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, **260**, 5662–5665, 6503–6506.
- [12] Mather J. Differentiable invariants. *Topology*, 1977, **16**(2), 145–155.
- [13] Poenaru V. Stabilité structurelle équivariante. I. Orsay: U.E.R. Mathématique, Université de Paris, IX, 1975, 44 p. (Publications Mathématiques d'Orsay, 126)
- [14] Ronga F. Stabilité locale des applications équivariantes. In: *Differential Topology and Geometry. Proc. Colloq. Dijon, 1974*. Berlin: Springer, 1975, 23–35. (Lecture Notes in Math., 484)
- [15] Schwarz G. Smooth functions, invariant under the action of a compact Lie group.
- [16] Solomon L. Invariants of finite reflection groups. *Nagoya Math. J.*, 1963, **22**, 57–64.
- [17] Sotomayor J. Bifurcation of Whitney maps  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  and critical Pareto sets. Berlin: Springer, 1975, 75–77. (Lecture Notes in Math., 468)
- [18] Thom R. Stabilité Structurelle et Morphogénèse. Essai d'une théorie générale des modèles. Mathematical Physics Monograph. Series W. A. Benjamin. Mass.: Inc. Reading, 1972, 362 p.
- [19] Wassermann G.  $(r, s)$ -stable unfolding and catastrophe theory. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1976, 253–262. (Lecture Notes in Math., 525)
- [20] Wassermann G. Stability of Unfoldings. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1974, 164 p. (Lecture Notes in Math., 393)
- [21] Закалюкин В. М. О лагранжевых и лежандровых особенностях. *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, **10**(1), 26–36.
- [22] Закалюкин В. М. Перестройки волновых фронтов, зависящих от одного параметра. *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, **10**(2), 69–70.
- [23] Zeeman E. C. Catastrophe theory in biology. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1975, 101–105. (Lecture Notes in Math., 468)
- [24] Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. Среда из невзаимодействующих частиц. М.: Наука, 1973, 351 с.
- [25] Зельдович Я. Б. Гидродинамика Вселенной. *УМН*, 1975, **30**(6), 204.

Предисловие к книге  
«Дополнительные главы теории обыкновенных  
дифференциальных уравнений»

Основное открытие Ньютона, то, которое он счел нужным засекретить и опубликовал лишь в виде анаграммы, состоит в следующем: «*Data aequatione quocumque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa*». В переводе на современный математический язык это означает: «Полезно решать дифференциальные уравнения».

В настоящее время теория дифференциальных уравнений представляет собой трудно обозримый конгломерат большого количества разнообразных идей и методов, в высшей степени полезный для всевозможных приложений и постоянно стимулирующий теоретические исследования во всех отделах математики.

Большая часть путей, связывающих абстрактные математические теории с естественно-научными приложениями, проходит через дифференциальные уравнения. Многие разделы теории дифференциальных уравнений настолько разрослись, что стали самостоятельными науками; проблемы теории дифференциальных уравнений имели большое значение для возникновения таких наук, как линейная алгебра, теория групп Ли, функциональный анализ, квантовая механика и т.д. Таким образом, дифференциальные уравнения лежат в основе естественно-научного математического мировоззрения.

При отборе материала для настоящей книги автор старался изложить основные идеи и методы, применяемые для изучения дифференциальных уравнений. Особые усилия были приложены к тому, чтобы основные идеи, как правило простые и наглядные, не загромождались техническими деталями. С наибольшей подробностью рассматриваются наиболее фундаментальные и простые вопросы, в то время как изложение более специальных и трудных частей теории носит характер обзора.

Книга начинается с исследования некоторых специальных дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах. При этом

основное внимание уделяется не формально-рецептурной стороне элементарной теории интегрирования, а ее связям с общематематическими идеями, методами и понятиями (разрешение особенностей, группы Ли, диаграммы Ньютона), с одной стороны, и естественно-научным приложениям — с другой.

Теория уравнений с частными производными первого порядка рассматривается при помощи естественной контактной структуры в многообразии 1-струй функций. Попутно излагаются необходимые элементы геометрии контактных структур, делающие всю теорию независимой от других источников.

Значительную часть книги занимают методы, обычно называемые качественными. Современное развитие основанной А. Пуанкаре качественной теории дифференциальных уравнений привело к пониманию того, что, подобно тому как явное интегрирование дифференциальных уравнений, вообще говоря, невозможно, невозможным оказывается и качественное исследование сколько-нибудь общих дифференциальных уравнений с многомерным фазовым пространством. В книге обсуждается анализ дифференциальных уравнений с точки зрения структурной устойчивости, т. е. устойчивости качественной картины по отношению к малым изменениям дифференциальных уравнений. Изложены основные результаты, полученные после первых работ А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина в этой области: начала теории структурно устойчивых  $U$ -систем Аносова, все траектории которых экспоненциально неустойчивы, и теорема Смейла о неплотности множества структурно устойчивых систем. Обсуждается также вопрос о значении этих математических открытий для приложений (речь идет об описании устойчивых хаотических режимов движения, вроде турбулентных).

К наиболее мощным и часто применяемым методам исследования дифференциальных уравнений относятся различные асимптотические методы. В книге изложены основные идеи метода усреднения, восходящего к работам основоположников небесной механики и широко используемого во всех областях приложений, где нужно отделить медленную эволюцию от быстрых осцилляций (Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский и др.).

Несмотря на обилие исследований по усреднению, в вопросе об эволюции даже для простейших многочастотных систем далеко не все ясно. В книге дается обзор работ о прохождении резонансов и о захвате в резонанс, направленных к выяснению этого вопроса.

Основой метода усреднения является идея уничтожения возмущений посредством подходящего выбора системы координат. Эта же идея лежит в основе теории нормальных форм Пуанкаре. Метод нормальных форм является основным методом локальной теории дифференциальных уравнений, описывающей поведение фазовых кривых в окрестности особой точки или замкнутой фазовой кривой. В книге изложены основы метода нормальных форм Пуанкаре, включая доказательство фундаментальной теоремы Зигеля о линеаризации голоморфного отображения.

Важные применения метод нормальных форм Пуанкаре находит не только при исследовании отдельного дифференциального уравнения, но и в теории бифуркаций, когда предметом изучения является семейство уравнений, зависящих от параметров.

Теория бифуркаций изучает изменения качественной картины при изменении параметров, от которых зависит система. При общих значениях параметров обычно приходится иметь дело с системами общего положения (все особые точки простые и т.д.). Однако если система зависит от параметров, то при некоторых значениях параметров неизбежно встречаются вырождения (например, слияние двух особых точек векторного поля).

В однопараметрическом семействе общего положения встречаются лишь простейшие вырождения (те, от которых нельзя избавиться малым шевелением семейства). Таким образом возникает иерархия вырождений по коразмерностям соответствующих поверхностей в функциональном пространстве всех изучаемых систем: в однопараметрических семействах общего положения встречаются лишь вырождения, соответствующие поверхностям коразмерности один, и т.д.

В последние годы в теории бифуркаций наблюдается значительный прогресс, связанный с применением идей и методов общей теории особенностей дифференцируемых отображений Х. Уитни.

Книга заканчивается главой о теории бифуркаций, в которой применяются развитые в предыдущих главах методы и описаны результаты, полученные в этой области, начиная с основополагающих работ А. Пуанкаре и А. А. Андронова.

При изложении всех вопросов автор стремился избежать аксиоматически-дедуктивного стиля, характерным признаком которого являются немотивированные определения, скрывающие фундаментальные идеи и методы; подобно притчам, их разъясняют лишь ученикам наедине.

Продолжающаяся, как утверждают, уже более 50 лет аксиоматизация и алгебраизация математики привела к неудобочитаемости столь большого числа математических текстов, что стала реальностью всегда нависающая над математикой угроза полной утраты контакта с физикой и естественными науками. Автор старался вести изложение таким образом, чтобы книгой могли пользоваться не только математики, но и все потребители теории дифференциальных уравнений.

У читателя настоящей книги предполагается лишь очень небольшие общематематические представления в объеме примерно первых двух курсов университетской программы; достаточно (но не необходимо), например, знакомство с учебником В. И. Арнольда «Обыкновенные дифференциальные уравнения», М., 1974<sup>1</sup>.

Изложение построено таким образом, чтобы читатель мог пропускать места, оказавшиеся для него трудными, без большого ущерба для понимания дальнейшего: были приняты меры к тому, чтобы по возможности избегать ссылок из главы в главу и даже из параграфа в параграф.

Содержание настоящей книги составил материал ряда обязательных и специальных курсов, читавшихся автором на механико-математическом факультете МГУ в 1970–1976 годах для студентов-математиков II–III курсов, для слушателей факультета повышения квалификации и на экспериментальном потоке математиков естественно-научного профиля.

Автор выражает благодарность студентам О. Е. Хадину, А. К. Ковальджи, Е. М. Кагановой и доц. Ю. С. Ильяшенко, чьи конспекты были очень полезными при подготовке этой книги. Составленный Ю. С. Ильяшенко конспект специального курса, а также конспекты лекций на экспериментальном потоке, в течение ряда лет находились в библиотеке факультета. Автор благодарен многочисленным читателям и слушателям этих курсов за ряд ценных замечаний, использованных при подготовке книги. Автор благодарен рецензентам Д. В. Аносову и В. А. Плиссу за тщательное рецензирование рукописи, способствовавшее ее улучшению.

---

<sup>1</sup> При изложении нескольких отдельных вопросов используются или упоминаются также самые первоначальные сведения о дифференциальных формах, группах Ли и функциях комплексного переменного. Для понимания большей части книги знакомство с этими сведениями не обязательно.



## Несколько замечаний об антидинамо-теореме

### 1. Описание результатов

1. Антидинамо-теорема есть утверждение о затухании магнитного поля под действием магнитной вязкости (несмотря на его растяжение движением среды, в которую поле было бы заморожено при отсутствии вязкости). Каулинг [1] и Зельдович [2] доказали антидинамо-теоремы для двумерной несжимаемой среды, заполняющей односвязную область. Из доказываемых ниже общих теорем вытекают, в частности, обобщения антидинамо-теоремы для неодносвязного случая, когда *вместо затухания поля наблюдается установление стационарного (постоянного во времени) поля*. Предположение о несжимаемости среды оказывается излишним (в сжимаемом случае следует только рассматривать не векторное поле, а векторную плотность). Предположение *соленоидальности* эволюционирующего поля также излишне: мы увидим, что эволюция автоматически приводит в конце к соленоидальной плотности, даже если начальное условие было произвольным. Предположение *двумерности* очень существенно, но кое-что удастся доказать и для движения в пространстве произвольной размерности  $m$ , например,  $m = 3$ .

2. Итак, мы рассматриваем эволюцию  $k$ -форм на компактном  $m$ -мерном римановом многообразии без края под действием *переноса и диффузии* ( $k = 0$  отвечает функциям,  $k = m$  — плотностям,  $k = m - 1$  — векторным плотностям и т.д.). При такой эволюции замкнутая форма остается замкнутой. Оказывается, при любом  $k$  *число линейно независимых стационарных (сохраняющихся при эволюции без изменений) замкнутых  $k$ -форм не меньше  $k$ -мерного числа Бетти многообразия* (числа  $b_k$  независимых  $k$ -мерных циклов). В случае  $k = 0$  или  $k = m$ , т.е. при эволюции *функций и плотностей*, можно утверждать большее: *число линейно независимых стационарных решений в точности равно числу Бетти, т.е. оно равно числу компонент связности многообразия, и эволюция с любым начальным условием приводит в конце концов к стационарному (установившемуся) распределению рассматриваемого скаляра.*

В случае  $k = 1$  для замкнутых 1-форм (тем самым для полных дифференциалов многозначных функций) число линейно независимых стационарных решений равно числу Бетти  $b_1$  и эволюция с любым (замкнутым, т.е. безвихревым) начальным условием приводит к стационарному решению с теми же периодами (интегралами по замкнутым кривым); это стационарное решение определено периодами однозначно. Для случая  $k = m - 1$  (для векторных плотностей) мы устанавливаем, что эволюция с течением времени делает плотность бездивергентной (даже если среда сжимаема), но не можем в этом случае утверждать, что эволюция приводит к стационарной по времени векторной плотности; лишь в двумерном случае ( $m = 2$ ), как уже сказано, выход на стационарную бездивергентную плотность происходит при любом начальном условии.

3. В физически наиболее важном случае магнитного поля в трехмерном пространстве ( $k = 2, m = 3$ ) мы приводим примеры, показывающие, что: 1) число линейно независимых стационарных решений может превосходить число Бетти  $b_2$ ; 2) эволюция бездивергентного поля общего положения может с течением времени приводить не к стационарному, а к экспоненциально растущему полю (если вязкость достаточно мала). Наше растущее поле кохомологично нулю (имеет однозначный вектор-потенциал).

Инкремент растущего поля при уменьшении вязкости стремится не к нулю, а к положительному пределу («быстрое динамо»). Нам кажется, что этот эффект связан не с топологией многообразия, где происходит течение, а просто с экспоненциальным растяжением частиц жидкости и может выполняться для течений в ограниченных областях евклидова трехмерного пространства, но это не доказано.

Когда вязкость достаточно велика, то при любых  $k$  и  $m$  размерность пространства стационарных решений равна числу Бетти  $b_k$  и с течением времени устанавливается стационарный режим (единственный в классе кохомологий начальной замкнутой формы). Вероятно, при любых значениях вязкости в каждом классе кохомологий есть стационарное решение, но это не доказано.

## 2. Уравнения движения

Мы рассматриваем уравнение переноса и диффузии  $k$ -форм

$$\partial\omega/\partial t = L_v\omega + D\Delta\omega \quad (1)$$

на компактном  $m$ -мерном многообразии  $M$ . Здесь  $\omega$  — дифференциальная  $k$ -форма на  $M$ , эволюционирующая под действием движения среды, заданного векторным полем  $v$  на  $M$ , и диффузии с коэффициентом  $D > 0$ . Оператор дифференцирования Ли  $L_v$  определяется *условием в замороженности формы*: значение формы, эволюционирующей под действием уравнения (1) с  $D = 0$ , на нарисованных на частицах среды векторах и на их образах при движении частиц (заданном полем скоростей  $v$ ) не меняется со временем, хотя частицы и передвигаются на новое место.

Линейный оператор  $L_v$  выражается через оператор  $i_v$  (подстановки поля в форму в качестве первого аргумента) и через оператор внешней производной  $d$  по «формуле гомотопии»  $L_v = i_v \circ d + d \circ i_v$ . Оператор Лапласа  $\Delta$  на  $k$ -формах определяется формулой  $-\Delta = d\delta + \delta d$ , где  $\delta$  — оператор, сопряженный с  $d$  в смысле римановой метрики на  $M$ .

**Пример 1.** Пусть  $M$  — трехмерное евклидово пространство (с обычной метрикой  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ). Можно задать 2-форму  $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$  векторным полем  $\Omega$  с компонентами  $P, Q, R$ , т.е.  $\omega = i_\Omega \tau$ , где  $\tau = dx \wedge dy \wedge dz$  — элемент объема. Уравнение (1) для 2-форм принимает, как нетрудно убедиться, вид следующего уравнения на векторное поле  $\Omega$ :

$$\partial\Omega/\partial t = \text{rot}[v \times \Omega] + v \text{div} \Omega + D(\text{grad} \text{div} \Omega - \text{rot} \text{rot} \Omega). \quad (2)$$

В частности, если поле  $\Omega$  соленоидально при  $t = 0$  ( $\text{div} \Omega = 0$ ), то оно останется соленоидальным при всех  $t$  и будет эволюционировать по закону

$$\partial\Omega/\partial t = \text{rot}[v \times \Omega] - D \text{rot} \text{rot} \Omega. \quad (3)$$

Если к тому же среда несжимаема ( $\text{div} v = 0$ ), то уравнение (3) принимает вид

$$\partial\Omega/\partial t = \{\Omega, v\} - D \text{rot} \text{rot} \Omega \quad (4)$$

(где  $\{\cdot, \cdot\}$  — скобка Пуассона), и при  $D = 0$  поле  $\Omega$  заморожено в жидкость. Таким образом, уравнение (1) — непосредственное обобщение уравнений (4), (3) и (2).

**Пример 2.** При  $k = 0$ , т.е. для функций, уравнение (1) принимает вид уравнения теплопроводности с переносом:

$$\partial f/\partial t = \langle v, \text{grad} f \rangle + D\Delta f \quad (5)$$

[пригодного и в римановом случае, если понимать  $\Delta$  как  $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ , а векторные операции определять условиями  $\langle \xi, \operatorname{grad} f \rangle = df|_{\xi}$  для любого вектора  $\xi$  (скалярное произведение риманово);  $\tau \operatorname{div} A = di_{A\tau}$ , где  $\tau$  — риманов элемент объема].

**Пример 3.** При  $k = m$ , т.е. при  $\omega = g\tau$  (где  $\tau$  — элемент объема), уравнение (1) принимает вид уравнения на скалярную плотность  $g$ , а именно

$$\partial g / \partial t = \operatorname{div}(gv) + D\Delta g. \quad (6)$$

### 3. Формулировки результатов

**Определение.** Замкнутая  $k$ -форма  $\omega$  называется *стационарной*, если она удовлетворяет уравнению

$$L_v \omega + D\Delta \omega = 0. \quad (7)$$

**Теорема 1.** Число линейно независимых стационарных  $k$ -форм не меньше  $k$ -мерного числа Бетти многообразия  $M$ .

Примеры, когда первое число строго больше второго, приведены ниже.

**Теорема 2.** Если коэффициент диффузии  $D$  достаточно велик, то указанные в теореме 1 числа равны, причем: 1) в каждом классе когомологий замкнутых  $k$ -форм есть стационарная форма; 2) такая форма ровно одна; 3) эволюция (1) с любым замкнутым начальным условием приводит в пределе к стационарной форме из того же класса когомологий, т.е. с теми же интегралами по  $k$ -мерным циклам; 4) эволюция (1) с любым начальным условием приводит в пределе к замкнутой форме; 5) все решения уравнения (7) замкнуты.

**Замечание 1.** Примеры показывают, что утверждения 2 и 3 перестают быть верными при достаточно малой вязкости (исключая рассмотренные ниже случаи  $k = 0$ ,  $k = 1$  и  $k = m$ ). В предложенном в [3] примере  $k = 2$ ,  $m = 3$ . Уравнение (4) имеет растущее решение  $\Omega = e^{\gamma t} e_q$ , где  $\gamma = \mu - D\mu^2$  (в обозначениях [3]). Если  $D = \mu^{-1}$ , то это решение стационарно. Оно когомологично нулю ( $e_q = -\mu^{-1} \operatorname{rot} e_p$ ). Многообразие рассматриваемого примера имеет  $b_2 = 1$ . При любом  $D$  уравнение (4) имеет стационарное гармоническое решение  $\Omega = v$  (в обозначениях [3]). При  $D = \mu^{-1}$  размерность пространства стационарных решений не меньше  $2 > b_2 = 1$ .

В качестве другого примера с такими же свойствами можно рассмотреть геодезический поток на многообразии постоянной отрицательной кривизны (в качестве  $e_p$  и  $e_q$  выступают поля скоростей орициклических потоков, в качестве  $v$  — геодезического).

**Теорема 3.** Рассмотрим уравнение теплопроводности с переносом для скаляров (5) на связном компактном римановом многообразии. При любом положительном значении коэффициента диффузии: 1) всякое стационарное решение уравнения (5) есть константа; 2) решение уравнения (5) с любым начальным условием стремится к константе при  $t \rightarrow \infty$ .

**Теорема 4.** Рассмотрим уравнение теплопроводности с переносом для скалярных плотностей (6) на связном компактном римановом многообразии. При любом положительном значении коэффициента диффузии  $D$ : 1) размерность пространства стационарных решений уравнения (6) равна 1; 2) существует (и единственно) стационарное решение с любым значением интеграла по всему многообразию; 3) решение с любым начальным условием стремится при  $t \rightarrow \infty$  к стационарному решению с тем же интегралом; 4) в частности, решение с начальным условием  $g = \operatorname{div} \Omega$  стремится при  $t \rightarrow \infty$  к нулю, каково бы ни было поле  $\Omega$ .

**Теорема 5.** Рассмотрим уравнение (1) для замкнутых 1-форм на компактном римановом многообразии. При любом положительном значении коэффициента диффузии: 1) размерность пространства стационарных решений равна одномерному числу Бетти многообразия; 2) существует (и единственно) стационарное решение с любыми значениями интегралов по (независимым) одномерным циклам; 3) решение с любым начальным условием стремится при  $t \rightarrow \infty$  к стационарному решению с теми же интегралами.

**Теорема 6.** Рассмотрим уравнение (1) для  $(m-1)$ -форм на компактном  $m$ -мерном римановом многообразии, т.е. для векторных плотностей<sup>1</sup>. Тогда при  $t \rightarrow \infty$  дивергенция эволюционирующей плотности стремится к нулю, каков бы ни был коэффициент диффузии

<sup>1</sup> Для  $(m-1)$ -формы  $\omega$  с векторной плотностью  $\Omega$  имеем  $\omega = i_{\Omega} \tau$  ( $\tau$  — риманов элемент объема); закон эволюции векторной плотности  $\Omega$  имеет вид

$$\dot{\Omega} = \{\Omega, v\} + \Omega \operatorname{div} v + D \Delta \Omega.$$

$D > 0$ . В частности, всякое стационарное решение уравнения (1) для  $(m-1)$ -форм замкнуто.

**Пример 4.** Решение уравнения (2) с любым начальным условием, периодическим по всем трем координатам (для поля  $v$  такой же периодичности), становится соленоидальным при  $t \rightarrow \infty$ , т.е.  $\operatorname{div} \Omega \rightarrow 0$ .

В частности, всякое стационарное решение уравнения (2) соленоидально.

**Теорема 7.** Рассмотрим уравнение (1) для 1-форм на компактном двумерном многообразии. При любом положительном коэффициенте диффузии каждое решение стремится при  $t \rightarrow \infty$  к стационарной замкнутой 1-форме.

**Пример 5.** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}\dot{P} &= (P_x + Q_y)u + (Pv - Qu)_y + D\Delta P, \\ \dot{Q} &= (P_x + Q_y)v - (Pv - Qu)_x + D\Delta Q\end{aligned}$$

относительно неизвестных функций  $P$  и  $Q$  с периодами  $(X, Y)$  по переменным  $(x, y)$ , где  $u, v$  — известные функции с теми же периодами. Согласно теореме 7 решение с любыми начальными условиями стремится при  $t \rightarrow \infty$  к стационарному решению, которое бездивергентно ( $P_x + Q_y \equiv 0$ ). Для любых постоянных  $a$  и  $b$  существует (и единственно) стационарное решение вида

$$P = a + \psi_y, \quad Q = b - \psi_x,$$

где  $\psi$  — функция периода  $X$  по  $x$  и  $Y$  по  $y$ .

В частности, рассмотрим уравнение

$$\dot{\Omega} = \operatorname{rot}[w \times \Omega] + D\Delta\Omega \quad (8)$$

относительно не зависящего от  $z$  периодического по  $x$  и  $y$  соленоидального поля  $\Omega$  с компонентами  $(P, Q, 0)$  при не зависящем от  $z$  периодическом по  $x$  и  $y$  поле  $w$  с компонентами  $(u, v, 0)$ .

**Теорема 8.** 1) При любом  $D > 0$  уравнение (8) имеет стационарное решение с любыми наперед заданными периодами  $a$  и  $b$ , и притом только одно; 2) решение с любым соленоидальным начальным условием (периодическим и не зависящим от  $z$ ) стремится при  $t \rightarrow \infty$  к стационарному решению с теми же «потокками»  $a$  и  $b$ , что и начальное условие.

#### 4. Доказательства

**Доказательство теоремы 1** (по Е. И. Коркиной). Рассмотрим на замкнутых  $k$ -формах оператор  $A = L_v + D\Delta$ . Обозначим через  $\text{Ker } A$  множество решений однородного уравнения  $A\omega = 0$  и через  $\text{Im } A$  образ  $A$  — подпространство в пространстве  $H$  замкнутых  $k$ -форм. Фактор-пространство  $H/\text{Im } A$  называется коядром ( $\text{Coker } A$ ). Разность размерностей  $\dim \text{Ker } A - \dim \text{Coker } A$  называется индексом оператора. В конечномерном случае индекс оператора, действующего из пространства в себя, всегда равен 0. В бесконечномерном случае это не всегда так, но это верно для оператора Лапласа, а поскольку наш оператор отличается от  $D\Delta$  младшими членами ( $L_v$  первого порядка), то  $\text{ind } A = \text{ind } \Delta$  (см., например, [4], [5]). Значит,  $\dim \text{Ker } A = \dim \text{Coker } A$ . Но  $\text{Im } A \subset \text{Im } d$  (ибо  $A\omega = d(i_v\omega + D\delta\omega)$ , если  $d\omega = 0$ ). Следовательно,

$$\dim H/AH \geq \dim H/\{d\omega^{k-1}\} = b_k$$

(теорема де Рама).

**Доказательство теоремы 2. А.** При эволюции (1) класс когомологий замкнутой формы не меняется, так как  $A\omega = d(i_v\omega + D\delta\omega)$  — точная форма.

**Б.** На ортогональном дополнении гармонических форм в замкнутых, т.е. на точных формах  $\omega$ , имеют место неравенства

$$\langle \omega, \omega \rangle \leq \alpha \langle \delta\omega, \delta\omega \rangle, \quad \langle \omega, L_v\omega \rangle \leq \beta \langle \delta\omega, \delta\omega \rangle,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — положительные постоянные, не зависящие от  $\omega$ .

**В.** Из пп. А и Б следует, что на пространстве точных форм эволюция (1) ведет к вырождению, если  $D$  достаточно велико:

$$\langle \omega, \omega \rangle = 2\langle \omega, L_v\omega \rangle - 2D\langle \omega, d\delta\omega \rangle \leq 2(\beta - D)\langle \delta\omega, \delta\omega \rangle \leq -2\gamma\langle \omega, \omega \rangle,$$

если  $D \geq \beta + \alpha\gamma$ .

**Г.** Из пп. А и В следует, что на аффинном пространстве замкнутых форм, лежащих в одном (любом) классе когомологий, эволюция (1) определяет поток *сжатых* преобразований (в гильбертовой метрике) и, следовательно, имеет неподвижную точку. Утверждения 1, 2 и 3 доказаны.

**Д.** Как  $L_v$ , так и  $\Delta$  коммутируют с  $d$ , поэтому  $d\omega$  подчиняется такому же уравнению (1), как и  $\omega$ . Но форма  $d\omega$  точная, поэтому согласно

п. В она экспоненциально стремится к 0 при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, расстояние от  $\omega(t)$  до пространства замкнутых форм экспоненциально стремится к 0 при  $t \rightarrow \infty$ . Более того, такое же стремление к нулю есть и в метриках, учитывающих производные (если коэффициент диффузии  $D$  достаточно велик; это доказывается, как в п. В, с использованием неравенств типа  $\langle \Delta\omega, \Delta L_v\omega \rangle \ll D \langle \Delta\omega, \Delta^2\omega \rangle$  для точных форм).

Обозначим теперь ортогональное разложение исходной формы  $\omega$  на точное, гармоническое и коточное (лежащее в образе оператора  $\delta$ ) слагаемые через  $\omega = p + h + q$ . Уравнение (1) принимает вид системы

$$\dot{p} = A_1 p + A_2 h + A_3 q, \quad \dot{h} = A_4 q, \quad \dot{q} = A_5 q$$

(ибо при  $q(0) = 0$  форма остается замкнутой, т.е.  $q(t) \equiv 0$ , а замкнутая форма сохраняет свой класс когомологий, т.е.  $\dot{h} = 0$  при  $q = 0$ ).

Теперь, поскольку  $q(t) \rightarrow 0$  (в метриках с производными) экспоненциально,  $h(t)$  стремится к конечному пределу (также в метриках с производными). Но согласно п. В преобразование  $\exp(A_1 t)$  сжато, поэтому и  $p(t)$  стремится к конечному пределу. Следовательно,  $\omega(t)$  сходится к конечному пределу  $p(\infty) + h(\infty)$ , являющемуся замкнутой формой. Утверждения 4 и 5 доказаны.

**Доказательство теоремы 3** (по Ю. С. Ильяшенко и Е. М. Ландису). Если бы стационарное решение где-нибудь было больше своего минимума, оно бы немедленно всюду выросло (так как тепло распространяется мгновенно) и не было бы стационарным (так называемый усиленный принцип максимума). Следовательно, оно всюду равно своему минимуму, т.е. постоянно.

То же рассуждение показывает, что и периодическое по времени решение уравнения (5) должно быть константой. Следовательно, оператор  $A = L_v + D\Delta$  на функциях не имеет чисто мнимых собственных чисел и имеет единственный собственный вектор с собственным числом 0. Жордановых клеток с собственным числом 0 тоже не может быть (по принципу максимума); значит, 0 — однократное собственное число, а все остальные собственные числа лежат строго в левой полуплоскости.

Поскольку  $A$  есть сумма эллиптического оператора  $D\Delta$  и оператора  $L_v$  меньшего порядка, из полученной информации о спектре посредством стандартных рассуждений выводится сходимость всех решений к константам (даже в метриках с производными).



**Доказательство теоремы 4.** Оператор  $B$  правой части уравнения (6), переводящий  $g$  в  $\operatorname{div}(gv + D\Delta g)$ , сопряжен с оператором  $A = L_{-v} + D\Delta$  на функциях:  $A = B^*$ . Собственные числа операторов  $B$  и  $B^*$  совпадают, поэтому размерности пространств стационарных решений уравнений (6) и (5) одинаковы; они равны 1 по теореме 3. Утверждения 2 и 3 теоремы 4 вытекают из полученной при доказательстве теоремы 3 информации о спектре оператора  $A$ . Утверждение 4 следует из 3, так как  $\int (\operatorname{div} \Omega)\tau = 0$ .

**Доказательство теоремы 5.** Заметим, что оператор  $L_v + D\Delta$  коммутирует с  $d$ . Отсюда следует, что решение с начальным условием  $\omega_0 = df_0$  эволюционирует под влиянием (1) так же, как производная  $df$  решения  $f$  уравнения (5) с начальным условием  $f_0$ . Из теоремы 3 следует, что  $f \rightarrow \operatorname{const}$  (с производными). Значит,  $df \rightarrow 0$ , т.е. точная 1-форма вырождается с течением времени. Таким образом, единственное стационарное решение, являющееся точной формой, есть 0. Но по теореме 1 размерность пространства решений стационарного уравнения не меньше  $b_1$ , т.е. коразмерности подпространства точных 1-форм в пространстве замкнутых. Поскольку с подпространством точных форм пространство стационарных решений пересекается лишь по нулю, его размерность в точности равна числу Бетти  $b_1$ , а его проекция на пространство классов смежности замкнутых форм по точным есть изоморфизм. Это доказывает утверждения 1 и 2. Утверждение 3 следует из того, что точные 1-формы вырождаются.

**Доказательство теоремы 6.** Поскольку операторы  $d$  и  $L_v + D\Delta$  коммутируют,  $m$ -форма  $d\omega = g\tau$  эволюционирует по закону (6). По теореме 4, п. 4,  $g$  стремится к 0 при  $t \rightarrow \infty$  (условие  $d\omega = g\tau$  означает, что  $g$  есть дивергенция векторного поля, задающего форму  $\omega$ ).

**Доказательство теоремы 7.** При  $m = 2$  1-форма  $\omega$  является  $(m - 1)$ -формой. По теореме 6 она при  $t \rightarrow \infty$  становится замкнутой ( $d\omega \rightarrow 0$ ). Стремление к 0 здесь экспоненциальное (даже в метриках с производными). Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2, п. Д, и используя для исследования поведения точных форм теорему 5, приходим к выводу, что предел  $\omega$  при  $t \rightarrow \infty$  существует и замкнут.

**Доказательство теоремы 8.** Это частный случай теоремы 7: ее нужно применить к 1-форме  $\omega = P dy - Q dx$ .

## 5. Дискретный случай

Пусть  $g : M \rightarrow M$  — диффеоморфизм компактного риманова многообразия,  $g_! = g^{*-1}$  — его действие на формы (переносом вперед),  $h_t$  — эволюция в течение времени  $t$  под действием уравнения диффузии:

$$h_t = \exp(t\Delta), \quad f_t = h_t g_!.$$

Рассмотрим действие  $g_!$  на когомологии,  $G_! : H^* \rightarrow H^*$  ( $H^* = H^*(M, \mathbb{R})$ ).

**Теорема 9.** 1. Класс когомологий замкнутой формы  $f_t \omega$  получается из класса замкнутой формы  $\omega$  действием  $G_!$ .

2. Если  $t$  достаточно велико, а  $G$  — тождественное преобразование, то

- а) для любой замкнутой формы  $\omega$  существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_t^n \omega$ ;
- б) этот предел есть единственная замкнутая форма, когомологичная  $\omega$  и неподвижная при действии  $f_t$ ;
- в) если форма  $\omega$  точна, то  $f_t^n \omega \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- г) для любой формы  $\omega$  (не обязательно замкнутой) при  $n \rightarrow \infty$  последовательность форм  $f_t^n \omega$  сходится и предел — замкнутая форма.

**Теорема 10.** Пусть  $M$  — двумерное многообразие; в этом случае утверждения а)–г) теоремы 9 верны для любого  $t > 0$  (а не только для больших  $t$ ).

Доказываются эти дискретные аналоги теорем 2 и 7 (и аналоги остальных теорем) так же, как сами теоремы.

Тем же методом можно доказать, например, что если  $M = T^2$  и  $G_! = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , то  $f_t^n \omega$  растет не быстрее первой степени  $n$ .

**Замечание 2.** Случай  $G_! = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  использован в [3], [6] для построения кинематического динамо на трехмерном компактном римановом многообразии. Течение на трехмерном торе [3]

$$v = (A \sin y + B \cos z, B \sin z + C \cos x, C \sin x + A \cos y),$$

создающее экспоненциальное растяжение частиц, является естественным кандидатом на кинематическое усиление магнитного поля, т.е. на

существование остающегося положительным при  $D \rightarrow 0$  инкремента роста замкнутой 2-формы  $\omega$  при эволюции (1).

При попытке численно обнаружить рост поля Е. И. Коркина натолкнулась на устойчиво нулевой (при больших  $D$ ) инкремент. Это наблюдение последовательно привело к теоремам 2, 1, а затем и к остальным результатам настоящей работы. При  $D = 1/12$ ,  $A = B = C = 1$  Е. И. Коркина методом Галёркина обнаружила положительный инкремент:  $\lambda = 0,0079 \pm 6,2i$  (два корня перешли в неустойчивую полуплоскость через мнимую ось).

Автор благодарен за полезные обсуждения М. И. Вишику, Я. Б. Зельдовичу, Ю. С. Ильяшенко, Е. И. Коркиной, Е. М. Ландису, А. Г. Хованскому и М. А. Шубину.

## Литература

- [1] Cowling T. G. The magnetic field of sunspots. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 1934, **94**, 39–48.
- [2] Зельдович Я. Б. Магнитное поле в проводящей турбулентной жидкости при двумерном движении. *Ж. эксперим. и теор. физ.*, 1956, **31**(1), 154–155.
- [3] Арнольд В. И. Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей. *Прикл. матем. и механ.*, 1972, **36**(2), 255–262.
- [4] Пале Р. С. Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М.: Мир, 1970, 359 с.
- [5] Фам Нгох Тхао. Естественные дифференциальные операторы на компактных многообразиях. *Дифференц. уравнения*, 1969, **5**(1), 186–198.
- [6] Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитное поле в стационарном течении с растяжениями в римановом пространстве. *Ж. эксперим. и теор. физ.*, 1981, **81**(6), 2052–2058.

# Crafoord Prize

in mathematics

1982



CRAFOORD LECTURES

Vladimir I. Arnold and  
Louis Nirenberg

THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES

## Некоторые нелинейные задачи

Маленький кусочек любой кривой похож на отрезок прямой. Локальное приближение кривой с помощью прямой называется линеаризацией. Во многих случаях хватает этого приближения. Например, малые колебания маятника и малые отклонения спутника от его стандартной орбиты можно с достаточной точностью описать линейными уравнениями.

Нелинейные уравнения появляются там, где приближения с помощью простой пропорции не достаточно. Например, свет описывается как линейные электромагнитные колебания, но с ростом интенсивности света становятся существенными нелинейные явления, и поэтому лазерная оптика, в основном, нелинейна.

Механические колебания мы можем обычно считать линейными, но нелинейные явления становятся важны, если мы интересуемся поведением незатухающих колебаний после многих периодов, потому что накопление малых нелинейных эффектов может полностью изменить поведение системы на больших временах.

Подобные трудности возникают в небесной механике. Возмущающее влияние каждой планеты на остальные мало, но оно могло бы, в принципе, полностью изменить орбиты, если бы накапливалось в течение, скажем, 10000 лет. Чтобы объяснить, почему планеты не сталкиваются, не падают на Солнце или не улетают на бесконечность, надо учесть накопление нелинейных эффектов.

Классический пример нелинейной теории — гидродинамика несжимаемой жидкости; в этой теории до сих пор не решена проблема математического описания турбулентности.

Трудности, связанные с нелинейными задачами, постоянно требуют новых математических методов. На этом пути были изобретены мощные математические средства, такие, как аппарат симплектической геометрии, введенный в работах Гамильтона по оптике и механике, и топология, основанная Пуанкаре, которого привели к ней задачи теории нелинейных дифференциальных уравнений и небесной механики.

В этом докладе я буду говорить о трех нелинейных задачах: об эволюции гамильтоновых систем, о турбулентности и проблеме долгосрочного прогноза погоды и об использовании теории каустик для объяснения крупномасштабной структуры Вселенной.

1. Задача описания взаимных возмущений планет, сформулированная Ньютоном, была «в первом приближении» решена Лагранжем и Лапласом. Лаплас высказал свою «теорему об устойчивости Солнечной системы»: орбиты планет, близкие к компланарным окружностям, будут оставаться близкими к этим окружностям бесконечно долго.

Эта теорема была доказана Лапласом для движений планет, подчиняющихся не нелинейным уравнениям Ньютона, а некоторой их линеаризации. Не принятые во внимание нелинейные эффекты на интервалах времени порядка многих тысяч лет приводят лишь к малым возмущениям. Но, накапливаясь в течение миллионов лет, они могли бы полностью изменить орбиты, — если бы обусловленная ими эволюция была систематическим дрейфом, а не колебаниями.

Попытки обосновать выводы Лапласа были очень продуктивными для теории дифференциальных уравнений (сошлюсь лишь на работы А. Пуанкаре, Дж. Биркгофа, К. Л. Зигеля и Дж. Литтлвуда). Биркгоф сформулировал простую модельную задачу, уже содержащую ту же самую трудность, что и исходная задача. Для поворота плоскости все последовательные образы точки, близкой к центру вращения, остаются вблизи центра, когда мы итерируем поворот. Биркгоф поставил вопрос, верно ли то же самое для итераций типичного сохраняющего площадь близкого к повороту отображения плоскости (противное означало бы, что накопление нелинейных возмущений может изменить устойчивость центра вращения; это очевидным образом верно для типичных не сохраняющих площадь отображений).

Строгие выводы о поведении орбит на бесконечных интервалах времени стали доступны только после того, как Колмогоров (1954 г.) ввел свой «метод Ньютона» и доказал сохранение  $n$ -мерных торов в  $2n$ -мерном фазовом пространстве аналитической гамильтоновой системы при малых возмущениях функции Гамильтона.

Проблема Биркгофа была положительно решена этим методом в 1961 г.; устойчивость планетных движений для большинства начальных условий, близких к компланарным круговым орбитам, была доказана

для достаточно малых отношений масс планет к массе центрального тела в течение весны 1962 г.

До сих пор неизвестно, достаточно ли малы действительные отношения масс, эксцентриситеты и наклоны орбит для существования колмогоровских торов. (Доказательство требует нереально малых значений этих величин.)

Требование аналитичности в теореме Колмогорова было ослаблено Ю. Мозером, который ослабил также условие иррациональности в моем решении проблемы Биркгофа и добавил много других улучшений. Он использовал технику сглаживания, изобретенную Дж. Нэшем для решения одной нелинейной задачи в дифференциальной геометрии (о реализации данной римановой метрики с помощью подмногообразия евклидова пространства).

Чтобы понять теорему Колмогорова, рассмотрим ее применение к изучению магнитных силовых линий в тороидальных системах, таких, как ловушка для плазмы. В этом случае теорема утверждает устойчивость магнитных поверхностей, составленных из магнитных линий. На рис. 1 показано сечение системы плоскостью. Закрытые кривые — это сечения магнитных поверхностей (или колмогоровских торов). Точки, нарисованные между кривыми, — это последовательные точки пересечения одной магнитной линии с плоскостью. Эта линия не лежит ни на какой магнитной поверхности, но она заперта между двумя такими поверхностями.

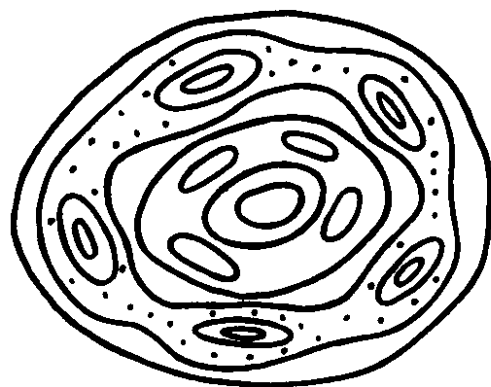


Рис. 1

Подобным образом обстоит дело и для механических систем с двумя степенями свободы, близких к интегрируемым: орбиты заперты между торами на поверхности уровня энергии.

Для систем с более чем двумя степенями свободы колмогоровские торы не разделяют многообразие уровня энергии, и орбиты могут уходить из окрестностей торов через щели между этими торами. Механизм такого ухода был изучен в 1964 г., и были построены примеры неограниченного накопления возмущений. Скорость ухода в этих примерах убывает экспоненциально (как  $\exp(-1/\sqrt{\epsilon})$ , когда возмущения убывают, как  $\epsilon$ ). Позже (в 1971 г.) Н. Н. Нехорошев доказал невозможность более быстрого ухода. Экспоненциальное убывание скорости ухода

объясняет, почему последний не обнаруживается ни в каком порядке теории возмущений:  $\exp(-1/\varepsilon^a)$  убывает быстрее любой степени  $\varepsilon$ .

По-видимому, движение типичной близкой к интегрируемой аналитической системы с тремя или более степенями свободы может дрейфовать из любой окрестности любого колмогоровского тора в любую окрестность любого другого тора на том же уровне энергии в результате накопления возмущений. Например, вероятно, что орбиты планет, притягивающихся по закону Ньютона, могут катастрофически изменить свою форму в результате подходящего произвольно малого возмущения начальных условий, но такие возмущения чрезвычайно редки и время, требуемое для значительного изменения орбиты, больше возраста Солнечной системы. Конечно, для такого большого периода времени нельзя пренебрегать влиянием неконсервативных сил, не принимаемых во внимание в подходе Ньютона.

2. Вскоре после открытия колмогоровских торов было сделано новое важное открытие в теории нелинейных дифференциальных уравнений: устойчивость хаотических движений в детерминированных динамических системах (С. Смейл, Д. В. Аносов и другие, начало 60-х гг.). До этого открытия большинство математиков полагало, что типичная (не гамильтонова) динамическая система эволюционирует или к устойчивому стационарному режиму, или к строго периодическому колебательному режиму. Это мнение подтверждалось многими примерами и теоремой Андронова и Понтрягина, утверждающей, что для типичной системы на двумерной фазовой плоскости других возможностей нет.

Теперь же было обнаружено, что эволюция динамической системы может привести к типу движения, совершенно отличному от стационарного или периодического. Одна из характерных особенностей этих новых предельных типов движения — чрезвычайная чувствительность деталей движения к начальным условиям. С другой стороны, усредненные характеристики предельного поведения устойчивы к малым возмущениям начального состояния или даже всей динамической системы.

Пример такого сложного поведения доставляют геодезические на поверхности отрицательной кривизны (пример такой поверхности — седло). Много десятилетий назад было доказано (Ж. Адамаром и Э. Хопфом), что геодезические на поверхности отрицательной кривизны очень чувствительны к выбору начальной точки. Соседние геодезические экспоненциально расходятся и могут всюду плотно заполнять



всю поверхность. Теперь стало ясно, что все это сложное поведение устойчиво и что типичная динамическая система с более чем двумерным фазовым пространством может демонстрировать такое сложное поведение как финальное состояние своей эволюции.

Две области приложений этих экспоненциально неустойчивых финальных движений появились в 1963 г.: доказательство эргодической гипотезы Больцмана и моделирование турбулентности. Я предполагаю, что Колмогоров думал об обеих этих проблемах, когда в 1958 г. он начал семинар по взаимосвязям между теорией динамических систем, эргодической теорией и теорией гидродинамической неустойчивости.

Для доказательства эргодичности в модели Больцмана упругих шаров в ящике я предложил рассмотреть эту модель как предельный случай геодезического потока на многообразии отрицательной кривизны. Эта идея стала отправной точкой для большой серии работ Я. Г. Сина и его учеников, которые доказали эргодичность для некоторых нетривиальных случаев (скажем, для двух шаров), но общая задача пока не решена.

В 1963 г. я был очень оптимистичен в отношении гидродинамических приложений новой теории. У меня была наивная надежда найти гладкие многообразия, заполненные экспоненциально разбегающимися орбитами и притягивающие соседние орбиты в фазовом пространстве уравнений Навье–Стокса, и распознать эти многообразия с помощью компьютера. В 1964 г. я провел компьютерный эксперимент с 6-модовым приближением уравнения Навье–Стокса на двумерном торе. Я не смог отличить полученный аттрактор от трехмерного тора.

Пытаясь понять появление этих трехмерных торов, я пришел (после некоторых промежуточных шагов) к геодезическим потокам: движение идеальной жидкости — не что иное, как движение по геодезическим на бесконечномерном многообразии (это многообразие есть группа преобразований области движения).

Я вычислил кривизну этого бесконечномерного многообразия. Оказалось, что она, в основном, отрицательна. Отрицательная кривизна делает движение жидкости экспоненциально неустойчивым. Можно даже оценить по значению кривизны максимальное время, на которое возможен надежный прогноз погоды. Для очень упрощенной модели, в которой атмосфера считается двумерной идеальной жидкостью, я нашел, что для предсказания погоды на два месяца вперед надо знать ее состояние на сегодня с точностью в  $10^5$  раз лучшей, чем точность

прогноза. Другими словами, долгосрочный динамический прогноз погоды невозможен и останется таковым при любых усовершенствованиях компьютеров.

Я надеялся использовать соображения отрицательности кривизны для вывода экспоненциальной неустойчивости множества финальных движений слабо диссипативной жидкости из экспоненциальной неустойчивости движения идеальной, невязкой жидкости. Я не нашел такого доказательства. Насколько я знаю, доказательства нет и по сей день, хотя сама экспоненциальная неустойчивость наблюдалась в компьютерных экспериментах много раз после появления в 1963 г. работы Лоренца (которая оставалась неизвестной математикам до 70-х гг.).

В 1965 г. реакция большинства математиков на идею, что турбулентность — это экспоненциальная неустойчивость траекторий на конечномерных множествах предельных движений, была почти единодушно отрицательной. Ж. Лерэ и, позднее, О. А. Ладыженская пытались убедить меня, что двумерная турбулентность невозможна, что турбулентность — это или несуществование, или неединственность решений уравнений Навье–Стокса, и что правильное математическое описание турбулентности требует модификации этих уравнений. Исключениями были только С. П. Новиков и Р. Том, на семинаре которого я сделал доклад об экспоненциальной неустойчивости движения жидкости в 1965 г. Я вспоминаю, что на Тома произвела большое впечатление последовательность бифуркаций, происходящих при потере устойчивости, и что работы А. А. Андронова, Э. Хопфа и их последователей о рождении при бифуркации циклов, торов и более сложных аттракторов были тогда практически неизвестны в Западной Европе.

Положение коренным образом изменилось с введением Д. Рюэллем и Ф. Такенсом очень удачного термина «аттрактор». В 70-х гг. гипотеза об экспоненциальной неустойчивости движений на конечномерных аттракторах уравнений Навье–Стокса стала широко известной. Однако, насколько я знаю, она еще не доказана, как и во время моих безуспешных попыток 1965 г. вывести ее из отрицательности кривизны. Единственный недавний прогресс, который мне известен, — это оценка сверху размерности аттрактора для двумерного случая ( $\dim < C \operatorname{Re}^4$  для периодических граничных условий, Ю. С. Ильяшенко;  $\dim < C \exp(\operatorname{Re}^{4+\varepsilon})$  для ограниченного случая, М. И. Вишик и А. В. Бабин). [Позднейшие (1983 г.) оценки Вишика–Бабина:  $C \operatorname{Re}^2 \ln^{1/2} \operatorname{Re}$ ,  $C \operatorname{Re}^4$ .]

Для трехмерного случая даже конечность размерности аттрактора не доказана. Для случая двух измерений старая гипотеза, что минимум размерностей аттракторов неограниченно растет при убывании вязкости до нуля, пока не отвергнута, и даже очевидный рост максимума размерностей минимальных аттракторов никогда не был доказан ни для какого примера движения жидкости (в математическом смысле слова «доказан»).

3. Теория фокальных точек и каустик световых лучей восходит к Архимеду и И. Барроу, учителю Ньютона в оптике и математическом анализе. Свет концентрируется на каустиках. С точки зрения симплектической геометрии система лучей (скажем, система всех нормалей к данной поверхности) определяет лагранжево подмногообразие фазового пространства, и каустика — это множество критических значений проектирования этого многообразия на конфигурационное пространство (рис. 2). Особенности такого проектирования называются лагранжевыми особенностями.

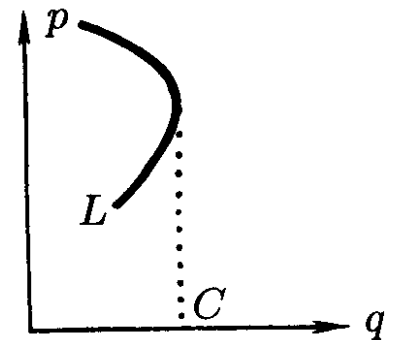


Рис. 2

Каустики могут сами иметь особенности. Например, плоская каустика общего положения имеет точки возврата, а пространственная каустика общего положения — ребра возврата и особенности трех типов, названные Р. Томом «ласточкин хвост», «пирамида» и «кошелек» (рис. 3).

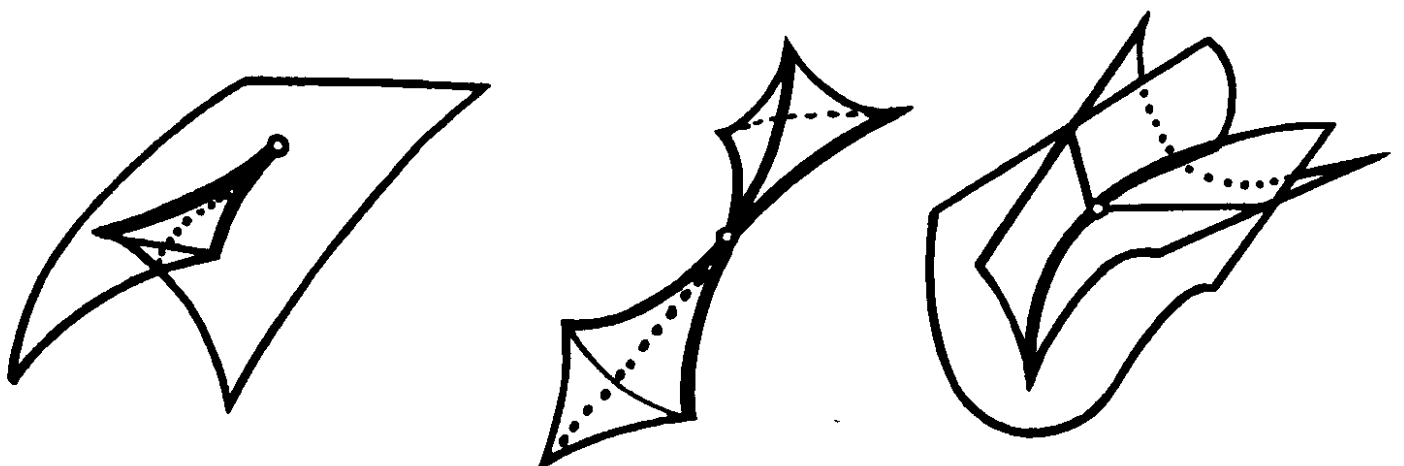


Рис. 3

В начале 1972 г. я обнаружил, что классификация простых особенностей каустик тесно связана с классификацией простых объектов во многих других задачах, таких, как классификация правильных многогранников, простых алгебр Ли, простых колчанов (рис. 4) и т.д. Например, ласточкин хвост соответствует группе Ли  $SU(5)$ , пирамида и кошелек —  $O(8)$ , тетраэдр —  $E_6$ , а икосаэдр —  $E_8$ .

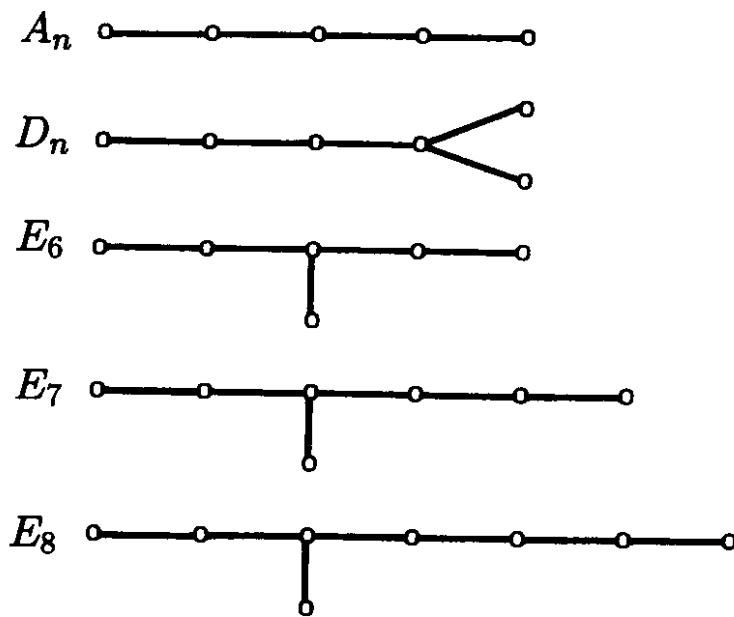


Рис. 4

Эти связи выглядят подобно мистическому закону распределения планетных расстояний Кеплера. Часть из них (например, связь каустик и правильных многогранников) не имеет и сейчас удовлетворительного объяснения.

Для меня невозможно было не открыть эти связи из-за моей предшествующей работы над некоторыми темами, которые в то время казались не связанными.

Читая в 1966 г. диссертацию В. П. Маслова, где он ввел индекс, носящий теперь его имя, я начал классифицировать лагранжевы особенности, воодушевленный общей теорией особенностей Х. Уитни, далеко развитой как раз в то время Томом и Дж. Мазером.

С другой стороны, с моих ранних студенческих лет я время от времени думал над проблемой Гильберта о представлении алгебраических функций суперпозициями. В 1968 г. эта задача привела меня к топологии ласточкиных хвостов и их связи с теорией кос.

В 1971 г. Э. Брискорн, представляя эти работы на семинаре Бурбаки, распространил их на все конечные группы, порожденные отражениями (исключительные случаи рассмотрел П. Делинь). В тот момент просто сравнить два списка, которые я получил, было бы достаточно, — но я сделал это только годом позже, когда вычислял особенности осциллирующих интегралов, представляющих интенсивность света в особенностях каустик. Я впервые оценил важность связи между каустиками и конечными группами, порожденными отражениями, ко-

гда Б. Костант, бывший тогда в Москве, помог мне распознать числа Кокстера в членах асимптотических формул для интенсивности света.

Позже я осознал, что сталкивался с теми же самыми списками, замаскированными иначе, много раз, например, в книге Дж. Милнора и в статье Г. Н. Тюриной об особых точках комплексных гиперповерхностей (1968 г.), в докладе Брискорна на конгрессе в Ницце (1970 г.) и в моей собственной статье о бифуркациях линейных дифференциальных уравнений (1971 г.); связи с правильными многогранниками уже обсуждались в «Лекциях о развитии математики в XIX столетии» Ф. Клейна.

Развитие теории особенностей в результате обнаружения неожиданных связей каустик с группами, порожденными отражениями, с косами и т.д. было таким быстрым и привело к столь многим открытиям столь многих математиков, что его невозможно здесь описать.

Вместо этого я кратко остановлюсь на одном из физических приложений теории лагранжевых особенностей — на ее применении для объяснения крупномасштабной структуры Вселенной.

Распределение вещества во Вселенной крайне неоднородно: существуют звезды, галактики, скопления галактик и т.д. Современная астрофизика считает, что такой неоднородности не существовало, когда Вселенная была в 1000 раз меньше, чем теперь. В 1970 г. Я. Б. Зельдович предложил механизм формирования скоплений вещества из-за малой неоднородности начального потенциального поля скоростей. Теория Зельдовича, названная позднее «теорией блинов», математически совпадает с теорией лагранжевых особенностей (во всяком случае, для несталкивающихся частиц).

Теория лагранжевых особенностей предсказывает образование ячеистой крупномасштабной структуры с низкой плотностью внутри ячеек, высокой плотностью на стенках ячеек, более высокой плотностью на ребрах возврата стенок и самой высокой — в наиболее особых точках (ласточкины хвосты, пирамиды и кошельки в очень упрощенной модели свободно движущихся частиц). Недавно С. Ф. Шандарин сравнил эту модель с действительным распределением галактик. Чтобы получить объективный критерий существования ячеистой структуры, он использовал теорию просачивания.

Рассмотрим  $N$  частиц (каждая представляет галактику) в кубе с ребром длины  $L$ . В среднем часть куба на частицу есть тогда кубик с ребром длины  $l = L/N^{1/3}$ . Окружим каждую частицу сферой малого

радиуса  $r$ . Когда  $r$  растёт, сферы образуют цепи; их длины превосходят  $L$  для некоторого значения  $r$ . С этого момента можно просочиться с одной стороны первоначального куба на противоположную через объединение сфер. Перколяционный параметр есть отношение минимального  $r$ , достаточного для просачивания, к длине ребра нашего кубика, т.е.  $r/l$ .

Для распределения частиц ячеистой структуры перколяционный параметр меньше, а для иерархической структуры (когда частицы образуют кучи, а не поверхности или линии) — больше, чем для случайного распределения независимых частиц.

Для действительного распределения галактик Шандарин получил гораздо меньшее значение перколяционного параметра, чем для независимых случайных частиц; это доказывает тенденцию галактик к формированию ячеистой структуры или, хотя бы, сети (можно различить эти случаи, используя более тонкий перколяционный параметр).

## Рост магнитного поля в трехмерном стационарном потоке несжимаемой жидкости

Совместно с Е. И. Коркиной

Целью настоящей работы является численное исследование поведения решений уравнения, описывающего эволюцию магнитного поля в стационарном потоке проводящей жидкости:

$$\partial H / \partial t = \{v, H\} + \varepsilon \Delta H. \quad (1)$$

Здесь  $v$  — заданное поле дивергенции нуль (поле скоростей течения),  $H$  — эволюционирующее с течением времени  $t$  магнитное поле,  $\{v, H\} = v \nabla H - H \nabla v$  — скобка Пуассона,  $\Delta = -\operatorname{rot} \operatorname{rot}$  — оператор Лапласа,  $\varepsilon > 0$  — магнитная вязкость. Мы предполагаем, что поля  $v$  и  $H$  определены во всем трехмерном пространстве и имеют период  $2\pi$  по каждой из трех координат  $(x, y, z)$ .

Для исследования было выбрано специальное поле скоростей

$$v = (\cos y + \sin z) \partial / \partial x + (\cos z + \sin x) \partial / \partial y + (\cos x + \sin y) \partial / \partial z.$$

Для этого поля экспериментально установлено [1] экспоненциальное растяжение частиц жидкости и потому при  $\varepsilon = 0$  наблюдается экспоненциальный рост поля  $H$ .

Показатель экспоненты ( $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \|H(t)\| / t$ ) определяется наибольшим характеристическим показателем Ляпунова поля  $v$  (грубо говоря, поле  $v$  имеет в данной точке показатель Ляпунова  $\lambda$ , если за время  $t$  вышедшая из этой точки частица жидкости растягивается в  $e^{\lambda t}$  раз). Наибольшие из наблюдавшихся нами характеристических показателей Ляпунова поля  $v$  имели порядок величины 0,15 (например, для начальной точки  $x = 0,1 \cdot 2\pi$ ,  $y = 0,4 \cdot 2\pi$ ,  $z = 0,51 \cdot 2\pi$ ). С другой стороны, поле  $v$  очень удобно для исследования уравнения с помощью галёркинских приближений, так как имеет мало гармоник.

**1. Результаты вычислений.** Вычислялось собственное число линейного оператора  $A_\varepsilon$ , стоящего в правой части уравнения (1), которое имеет наибольшую вещественную часть. При большой магнитной вязкости  $\varepsilon$  эта вещественная часть оказалась точно равной нулю и не зависящей от  $\varepsilon$ .

При уменьшении магнитной вязкости до некоторого критического значения  $\varepsilon_1$  пара комплексно сопряженных чисел переходит из левой полуплоскости в правую. При дальнейшем уменьшении вязкости вещественные части этих собственных чисел растут до тех пор, пока вязкость не достигнет второго критического значения  $\varepsilon_2$ , после чего

начинают убывать; при третьем критическом значении вязкости  $\varepsilon_3$  они снова обращаются в нуль и затем становятся отрицательными.

Таким образом, мы наблюдали рост магнитного поля («кинематическое динамо») в интервале между значениями магнитной вязкости  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_3$ . Мы не смогли провести вычисления при значительно меньших, чем  $\varepsilon_3$ , значениях вязкости и не знаем, будут ли при  $\varepsilon \rightarrow 0$  все собственные числа лежать в левой полуплоскости или перейдут в правую.

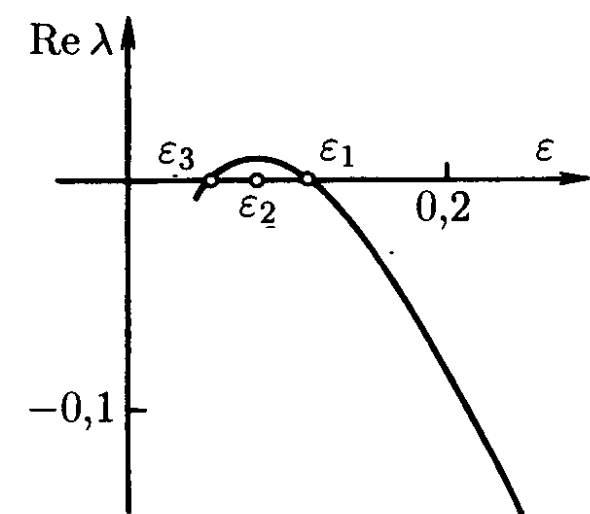


Рис. 1

Изменение вещественной части собственного числа  $\lambda$  по мере убывания  $\varepsilon$  изображено на рис. 1. Критические значения вязкости:

$$\varepsilon_1 \approx 0,112, \quad \varepsilon_2 \approx 0,083, \quad \varepsilon_3 \approx 0,057.$$

В таблице приведены положения переходящей в правую полуплоскость пары собственных чисел при некоторых значениях  $\varepsilon$ .

$1000\varepsilon$	435	250	143	111	100	90,9	83,4	71,5	55,6
$1000 \operatorname{Re} \lambda$	-433	-151	-22,6	0,44	5,3	7,6	7,9	6,1	-0,67
$1000  \operatorname{Im} \lambda $	548	602	625	607	625	623	618	604	580

При больших значениях  $\varepsilon$  удобно рассматривать скобку Пуассона в (1) как возмущение, и потому в таком случае мы вычисляли собственные числа оператора

$$H \mapsto \Delta H + \eta \{v, H\}, \quad \eta = 1/\varepsilon \quad (2)$$



(эти числа отличаются от рассмотренных выше множителем  $\eta$ ).

При  $\eta = 0$  собственные числа оператора (2) равны 0 (кратности 3),  $-1$  (кратности 12),  $-2$  (кратности 24) и т.д. Трехкратное собственное число 0 сохраняется при всех значениях  $\eta$  (ему соответствуют стационарные решения уравнения (1)). Три линейно независимых стационарных решения отвечают трем компонентам вектора среднего значения поля  $H$ . Среднее значение поля  $H$  сохраняется при эволюции (1). При достаточно большой вязкости (достаточно малом  $\eta$ ) поле  $H$  при  $t \rightarrow \infty$  стремится к стационарному полю с таким же средним значением, как и у начального поля. Собственное число  $-1$  оператора (2) также сохраняется при всех  $\eta$  (оно отвечает собственному вектору  $H = v$ ).

Мы исследовали поведение при уменьшении  $\eta$ , т.е. при увеличении вязкости, той пары комплексно сопряженных собственных чисел оператора (2), которая переходит через мнимую ось при критическом значении  $\eta_1 = 1/\varepsilon_1$ . Оказалось, что при уменьшении  $\eta$  до критического значения  $\eta_0$ , для которого вещественная часть собственных чисел пары становится равной  $-1$ , эти собственные числа имеют наибольшую вещественную часть среди всех собственных чисел оператора (2) на пространстве бездивергентных полей со средним значением нуль. При дальнейшем уменьшении  $\eta$  собственные числа пары приближаются одно к другому. Они сливаются и переходят на вещественную ось при следующем критическом значении  $\eta_*$ , после чего при  $\eta \rightarrow 0$  одно из собственных чисел стремится к  $-1$ , а другое — к  $-2$ .

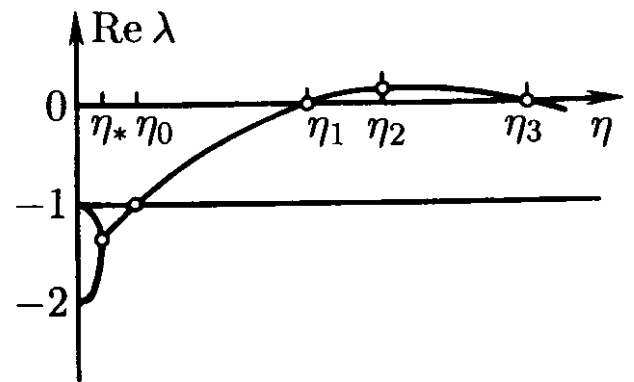


Рис. 2

Поведение вещественных частей собственных чисел  $\lambda$  при изменении  $\eta$  изображено на рис. 2. Критические значения:

$$\eta_1 \approx 8,93, \quad \eta_0 \approx 2,29, \quad \eta_* \approx 0,96.$$

Соответствующие собственные числа:

$$\lambda_1 \approx 5,6, \quad \lambda_0 \approx -1 + 1,25i, \quad \lambda_* \approx -1,35.$$

Собственные векторы, отвечающие вычисленным собственным значениям, переходят в себя при циклической перестановке координат

$(x, y, z)$ . Первые гармоники этих векторов не зависят от параметра ( $\varepsilon$  или  $\eta$ ) и имеют вид

$$H_1 = (\cos z - \sin y)\partial/\partial x + (\cos x - \sin z)\partial/\partial y + (\cos y - \sin x)\partial/\partial z.$$

Распределение амплитуд коэффициентов Фурье собственного вектора по номерам гармоник обнаруживает своеобразные закономерности. Обозначим через  $E(\vec{k}^2)$  сумму квадратов модулей коэффициентов Фурье гармоник  $e^{i(\vec{k}, \vec{x})}$  с волновыми векторами, квадрат длины которых равен  $\vec{k}^2$ . При некоторых значениях  $\vec{k}^2$  сосчитанное значение  $E(\vec{k}^2)$  оказалось равным нулю. Таковы значения

$$\vec{k}^2 = 3, 4, 7, 12, 15, 16, 23, 28, 31, 39, 47, 48, 55, 60, 63, 64, 71, \dots$$

Среди них встречаются, во-первых, все числа  $4^a(8b+7)$  (не являющиеся квадратами длин волновых векторов), а во-вторых — все числа  $4^a$  и  $3 \cdot 4^a$  (объясняемые специальной симметрией собственного вектора [3]). Симметрия втрое снижает магнитное число Рейнольдса (до  $lv\eta/3 \approx 2\pi\sqrt{3}\eta/3$ ).

**2. Техника вычислений.** Для достижения нужной точности вычисления собственных значений при наших значениях вязкости (до  $\varepsilon \approx \approx 1/20$ ) потребовалось находить собственные числа матрицы порядка  $\approx 20\,000$ , поэтому объясним, как мы их считали.

Мы аппроксимировали оператор (2) галёркинским приближением, т.е. рассматривали тригонометрические суммы  $H$  с волновыми векторами  $\vec{k}$ , у которых  $|\vec{k}^2| \leq R^2$ . Скобку Пуассона  $\{v, H\}$  заменяли проекцией на это же пространство, т.е. отбрасывали гармоники с большими  $|k^2|$ . Собственное число полученного оператора  $A$  в пространстве конечной размерности  $N$  ( $N \approx 2 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3$ ), которое имело наибольшую вещественную часть, вычисляли итерациями

$$H^{(n+1)} = (E + tA)H^{(n)},$$

где  $t$  выбирали достаточно малым (обычно вдвое меньшим, чем  $1/R^2$ ).

Приближенное значение собственного числа с наибольшей вещественной частью мы вычисляли по проекциям трех последовательных векторов  $H^{(n)}$ ,  $(E + tA)H^{(n)}$ ,  $(E + tA)^2H^{(n)}$  на плоскость гармоник с малыми волновыми векторами. Значение  $T$  выбирали достаточно

большим, чтобы отделить изучаемое собственное значение от единицы, но достаточно малым, чтобы погасить влияние больших по модулю отрицательных собственных чисел лапласиана (практически выбирали  $T \approx 0,1$ ).

Итерации прекращали при настолько больших  $n$ , что приближенное собственное число переставало меняться в третьем знаке после запятой.

При таком способе вычислений удастся избежать хранения элементов матрицы  $A$  в памяти. Очень важно, что собственное значение вычисляется по поведению проекций на маломерное пространство младших гармоник; провести вычисления без этого усовершенствования итерационного метода не удастся.

Выбор параметра  $R$  (радиус обрезания галёркинской аппроксимации) мы производили следующим образом. Контролировали, во-первых, устойчивость найденного приближенного собственного числа по отношению к увеличению  $R$  и, во-вторых, малость амплитуд высоких гармоник. Останавливались на таких значениях  $R$ , при которых в гармониках с  $|\vec{k}^2| = R^2$  сосредоточено не более чем  $10^{-5}$  от полной энергии собственного вектора. Оказалось, что достаточно выбирать  $R$  порядка  $3\sqrt{\eta}$ .

Наибольшее достигнутое значение  $\eta$  было равным 18, и достаточную точность при этом давал выбор  $R = 13$ , т.е. учет гармоник вплоть до  $|\vec{k}^2| = 169$ .

Вычисления проведены Е. И. Коркиной на машине VAX с быстродействием 300 000 операций в секунду. При  $\eta = 18$  подсчет собственного числа занимал порядка 200 килобайт оперативной памяти и 50 часов машинного времени.

Авторы благодарны А. Г. Хованскому, принявшему самое активное участие в обсуждениях работы.

## Литература

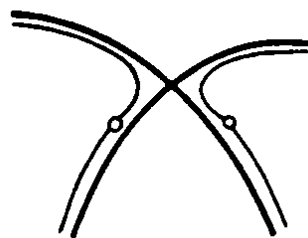
- [1] Hénon M. Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particulier. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1966, **262**, 312–314.
- [2] Арнольд В. И. Несколько замечаний об антидинамо-теореме. *Вестн. МГУ, сер. матем., механ.*, 1982, **6**, 50–57.
- [3] Арнольд В. И. Об эволюции магнитного поля под действием переноса и диффузии. В кн.: *Некоторые вопросы современного анализа. Сборник памяти В. М. Алексеева*. М.: Изд-во МГУ, 1984, 8–21.



## Исчезающие перегибы

**1. Формулировка результата.** В морсовской особой точке общего положения на плоской кривой сливаются 6 точек перегиба (две видны на рисунке, остальные комплексные). Ниже этот результат Плюккера [1] переносится на гиперповерхности в  $\mathbb{C}^n$ .

Точка перегиба такой поверхности — это точка, для которой росток двойственной гиперповерхности диффеоморфен ростку ласточкина хвоста  $\{\lambda : z^{n+1} + \lambda_1 z^{n-1} + \dots + \lambda_n \text{ имеет кратный корень}\}$  в нуле.



**Теорема.** В морсовской особой точке общего положения на гиперповерхности в  $\mathbb{C}^n$  сливаются  $(n+1)!$  точек перегиба.

**2. Происхождение  $(n+1)!$ .** Пусть  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ,  $df|_0 = 0$ . Пусть  $v = \sum x_k \partial / \partial x_k + \dots$  — векторное поле с эйлеровой линейной частью в нуле. Составим систему

$$L_2 = \dots = L_{n+1} = 0, \quad \text{где } L_2 = f, \quad L_{i+1} = vL_i \text{ при } i \geq 2, \quad (1)$$

приравнивая нулю последовательные производные  $f$  вдоль  $v$ .

**Лемма 1.** Кратность нулевого решения системы (1) не меньше  $(n+1)!$  и равна  $(n+1)!$  для пар  $(f, v)$  общего положения.

**Доказательство.** Определим  $M_i$  условиями  $M_2 = f$ ,  $M_{i+1} = (i - v)M_i$  при  $i \geq 2$ . Система  $M_2 = \dots = M_{n+1} = 0$  эквивалентна (1). Порядок нуля функции  $M_i$  в 0 не меньше  $i$  (по теореме Эйлера об однородных функциях). Кратность нуля общей системы уравнений фиксированных порядков равна произведению порядков (см., например, [2]).

**3. Прием Гессе.** Для изучения перегибов на поверхности уровня функции  $f$  составим окаймленный гессиан [3]

$$h = \det H, \quad H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_x \\ f_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Параболические точки задаются уравнением  $h(x) = 0$ . Вектор  $(e, 1)$  принадлежит ядру оператора  $H$  в параболической точке, если и только если вектор  $e$  асимптотический для поверхности уровня.

**4. Условия перегиба.** Пусть  $f$  имеет в  $0$  морсовскую точку. Тогда  $\text{Ker } H(0) = \mathbb{C}(0, 1)$ . Поэтому  $H(x)$  имеет единственный собственный вектор  $\xi(x) = (e(x), 1)$  с собственным числом  $\lambda(x)$ , в нуле равным нулю;  $e$  и  $\lambda$  гладко зависят от  $x$ . Линейная часть  $e$  в  $0$  отличается от эйлерова поля знаком.

Уравнение параболических точек:  $\lambda(x) = 0$ . Из  $H\xi = \lambda\xi$  следует, что  $\lambda = ef$  (производная  $f$  вдоль  $e$ ). Система уравнений перегиба состоит в обращении в  $0$  и дальнейших производных  $f$  вдоль  $e$  (ср. [4]). Это — система (1) для  $v = -e$ . Пара  $(f, v)$  не общего положения. Но ниже доказано, что главные однородные части функции  $M_i$  п. 2 для  $f$  общего положения — общие.

**5. Теория возмущений.** Будем обозначать члены степени  $i$  в рядах Тейлора левым индексом  $i$ . Ряд Тейлора  $f$  запишем в виде  $x^2/2 + {}_3f + {}_4f + \dots$  (квадратичные члены нормализованы линейной заменой). Векторы будем понимать как столбцы, так что теорема Эйлера принимает вид  $x({}_k f_x) = k {}_k f$ . Уравнение  $H\xi = \lambda\xi$  запишем в виде

$$\begin{aligned} (E + {}_3f_{xx} + \dots)({}_1e + {}_2e + \dots) + x + {}_3f_x + \dots &= ({}_1\lambda + \dots)({}_1e + \dots), \\ (x + {}_3f_x + \dots)({}_1e + {}_2e + \dots) &= {}_1\lambda + {}_2\lambda + \dots \end{aligned}$$

Приравнивая однородные компоненты, находим последовательно

$${}_1\lambda = 0, \quad {}_1e = -x, \quad {}_2\lambda = -x^2, \quad {}_2e = -{}_3f_x - (-x){}_3f_{xx} = {}_3f_x,$$

и вообще

$$i\lambda = x {}_{i-1}e + {}_3f_x {}_{i-2}e + \dots + i f_x {}_1e, \quad (2)$$

$$i e + {}_3f_{xx} {}_{i-1}e + \dots + {}_{i+1}f_{xx} {}_1e + {}_{i+1}f_x = {}_2\lambda {}_{i-2}e + \dots + {}_{i-1}\lambda {}_1e. \quad (3)$$

**6. Исследование возмущений.** Ниже  $a \prec E_i$  означает, что коэффициенты ряда Тейлора компонент  $a$  по  $x$  являются многочленами от коэффициентов форм  ${}_3f, \dots, i f$  (при  $i < 3$  — не зависят от этих форм). Запись  $a \equiv b \pmod{E_i}$  означает  $a - b \prec E_i$ .

**Лемма 2.**  $i e \equiv (i - 1) {}_{i+1}f_x \pmod{E_i}$ .

**Доказательство.**  $2_1$  очевидно. Если  $j e \prec E_{j+1}$  для  $j < i$ , то из (2)  $i \lambda \prec E_i$ . Теперь из (3)  $i e \equiv -(i+1 f_{xx}(-x) + i+1 f_x) \bmod E_i$ . Но по Эйлеру  $i+1 f_{xx} x = i+1 f_x$ .  $2_i$  доказано.

**7. Исследование функций  $M_i$ .** По определению (пп. 2 и 4)  $M_2 = f$ ,  $M_{i+1} = (i + e)M_i$ .

**Лемма  $3_i$ .** При  $j \geq i \geq 2$   ${}_j M_i \equiv c_{i,j} {}_j f \bmod E_{j-1}$ , где  $c_{i,j} \neq 0$ .

**Доказательство.**  $3_2$  очевидно:  ${}_j M_2 = {}_j f$ ,  $c_{2,j} = 1$ . Выведем  $3_{k+1}$  из  $3_k$ . По определению функций  $M$ ,

$${}_j M_{k+1} = k {}_j M_k + ({}_j M_{kx} {}_1 e + \dots + {}_k M_{kx} {}_{j-k+1} e).$$

Учитывая, что  ${}_1 e = -x$ , по формуле Эйлера находим

$${}_j M_{k+1} = (k - j) {}_j M_k + ({}_{j-1} M_{kx} {}_2 e + \dots + {}_k M_{kx} {}_{j-k+1} e). \quad (4)$$

Здесь  $j \geq k + 1$ , а при  $j \leq k$   ${}_j M_{k+1} = 0$ . Из  $3_k$  следует

$${}_j M_k \equiv c_{k,j} {}_j f \bmod E_{j-1}, \quad ({}_{j-1} M_k, \dots, {}_{k+1} M_k) \prec E_{j-1}.$$

При  $k \geq 3$  по лемме 2 также  $({}_2 e, \dots, {}_{j-k+1} e) \prec E_{j-1}$ . Поэтому при  $k \geq 3$  из (4) и леммы  $3_k$  следует, что

$${}_j M_{k+1} \equiv (k - j) c_{k,j} {}_j f \bmod E_{j-1}, \quad \text{т.е.} \quad c_{k+1,j} = (k - j) c_{k,j}.$$

При  $k = 2$  по лемме 2  $({}_2 e, \dots, {}_{j-2} e) \prec E_{j-1}$  и  ${}_{j-1} e \equiv (j - 2) {}_j f_x \bmod E_{j-1}$ . Поэтому  ${}_j M_3 \equiv (2 - j) {}_j f + (j - 2) {}_j f_x x \bmod E_{j-1}$ . Но  ${}_j f_x x = {}_j j f$ . Итак,  ${}_j M_3 \equiv (1 - j)(2 - j) {}_j f \bmod E_{j-1}$ . Лемма  $3_{k+1}$  доказана с  $c_{k+1,j} = (1 - j)(2 - j) \dots (k - j)$ .

**8. Окончание доказательства теоремы.** Согласно п. 2,  ${}_j M_i = 0$  при  $j < i$ . По лемме  $3_i$ ,  ${}_i M_i \equiv c_{i,i} {}_i f \bmod E_{i-1}$ , где  $c_{i,i} \neq 0$ . Значит, меняя в  $f$  лишь члены степени  $i$ , мы можем, не меняя  ${}_j M_j$  при  $j < i$ , получить  $M_i$  с любой однородной главной частью степени  $i$  в нуле. Следовательно, для  $f$  общего положения все эти главные части будут общего положения. А тогда кратность нуля системы  $M_2 = \dots = M_{n+1} = 0$  равна  $(n + 1)!$ .

**9. Следствия.** Число морсовских особых точек общего положения относительно перегибов на поверхности 4-й степени в  $\mathbb{C}^3$  не превосходит 13, ибо общее число перегибов на поверхности степени  $d$  равно

$2d(d-2)(11d-24) = 320$  при  $d = 4$  (см. [5]), а  $[320/24] = 13$ . Пример с 12 точками легко построить в виде  $a(x) + b(y) + c(z) = 0$ .

Максимальное число морсовских особых точек на поверхности 4-й степени равно 16 (см. [6]). Но они — не общего положения по отношению к перегибам.

С ростом  $d$  число морсовских точек растет не быстрее  $23d^3/48 + \dots$  [7]. Следовательно, асимптотически почти половина  $(1/2 - 1/44)$  точек перегиба не может исчезнуть в общих относительно перегибов морсовских точках и сохраняется вдали от них.

## Литература

- [1] Plücker J. Theorie der algebraischen Kurven gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie. Mit einer Tafel. Bonn, 1839.
- [2] Арнольд В. И. Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек. *УМН*, 1974, **29**(2), 17–20.
- [3] Hesse L. O. Über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln. *Crelle Journ.*, 1844, **28**, 68–96.
- [4] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974, 432 с.
- [5] Glebsch A. *Journ. für Math.*, 1860, **58**, 102–110.
- [6] Kummer E. Über die Flächen vierten Grades, mit sechzehn singulären Punkten. Berlin: Monatsber. Akad., 1864, 246–260.
- [7] Варченко А. Н. О полунепрерывности спектра и оценке сверху числа особых точек проективной гиперповерхности. *ДАН СССР*, 1983, **270**(6), 1294–1297.



## Обратимые системы

Хорошо известно, что поведение решений гамильтоновых динамических систем резко отличается от поведения решений общих систем дифференциальных уравнений. Например, в гамильтоновых системах общего положения периодические решения образуют однопараметрические семейства (параметр — функция Гамильтона), тогда как циклы в фазовых пространствах общих, негамильтоновых систем, как правило, изолированы.

Существует часто встречающийся в приложениях класс негамильтоновых систем, ведущих себя во многих отношениях подобно гамильтоновым.

**Пример.** Дифференциальное уравнение

$$u^{IV} + Au'' + Bu + u'^2 = 0 \quad (1)$$

(с фиксированными коэффициентами  $A$  и  $B$ ) имеет однопараметрическое семейство циклов. Мы увидим, как это объясняется обратимостью (инвариантностью уравнения относительно изменения знака независимой переменной).

Сходство между гамильтоновыми и обратимыми системами заходит очень далеко. Например, поведение обратимых систем вблизи положений равновесия или периодических движений описывается такими же рядами Биркгофа, как в случае гамильтоновых систем. Совпадают также уравнения фазовых колебаний вблизи резонансов и нормальные формы бифуркаций. Кроме того, в фазовом пространстве обратимой системы обнаруживаются такие же колмогоровские торы, как для гамильтоновых систем.

Все эти черты сходства удивительны, поскольку обнаруживаются лишь в результате вычислений, различных для разных черт, и заранее не предсказуемы (интересно посмотреть, переносятся ли на обратимые системы теоремы о числе периодических решений систем Гамильтона и о пересечениях лагранжевых многообразий, недавно доказанные Конли, Цендером и Шапероном).

## 1. Обратимые отображения.

**Определение.** Диффеоморфизм  $\sigma : M \rightarrow M$  фазового пространства на себя называется *инволюцией*, если его квадрат — тождественное преобразование,  $\sigma^2 = 1$ . Основное значение имеет следующий пример.

**Пример.** Отражение евклидова пространства  $\mathbb{R}^{k+l}$  в подпространстве  $\mathbb{R}^k$  — инволюция,  $\sigma(p, q) = (p, -q)$ . Локально (в окрестности неподвижной точки) всякая инволюция записывается в таком виде при подходящем выборе координат (теорема Бохнера).

**Определение.** Диффеоморфизм  $A : M \rightarrow M$  называется *обратимым относительно инволюции  $\sigma$* , если  $\sigma$  переводит  $A$  в  $A^{-1}$ .

**Пример.** Отражение плоскости в оси координат переводит поворот вокруг начала координат в обратный поворот. По этой же причине обратим и поворот на переменный (зависящий от радиуса) угол

$$(r, \varphi) \mapsto (r, \varphi + \alpha(r)).$$

Условие обратимости  $\sigma A \sigma^{-1} = A^{-1}$  можно записать в виде  $\sigma A \sigma A = 1$ .

Таким образом, всякий обратимый диффеоморфизм является произведением двух инволюций. Очевидна такая теорема.

**Теорема (Биркгоф, 1915).** *Произведение двух инволюций обратимо относительно любой из них.*

**Доказательство.** Если  $\sigma^2 = \tau^2 = 1$ , то

$$\sigma(\sigma\tau)\sigma(\sigma\tau) = 1, \quad \tau(\sigma\tau)\tau(\sigma\tau) = 1.$$

**Пример.** Бильярдное преобразование Биркгофа сопоставляет вектору скорости точки, приложенному на границе области, вектор скорости ухода от следующей точки отражения траектории от границы. Это преобразование — произведение двух инволюций. Первая инволюция переводит исходный вектор в вектор скорости прихода к следующей точке пересечения с границей, вторая отражает вектор от касательной к границе.

Обобщая эту конструкцию Биркгофа, Мельроз (1976) построил пару инволюций пересечения двух гиперповерхностей симплектического

пространства: каждой точке многообразия-пересечения сопоставляется следующая точка многообразия-пересечения на той же фазовой кривой системы Гамильтона, заданной первой (второй) гиперповерхностью. Обе инволюции Мельроза имеют общее множество неподвижных точек (многообразиие «скользящих лучей»). В других задачах встречаются и пары инволюций общего положения.

**2. Пары инволюций** (и, следовательно, обратимые отображения) появляются в разных разделах математики, иногда довольно неожиданно.

**Пример 1** (Тейшейра). В теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью общего положения встречается такая ситуация: поверхность разрыва делит трехмерное фазовое пространство на две части, по одну сторону от поверхности система управляется одним векторным полем, по другую — другим.

Фазовые кривые каждого поля касаются поверхности в точках некоторой (зависящей от поля) линии, а именно, линии складки проектирования поверхности вдоль фазовых кривых поля. Для системы общего положения обе линии складок пересекаются под ненулевым углом. В окрестности точки пересечения возникает пара инволюций поверхности разрыва. Первая инволюция переставляет близкие точки пересечения фазовой кривой первого поля с поверхностью, вторая — второго.

Исследование устойчивости положения равновесия в точке пересечения сводится к исследованию итераций произведения обеих инволюций, следовательно, — к исследованию обратимого диффеоморфизма плоскости в окрестности неподвижной точки.

**Пример 2** (Мозер, Вебстер). Рассмотрим двумерную вещественную поверхность в двумерном комплексном пространстве (вещественно четырехмерном). Мозер и Вебстер показали, что исследование расположения поверхности в окрестности точки, где касательная комплексна, сводится к исследованию пары голоморфных инволюций комплексной плоскости в окрестности общей неподвижной точки. Они построили теорию нормальных форм таких пар инволюций и тем самым извлекли из анализа нормальных форм обратимых отображений нормальные формы расположения вещественных поверхностей в комплексных, рассматриваемых с точностью до биголоморфных диффеоморфизмов последних.

**Пример 3.** *Динамической системой, временем которой является какая-либо группа, называется действие этой группы на фазовом пространстве диффеоморфизмами.*

Обратимое отображение можно рассматривать с этой точки зрения как действие группы симметрий арифметической прогрессии. Действительно, эта группа состоит из сдвигов и отражений, действие отражения является инволюцией и эта инволюция обращает действие сдвига.

### 3. Обратимые потоки.

**Определение.** *Обратимый поток* — это динамическая система, временем которой является группа симметрий прямой.

Обратимый поток задается однопараметрической группой диффеоморфизмов фазового пространства, переходящей в группу обратных диффеоморфизмов при инволюции фазового пространства.

Поле скоростей обратимого потока переходит при этой инволюции в противоположное поле. Векторное поле, меняющее знак под действием инволюции (и заданное этим полем дифференциальное уравнение), называется *обратимым (относительно этой инволюции)*.

**Пример 1.** Дифференциальные уравнения на плоскости переменной  $z$ :

$$\dot{z} = iz, \quad \dot{z} = \bar{z}, \quad \dot{z} = z^2$$

обратимы (относительно трех разных инволюций). Уравнение  $\dot{z} = \sum a_{k,l} z^k \bar{z}^l$  обратимо относительно инволюции  $z \mapsto \bar{z}$  плоскости переменной  $z$ , если и только если все коэффициенты  $a_{k,l}$  чисто мнимы.

**Пример 2.** Система уравнений Ньютона обратима, если силы не зависят от времени и от скоростей или четны по скоростям:

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}), \quad F(x, -y) \equiv F(x, y).$$

Инволюция фазового пространства меняет знаки всех скоростей.

**Пример 3.** Уравнение четного порядка обратимо, если оно автономно и нечетные производные входят лишь в четных комбинациях (инволюция фазового пространства меняет знаки всех нечетных производных). В частности, уравнение (1) обратимо.

Уже эти примеры показывают, что обратимые потоки общего положения резко отличаются от фазовых потоков общих систем без симметрии и приближаются по своим свойствам к гамильтоновым системам. Так, невырожденные особые точки линеаризованной обратимой системы на плоскости могут быть лишь центрами и седлами (пример 1). Центр сохраняется и при учете нелинейных членов обратимой системы, поскольку аттракторы в обратимой системе невозможны, так как при обращении времени притяжение превращается в отталкивание (разумеется, здесь речь идет о неподвижных при инволюции особых точках и о пересекающих многообразии неподвижных точек аттракторах).

Пример  $\dot{z} = z^2$  показывает, однако, что обратимая система может не иметь первого интеграла, непостоянного в окрестности особой точки, и может не сохранять никакого интегрального инварианта с положительной плотностью.

**4. Периодические решения.** Рассмотрим обратимую систему дифференциальных уравнений с фазовым пространством  $\mathbb{R}^{2n}$  и инволюцией отражения в  $n$ -мерном подпространстве  $\mathbb{R}^n$ .

Предположим, что система имеет периодическое решение, фазовая кривая которого пересекает неподвижное пространство  $\mathbb{R}^n$  под ненулевым углом. Тогда инволюция переводит эту фазовую кривую (цикл) в себя с обращением ориентации. Следовательно, на цикле ровно две точки неподвижны относительно инволюции.

**Теорема.** *Для обратимых систем общего положения с указанными свойствами:*

1. *Замкнутые симметричные фазовые кривые образуют в окрестности данного цикла однопараметрическое семейство.*
2. *Это семейство сохраняется, лишь немного деформируясь, при любом малом изменении системы, оставляющем ее обратимой.*

**Доказательство.** Проведем через неподвижное многообразие  $\mathbb{R}^n$  инволюции  $\sigma$  секущую поверхность  $\Sigma$ , пересекающую цикл в точках  $a$  и  $b$  под ненулевыми углами и инвариантную относительно  $\sigma$ . Отображение возвращения Пуанкаре  $A : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , переводящее  $a$  в  $b$  и  $b$  в  $a$ , обратимо относительно действия  $\sigma$  на  $\Sigma$ . Для системы общего положения многообразия  $\mathbb{R}^n$  и  $A\mathbb{R}^n$  размерности  $n$  в  $(2n - 1)$ -мерном пространстве  $\Sigma$  пересекаются в точке  $b$  трансверсально по проходящей через  $b$  кривой. Каждая точка с этой кривой принадлежит некоторому симметричному

циклу. Действительно,  $\sigma c = c$ ,  $\sigma(A^{-1}c) = A^{-1}c$  и  $A^{-1}c = \sigma A \sigma c$ , поскольку  $A$  обратимо. Поэтому  $A \sigma A^{-1}c = c$ ,  $A \sigma(\sigma A \sigma)c = c$ ,  $A^2c = c$ , т.е.  $c$  — точка цикла.

Для близкой системы трансверсальное пересечение  $\mathbb{R}^n$  и  $A\mathbb{R}^n$  вблизи  $b$  сохранится, поэтому сохранятся и циклы.

**Замечание.** Для инволюции с неподвижным множеством размерности  $k$  в многообразии размерности  $k + l$  то же рассуждение обнаруживает семейство циклов, зависящих от  $k - l + 1$  параметров.

**Пример.** Для уравнения (1)  $k = l = 2$ . Следовательно, симметричные циклы включаются в однопараметрические семейства, устойчивые относительно малых деформаций уравнения в классе обратимых систем.

**5. Окрестность периодического решения.** Ограничимся для наглядности случаем, когда фазовое пространство четырехмерно, а многообразии неподвижных точек двумерно, как для уравнения (1).

В этом случае секущая поверхность Пуанкаре  $\Sigma$  трехмерна. Мы получаем инволюцию этого трехмерного пространства, меняющую знак одной из трех координат, и обратимое отображение Пуанкаре  $A^2 : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , имеющее целую кривую неподвижных точек, лежащую в плоскости неподвижных точек инволюции. Применим в этой ситуации стандартную технику теории нормальных форм (теорию рядов Биркгофа) с учетом обратимости. Сформулируем формальные результаты теории, т.е. пренебрежем расходимостью рядов. На уровне формальных рядов окрестность линии неподвижных точек расслоена на двумерные поверхности, инвариантные как относительно отображения Пуанкаре, так и относительно инволюции. Рассмотрим поведение отображения на одной из таких поверхностей.

Таким образом, мы приходим к обратимому отображению плоскости в окрестности неподвижной точки, лежащей на неподвижной прямой инволюции. Исследование таких отображений имеет и самостоятельное значение (см. §2).

**6. Строение обратимого отображения плоскости.** В зависимости от собственных чисел линеаризации в неподвижной точке отображение может быть гиперболическим (линеаризация — гиперболический поворот) или эллиптическим (линеаризация — обычный поворот). Рассмотрим подробнее эллиптический случай.

В зависимости от угла поворота линеаризации в неподвижной точке отображение называется нерезонансным (угол несоизмерим с  $2\pi$ ) или резонансным (угол  $2\pi p/q$ ).

В нерезонансном случае формальная нормальная форма — поворот на угол, меняющийся с радиусом. В этом случае неподвижная точка формально устойчива, поскольку она окружена формально инвариантными кривыми.

Для гладкого обратимого эллиптического отображения плоскости общего положения в любой окрестности неподвижной точки имеются и настоящие (а не только формальные) инвариантные колмогоровские кривые, окружающие неподвижную точку. Число вращения отображения на такой кривой иррационально.

Между этими кривыми остаются еще кольцеобразные «резонансные зоны», образовавшиеся при распаде формальных инвариантных кривых с рациональными числами вращения. Анализ поведения отображения в окрестности резонанса  $p/q$  приводит к следующему выводу (применимому и в более общей ситуации обратимого отображения, близкого к повороту на зависящий лишь от радиуса угол в кольцеобразной области):  $q$ -я степень отображения мало отличается от преобразования фазового потока обратимого векторного поля, инвариантного относительно поворота на угол  $2\pi p/q$ .

Исследование таких полей представляет собой своеобразную самостоятельную задачу с заранее не очевидным ответом. Вообще говоря, обратимое поле, инвариантное относительно поворотов, может иметь сложные особые точки и не иметь однозначных интегралов. В задаче о строении резонансной зоны эти случаи встречаются, однако лишь в виде исключения, обычными же будут те же комбинации центров и седел, что в случае гамильтоновых систем: уравнение фазовых колебаний вблизи резонанса имеет однозначный первый интеграл.

**7. Строение отображения Пуанкаре.** Вернемся к отображению Пуанкаре трехмерного пространства. Хотя двумерные инвариантные поверхности существуют лишь формально, колмогоровские кривые, лежащие на них, действительно существуют (систематический дрейф вдоль линии неподвижных точек невозможен вследствие обратимости). Кривые с одинаковым числом вращения, родившиеся на разных формально инвариантных поверхностях, складываются вместе в гладкие цилиндрические поверхности, отгораживающие линию неподвижных

точек от окружающего пространства (здесь предполагается, что число вращения существенно зависит от квадрата расстояния до линии неподвижных точек, что выполнено почти всюду для систем общего положения).

В этой ситуации неподвижные точки отображения Пуанкаре обладают некоторым свойством устойчивости (уход, медленный, может происходить лишь вдоль поверхностей с постоянными числами вращения, а не поперек).

Между поверхностями, расслоенными на кривые с постоянным иррациональным числом вращения, остается место для резонансных зон. Упомянутые поверхности могут выходить на линию неподвижных точек (там, где угол поворота линеаризации соответствует числу вращения). В окрестности такой точки поверхность имеет вид параболоида вращения, расслоенного на параллели, поскольку формальный ряд, выражающий зависимость числа вращения от точки  $z$  на линии неподвижных точек и расстояния  $r$  до этой точки вдоль формальной инвариантной поверхности, начинается с членов  $\alpha(z) + r^2\beta(z) + \dots$

Может случиться, что поверхность, составленная из колмогоровских окружностей, дважды выходит на линию неподвижных точек и имеет поэтому топологию сферы. В таком случае сфера запирает попавшие внутрь точки. Это позволяет установить устойчивость неподвижных точек, отвечающих либо минимальному углу поворота линеаризации (при положительных  $\beta$ ), либо максимальному (при отрицательных).

Разумеется, случаи сильного резонанса ( $q = 1, 2, 3, 4$ ) нуждаются здесь, как и для гамильтоновых систем, в специальном анализе.

**8. Применение к обратимым уравнениям.** Вернемся, наконец, к четырехмерному фазовому пространству обратимого уравнения, например, уравнения (1). Мы получаем однопараметрическое семейство симметричных циклов и набор трехмерных инвариантных многообразий, занумерованных нормально несоизмеримыми с единицей числами вращения и расслоенных на двумерные колмогоровские торы, заполненные траекториями квазипериодических движений с фиксированным отношением частот на каждом трехмерном многообразии.

В резонансных зонах между этими многообразиями лежат другие трехмерные многообразия, также расслоенные на двумерные инвари-



антные торы — они происходят из линий уровня первого интеграла уравнения фазовых колебаний при резонансе.

Таким образом, общая картина движения вблизи симметричного цикла обратимой системы с четырехмерным фазовым пространством и двумерным многообразием неподвижных точек чрезвычайно напоминает картину движения гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Разница состоит лишь в том, что в гамильтоновой системе имеется первый интеграл, поэтому из существования колмогоровских торов следует (при обычных условиях невырожденности) устойчивость рассматриваемого периодического движения. В обратимой системе первого интеграла нет. Поэтому существование квазипериодических движений (фазовые кривые которых образуют трехмерные инвариантные многообразия, расслоенные на двумерные колмогоровские торы) не препятствует уходу некоторых траекторий системы от исходного периодического движения вдоль резонансной зоны.

Можно предположить, что такой уход, хотя и очень медленный, имеет место в обратимых системах общего положения, однако мы не располагаем доказательством этого предположения.

**Замечание.** По-видимому, многие свойства обратимых систем справедливы для систем, переходящих в обращенные при каком-либо диффеоморфизме фазового пространства (не обязательно являющемся инволюцией), но теория таких обратимых в слабом смысле систем находится пока в начальной стадии.



# Первые шаги симплектической топологии

## Содержание

Введение . . . . .	365
1. Существует ли симплектическая топология? . . . . .	367
2. Обобщения геометрической теоремы Пуанкаре . . . . .	368
3. Гиперболическая теория Морса . . . . .	370
4. Пересечения лагранжевых многообразий . . . . .	372
5. Лежандровы подмногообразия контактных многообразий . . . . .	374
6. Лагранжевы и лежандровы узлы . . . . .	377
7. Две теоремы Гивенталя о лагранжевых вложениях . . . . .	379
8. Нечетномерные аналоги . . . . .	381
9. Оптические лагранжевы многообразия . . . . .	383
Литература . . . . .	387

## Введение

Под симплектической топологией я понимаю науку, находящуюся в таком же отношении к обычной топологии, как теория гамильтоновых динамических систем к общей теории динамических систем. Соотношение здесь похоже на соотношение между вещественной и комплексной геометрией.

Комплексное линейное пространство можно рассматривать как четномерное вещественное, снабженное дополнительной структурой (операцией умножения на  $i$ ). Однако комплексификация теории не сводится к уменьшению запаса пространств и добавлению новой операции: новый смысл приобретают все понятия. Например, комплексные подпространства или операторы — не то же, что подпространства или операторы в подлежащем вещественном пространстве. В этом смысле комплексная геометрия — аналог вещественной, а не ее частный случай.

Точно так же симплектическая геометрия может рассматриваться, конечно, как обычная геометрия в присутствии дополнительной

структуры. Но возможна и другая точка зрения, при которой симплектическая геометрия рассматривается скорее как равноправный аналог обычной геометрии. Например, симплектическая группа может рассматриваться не как подгруппа группы матриц четного порядка, а как простая группа Ли  $S_k$ , имеющая равные с группой невырожденных матриц  $A_k$  права, не менее замечательную систему корней и т.д.

Вопросы симплектической топологии, о которых идет речь дальше, можно рассматривать как вопросы обычной топологии в присутствии дополнительной структуры. Однако наиболее интересным мне представляется не использование обычной топологии для исследования объектов симплектической геометрии, а угадывание симплектических результатов посредством «симплектизации».

Симплектизация преобразует не только исходные объекты (многообразия, отображения, ...), но и всю теорию. Например, понятия границы и теории гомологий в симплектической топологии вовсе не сводятся к обычным. Размерность «симплектограницы» должна быть не на одну, а на две единицы меньше размерности исходного многообразия (снижение размерности в симплектической геометрии всегда проводится в два этапа, один из которых сечение, а другой — проектирование).

Я не собираюсь здесь формализовать эти туманные идеи<sup>1</sup>, а перехожу к конкретным гипотезам, к которым они привели (пропуская довольно длинные промежуточные рассуждения).

Некоторые из опубликованных в 1965–1976 гг. гипотез такого рода ([9]–[12]) недавно доказаны Конли, Цендером, Сикоравом, Громовым и др., причем была развита новая мощная техника. Мне кажется, теперь сто́ит вернуться и к другим гипотезам этого типа, а может быть, и ко всей программе симплектизации.

Нечетномерные варианты (связанные с контактной топологией) также обсуждаются ниже.

Автор благодарен А. В. Алексееву, М. Л. Бялому, В. А. Васильеву, А. Б. Гивенталю, В. Л. Гинзбургу, В. В. Козлову, В. П. Колокольцову, В. П. Маслову, Дж. Наю, С. П. Новикову, Л. В. Полтеровичу, Д. Б. Фуксу, Ю. В. Чеканову, А. И. Шнирельману, Е. В. Щепину, Я. М. Элиашбергу за многочисленные полезные обсуждения.

<sup>1</sup> По поводу симплектограниц см. теорию лагранжевых кобордизмов в [1]–[7]; комплексификация понятия границы — дивизор ветвления,  $\mathbb{Z}_2$  переходит в  $\mathbb{Z}$ , классы Штифеля–Уитни — в классы Чженя и т.д. (ср. [8]).

## 1. Существует ли симплектическая топология?

*Симплектической структурой* на многообразии называется замкнутая невырожденная 2-форма. Простейшим примером симплектического многообразия является плоскость; симплектическую структуру задает элемент площади (ориентированной).

*Симплектическим диффеоморфизмом* (или *симплектоморфизмом*) называется диффеоморфизм, сохраняющий симплектическую структуру. Ясно, что это условие накладывает топологические ограничения на диффеоморфизм. Например, область конечного объема не может перейти при симплектическом диффеоморфизме строго внутрь себя, так как симплектический диффеоморфизм переводит любую область в область такого же объема.

Более содержательный пример — «геометрическая теорема» Пуанкаре (доказанная Биркгофом), согласно которой *сохраняющий площади диффеоморфизм кольца, сдвигающий граничные окружности в разные стороны, имеет не менее двух неподвижных точек*. Упомяну еще теорему Н. А. Никишина [13]: *сохраняющий ориентированные площади диффеоморфизм двумерной сферы имеет не менее двух неподвижных точек*.

Таким образом, топологические свойства общих и сохраняющих объемы (площади) диффеоморфизмов различны. Но имеют ли симплектические диффеоморфизмы специфические свойства, выделяющие их из сохраняющих объемы? Этот вопрос был формализован Я. М. Элиашбергом следующим образом:

*Всякий ли сохраняющий объемы диффеоморфизм симплектического многообразия размерности, большей двух, можно топологически ( $C^0$ ) аппроксимировать симплектическим диффеоморфизмом?*

Если бы это было так, то устойчивые топологические свойства сохраняющих объемы диффеоморфизмов были бы такими же, как у симплектических.

В последнее время Громов доказал «теорему существования симплектической топологии», также высказанную Элиашбергом:

**Теорема [14].** *Если предел равномерно ( $C^0$ ) сходящейся последовательности симплектоморфизмов является диффеоморфизмом, то он симплектический.*

Типичным вопросом, показывающим отличие симплектической геометрии от геометрии сохраняющих объемы диффеоморфизмов,

является следующая задача, также проанализированная Элиашбергом и Громовым: может ли симплектический верблюд пройти сквозь игольное ушко?

Имеется в виду следующее: *можно ли симплектической изотопией перетащить шар, лежащий в левом полупространстве четырехмерного стандартного симплектического пространства, в правое через сколь угодно малое отверстие в разделяющей оба полупространства плоскости?*

В классе сохраняющих объемы диффеоморфизмов такая изотопия, очевидно, существует. Громов доказал, однако, что симплектической изотопии нет: пройти через малое отверстие симплектическому верблюду мешают его «симплектические ребра» — своеобразный нелинейный аналог неравенств Релея–Фишера–Куранта.

Из нерешенных задач геометрии симплектических диффеоморфизмов упомяну еще следующую: *ограничен ли диаметр группы симплектических диффеоморфизмов шара с левоинвариантной стандартной метрикой?* А. И. Шнирельман доказал ограниченность диаметра группы сохраняющих объемы диффеоморфизмов трехмерного шара [45]. Предположительно далекими симплектическими диффеоморфизмами являются те, к которым ведут пути с положительно закручивающимися гамильтонианами (ср. [31], [33]).

## 2. Обобщения геометрической теоремы Пуанкаре

Рассмотрим симплектический (сохраняющий площади) диффеоморфизм двумерного тора на себя, гомотопный тождественному преобразованию. Такой диффеоморфизм называется *гомологичным тождественному* (или *сохраняющим центр тяжести*), если он задается таким отображением накрывающей тор плоскости  $x \mapsto x + f(x)$ , для которого среднее значение периодической вектор-функции  $f$  равно нулю.

Диффеоморфизм, гомологичный тождественному, можно соединить с тождественным однопараметрическим семейством симплектических диффеоморфизмов так, что производная по параметру будет гамильтоновым векторным полем с однозначным гамильтонианом, и обратно, все соединяемые таким образом с тождеством симплектоморфизмы гомологичны тождеству. Диффеоморфизмы, гомологичные тождеству, образуют группу (коммутант связной компоненты единицы в группе всех симплектических диффеоморфизмов, см. [15]):

Геометрическая теорема Пуанкаре (о диффеоморфизмах кольца) обобщается следующим образом (гипотеза [9], [10], доказанная в [19])<sup>2</sup>:

**Теорема.** *Гомологичный тождественному симплектоморфизм тора имеет не менее 4 неподвижных точек (если считать с кратностями) и не менее трех геометрически различных неподвижных точек.*

Теорема Пуанкаре о преобразованиях кольца получается отсюда так: тор склеивается из двух симметрично преобразующихся колец, соединяемых переходными кольцами, сдвигающимися вдоль себя в разные стороны. Регулируя ширину переходных колец, можно добиться, чтобы полученный диффеоморфизм тора сохранял центр тяжести. Половина его неподвижных точек (т.е. не менее двух неподвижных точек) находится в исходном кольце.

Следующее многомерное обобщение теоремы Пуанкаре было сформулировано в [11], [12]:

**Гипотеза.** *Симплектоморфизм компактного многообразия, гомологичный тождественному преобразованию<sup>3</sup>, имеет по меньшей мере столько неподвижных точек, сколько критических точек имеет гладкая функция на многообразии.*

(Имеется в виду либо в обоих случаях число геометрически различных точек, либо алгебраическая сумма кратностей.)

Эта гипотеза доказана в следующих случаях:

- 1) для двумерных поверхностей [17], [18];
- 2) для  $2n$ -мерного тора со стандартной симплектической структурой [19]–[21];
- 3) для  $\mathbb{C}P^n$  со стандартной структурой [22];
- 4) для многих кэлеровых многообразий отрицательной кривизны [18], [23];
- 5) для диффеоморфизмов,  $C^0$ -близких к тождеству [24].

Оценки, доставляемые гипотезой, достигаются на диффеоморфизмах,  $C^1$ -близких к тождественному преобразованию (полученных

<sup>2</sup> Гипотетическое прямое обобщение теоремы о кольце указано в [10] (условие сдвига краев в разные стороны превращается в зацепленность сферы  $S^{n-1}$  — края диска в слое  $T^*M^n$  — с ее образом в универсальной накрывающей расслоения сфер,  $T_1^*M^n$ ). Оно, кажется, не доказано.

<sup>3</sup> Соединимый с тождеством однопараметрическим семейством симплектоморфизмов с однозначным (но зависящим от времени) гамильтонианом.

интегрированием гамильтонова поля за малое время). В простейших случаях минимальные числа критических точек следующие:

Многообразие	$c_a$	$c_g$
Окружность	2	2
Двумерный тор	4	3
Поверхность рода $g$	$2g + 2$	3
$2n$ -мерный тор	$2^{2n}$	$2n + 1$
$CP^n$	$n + 1$	$n + 1$

Для симплектических отображений, не гомологичных тождественному (но лежащих в той же компоненте связности группы симплектоморфизмов), число неподвижных точек, по-видимому, оценивается снизу числом критических точек замкнутой 1-формы на многообразии (неравенства теории Морса заменяются неравенствами Новикова [25], [26]).

### 3. Гиперболическая теория Морса

Новая техника, на которой основаны доказательства сформулированных результатов, — своеобразный вариант вариационной теории Морса для неограниченных с двух сторон функционалов. Обычная теория Морса положительных функционалов основана на редукции задачи к конечномерной за счет того, что по направлениям «высоких гармоник» (ряда Фурье) функционал быстро растет: он ведет себя на бесконечности по этим направлениям как положительно определенная квадратичная форма. Фиксируя конечномерную информацию (значения «коэффициентов при младших гармониках»), мы расслаиваем функциональное пространство на подпространства конечной коразмерности. Ограничение функционала на такое подпространство имеет единственную точку минимума, гладко зависящую от точки (конечномерной) базы. Дальнейший выбор настоящих экстремалей из многообразия найденных условных экстремалей — уже конечномерная задача, решаемая конечномерной теорией Морса, т.е. исследованием функций на конечномерном многообразии. Это многообразие условных экстремалей можно получить градиентным спуском вдоль описанных выше подпространств конечной коразмерности.

Таким образом, в основе вариационной теории Морса лежит структурная устойчивость линейно притягивающих положений равновесия.



Основная идея новых методов состоит в том, что вместо притягивающих положений равновесия можно воспользоваться гиперболическими, которые также являются структурно устойчивыми (теоремы Гробмана–Гартмана, Аносова).

Гиперболичность понимается здесь в смысле теории динамических систем, а не в смысле теории уравнений с частными производными: соответствующая квадратичная форма имеет бесконечное число квадратов как с плюсами, так и с минусами.

Для применимости этих методов нужно, чтобы изучаемый функционал обладал свойством гиперболичности (на подмногообразиях конечной коразмерности, полученных фиксацией «коэффициентов при младших гармониках»). Примером является функционал действия  $\int p dq - H dt$ . Рассмотрим для простоты случай одной степени свободы, когда функционал определен на кривых  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(p, q)\}$ . На петлях кривых, вращающихся в положительную сторону, интеграл  $p dq$  положителен, а в отрицательную — отрицателен. Если  $z = p + iq$ , то  $z = e^{ikt}$  вращается в одну сторону при положительных  $k$  и в другую — при отрицательных.

Таким образом, возникает высокочастотная гиперболичность: гармоники с большими  $|k|$  образуют пространства, где функционал действия квадратично растет или убывает (в зависимости от знака  $k$ ). Интеграл от  $H dt$ , играющий роль возмущения, не нарушает этого вывода.

Предположим, что  $H$  — периодическая функция  $p$ ,  $q$  и  $t$ , и рассмотрим наш функционал на замкнутых кривых. После редукции задачи к конечномерной получается функция на пространстве конечномерного векторного расслоения над изучаемым многообразием, которая на каждом слое ведет себя на бесконечности как невырожденная квадратичная форма (сигнатуры нуль). Оценка числа критических точек такой функции проводится при помощи обобщения конечномерной теории Морса, так называемой теории «индекса Конли» [27].

В результате мы получаем оценку снизу для числа критических точек действия, т.е. для числа замкнутых траекторий уравнений Гамильтона, а значит, и для числа неподвижных точек симплектоморфизма, осуществляемого решениями этих уравнений за период. Наконец, любой симплектоморфизм, гомологичный тождеству, можно получить таким способом из периодического по времени однозначного гамильтониана. Таким методом Конли и Цендер [19] и доказали обобщенную

геометрическую теорему Пуанкаре (для многомерного тора со стандартной симплектической структурой).

Впоследствии Шаперон [21] разработал симплектический вариант теории ломаных геодезических Морса, основанный на технически более удобной конечномерной аппроксимации (ломаные вместо рядов Фурье). За последние годы появилось множество работ, использующих и развивающих этот метод, например, [18]–[24], [16].

В работе Сикорава [28] отброшено условие сохранения центра тяжести — в этом случае число неподвижных точек оценивается снизу числом критических точек замкнутой 1-формы (минимум по всем формам оценен С. П. Новиковым [25], но для торов эти оценки пусты). Остается, однако, неизвестным, *имеет ли три разных неподвижных точки гомологичный тождеству симплектоморфизм четырехмерного тора с произвольной симплектической структурой.*

#### 4. Пересечения лагранжевых многообразий

Один из общих принципов симплектической геометрии выразительно сформулирован А. Вейнстейном [29] так: «все на свете — лагранжевы многообразия».

*Лагранжевы подмногообразия* симплектического многообразия — это подмногообразия наибольшей размерности, на которых обращается в нуль симплектическая структура (эта наибольшая размерность равна половине размерности объемлющего многообразия).

Симплектоморфизмы можно рассматривать как лагранжевы многообразия. Действительно, график симплектоморфизма  $(M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$  является лагранжевым подмногообразием произведения  $M_1 \times M_2$ , снабженного симплектической структурой  $\pi_1^* \omega_1 - \pi_2^* \omega_2$  (где  $\pi_1$  и  $\pi_2$  — канонические проекции произведения на первый и второй сомножители). Обратное, диффеоморфизм с лагранжевым графиком является симплектоморфизмом.

Лагранжево подмногообразие произведения, не являющееся графиком диффеоморфизма, определяет *симплектическое соответствие* — многозначное обобщение симплектоморфизма (или «канонического преобразования» классической механики).

Неподвижные точки симплектоморфизма — это точки пересечения его графика с диагональю. Для оценки числа неподвижных точек симплектоморфизма достаточно поэтому оценить число точек пересечения

двух лагранжевых многообразий: графика и диагонали. Условие сохранения центра тяжести превращается при этом в условие гамильтоновой гомологичности: лагранжевы подмногообразия гамильтоново гомологичны, если одно из них можно получить из другого при помощи фазового преобразования гамильтонова векторного поля с однозначным гамильтонианом (зависящим от времени).

Таким образом, получается еще одно гипотетическое обобщение гипотезы Пуанкаре:

*Число точек пересечения симплектосоответствия с гамильтоново гомологичным ему не меньше минимального числа критических точек функции на нем (считая те и другие точки либо алгебраически, с кратностями, либо геометрически).*

Простейшие случаи этой гипотезы обсуждались уже в 1965 г. [9]. Рассмотрим в качестве симплектического многообразия пространство кокасательного расслоения  $T^*B$  многообразия  $B$  (т.е. фазовое пространство с конфигурационным пространством  $B$ ), снабженное стандартной симплектической структурой « $dp dq$ », а в качестве лагранжева подмногообразия  $L$  — нулевое сечение. Например, если  $B$  — окружность, то  $T^*B$  — цилиндр, а  $L$  — экватор.

Некомпактность фазового пространства заставляет уточнить определение гамильтоновой гомологичности: лагранжево многообразие предполагается компактным, а гамильтоново поле — финитным (равным нулю вне некоторого компакта).

**Теорема [30].** *Число точек пересечения нулевого сечения пространства кокасательного расслоения с гамильтоново гомологичным ему многообразием не меньше суммы чисел Бетти многообразия (если считать точки с кратностями) и больше когомологической длины.*

Гамильтоново гомологическая центральной окружности кривая на цилиндре — это вложенная в цилиндр замкнутая кривая, обходящая вокруг цилиндра один раз и такая, что ориентированная площадь между ней и экватором равна нулю. Очевидно, такая кривая имеет не менее двух точек пересечения с экватором (именно это соображение было исходным и в попытках Пуанкаре доказать свою «геометрическую теорему», и в доказательстве Биркгофа).

Окрестность лагранжева многообразия в симплектическом всегда симплектоморфна окрестности нулевого сечения пространства кокасательного расслоения [29].

Поэтому из оценки числа точек пересечения нулевого сечения кокасательного расслоения с гамильтоново гомологичным ему лагранжевым многообразием следует такая же оценка для числа точек пересечения любого лагранжева многообразия с любым гамильтоново гомологичным ему (в достаточно малой окрестности) многообразием. В частности, получается оценка числа неподвижных точек симплектоморфизма, который соединяется с тождественным диффеоморфизмом таким путем, что производная имеет однозначный гамильтониан, а траектории точек достаточно малы.

Если лагранжево многообразие —  $n$ -мерный тор, то число точек пересечения не меньше  $2^n$  (считая с кратностями), в том числе не меньше  $n + 1$  геометрически различных точек.

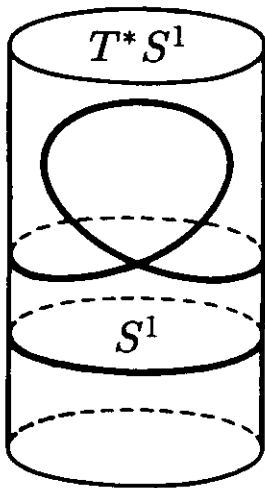


Рис. 1. Точная лагранжева иммерсия, не пересекающая нулевое сечение

Такие оценки не могут иметь места для лагранжевых иммерсий: на рис. 1 изображена иммерсированная в  $T^*S^1$  окружность, гамильтоново гомологичная нулевому сечению в том смысле, что их разность является границей цепи площади нуль, и, тем не менее, не пересекающая нулевое сечение (этот эффект обсуждался уже в [9]).

Условие, при котором лагранжевы иммерсии имеют не меньше точек пересечения, чем вложения, недавно указано Ю. В. Чекановым. Его формулировка требует простейших понятий контактной геометрии.

## 5. Лежандровы подмногообразия контактных многообразий

*Контактное многообразие* — это нечетномерное многообразие, снабженное максимально невырожденным полем гиперплоскостей. Типичным примером является трехмерная сфера  $S^3$ , которую мы будем считать границей шара в  $\mathbb{C}^2$ . Касательные комплексные прямые образуют на  $S^3$  поле двумерных плоскостей (их можно определить еще как нормали к слоям расслоения Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$ ). Таким же образом определяется стандартная контактная структура на любой нечетномерной

сфере большей размерности. Все контактные многообразия одной размерности локально контактноморфны.

Эталонный пример — многообразие 1-струй функций. 1-струя (отрезок ряда Тейлора степени 1) функции  $n$  переменных задается набором  $2n + 1$  чисел  $x = (x_1, \dots, x_n)$  (точка прообраза),  $y$  (значение функции),  $p = (p_1, \dots, p_n)$  (частные производные). Естественная контактная структура определяется условием  $dy = p dx$ . Пространство 1-струй функций на многообразии расслоено над пространством его кокасательного расслоения (при помощи отображения забывания значения функции,  $J^1(B, \mathbb{R}) \rightarrow T^*B$ ).

Подмногообразие контактного многообразия называется *лежандровым*, если оно интегральное и имеет максимально возможную размерность ( $n$  в многообразии размерности  $2n + 1$ ). Примером может служить 1-график функции ( $y = f(x)$ ,  $p = \partial f / \partial x$ ).

Вложение лежандрова многообразия в пространство 1-струй функций на нем называется *квазифункцией*, если оно регулярно гомотопно 1-графику функции в пространстве лежандровых вложений<sup>4</sup>.

Естественная проекция  $J^1(B, \mathbb{R}) \rightarrow T^*B$  (забывание значения функции) локально диффеоморфно отображает лежандровы многообразия на иммерсированные лагранжевы. Каждый росток лагранжева многообразия в  $T^*B$  получается этой конструкцией из локальной квазифункции (ибо  $y = \int p dx$  восстанавливается по лагранжеву многообразию). Эта квазифункция определена однозначно, с точностью до аддитивной постоянной.

Точка квазифункции называется *критической*, если ее проекция в пространство кокасательного расслоения принадлежит его нулевому сечению.

**Теорема** (Ю. В. Чеканов). *Квазифункция имеет по меньшей мере столько критических точек, какова сумма чисел Бетти многообразия (если учитывать кратности), в том числе геометрически разных критических точек больше, чем когомологическая длина.*

**Пример.** На рис. 2 изображены две лагранжевы иммерсии окружности в  $T^*S^1$ . Обе они являются проекциями лежандрово вложенных окружностей в  $J^1(S^1, \mathbb{R})$  (т.е.  $\oint p dx = 0$ ). Но эти вложения не регулярно гомотопны в классе лежандровых вложений.

<sup>4</sup> С  $C^1$ -топологией: вложения считаются близкими, если близки не только значения, но и производные.

Действительно, левой лагранжевой кривой отвечает квазифункция (лежандрова кривая, регулярно гомотопная 1-графику в классе лежандровых вложений). Ибо эту лагранжеву кривую можно продеформировать в сечение в классе лагранжевых иммерсий с  $\oint p dx = 0$ , не создавая лежандровых самопересечений.

Правой лагранжевой кривой отвечает лежандрово вложение окружности, не являющееся квазифункцией: оно не регулярно гомотопно 1-графику в классе лежандровых вложений (хотя и регулярно гомотопно в классе всех вложений).

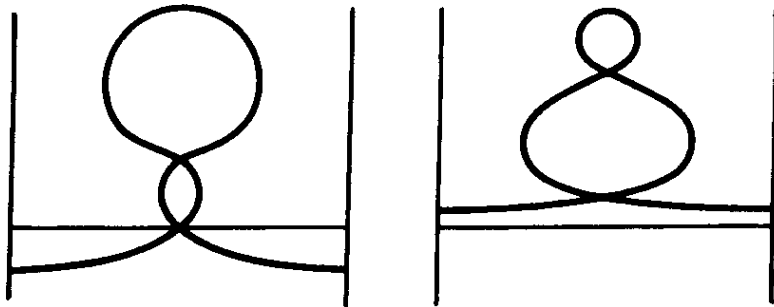


Рис. 2. Квазифункция и неквазифункция

Ибо если бы оно было регулярно гомотопно 1-графику в классе лежандровых вложений (короче, *лежандрово гомотопно*), то его лагранжева кривая пересекала бы нулевое сечение в двух точках (по теореме Чеканова), а это не так.

**Замечание.** Числа точек пересечения в теоремах Лауденбаха–Сикорава и Чеканова можно оценить снизу «стабильным минимальным числом критических точек» функции на изучаемом многообразии. Это число определяется так: рассматривается векторное расслоение над этим многообразием со слоем размерности  $2N$  и функции на нем, совпадающие вне трубчатой окрестности нулевого сечения с квадратичной на каждом слое формой сигнатуры  $N - N$ . Минимальное число критических точек таких функций (по всем расслоениям) и служит оценкой снизу числа пересечений.

Кажется, неизвестно, совпадает ли это число с минимальным числом критических точек функций на многообразии. В примерах — для поверхностей, торов, проективных пространств и т.д. — оба числа обычно совпадают и оба равны сумме чисел Бетти (если считать точки с кратностями) или оба равны категории Люстерника–Шнирельмана (если считать геометрически различные критические точки).

Неизвестно также, можно ли оценить число точек пересечения снизу минимальным числом критических точек функции на самом исходном многообразии в теоремах Чеканова и Лауденбаха–Сикорава, т.е. верно ли, что число критических точек квазифункции не меньше, чем у функции.

Остается открытым вопрос и об обобщении теоремы Чеканова на замкнутые 1-формы (с заменой теории Морса теорией Новикова [25]).

## 6. Лагранжевы и лежандровы узлы

Под *лагранжевым* (*лежандровым*) *узлом* я понимаю компоненту связности пространства лагранжевых (*лежандровых*) вложений в фиксированное симплектическое (контактное) многообразие<sup>5</sup>.

**Пример 1.** Рассмотрим лежандровы узлы в сфере  $S^3$  с ее стандартной контактной структурой. Вложение  $S^1 \rightarrow S^3$  определяет узел в обычном смысле. Для каждого узла в обычном смысле можно выбрать изотопное лежандрово вложение (это легко следует из классических теорем Каратеодори или Рашевского–Чжоу). Однако эти вложения, определяя один и тот же обычный узел, могут определять разные лежандровы узлы. Что это так и есть, можно убедиться, например, при помощи «индекса Маслова», определяемого здесь следующей конструкцией (ср. [31]).

Рассматривая  $S^3$  как границу шара в  $\mathbb{C}^2$ , снабдим каждую точку вложенной кривой ортом внешней нормали и ортом касательной. Условие лежандровости кривой означает в точности, что эти орты эрмитово ортогональны. Репер определяет отображение вкладываемой окружности в унитарную группу. Вместе с определителем оно задает отображение ориентированных окружностей

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & U(2) \\ & & \downarrow \det \\ S^1 & \cdots \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

Степень этого отображения и называется *индексом*.

**Теорема (А. В. Алексеев)<sup>6</sup>.** *Индекс является единственным инвариантом лежандровой иммерсии окружности в  $S^3$ : все лежандровы иммерсии одного индекса регулярно гомотопны в классе лежандровых*

<sup>5</sup> Можно было бы взять за основу диффеоморфизмы или изотопии объемлющего пространства или дополнения к подмногообразию, сохраняющие соответствующую структуру (можно еще потребовать однозначности гамильтониана изотопии).

<sup>6</sup> Это — частный случай общей теории Алексеева иммерсий в пространство с неголономным распределением, обобщающей теорию иммерсий Смейла [32].

иммерсий и все значения индекса реализуются на лежандровых вложениях из  $C^0$ -окрестности любого отображения  $S^1 \rightarrow S^3$ .

В частности, имеется бесконечное число лежандрово не гомотопных лежандровых вложений, незаузленных в обычном смысле: они различаются значениями индекса. Лежандровы узлы, незаузленные в обычном смысле, назовем *чисто лежандровыми*.

**Пример 2.** В трехмерном пространстве  $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{(x, y, p)\}$  с контактной структурой  $dy = p dx$  рассмотрим лежандрову кривую  $\mathbb{R} \rightarrow J^1$ , совпадающую вне единичного шара с центром в нуле с вложением оси  $x$ .

Такой кривой можно реализовать любой узел в  $\mathbb{R}^3$ . Даже если эта кривая незаузлена в обычном смысле, она может быть чисто лежандрово заузлена, как показывает пример рис. 2. Этот пример показывает, по-видимому, что разных лежандровых узлов в  $S^3$  больше, чем просто обычных узлов, снабженных индексом Маслова.

Многомерный аналог приведенной конструкции определяет «гауссово» отображение лежандра подмногообразия  $L^{n-1} \subset S^{2n-1}$  в лагранжево многообразии Грассмана  $\Lambda_n = U(n)/O(n)$ . Для  $n = 2$  это многообразие является пространством нетривиального расслоения сфер над окружностью [33] (оба доказательства тривиальности в [34] ошибочны).

Для лагранжевых вложений  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  (совпадающих с вложениями плоскости  $p = 0$  вне некоторого шара в стандартном симплектическом четырехмерном пространстве) неизвестно ни одного заузленного примера. Здесь открыты оба вопроса:

1) *всякий ли узел в обычном смысле реализуется лагранжево* (неизвестно даже, существует ли хоть одно лагранжево вложение, заузленное в обычном смысле, т.е. не гомотопное вложению плоскости в классе не обязательно лагранжевых вложений);

2) *существуют ли чисто лагранжевы узлы*, т.е. лагранжевы вложения, гомотопные плоскости в классе всех (не обязательно лагранжевых) вложений, но негомотопные в классе лагранжевых вложений?

**Замечание 1.** Приведя гомотопию лагранжева вложения в общее положение в классе вложений, мы получим серию метаморфоз каустик вложений. Локально каждая типичная каустика или типичная метаморфоза каустики на плоскости реализуется как каустика или метаморфоза лагранжевой поверхности. Поэтому вопрос сводится к исследованию препятствий к глобальной реализации каустики и ее метаморфоз как



линии критических значений вложенной лагранжевой поверхности. Для иммерсий здесь препятствий нет (А. В. Алексеев).

**Замечание 2.** «Лагранжев узел»  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  определяет элемент гомотопической группы  $\pi_n(\Lambda_n)$  лагранжева многообразия Грассмана. Неизвестно, может ли этот элемент быть нетривиальным и позволяют ли характеристические классы, происходящие из когомологий лагранжева грассманиана, различать чисто лагранжевы узлы.

## 7. Две теоремы Гивенталья о лагранжевых вложениях

Рассмотрим вложение  $\mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$ , полученное из вложения нулевого сечения симплектической изотопией с компактным носителем. Проектирование лагранжева подмногообразия на базу расслоения называется *лагранжевым проектированием*. Рассмотрим регулярное значение лагранжева проектирования. Все его прообразы — регулярные точки. *Индекс Маслова регулярной точки* определяется как индекс Маслова кривой, ведущей из бесконечности в эту точку по нашему лагранжеву многообразию (индекс пересечения с многообразием особенностей, подробнее см. [31]). На рис. 3 у каждого прообраза написано значение индекса Маслова.

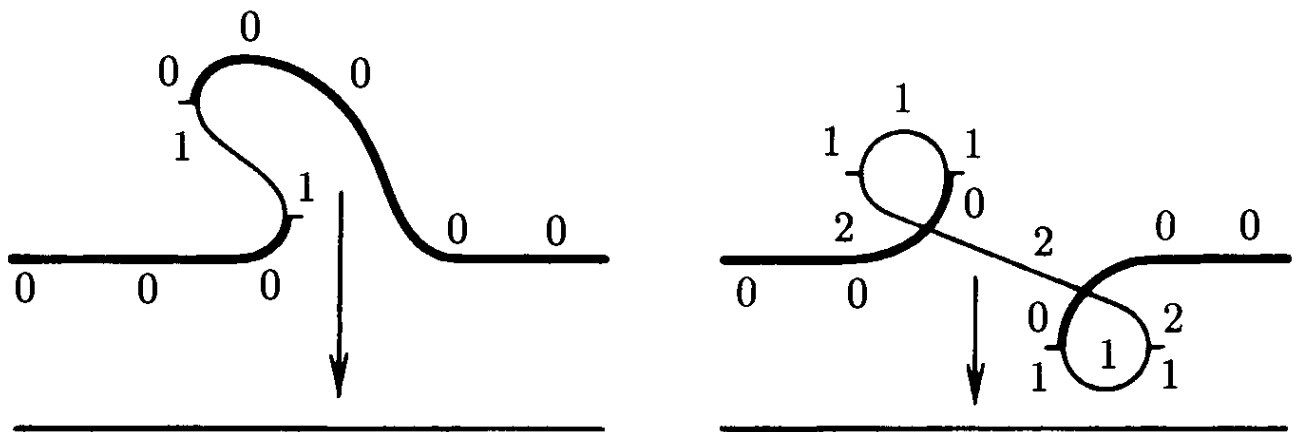


Рис. 3. Индексы точек для лагранжева вложения и для иммерсии

**Теорема (А. Б. Гивенталь).** *Над каждым регулярным значением есть прообраз индекса нуля.*

Эта теорема была сформулирована в качестве гипотезы, а в одномерном случае и доказана В. П. Колокольцовым. Для иммерсий утверждение теоремы неверно (рис. 3, справа).

Вторая теорема получена при попытке симплектизировать тот факт, что вложение  $M^n \hookrightarrow N^n$  индуцирует вложение в гомологиях.

Лагранжево подмногообразие пространства кокасательного расслоения называется *точным*, если оно является проекцией лежандрова подмногообразия пространства 1-струй функций, иными словами, если «производящая функция»  $\int p dq$  однозначна.

**Теорема.** *Точное лагранжево вложение  $M^n \hookrightarrow T^*N^n$  компактного многообразия продолжается до симплектического вложения  $T^*M^n \hookrightarrow T^*N^n$  (исходное вложение реализуется нулевым сечением).*

**Замечание.** Обратное, для всякого вложения пространства кокасательного расслоения существует лагранжево сечение, образ которого точен (ибо существует замкнутая 1-форма с любыми периодами). Таким образом, теорема означает, что *точное лагранжево вложение существует тогда и только тогда, когда существует симплектическое вложение пространства кокасательного расслоения.*

**Доказательство.** Рассмотрим эйлерово поле в слоях кокасательного расслоения. Это поле  $\varepsilon$  равно нулю на нулевом сечении и удовлетворяет условию  $L_\varepsilon \omega = di_\varepsilon \omega = \omega$ , где  $\omega$  — симплектическая структура.

Окрестность вложенного лагранжева многообразия  $M$  симплектоморфна окрестности нулевого сечения в пространстве кокасательного расслоения  $T^*M$  [29]. Поэтому в указанной окрестности определены два эйлеровых поля:  $\varepsilon_0$ , эйлерово для  $T^*N$ , и  $\varepsilon$ , эйлерово для  $T^*M$ .

Рассмотрим их разность,  $w = \varepsilon - \varepsilon_0$ . Это поле в окрестности гамильтоново:  $L_w \omega = 0$ ,  $i_w \omega = dH$ . Гамильтониан  $H$  однозначен, если вложение точное. Действительно, для замкнутых путей, лежащих на  $M$ ,  $\Delta H = \int i_w \omega = \int i_{\varepsilon_0} \omega$ , поскольку  $\varepsilon$  на  $M$  равно нулю. Последний же интеграл на лагранжевом многообразии равен приращению «производящей функции», и на точном подмногообразии равен нулю. Итак,  $H$  — однозначная на подмногообразии, а значит и в его окрестности, функция. Продолжим  $H$  на все пространство  $T^*N$  так, чтобы в окрестности бесконечности  $H = 0$ . Поле  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \tilde{w}$ , где  $\tilde{w}$  гамильтоново с гамильтонианом  $H$  во всем пространстве  $T^*N$ , совпадает с  $\varepsilon$  в окрестности вложенного многообразия, а на бесконечности совпадает с  $\varepsilon_0$ . Решения уравнения  $\dot{z} = \tilde{\varepsilon}(z)$  продолжаются неограниченно и задают симплектическое вложение  $T^*M \hookrightarrow T^*N$  на объединение начинающихся вблизи образа  $M$  траекторий.

**Замечание.** Из теоремы Гивенталья следует, что для доказательства несуществования точных вложений достаточно доказать следующее:

**Гипотеза Гивенталья.** *Для точного лагранжева вложения существует такая точка, что все траектории эйлерова поля  $\tilde{\xi}$  (построенного в доказательстве), начинающиеся в этой точке, уходят на бесконечность.*

Более того, гипотетически таким свойством обладают почти все точки.

Из гипотезы следует, что симплектическое вложение  $T^*M \hookrightarrow T^*N$  ( $M$  компактно,  $\dim M = \dim N = n$ ) индуцирует изоморфизм  $n$ -мерных групп гомологий. Ибо если все выходящие из точки в  $M$  траектории уходят на бесконечность, то они образуют  $n$ -мерный некомпактный цикл, пересекающийся с фундаментальным с индексом 1.

**Следствие 1.** *Никакое компактное многообразие не допускает точного лагранжева вложения в  $T^*\mathbb{R}^n$  со стандартной симплектической структурой.*

Эта давно обсуждавшаяся гипотеза (ср. [35]) недавно другим способом доказана Громовым [14].

**Следствие 2.** *Образ нулевого сечения в  $T^*M$  под действием гомологического тождественному симплектоморфизма пересекается с нулевым сечением.*

Иначе получилось бы точное лагранжево вложение двух непересекающихся экземпляров  $M$  в  $T^*M$ , переводящее фундаментальный класс разности в нуль.

## 8. Нечетномерные аналоги

Теоремы о неподвижных точках симплектоморфизмов и о пересечениях лагранжевых многообразий можно переформулировать как утверждения о замкнутых фазовых кривых и о лежандровых зацеплениях в специальных контактных пространствах. Переходя к более общим контактным многообразиям, мы получаем много новых гипотез.

Предположим, что контактная структура задается как поле нулей 1-формы. Все такие *контактные 1-формы* различаются не обращающимся нигде в нуль множителем. Выбор контактной формы  $\alpha$  определяет поле *характеристических направлений* (ядер  $d\alpha$ ), всюду трансверсальных контактными плоскостям  $\alpha = 0$ .

Если интегральные кривые поля ядер образуют расслоение, то его база — симплектическое многообразие, и применима предыдущая теория. Однако при изменении множителя в форме  $\alpha$  поле меняется и расслоение исчезает. Симплектические результаты, сформулированные без упоминания расслоения, и служат контактными гипотезами.

**Пример.** Рассмотрим замкнутую лежандрову кривую (скажем, в  $S^3$  со стандартной контактной структурой). Для стандартной 1-формы характеристики — слои расслоения Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$ . Проекция лежандровой кривой на  $S^2$  — иммерсированная в двумерную сферу кривая, ограничивающая цепь площади  $0 \pmod{4\pi}$ .

Кривая площади 0 имеет точку самопересечения. Получается

**Гипотеза.** *Всякая замкнутая лежандрова кривая в  $S^3$  со стандартной контактной структурой имеет при любом выборе контактной 1-формы характеристическую хорду (пересекает дважды некоторую интегральную кривую поля ядер формы  $d\alpha$ ).*

Из таких же соображений для всякой иммерсии лежандрова многообразия (скажем, в  $S^{2n+1}$  или в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  со стандартной контактной структурой) при любом выборе контактной 1-формы для любой  $C^0$ -близкой лежандровой иммерсии должен найтись отрезок характеристики, начинающийся на одном вложенном лежандровом многообразии, а кончающийся на другом (и, более того, число таких отрезков должно оцениваться снизу неравенствами типа Морса).

В этом направлении доказан лишь следующий аналог геометрической теоремы Пуанкаре.

Рассмотрим расслоение со слоем ориентированная окружность,  $p: E^{2n+1} \rightarrow B^{2n}$ . Пусть  $\omega$  — замкнутая невырожденная 2-форма на пространстве расслоения. Мы скажем, что  $\omega$  *сохраняет центр тяжести*, если ее класс когомологий  $[\omega] \in H^*(E)$  поднят с базы (принадлежит  $p^*H^*(B)$ ), т.е. если интегралы  $\omega$  по вертикальным циклам равны нулю.

**Теорема** (В. Л. Гинзбург). Если характеристическое поле (поле ядер) сохраняющей центр тяжести формы  $C^1$ -близко к полю направлений слоев расслоения, то число замкнутых характеристик, близких к один раз пройденным слоям, не меньше суммы чисел Бетти базы (если характеристики невырождены или считаются с кратностями), в том числе геометрически различных замкнутых характеристик этого вида не меньше, чем категория базы при  $n = 1$ ; при  $n > 1$  число характеристик  $\geq \nu(p)$ .

**Замечание.**  $C^1$ -близость можно здесь заменить  $C^0$ -близостью (как в теореме о неподвижных точках симплектоморфизмов, контактизацией которой получен этот результат), а может быть, и еще более слабым условием.

Если не требовать сохранения центра тяжести, то неравенства типа Морса следует заменить неравенствами типа Новикова [25].

**Пример.** Рассмотрим движение заряженной точки по римановой поверхности рода  $g$  в поперечном не обращающемся в нуль магнитном поле  $H$ .

Из теоремы следует, что если величина начальной скорости  $v_0$  достаточно мала, то существует (с учетом кратности) не менее  $2g+2$  замкнутых траекторий (кривых предписанной геодезической кривизны  $k(x) = H(x)/v_0$ ).

Здесь  $E^3 \subset T^*M$  — многообразие уровня энергии,  $\omega$  — сумма ограничения симплектической структуры и поднятия с  $M$  2-формы  $H dS$ . В этой ситуации предположительно  $2g + 2$  замкнутых кривых есть на любом уровне энергии (ср. [25], [26], [36]).

## 9. Оптические лагранжевы многообразия

Лагранжево подмногообразие пространства кокасательного расслоения называется *оптическим*, если оно лежит в трансверсальной слоям гиперповерхности, пересечения которой со слоями квадратично выпуклы в каждой точке (по отношению к естественной аффинной структуре слоя).

**Пример.** Решение уравнения эйконала  $(\partial S/\partial q)^2 = 1$  определяет оптическое лагранжево подмногообразие  $p = \partial S/\partial q$  гиперповерхности  $p^2 = 1$ .

Всякая устойчивая лагранжева особенность локально реализуется как особенность проектирования оптического лагранжева многообразия (и даже многообразия предыдущего примера) на базу [37]. Однако свойство уместиться в целом в выпуклую по импульсам гиперповерхность фазового пространства накладывает ограничения на сосуществование особенностей. По этой же причине в классе оптических лагранжевых особенностей реализуются не все локальные метаморфозы каустик (рождающиеся при метаморфозе особенности могут оказаться несовместными для оптической каустики).

Первые примеры этого рода обнаружил Дж. Най [38], безуспешно пытавшийся реализовать при помощи лазера бифуркацию рождения «летающего блюдечка» и доказавший затем ее нереализуемость в оптике. Общая теория, изложенная ниже, принадлежит Ю. В. Чеканову [39].

Рассмотрим многообразие критических точек проектирования лагранжева многообразия на базу кокасательного расслоения. Для лагранжевых многообразий общего положения (неважно, оптических или нет) это критическое подмножество лагранжева многообразия является в нем гиперповерхностью (задается в нем одним уравнением). На этой гиперповерхности есть особые точки, образующие в ней множество коразмерности 2 (подобно вершине на поверхности конуса). Мы предположим сейчас, что лагранжево многообразие оптическое и общего положения.

**Определение.** *Характеристическим направлением гиперповерхности в симплектическом пространстве называется косоортогональное дополнение к ее касательной гиперплоскости (т.е. направление гамильтонова поля, гамильтониан которого постоянен на гиперповерхности).*

**Теорема (Ю. В. Чеканов).** *Характеристическое направление послойно-выпуклой гиперповерхности, содержащей оптическое лагранжево многообразие, не касается множества критических точек его проектирования (даже в особых точках этого множества).*

**Следствие.** *На неособой части критического многообразия определено гладкое поле направлений, совпадающее с полем ядер лагранжева отображения в точках, где ядро одномерно и касается критического многообразия.*

Это поле высекается двумерной плоскостью, натянутой на ядро и характеристическое направление послойно-выпуклой гиперповерхности.

**Следствие.** Эйлера характеристика гладкого компактного оптического критического многообразия равна нулю.

В частности, отсюда следует невозможность оптической реализации метаморфозы рождения летающей тарелки (рис. 4; «блин» по терминологии Зельдовича [40], [41], «губы» по терминологии Тома [42]):  $\chi(S^2) \neq 0$ .

В [39] указана формула  $\chi + 2(\#D_4^- + \#D_4^+ \Delta) = 0$ , выражающая эйлерову характеристику компактного двумерного критического многообразия через числа особых точек типа  $D_4$  (в оптическом случае различаются не два, как обычно, а три варианта  $D_4$ , соответственно трем типам омбилических точек).

В пространстве любой размерности не реализуются как оптические все метаморфозы типа «губы» или «блины» (всех сигнатур). В трехмерном случае не реализуется также метаморфоза  $D_4^-$  (рождение двух пирамид); все остальные метаморфозы ( $A_4$ ,  $A_5$ ,  $D_4^+$ ,  $D_5$ ) реализуются оптически и наблюдаются в экспериментах.

В оптической ситуации следовало бы повторить конструкции комплексов Васильева, алгебраизирующих соотношения примыканий особенностей, и вычисления колец лагранжевых и лежандровых кобордизмов (ср. [1]–[7]). Теории лагранжевых и лежандровых узлов (см. выше §6) также приобретают в оптическом случае своеобразный вид теории оптических узлов. Оптическое лагранжево многообразие инвариантно относительно соответствующего гамильтонова потока (для которого послойно-выпуклая гиперповерхность — поверхность уровня функции Гамильтона). Поэтому глобально оптические многообразия, как правило, жестки (как колмогоровские торы) на фиксированной поверхности уровня функции Гамильтона. Поэтому при определении гомотопий оптических многообразий естественно допускать деформации объемлющей гиперповерхности (оставляющие ее выпуклой).

Некоторые лагранжевы узлы могут априори не допускать оптических реализаций. Некоторые лагранжево регулярно гомотопные оптические многообразия могут быть оптически негомотопными (развязывание лагранжева узла может априори потребовать выхода за пределы

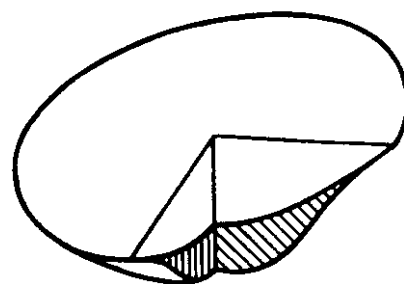


Рис. 4. Летающее блюдце — неоптическая каустика

класса лагранжевых многообразий, вкладываемых в выпуклые гиперповерхности).

Отмечу интересное свойство, доказанное пока для лагранжевых многообразий гиперповерхности кокасательных ортов риманова тора:

**Теорема** (М. Л. Бялый, Л. В. Полтерович [42]). *Лагранжево сечение, принадлежащее указанной гиперповерхности, заполнено поднятиями в фазовое пространство геодезических, минимальных между любыми своими точками на накрывающей тор плоскости; обратно, инвариантный тор, геодезические которого обладают этим свойством минимальности, обязательно является сечением.*

По-видимому, аналогичная теорема верна не только для геодезических потоков, но и вообще для оптических лагранжевых многообразий.

Доказательство можно было бы провести довольно просто, если бы было можно соединить изучаемый тор с сечением непрерывным семейством оптических лагранжевых торов (деформируя вместе с тором и содержащую его выпуклую гиперповерхность): минимальность препятствует рождению каустики.

Именно этот анализ зависимости характера экстремума вариационных принципов для колмогоровских торов от их расположения в пространстве кокасательного расслоения привел автора и Е. В. Щепина к задачам о лагранжевых и лежандровых узлах.

**Замечание.** *Лагранжево вложение  $T^2 \hookrightarrow T^*T^2$  не может реализовать более чем однократную образующую группы двумерных гомологий фазового пространства.*

Действительно, в противном случае, перейдя к  $q$ -листному накрытию, мы получили бы  $q$  попарно непересекающихся лагранжевых вложений. Каждое из них получается из другого симплектоморфизмом с однозначным гамильтонианом (индуцированным сдвигом базы). По теореме Сикорава (§4) многообразия обязаны пересекаться.

Вообще же двумерное подмногообразие в  $T^*T^2$  может накрывать базу с любой кратностью. Таким образом, лагранжевость накладывает глобальное ограничение на вложение. Многомерные обобщения очевидны.

Почитательно, что такие естественные задачи и теоремы симплектической топологии, как проблема лагранжевых узлов и теорема Чеканова о топологических свойствах критических множеств обобщенных



решений уравнений Гамильтона–Якоби с выпуклым по импульсам гамильтонианом, были обнаружены лишь в результате экспериментов в лазерной оптике [28] и анализа вариационных принципов Персиваля, Обри и др., связанных с теорией ржавления [43], [44].

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. I. *Функц. анализ и его прилож.*, 1980, 14(3), 1–13.  
Арнольд В. И. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. II. *Функц. анализ и его прилож.*, 1980, 14(4), 8–17.
- [2] Васильев В. А. Характеристические классы лагранжевых и лежандровых многообразий, двойственные к особенностям каустик и волновых фронтов. *Функц. анализ и его прилож.*, 1981, 15(3), 10–22.
- [3] Васильев В. А. Самопересечения волновых фронтов и лежандровы (лагранжевы) характеристические числа. *Функц. анализ и его прилож.*, 1982, 16(2), 68–69.
- [4] Eliashberg Ja. M. Cobordisme des solutions des relations différentielles. In: Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie. I. Travaux en Cours. Paris: Herman, 1984.
- [5] Audin M. Quelques calculs en cobordisme lagrangien. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1985, 35(3), 159–194.
- [6] Audin M. Cobordismes d’immersions lagrangiennes et legendriennes. Thèse. Paris: Université Paris-Sud, Centre d’Orsay, 1986.
- [7] Одэн М. Кобордизмы лагранжевых иммерсий в пространство кокасательного расслоения многообразия. *Функц. анализ и его прилож.*, 1987, 21(3), 61–64.
- [8] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982, 304 с.
- [9] Arnold V. I. Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, 261(19), 3719–3722.
- [10] Арнольд В. И. Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. В кн.: Труды международного конгресса математиков (Москва, 1966). М.: Мир, 1968, 387–392.
- [11] Арнольд В. И. Комментарий к: Пуанкаре А. «Об одной геометрической теореме». В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. II. М.: Наука, 1972, 987–989.
- [12] Arnold V. I. Fixed points of symplectic diffeomorphisms. In: Mathematical developments arising from Hilbert problems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, p. 66. (Proc. Sympos. Pure Math., 28)

- [13] Никишин Н. А. О неподвижных точках диффеоморфизмов двумерной сферы, сохраняющих ориентированную площадь. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, **8**(1), 84–85.
- [14] Gromov M. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 1985, **82**(2), 307–347.
- [15] Banyaga A. On fixed points of symplectic maps. *Invent. Math.*, 1980, **56**(3), 215–229.
- [16] Conley C. C., Zehnder E. Morse-type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1984, **37**(2), 207–253.
- [17] Элиашберг Я. М. Оценки числа неподвижных точек преобразований, сохраняющих площадь. Сыктывкар, 1978, 104 с. (Рукопись деп. в ВИНТИ 30 янв. 1979, № 374-79-Деп.)
- [18] Floer A. Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations to certain Kähler manifolds. *Duke Math. J.*, 1986, **53**(1), 1–32.
- [19] Conley C. C., Zehnder E. The Birkhoff–Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnol'd. *Invent. Math.*, 1983, **73**(1), 33–49.
- [20] Chaperon M. Quelques questions de géométrie symplectique. In: Séminaire N. Bourbaki 1982/83. Paris: Soc. Math. France, 1983, 231–249. (Astérisque, 105/106)
- [21] Chaperon M. Une idée du type «géodésiques brisées» pour les systèmes hamiltoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, 1984, **298**(13), 293–296.
- [22] Fortune B., Weinstein A. A symplectic fixed point theorem for complex projective spaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, 1985, **12**(1), 128–130.
- [23] Sikorav J.-C. Points fixes d'une application symplectique homologue à l'identité. *J. Diff. Geom.*, 1985, **22**, 49–79.
- [24] Weinstein A.  $C^0$  perturbation theorems for symplectic fixed points and Lagrangian intersections. Lect. Notes of the Amer. Math. Soc. summer institute on nonlinear functional analysis and applications. Berkeley, 1983.
- [25] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. *УМН*, 1982, **37**(5), 3–49.
- [26] Новиков С. П., Тайманов И. А. Периодические экстремали многозначных или не всюду положительных функционалов. *ДАН СССР*, 1984, **274**(1), 26–28.
- [27] Conley C. C. Isolated invariant sets and the Morse index. Expository Lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of Colorado, May 31 – June 4, 1976. Providence, RI: AMS, 1978, 89 p. (CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 38)
- [28] Sikorav J.-C. Une problème de disjonction par isotopie symplectique dans un fibré cotangent. Preprint U A 41169 CNRS, Université de Paris-Sud, 1985.
- [29] Weinstein A. Lectures on symplectic manifolds. Expository Lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of North Carolina,

- March 8–12, 1976. Providence, RI: AMS, 1977, 48 p. (CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 29)
- [30] Laudenbach F., Sicorav J.-C. Persistence d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent. *Invent. Math.*, 1985, **82**(2), 349–357.
- [31] Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования. *Функц. анализ и его прилож.*, 1967, **1**(1), 1–14.
- [32] Smale S. The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces. *Ann. Math.*, 1959, **69**, 327–344.
- [33] Арнольд В. И. Теоремы Штурма и симплектическая геометрия. *Функц. анализ и его прилож.*, 1985, **19**(4), 1–10.
- [34] Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. М.: Мир, 1981, 500 с.
- [35] Арнольд В. И. Особенности систем лучей. *УМН*, 1983, **38**(2), 77–147.
- [36] Козлов В. В. Вариационное исчисление в целом и классическая механика. *УМН*, 1985, **40**(2), 33–60.
- [37] Guckenheimer J. Caustics and non-degenerate hamiltonians. *Topology*, 1974, **13**, 127–133.
- [38] Nye J. F., Hannay J. H. The orientations and distortions of caustics in geometrical optics. *Optica Acta*, 1984, **31**, 115–130.
- [39] Чеканов Ю. В. Каустики геометрической оптики. *Функц. анализ и его прилож.*, 1986, **20**(3), 66–69.
- [40] Zeldovich Ya. B. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations. *Astron. Astrophys.*, 1970, **5**, 84–89.
- [41] Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Шандарин С. Ф. Крупномасштабная структура Вселенной. I. Общие свойства. Одномерная и двумерная модели. Препринт. М.: Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981, 32 с.
- См. также: Arnold V. I., Shandarin S. F., Zeldovich Ya. B. The large-scale structure of the Universe. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1982, **20**, 111–130.
- [42] Бялый М. Л., Полтерович Л. В. Геодезические потоки на двумерном торе и фазовые переходы «соизмеримость — несоизмеримость». *Функц. анализ и его прилож.*, 1986, **20**(4), 9–16.
- [43] Percival I. C. Variational principles for invariant tori and cantori. In: *Symp. on Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction*. Amer. Inst. of Physics Conf. Proc., 1980, **57**, 302–310.
- [44] Aubry S., Le Daeron P. Y., Andre G. Classical ground-states of a one-dimensional model for incommensurate structures. Preprint, 1982.
- [45] Шнирельман А. И. О геометрии группы диффеоморфизмов и динамике идеальной несжимаемой жидкости. *Матем. сб.*, 1985, **128**(1), 82–109.



## Контактная структура, релаксационные колебания и особые точки неявных дифференциальных уравнений

В теории релаксационных колебаний рассматривается вертикальное (касательное слоям) «невозмущенное» векторное поле, определяющее «быстрое движение» в пространстве гладкого расслоения и возмущенное произвольным малым полем в пространстве расслоения.

Многообразие нулей быстрого поля является, вообще говоря, гладким многообразием такой же размерности, как база расслоения, но не обязательно является сечением: его проекция на базу может иметь особенности. Например, если слои одномерны, то особенности проекции указанного многообразия (называемого медленным многообразием) на базу расслоения для систем общего положения описаны Уитни: это складки, сборки и многомерные их обобщения.

Возмущение задает на медленном многообразии векторное поле: проекцию возмущенного поля на касательные плоскости медленного многообразия вдоль слоев расслоения. Это поле на складках проектирования имеет полярную особенность, но его поле направлений продолжается до гладкого в общих точках складки поля направлений на медленном многообразии.

В настоящей статье описываются с точностью до диффеоморфизмов, расслоенных над базой, особенности указанного поля направлений на медленном многообразии в случае, когда база двумерна, а слои одномерны (т.е. имеются две медленные переменные и одна быстрая).

**Теорема.** *Поле направлений на медленном многообразии в системе общего положения с двумя медленными и одной быстрой переменной в окрестности каждой точки складки расслоенным диффеоморфизмом приводится либо к определенному ниже кубическому семейству, либо к также определенным ниже особым точкам четырех типов: сложенный фокус, сложенное седло, сложенный узел, рассеченный сложенный зонтик.*

Кубическое семейство и сложенные фокус, седло и узел встречаются также в других задачах, например, в теории асимптотических линий

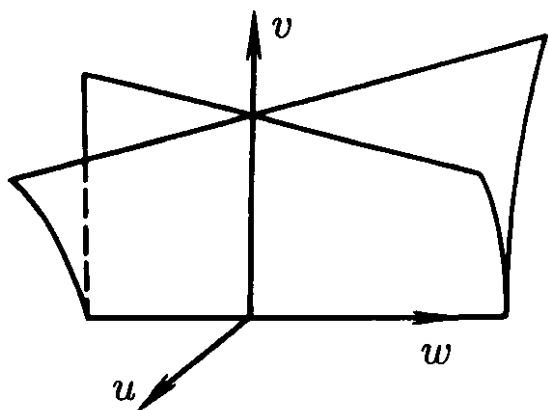


Рис. 1. Сложенный зонтик

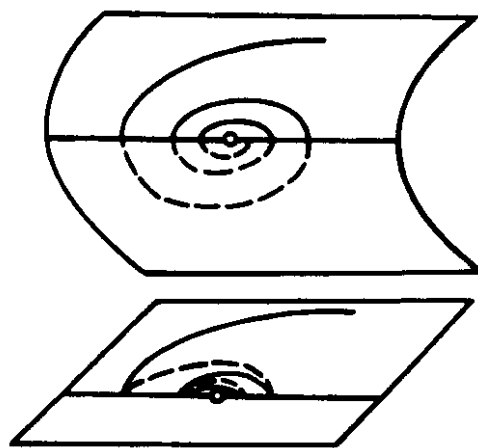


Рис. 2. Сложенный фокус

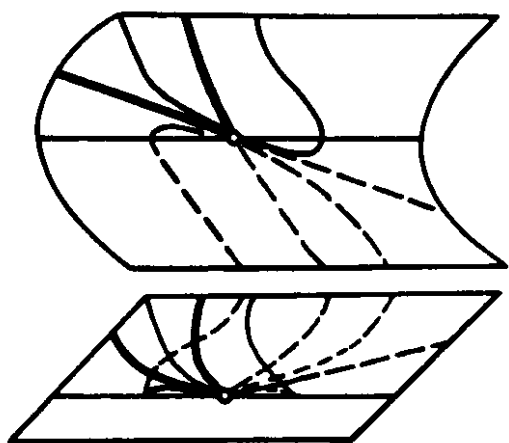


Рис. 3. Сложенный узел

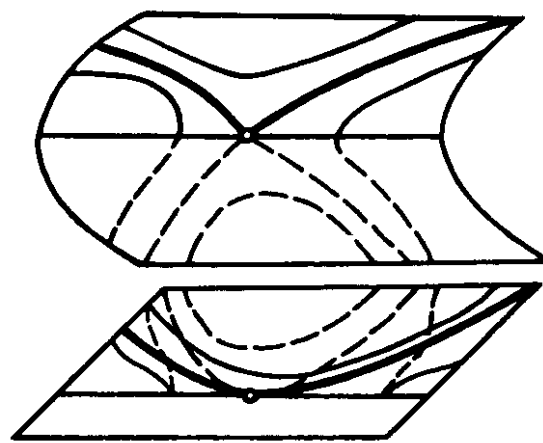


Рис. 4. Сложенное седло

на поверхностях трехмерного пространства и в теории уравнений, неразрешенных относительно производных. Сложенный зонтик Уитни  $u^2 = v^3 w^2$  встречается в задаче о заметании каустики ребрами возврата движущихся фронтов и в задаче об обходе препятствия. Однако в отличие от остальных сложенных особых точек, появление сложенного зонтика в нашем случае не следует из общих соображений и является неожиданным итогом длинных вычислений.

Что касается сложенных фокуса, узла и седла, то их появление объясняется контактной структурой, неявно присутствующей во всех трех задачах, где они появляются. В релаксационной задаче эта структура есть поле плоскостей, натянутых на векторы невозмущенного (быстрого) поля и возмущенного поля в каждой точке.

Это — поле *плоскостей* в трехмерном пространстве, исключая, в случае общего положения, особую линию, где оба поля коллинеарны.

Эта линия в системе общего положения пересекает медленное многообразие в отдельных точках — особых точках поля медленного движения, которое мы построили на медленном многообразии, спроектировав на него возмущающее поле. Точки эти не лежат на складке.

Полученное поле плоскостей невырождено и задает контактную структуру в трехмерном пространстве, исключая (в системе общего положения) лишь некоторую поверхность, где контактная структура вырождается. Эта поверхность пересекает (в системе общего положения) медленное многообразие по линии, а линию складок на нем — в отдельных точках. Из этих точек возникнут сложенные зонтики, мы же пока оставим их в стороне и рассмотрим остальные точки, в которых контактная структура не вырождается.

Поле контактных плоскостей всюду вертикально (содержит направление слоя). Вне складки оно высекает на медленном многообразии в точности поле направлений поля медленного движения. В общих точках складки контактные плоскости трансверсальны медленному многообразию и высекают на нем вертикальные направления.

В отдельных точках складки контактная плоскость может коснуться медленного многообразия. Это — особые точки поля направлений медленного движения на медленном многообразии. В системе общего положения такие особые точки — обычные седла, узлы или фокусы, их нормальные формы задаются линейными векторными полями, как это доказали Пуанкаре для узла и фокуса и Зигель для седла.

Но это — нормальные формы на медленном многообразии, и приведение к ним осуществляется диффеоморфизмом медленного многообразия без учета проекции. Нас же интересуют прежде всего проекции интегральных кривых на базу расслоения и, формально более общим образом, приведение к нормальной форме группой расслоенных (переводящих слои в слои) диффеоморфизмов.

Сейчас мы увидим, что группу, не меняя ответа, можно еще уменьшить, потребовав сохранения контактной структуры всюду, а не только на медленном многообразии, или же увеличить, рассматривая все диффеоморфизмы медленного многообразия, коммутирующие с его инволюцией, переставляющей точки одного слоя.

Для этого сначала нужно напомнить теорию уравнений, неразрешенных относительно производной. Такое уравнение задается поверхностью в трехмерном контактном пространстве 1-струй функций. Проекция поверхности на пространство 0-струй имеет для уравнения общего положения особенностями лишь складки и сборки. Контактные

плоскости высекают на поверхности поле направлений, вертикальное на складке и не определенное в особых точках, где контактная плоскость касается поверхности.

**Теорема.** Поле направлений медленных движений в окрестности особой точки системы общего положения с одной быстрой и двумя медленными переменными расслоенным контактным диффеоморфизмом приводится к полю направлений одного из уравнений  $p^2 = x$  (кубическое семейство),  $(p + kx)^2 = y$  (сложенные особенности), неразрешенных относительно производной  $p = dy/dx$ .

Использованная здесь классификация сложенных особых точек неявных дифференциальных уравнений с точностью до контактных диффеоморфизмов недавно получена А. А. Давыдовым. В 1972 г. Р. Том уже начал изучение этих особых точек<sup>1</sup>, а Л. Дара в 1975 г. продолжил работу Р. Тома и высказал гипотезу о том, что указанные выше нормальные формы исчерпывают *топологические* типы сложенных особенностей. А. А. Давыдов не только доказал эту гипотезу, но и показал, что в случае общего положения нормальные формы исчерпывают дифференцируемый и аналитический тип особенностей дифференцируемых или аналитических уравнений.

Основная идея доказательства А. А. Давыдова состоит в том, чтобы приводить к нормальной форме не уравнение, сохраняя инволюцию, а инволюцию, сохраняя уравнение.

Рассмотрим на плоскости поле направлений с особой точкой  $O$  и инволюцию, неподвижные точки которой образуют проходящую через  $O$  кривую. Инволюцию назовем *допустимой*, если поле на линии неподвижных точек антиинвариантно при инволюции. А. А. Давыдов показал, что все допустимые инволюции, для которых линии неподвижных точек не разделены направлениями собственных векторов поля (лежат в одной компоненте связности множества допустимых инволюций), локально переводятся друг в друга диффеоморфизмами, при которых каждая точка остается на своей интегральной кривой.

Доказательство осуществляется гомотопическим методом. Сначала можно совместить линии неподвижных точек. После этого инволюции можно соединить гомотопией с той же линией неподвижных точек

<sup>1</sup> Ранее исследовавшихся М. Чибрарио, А. В. Пхакадзе, А. А. Шестаковым, П. В. Соколовым, чьих работ Р. Том, видимо, не знал.



при всех значениях параметра. Для построения векторного поля, замыкающего инфинитезимальную коммутативную диаграмму, получается теперь гомологическое уравнение вида

$$fv - \bar{f}\bar{v} = h,$$

где  $v$  — известное векторное поле, задающее поле направлений;  $f$  — неизвестная функция; черта над буквой означает действие промежуточной инволюции, входящей в гомотопию, а правая часть — вектор скорости деформации этой инволюции при гомотопии; этот вектор известен и удовлетворяет соотношению  $h = -\bar{h}$ .

Поскольку векторы  $v$  и  $\bar{v}$  коллинеарны лишь на линии неподвижных точек (это исключает лишь узлы с равными и седла с противоположными собственными числами), правую часть можно вне линии неподвижных точек разложить по базису:  $h = fv + g\bar{v}$ . Из  $\bar{h} = -h$  следует теперь  $g = -\bar{f}$ , что и требовалось (гладкость  $f$  вплоть до линии неподвижных точек проверяется без труда).

Исследование случая, когда контактная структура вырождается, приводит таким же образом к исследованию действия инволюции на семейство гладких кривых, которые касаются (на линии неподвижных точек) антиинвариантного направления. В точке общего положения на линии неподвижных точек такая кривая касается своего образа при инволюции кубически (порядок касания второй), но в отдельных точках порядок касания повышается до четвертого.

Соответствующая нормальная форма на уровне формальных рядов или бесконечно-дифференцируемых функций (но не в аналитическом случае) такова:

$$z + x^3z + x^5 = c.$$

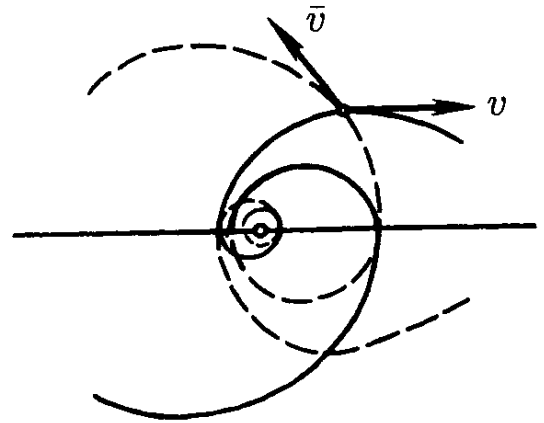


Рис. 5. Векторы  $v$  и  $\bar{v}$

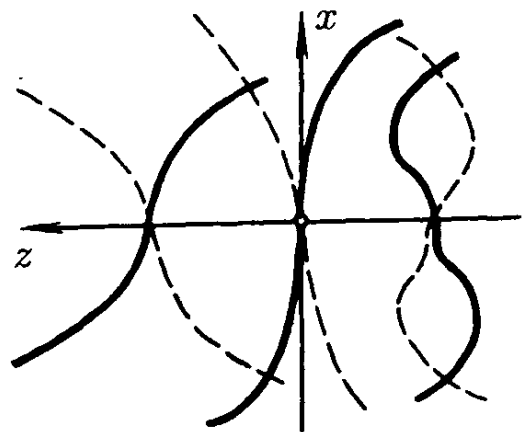


Рис. 6. След вырождающейся контактной структуры и его отражение

Инволюция меняет знак  $x$ . Поднимая каждую кривую семейства на свою высоту, получаем в трехмерном пространстве  $(y = x^2, z, c)$  поверхность, разбитую на плоские сечения.

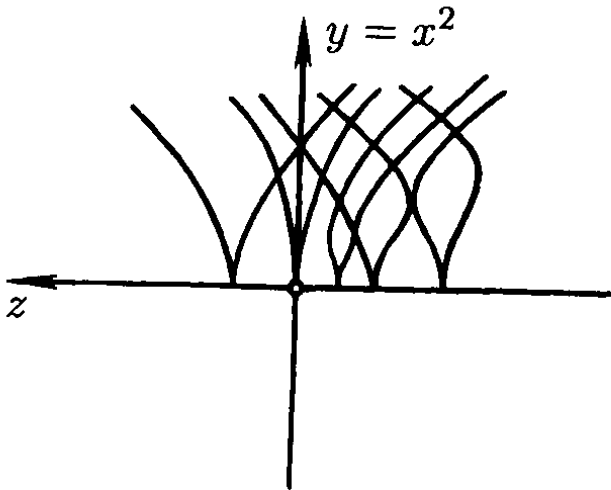


Рис. 7. Сечения сложенного зонтика плоскостями

**Теорема.** Эта поверхность диффеоморфна сложенному зонтику Уитни  $u^2 = v^3w^2$ , а сечения — уровням функции общего положения на нем, например, функции  $u + v + w$ . (Эквивалентность всех семейств линий уровня на сложенном зонтике легко доказать, используя его двоякую квазиоднородность, как и для других поверхностей с биномиальными уравнениями, например, для обычного зонтика Уитни.)

Подробное доказательство и обобщения этой теоремы будут опубликованы в статье А. А. Давыдова в Математическом сборнике.

## О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями

Волны разных типов (например, продольные и поперечные) распространяются обычно независимо друг от друга. Однако в неоднородных и неизотропных средах типичным становится взаимное превращение волн разных типов в некоторых внутренних точках среды. В настоящей заметке такое необычное внутреннее рассеяние волн исследуется на уровне геометрической оптики для волн, управляемых вариационными принципами. Основным результатом является описание типичных особенностей дисперсионного соотношения вблизи точки рассеяния.

Из наших формул следует, что лучи, испытывающие во внутренней точке среды необычное раздвоение, образуют множество коразмерности один. Таким образом, на типичном мгновенном фронте волны, распространяющейся в трехмерном пространстве, встречаются отдельные особые точки, в которых фронт данной волны соединяется с фронтом порожденной ею волны другого типа (при распространении волн на плоскости такое соединение волн происходит лишь в отдельные моменты времени).

В математическом отношении результаты сводятся к теоремам контактной геометрии о нормальных формах квадратичных конусов в контактных пространствах. Эти микролокальные нормальные формы описывают не только раздвоение волн, но также и некоторые типичные бифуркации релаксационных колебательных систем с двумя медленными переменными и одной быстрой [1] и одновременно типичные бифуркации, встречающиеся в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной [2]. Имея в виду эти различные приложения, я начинаю с математических формулировок результатов (§§ 1–3), приложения к теории внутреннего рассеяния волн обсуждаются в §§ 4, 5.

### 1. Контактная геометрия.

**Определение 1.** *Контактной структурой* на нечетномерном многообразии называется максимально неинтегрируемое поле гиперплос-

костей. Гиперплоскости эти называются *контактными гиперплоскостями*.

**Пример 1.** Уравнение  $\alpha = 0$ , где

$$\alpha = dz + \frac{p dq - q dp}{2}, \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

задает в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  контактную структуру. Всякая контактная структура записывается в таком виде в окрестности каждой точки в подходящей системе *координат Дарбу* (см. [3]).

**Пример 2.** *Контактным элементом* на многообразии называется гиперплоскость в касательном пространстве. Многообразие всех контактных элементов (данного многообразия) имеет естественную контактную структуру: скорость движения элемента принадлежит гиперплоскости структуры, если скорость движения точки приложения принадлежит самому элементу.

Многообразии контактных элементов пространства-времени (с его контактной структурой) играет в теории распространения волн такую же роль, как фазовое пространство с его симплектической структурой в механике.

**Определение 2.** *Лежандровым подмногообразием* контактного многообразия называется интегральное подмногообразие поля контактных гиперплоскостей, имеющее наибольшую возможную размерность (размерность  $n$  в  $(2n + 1)$ -мерном многообразии).

**Пример 3.** Гиперповерхность в пространстве-времени определяет лежандрово многообразие (составленное из ее контактных элементов).

Проекция лежандрова многообразия из пространства контактных элементов базы на эту базу называется *фронтом* лежандрова многообразия. Фронт в пространстве-времени разбивается изохронами  $t = \text{const}$  на *мгновенные фронты*.

Таким образом, все распространение волнового фронта описывается одним лежандровым подмногообразием в контактном многообразии контактных элементов пространства-времени.

**Определение 3.** *Контактоморфизмом* называется диффеоморфизм, сохраняющий контактную структуру.

**Пример 4.** Линейное симплектическое преобразование пространства  $\mathbb{R}^{2n}$  с симплектической структурой  $\omega = dp \wedge dq$  задает в координатах Дарбу контактоморфизм вида  $(p, q, z) \mapsto (P(p, q), Q(p, q), z)$ . Обратно, всякий контактоморфизм такого вида задается линейным симплектическим преобразованием пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Действительно, сохранение формы  $\beta = p dq - q dp$  эквивалентно сохранению пары  $(d\beta, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon = p \partial_p + q \partial_q$  — эйлерово поле (поскольку  $2\beta = i_\varepsilon d\beta$ ). Сохранение формы  $d\beta$  означает симплектичность, а сохранение поля  $\varepsilon$  — линейность.

**Пример 5.** Проективное преобразование  $(p, q, z) \mapsto (p + az, q + bz, z)/r$ ,  $r = 1 + (aq - bp)/2$ , является контактоморфизмом окрестности нуля в  $\mathbb{R}^3$ . Производная этого преобразования в 0 записывается такой же формулой с  $r \equiv 1$ .

**Пример 6.** Диффеоморфизм прямой  $z \mapsto g(z)$  порождает контактоморфизм  $(p, q, z) \mapsto (r(z)p, r(z)q, g(z))$  пространства  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , если  $r = \sqrt{dg/dz}$ .

**Определение 4.** Контактным векторным полем называется векторное поле, поток которого состоит из контактоморфизмов.

Пусть контактная структура задается формулой  $\alpha = 0$ , где  $\alpha$  — фиксированная 1-форма.

**Определение 5.** Контактной функцией Гамильтона контактного поля  $v$  называется значение формы  $\alpha$  на векторах поля,  $K(x) = i_v \alpha = \alpha|v$ . Легко доказывается (ср., например, [3])

**Теорема 1.** В координатах Дарбу примера 1 контактное поле  $v$  задает дифференциальное уравнение

$$\dot{p} = -K_q + \frac{p}{2}K_z, \quad \dot{q} = K_p + \frac{q}{2}K_z, \quad \dot{z} = K - \frac{p}{2}K_p - \frac{q}{2}K_q \quad (2)$$

(здесь и далее точкой обозначается производная вдоль  $v$ ).

**Следствие 1.** Контактное поле однозначно определяется своей функцией Гамильтона,  $K$ .

**Следствие 2.**  $\dot{K} = KK_z$ ,  $L_v \alpha = K_z \alpha$  (где  $L$  — производная Ли).

**Следствие 3.** Если  $H(p, q)$  — квадратичная форма, то  $\dot{H} = \{K, H\} + HK_z$ , где  $\{K, H\} = \partial K/\partial p \partial H/\partial q - \partial K/\partial q \partial H/\partial p$  — скобка Пуассона.

Рассмотрим гиперповерхность в контактном многообразии.

**Определение 6.** Характеристическим направлением на гиперповерхности называется косоортогональное дополнение к пересечению ее касательной гиперплоскости с плоскостью контактной структуры  $\alpha = 0$  (в смысле симплектической структуры  $d\alpha$  в контактной гиперплоскости  $\alpha = 0$ ). Интегральные кривые поля характеристических направлений называются характеристиками.

**Пример 7.** В координатах Дарбу характеристики гиперповерхности  $K = 0$  — это лежащие на этой поверхности фазовые кривые контактного поля с функцией Гамильтона  $K$ .

**Пример 8.** Поле конусов нулей главного символа гиперболической системы определяет световую гиперповерхность в многообразии контактных элементов пространства-времени. Характеристики световой гиперповерхности управляют распространением волн и разрывов в системе.

Действительно, лежандрово подмногообразие, описывающее фронт волны или разрыв, принадлежит световой гиперповерхности. Но каждое лежандрово подмногообразие любой гиперповерхности содержит ее характеристическое направление. Поэтому лежандрово многообразие, описывающее фронт, расслоено на характеристики световой гиперповерхности: движущийся фронт получается из начального проведением этих характеристик.

**2. Конус в контактном пространстве.** Рассмотрим в трехмерном контактном пространстве поверхность квадратичного конуса.

**Теорема 2.** Пара, состоящая из конуса и контактной структуры общего положения, приводится в окрестности вершины конуса диффеоморфизмом к нормальной форме, в которой контактная структура принимает стандартный вид Дарбу (1), а конус — вид поверхности

$$\frac{p^2}{2} \pm \frac{q^2}{2} = \frac{z^2}{2} + c \frac{z^3}{3} \quad (c — модуль). \quad (3)$$

**Замечание 1.** Ниже теорема доказывается в классе формальных степенных рядов. По-видимому,  $C^\infty$ -конусы и структуры приводятся к указанной форме  $C^\infty$ -диффеоморфизмами, но в аналитическом случае приводящие ряды, как правило, расходятся.

**Доказательство теоремы 2.** Будем с самого начала считать, что контактная структура приведена к нормальной форме Дарбу, и будем приводить диффеоморфную конусу поверхность к нормальной форме контактоморфизмами. Уравнение поверхности запишем в виде  $H = H_2 + \dots = 0$ , где  $H_2$  — невырожденная квадратичная форма. Ограничение  $H_2$  общего положения на плоскость  $z = 0$  не вырождено.

**Лемма 1.** Существует контактоморфизм, переводящий сопряженное плоскости  $z = 0$  относительно формы  $H_2$  направление в направление оси  $z$ .

**Доказательство.** Достаточно применить проективное преобразование примера 5 §1.

**Лемма 2.** Существует контактоморфизм, приводящий главную квадратичную часть  $H_2$  в 0 к виду  $c(p^2 \pm q^2 - z^2)$ .

**Доказательство.** После применения леммы 1  $H_2 = h_2(p, q) - c_1 z^2$ . Симплектическим линейным преобразованием приводим  $h_2$  к виду  $c_2(p^2 \pm q^2)$ . Контактморфизм примера 4 §1 приводит  $H_2$  к виду  $c_2(p^2 \pm q^2) - c_1 z^2$ . Растяжениями  $(p, q, z) \mapsto (rp, rq, r^2 z)$  (пример 6) добиваемся  $c_1^2 = c_2^2$ . Теперь автоматически  $c_2 = c_1$  при знаке  $+$ , а при знаке  $-$  этого добиваемся поворотом  $(p, q) \mapsto (q, -p)$ .

**Лемма 3.** Пусть  $H = H_2 + H_3 + \dots$  — ряд Тейлора по  $p, q, z$ ,  $H_2 = \rho - z^2/2$ ,  $\rho = p^2/2 \pm q^2/2$ . Тогда для любого  $m \geq 3$  существует контактоморфизм, приводящий функцию  $H$  к виду  $H = H_2 + H_3 + \dots + H_{m-1} + F_m + \dots$ , где  $F_m$  — многочлен от  $p$  и  $z$  (степени  $m$  по  $p, q, z$ ).

Доказательству леммы 3 предположим еще две леммы. Рассмотрим контактное векторное поле  $v$ , функция Гамильтона которого — однородный многочлен  $K_m$  степени  $m$  по  $p, q, z$ . Из формулы (2) вытекает

**Лемма 4.** Производная  $H$  по направлению поля  $v$  дается формулой

$$\dot{H} = \{K_m, \rho\} + (\text{члены степени выше } m)$$

(скобка Пуассона только по переменным  $p$  и  $q$ !).

При доказательстве теоремы Биркгофа о нормальной форме (см., например, [4]) устанавливается

**Лемма 5.** Для любого однородного многочлена  $h_n(p, q)$  степени  $n$  по  $p$  и  $q$  существуют однородные многочлены  $k_n(p, q)$  и  $f_n(\rho)$  степени  $n$  по  $p$  и  $q$  такие, что  $\{k_n, \rho\} + h_n - f_n = 0$ , причем  $f$  и  $k$  линейно зависят от  $h$ .

**Доказательство леммы 5.** Пусть, например,  $2\rho = p^2 - q^2$ . Поворотом этот случай сводится к  $\rho = pq$ . Тогда, если  $k_n = \sum k_{u,v} p^u q^v$ , то  $\{k_n, \rho\} = \sum (v - u) k_{u,v} p^u q^v$ , поэтому для  $h_n = \sum h_{u,v} p^u q^v$  решение будет  $k_{u,v} = h_{u,v} / (v - u)$  при  $u \neq v$ ,  $f_{2u} = h_{u,u} \rho^u$ .

В случае  $2\rho = p^2 + q^2$  выкладки в комплексной области аналогичны; решение же находится вещественное.

**Доказательство леммы 3.** Представим многочлен  $H_m$  в виде  $\sum h_n(p, q) z^{m-n}$ . По лемме 5 получим разложение

$$H_m - F_m = -\{K_m, \rho\}, \quad K_m = \sum k_n(p, q) z^{m-n}, \quad F_m = \sum f_n(\rho) z^{m-n}.$$

Положим  $H^{(t)} = H - t(H_m - F_m)$ . Чтобы установить контактоморфность всех  $H^{(t)}$  (по модулю членов степени выше  $m$  в ряду Тейлора), достаточно решить гомологическое уравнение

$$L_{v^{(t)}} H^{(t)} = F_m - H_m + (\text{члены степени выше } m)$$

относительно контактного поля  $v^{(t)}$ , равного 0 в начале координат (ср. [4]). Найденная выше контактная функция Гамильтона  $K_m$  определяет искомое поле, так как, по лемме 4,

$$L_v H^{(t)} = \{K_m, \rho\} + \dots (= F_m - H_m + \dots).$$

**Лемма 6.** Существует (формальный) контактоморфизм, приводящий ряд  $H$  к виду  $H = \rho - z^2/2 + F(\rho, z)$ , где ряд  $F$  имеет вид  $z^3 A(z) + \rho z B(z) + \rho^2 C(\rho, z)$ .

**Доказательство.** Применяя лемму 3 при  $m = 3$ , приводим  $H$  к виду  $\rho - z^2/2 + az^3 + b\rho z + \dots$ , при  $m = 4$  добавятся одночлены  $z^4$ ,  $\rho z^2$ ,  $\rho^2$ , и т.д. При этом на каждом шагу используются контактоморфизмы, отличающиеся от тождества членами все более высокой степени. Поэтому ряды Тейлора произведений этих контактоморфизмов стабилизируются и определяют искомый формальный контактоморфизм.



**Замечание 2.** Можно даже построить настоящий  $C^\infty$ -контактоморфизм, приводящий ряд Тейлора  $H$  к указанному выше виду, но преобразование остающегося плоского добавка требует дополнительной работы.

**Лемма 7.** Пусть  $H = \rho - z^2/2 + F(\rho, z)$ , где  $F = z^3 A + \rho z B(z) + \rho^2 C(\rho, z)$  — гладкие вблизи нуля функции, аналитические функции или формальные ряды. Тогда уравнение  $H = 0$  эквивалентно уравнению  $\rho = z^2 E(z)$ ,  $E(0) = 1/2$  (в соответствующем классе функций).

**Доказательство.** Поскольку  $\partial F/\partial \rho|_{0,0} = 0$ , применима теорема о неявной функции.

**Лемма 8.** Поверхность  $\rho = f(z)$  в трехмерном контактном пространстве контактоморфна поверхности  $\rho = h(z)$ , если векторные поля  $f(z)\partial/\partial z$  и  $h(z)\partial/\partial z$  переводятся друг в друга диффеоморфизмом оси  $z$ .

**Доказательство.** Контактоморфизм примера 6 §1 действует на плоскости  $(\rho, z)$  по формуле  $(\rho, z) \mapsto (dg/dz \cdot \rho, g(z))$ . Но диффеоморфизм  $g$  оси  $z$  действует на касательный вектор  $\rho\partial/\partial z$  именно так.

С другой стороны, хорошо известна и легко доказывается

**Лемма 9.** Векторное поле  $(z^2 + cz^3 + \dots)\partial/\partial z$  приводится к нормальной форме  $(z^2 + cz^3)\partial/\partial z$  диффеоморфизмом оси  $z$  (это верно и для формальных рядов, и для гладких функций, и для сходящихся рядов).

**Замечание 3.** Используя вместо леммы 9 лемму Костова о версальности семейства  $(\varepsilon + z^2 + cz^3)\partial/\partial z$  [5], можно получать нормальные формы бифурцирующих поверхностей  $H = \varepsilon$  контактного пространства.

Соединяя леммы 6, 7, 8 и 9, получаем формальный контактоморфизм, приводящий уравнение поверхности  $H = 0$  к требуемому виду (3).

**3. Контактные структуры вблизи вершины конуса.** Другое доказательство теоремы §2 получается из следующей цепочки утверждений о гладких (аналитических, формальных) функциях и формах на квадратичном конусе  $H = 0$ ,  $H = x^2 + y^2 - z^2$ .

1. Функция, равная нулю на конусе, представима в виде  $MH$  [6].
2. 1-форма, равная 0 на касательных векторах конуса, представима в виде  $M dH + H\gamma$ .

**Доказательство.** Пусть  $A dx + B dy + C dz = 0$  на касательных векторах конуса. «Гамильтоновы» поля  $x\partial_y - y\partial_x$ ,  $x\partial_z + z\partial_x$  и  $y\partial_z + z\partial_y$  касаются конуса. Значит,  $-Ay + Bx = PH$ ,  $Cx + Az = QH$ ,  $Cy + Bz = RH$ . Но при  $x = y = 0$   $H = -z^2$ , поэтому  $P = Sx + Ty$ . Точно так же  $Q = Ux + Vz$ ,  $R = Wy + Xz$ . Значит,  $(A + TH)y = (B - SH)x$ ,  $(C - UH)x = (-A + VH)z$ . Итак,  $A + TH = Ex$ ,  $B - SH = Ey$ ,  $C - UH = Fz$ ,  $A - VH = -Fx$ . Поэтому  $(E + F)x = (T + V)H$ . При  $H = 0$  получаем  $E + F = 0$ . Согласно 1,  $E + F = NH$ . Окончательно,  $A = xE - TH$ ,  $B = yE + SH$ ,  $C = -zE + (U - N)H$ , что и требовалось. Подобное доказательство проходит для широкого класса поверхностей  $H = 0$ .

3. Пусть  $\alpha$  — контактная 1-форма. Тогда гомологическое уравнение

$$L_v \alpha + f \alpha = M dH + H \gamma$$

разрешимо относительно обращающихся в 0 при  $H = 0$  поля  $v$  и функции  $f$  для любой функции  $M$  и формы  $\gamma$ .

**Доказательство.** Пусть  $w_0$  — характеристическое поле формы  $\alpha$ , определенное условиями  $\alpha|w_0 = 1$ ,  $d\alpha(w_0, \cdot) = 0$ . Будем искать  $v = u + gw_0$ , где  $\alpha|u = 0$ . Тогда  $L_v \alpha = i_u d\alpha + dg$ . Положим  $f_0 = \gamma|w_0$ ,  $g = 0$ . Уравнение  $i_{u_0} d\alpha = \gamma - f_0 \alpha$  однозначно разрешимо в классе горизонтальных полей ( $\alpha|u_0 = 0$ ), поскольку  $(\gamma - \gamma|w_0 \alpha)|w_0 = 0$ .

Мы получили решение  $v = Hu_0$ ,  $f = Hf_0$  гомологического уравнения с правой частью  $H\gamma$ . Для правой части  $M dH = d(MH) - H dM$  с вычитаемым поступаем так же, а для правой части  $d(MH)$  решение имеет вид  $v = MHw_0$ ,  $f = 0$ .

4. Контактные структуры, заданные 1-формами  $\alpha$  и  $\alpha + M dH + H\gamma$  в окрестности точки 0 поверхности  $H = 0$ , локально переводятся друг в друга сохраняющим поточечно поверхность  $H = 0$  диффеоморфизмом.

Предложения 3 и 4 не используют никаких специальных свойств гладкой функции  $H$ ; 4 выводится из 3 гомотопическим методом.

Предложения 1–4 сводят задачу к классификации нулей контактных форм на поверхности конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ . Рассмотрим двулистное накрытие  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = 2uv$ ,  $z = u^2 + v^2$  половины конуса.

5. Индуцированная из 1-формы в пространстве 1-форма  $P du + Q dv$  имеет нечетные коэффициенты  $P$ ,  $Q$ , причем в нуле  $\partial P/\partial v = \partial Q/\partial u$ . Обратно, все формы с этими свойствами индуцируются из 1-форм в пространстве.

6. Всякий нечетный (коммутирующий с изменением знаков  $(u, v)$  вместе) локальный диффеоморфизм плоскости индуцирован из сохраняющего конус диффеоморфизма объемлющего пространства.

Тем самым наша классификационная задача на полуконусе свелась к орбитальной классификации нечетных (выдерживающих поворот на  $180^\circ$ ) векторных полей на плоскости, имеющих в 0 сумму собственных чисел 0, относительно нечетных диффеоморфизмов.

Вторая половина конуса требует несложных (как в аналитическом, так и в  $C^\infty$ -случае) дополнительных рассуждений:

7. Для любых двух гладких функций в окрестности вершины конуса с общим рядом Тейлора в вершине существует гладкая функция с таким же рядом Тейлора, совпадающая с первой на одной половине конуса и со второй — на другой.

Если два гладких диффеоморфизма с общим рядом Тейлора в нуле переводят в себя одну одну, а другой другую половину конуса, то существует третий диффеоморфизм с таким же рядом, совпадающий с первым на одной, а со вторым — на другой половине конуса.

8. Формальным ( $C^\infty$ ) нечетным диффеоморфизмом и умножением на четную функцию нечетное векторное поле общего положения с суммой собственных чисел 0 в нуле приводится либо к гиперболической, либо к эллиптической нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 + uv + c(uv)^2), \\ \dot{v} = v(-1 + uv + c(uv)^2); \\ \dot{u} = v + u(u^2 + v^2) + cu(u^2 + v^2)^2, \\ \dot{v} = -u + v(u^2 + v^2) + cv(u^2 + v^2)^2 \end{cases} \quad (4)$$

(в аналитическом случае приводящие ряды, как правило, расходятся).

От формул (4), пользуясь предложениями 1–7, можно вернуться к классификации контактных структур и получить теорему §2. Из них следует также, что  $c$  — модуль (системы с разными  $c$  не эквивалентны).

**Замечание 4.** Формулы (4) описывают поведение характеристик на поверхности конуса. В первом (гиперболическом) случае они напминают сечения конуса плоскостями  $z = \text{const}$ . Две характеристики (сепаратрисы седла, имеющие в координатах формулы (4) уравнения  $u = 0$ ,  $v = 0$ ) — гладкие (в аналитическом случае — аналитические) кривые, проходящие через вершину конуса (теорема Адамара–Перрона, см., например, [4]). Во втором случае особая точка на плоскости  $(u, v)$  — центр по линейному приближению. Характеристики — спирали с уменьшающимся при приближении к вершине конуса шагом. Каждый виток близок к горизонтальной окружности  $z = \text{const}$ , но высота  $z$  монотонно меняется, так что на одной половине конуса происходит приближение к вершине, а на другой — удаление от нее. Замыкание любой характеристики содержит вершину.

Расходимость рядов теории нормальных форм не мешает сделать эти выводы, так как для их доказательства достаточно нормализовать несколько первых членов ряда Тейлора.

**4. Вариационные гиперболические системы.** Рассмотрим поле  $u(t, x)$  со значениями в евклидовом векторном пространстве  $\mathbb{R}^m$ , определенное в пространстве-времени  $\{(t, x)\} = \mathbb{R}^{1+n}$  вариационным принципом с лагранжианом  $L = T - U$ , где  $T = \int (\partial u / \partial t)^2 / 2 dx$  — кинетическая энергия, а положительно определенная при  $u \neq \text{const}$  потенциальная энергия  $U$  — интеграл по  $x$  от квадратичной формы от производных поля по  $x$ . Коэффициенты формы предполагаются, вообще говоря, переменными, но в начале будем считать их постоянными. Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид волнового уравнения

$$\square u = 0, \quad \text{где} \quad \square = \partial^2 / \partial t^2 + A,$$

$A$  — симметрическая матрица из дифференциальных операторов второго порядка по  $x$ . Ввиду трансляционной инвариантности оператора  $\square$  его собственные функции имеют вид  $u = e^{i(p, q)} w$ , где  $q = (t, x)$  — точка пространства-времени, импульс  $p = (c, k)$  — вектор двойственного пространства  $(\mathbb{R}^{1+n})^*$ ,  $w \in \mathbb{R}^m$ . Вычисляя значение  $\square$  на  $u$ , находим

$$\square u = \sigma(ip)u,$$

где  $\sigma$  — симметрическая матрица. Эта матрица называется *символом* уравнения. Очевидно,  $\square = \sigma(D/i)$ , где  $\sigma$  рассматривается как матрица из многочленов от переменных  $\partial_j = \partial/\partial q_j$ . Сами эти переменные являются координатами в  $T_q^*\mathbb{R}^{1+n}$ . Таким образом, символ задает однородное по импульсам отображение фазового пространства в пространство симметрических матриц.

Гармоническая волна  $u = e^{i(p,q)}w$  удовлетворяет волновому уравнению  $\square u = 0$ , если и только если  $\sigma(ip)w = 0$ . Следовательно, импульс должен удовлетворять дисперсионному соотношению  $\det \sigma(ip) = 0$ . Это вещественное уравнение определяет конус в импульсном пространстве. Система  $\square u = 0$  называется *гиперболической*, если этот конус гиперболичен относительно времяподобного вектора  $(1, 0)$  (конус  $F = 0$  гиперболичен относительно вектора  $\xi$ , если многочлен  $f(\lambda) = F(p + \lambda\xi)$  от переменной  $\lambda$  при любом  $p$  имеет лишь действительные корни; обзор теории гиперболических систем см. в [7]).

*Вариационная система  $\square u = 0$  с положительно определенной потенциальной энергией гиперболична.* Действительно, вещественный многочлен степени  $2m$ , который нужно исследовать, есть

$$f(\lambda) = \det(-(c + \lambda)^2 E + A(ik)).$$

Матрица  $A(ik)$  при  $k \neq 0$  положительно определенная (ввиду положительности потенциальной энергии). Она имеет  $m$  положительных собственных чисел,  $h_j(k)$ . Искомые  $2m$  действительных корней — это  $\lambda = -c \pm \sqrt{h_j}$ .

В случае, когда коэффициенты переменны, их нужно «заморозить», положив равными значению в данной точке. Члены с младшими производными, если они есть, при этом отбрасываются. При таком замораживании в каждой точке  $q$  пространства-времени возникает свой однородный по импульсам  $p$  матричный символ. Он называется *главным символом* системы,  $\sigma(p, q)$ , и отвечает за распространение разрывов и коротких волн (соответствующих  $p \rightarrow \infty$ ). Нули главного символа  $\det \sigma(p, q) = 0$  образуют поле гиперболических *характеристических конусов* — гиперповерхность в  $T^*\mathbb{R}^{1+n}$ .

Гиперповерхность  $\sigma = 0$  в пространстве  $PT^*\mathbb{R}^{1+n}$  контактных элементов пространства-времени называется *световой*. Световая гиперповерхность описывает распространение коротких волн всех типов, подчиняющихся нашему волновому уравнению, на уровне геометрической оптики. А именно, бегущие волны соответствуют лежандровым

подмногообразиям световой гиперповерхности, а лучи — ее характеристикам.

В случае однородной среды характеристики прямые, а характеристические конусы  $\sigma = 0$  одинаковы во всех точках и, как правило, *строого гиперболичны* (не имеют особенностей, отличных от вершины). Для неоднородной среды общего положения световая гиперповерхность может иметь особенности, и некоторые из характеристических конусов будут нестроого гиперболическими.

Обозначим через  $M = PT^*\mathbb{R}^{1+n}$  многообразие контактных элементов пространства-времени. Главный символ задает отображение  $f : M \rightarrow N$ , где  $N$  — многообразие ненулевых квадратичных форм в  $\mathbb{R}^m$ , рассматриваемых с точностью до ненулевого множителя. Хорошо известна (см., например, [8])

**Теорема 3.** *Гладкое многообразие  $N$  имеет алгебраическую стратификацию  $N \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots$ , где  $N_r$  — множество классов форм коранга  $r$  или выше. Корамерность  $N_r$  в  $N$  равна  $r(r+1)/2$ . След  $N_1$  на любой трансверсали размерности  $r(r+1)/2$  к гладкому многообразию  $N_r \setminus N_{r+1}$  в  $N$  локально диффеоморфен многообразию вырожденных симметрических матриц порядка  $r$ .*

**Пример 9.** Корамерность  $N_2$  равна 3. След многообразия вырожденных симметрических матриц на трехмерной трансверсали к многообразию матриц коранга 2 диффеоморфен квадратичному конусу  $b^2 = ac$ . (Ибо таково уравнение многообразия вырожденных форм  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ .)

**Следствие 4.** *Рассмотрим гладкие отображения  $f : X \rightarrow N$  в пространство классов квадратичных форм. Существует открытое всюду плотное множество «типичных» отображений  $f$  такое, что  $f$  трансверсально всем  $N_r$ .*

Для типичных отображений многообразия  $X$  размерности  $d$ , в частности,

1) формы коранга  $r$  встречаются лишь при  $r(r+1)/2 \leq d$ ;  
 2) прообраз многообразия вырожденных форм,  $f^{-1}(N_1)$ , является гиперповерхностью, множество особых точек которой имеет коразмерность 2 на гиперповерхности;

3) в окрестности своей типичной особой точки гиперповерхность диффеоморфна прямому произведению конуса на евклидово пространство, а нетипичные точки образуют множество коразмерности 5 на гиперповерхности.

Световая гиперповерхность — это прообраз многообразия вырожденных матриц  $N_1$  при отображении  $f$ , заданном главным символом.

**Замечание 5.** Главный символ дифференциального уравнения задает не произвольное гладкое отображение  $f : M \rightarrow N$ , так как он полиномиален по импульсам. Однако предыдущие выводы справедливы и для таких отображений (во всяком случае, если степень матричного символа или порядок матрицы  $m$  достаточно велики по сравнению с корангом  $r$ ).

**Пример 10.** Для вариационных волновых систем с пространством-временем размерности  $1+1$  типичные особенности световой гиперповерхности — конические особые точки (локальная нормальная форма  $x^2 + y^2 = z^2$  в координатах  $(x, y, z)$  многообразия контактных элементов).

При большем числе пространственных переменных локальная нормальная форма простейшей особенности световой гиперповерхности дается такой же нормальной формой  $x^2 + y^2 = z^2$  в координатах  $(x, y, z, u, v, \dots)$  многообразия контактных элементов.

При двух пространственных переменных (пространство-время размерности  $1+2$ ) подобные особые точки образуют на четырехмерной световой поверхности двумерное «подмногообразие вершин», и никаких других особенностей типичная световая гиперповерхность не имеет.

В нашем трехмерном физическом пространстве световая поверхность шестимерна, и, кроме трехмерного «подмногообразия вершин», типичная световая гиперповерхность может иметь еще линию особых точек более сложного вида.

Лежандрово многообразие в этом случае имеет размерность три. Поскольку  $3+1 < 6$ , типичная волна, распространяющаяся в типичной трехмерной неоднородной среде, никогда не встречает особенностей световой гиперповерхности, отличных от простейших (встреча впервые становится неустранимой в пространстве-времени размерности  $1+5$ ).

**5. Внутреннее превращение и рассеяние волн.** Рассмотрим одномерную среду (пространство-время размерности  $1+1$ ). В этом случае единственная типичная особенность световой гиперповерхности — невырожденный квадратичный конус. Нормальные формы контактной структуры в окрестности вершины конуса приведены в §2. Из них

вытекают нормальные формы для характеристик на световой поверхности (ср. §3), т.е. для «бихарактеристик» соответствующего волнового уравнения.

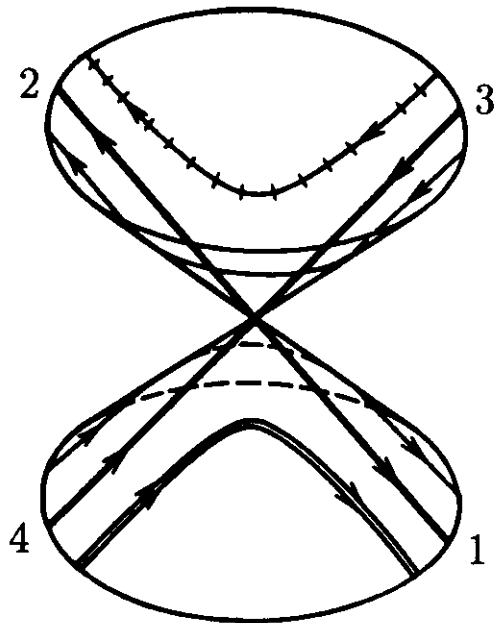
Проекция  $PT^*\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  пространства контактных элементов пространства-времени на само пространство-время переводит найденные на световой поверхности характеристики в пространство-время. Характеристики каждой из половин конуса дают при проектировании на пространство-время свое семейство кривых (эти проекции также называют характеристиками или бихарактеристиками).

Из нормальных форм §2 вытекает

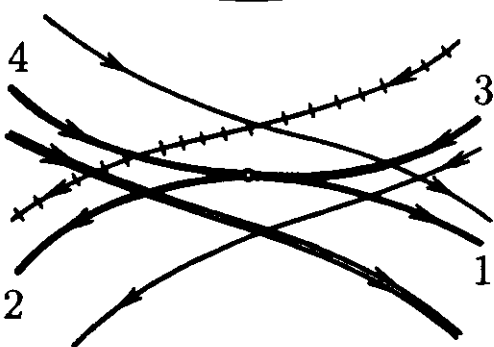
**Теорема 4.** *Контактная плоскость пересекает световую поверхность в ее конической особой точке (по двум трансверсальным вещественным направлениям), так что из двух нормальных форм §2 реализуется лишь одна гиперболическая*

$$H_2 = \frac{1}{2}(p^2 - q^2 - z^2), \quad \alpha = dz + \frac{p dq - q dp}{2}.$$

Проекции четырех характеристик, входящих в вершину конуса, составляют при проектировании на пространство-время  $(t, x)$  две гладкие (аналитические в аналитическом случае) кривые, квадратично касающиеся в образе вершины конуса.



Проекции характеристик с каждой из половин конуса образуют топологически выпрямляемое семейство, все кривые которого гладкие (аналитические), исключая одну, составленную из двух продолжающих друг друга частей квадратично касающихся кривых. Более нигде характеристики не касаются (см. рисунок).



**Доказательство.** 1. Слой расслоения  $PT^*\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  лежит в контактной плоскости  $\alpha = 0$ . Если бы проходящая через вершину контактная плоскость пересекала конус не гиперболически, то проекция световой поверхности на пространство-время



имела бы видимый контур, по одну сторону которого слои пересекали бы световую поверхность в двух вещественных точках, а по другую — нет. Это противоречит гиперболичности соответствующего конуса в  $T_q^*\mathbb{R}^2$ .

2. На поверхности конуса проходящие через 0 полухарактеристики составляют две гладкие кривые — сепаратрисы (для нормальной формы (3) их уравнения  $z = 0$ ,  $p = \pm q$ ). Гладкость (аналитичность) сепаратрис в общем случае следует из формул (4) п. 8 §3 и теоремы Адамара–Перрона (ср. [4]). Обе сепаратрисы — лежандровы кривые. Они касаются контактной плоскости в нуле и не касаются друг друга. Направление слоя  $PT^*\mathbb{R}^2$  не касается ни одной из сепаратрис в 0 (см. п. 1).

3. Две пересекающиеся кривые проектируются в две касающиеся, если направление проектирования в точке пересечения лежит в касающейся кривых плоскости и не касается кривых. Поэтому проекции сепаратрис в пространство-время касаются.

Что касание не более чем квадратично, следует из невырожденности контактной структуры, ибо порядок касания кривых на плоскости при поднятии их в пространство контактных элементов уменьшается ровно на единицу, а сепаратрисы состоят из контактных элементов своих проекций и образуют ненулевой угол.

**Замечание 6.** При прохождении точки раздвоения лучи несколько рассеиваются. Луч, проходящий вблизи раздваивающегося на расстоянии  $\varepsilon$  (на конечном расстоянии от точки раздвоения) окажется (снова на конечном расстоянии по другую сторону от точки раздвоения) смещенным относительно раздваивающегося луча на расстояние  $a\varepsilon + b\varepsilon^2 \ln|\varepsilon| + o(\varepsilon^2 \ln|\varepsilon|)$ ,  $ab \neq 0$  (это следует из формул (4) §3). Первое — гладкое — слагаемое присутствует и в регулярном пучке лучей, но логарифмический член — следствие испускания дополнительного луча в точке раздвоения.

**Замечание 7.** В многомерном случае нормальная форма §2 принимает даже более простой, квадратичный вид:  $H = (p_1^2 \pm q_1^2 - q_2^2)/2$  в координатах Дарбу. Двухлистное накрытие связано с вырождением Мартине замкнутой 2-формы [9].

Автор благодарит Д. Г. Васильева, Ю. С. Ильяшенко, А. Б. Гивенталя за полезные обсуждения.

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Контактная структура, релаксационные колебания и особые точки неявных дифференциальных уравнений. В кн: Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях. Воронеж: ВГУ, 1987, 3–8.
- [2] Давыдов А. А. Нормальная форма медленных движений уравнений релаксационного типа и расслоения биномиальных поверхностей. *Матем. сб.*, 1987, **132**(1), 131–139.
- [3] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974, 432 с.
- [4] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
- [5] Костов В. П. Версальные деформации форм степени  $\alpha$  на прямой. *Функц. анализ и его прилож.*, 1984, **18**(4), 81–82.
- [6] Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. М.: Мир, 1968, 131 с.
- [7] Волевич Л. Р., Иврий В. Я. Гиперболические уравнения. В кн.: Петровский И. Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986, 395–418.
- [8] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982, 304 с.
- [9] Martinet J. Sur les singularités des formes différentielles. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1970, **20**(1), 95–178.

## Замечания о квазикристаллической симметрии

Кроме экспериментальной кристаллографии, квазикристаллическая симметрия встречается в нескольких математических теориях, связанных с совсем другими физическими задачами, — в теории особенностей систем лучей геометрической оптики, в конструкции Синая марковских разбиений в эргодической теории динамических систем, в численных экспериментах по итерациям отображений плоскости и в статистическом исследовании топологии линий уровней квазипериодических функций Гамильтона. В этой статье я объясню некоторые из этих связей между на первый взгляд отдаленными предметами.

### 1. Разбиения и покрытия Пенроза

Рассмотрим тор  $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  и «иррациональное» подпространство  $\mathbb{R}^k$  в  $\mathbb{R}^n$ , не содержащее отличных от 0 целых точек.

**Определение.** *Разбиением Пенроза* называется разбиение тора на конечное число призм, основания которых параллельны заданному иррациональному подпространству (Пенроз, видимо, не рассматривал таких разбиений).

**Пример.** Разбиение Пенроза тора  $T^2$  на 3 прямоугольника изображено на рис. 1.

**Замечание.** Такие разбиения на прямоугольники, стороны которых параллельны сжимающемуся и расширяющемуся инвариантным многообразиям аносовского отображения тора, играют важную роль в построении Синая марковских разбиений в эргодической теории диффеоморфизмов Аносова [1].

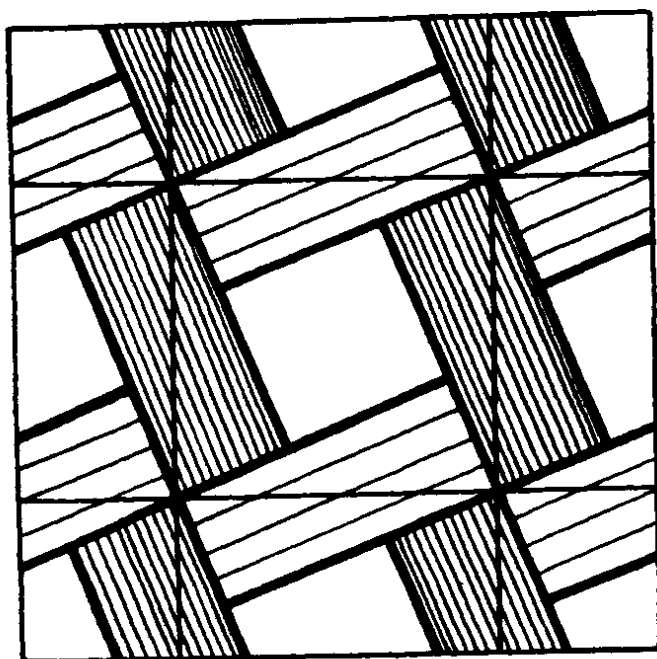


Рис. 1

Рассмотрим следы разбиения Пенроза на аффинном  $k$ -мерном подпространстве, параллельном данному иррациональному пространству  $\mathbb{R}^k$  (для простоты мы можем предположить, что это подпространство общего положения, т.е. что оно не содержит вершин призм). Следы являются многогранниками, получающимися из оснований призм параллельными переносами.

**Определение.** *Квазипериодическим покрытием Пенроза<sup>1</sup>  $k$ -мерного пространства называется его разбиение на многогранники, индуцированное из разбиения Пенроза на торе, как это объяснено выше.*

**Пример.** Рассмотрим разбиение трехмерного пространства на равные кубы с целочисленными вершинами. Кубы, пересекающие заданную иррациональную плоскость  $\mathbb{R}^2$ , образуют бесконечное многогранное тело, ограниченное двумя бесконечными многогранными поверхностями с квадратными гранями трех типов, которые получаются параллельными переносами из трех граней куба, имеющих общую вершину.

Спроектируем одну из этих поверхностей на плоскость  $\mathbb{R}^2$  вдоль прямой, проходящей через эту вершину и направленной внутрь куба. Проекция граней образует квазипериодическое покрытие плоскости параллелограммами трех типов (полученными параллельным переносом из трех параллелограммов).

**Теорема 1.** *Проекция образует покрытие Пенроза на плоскости.*

**Доказательство.** Рассмотрим множество таких точек  $x$  трехмерного пространства, что аффинная плоскость  $P$ , параллельная заданной иррациональной плоскости  $\mathbb{R}^2$  и содержащая  $x$ , покрыта проекцией фиксированной грани  $F$  многогранной поверхности вдоль данного направления  $l$ . Докажем, что это множество представляет собой призму, основание которой параллельно  $P$ .

Заметим, что условие « $F$  является одной из граней объединения кубов, пересекающих  $P$ » есть условие только на  $P$ , а не на  $x$ . Оно определяет слой между двумя плоскостями, параллельными  $P$ . Если  $x$  — точка плоскости, лежащей внутри этого слоя, то она покрыта проекцией грани  $F$  вдоль направления  $l$  тогда и только тогда, когда она принадлежит объединению прямых, параллельных  $l$  и пересекающих  $F$ . Следовательно, точка  $x$  входит в произведение  $F$  и  $l$  и лежит в слое

<sup>1</sup> Это частный случай покрытий, рассматривавшихся Пенрозом.

между параллельными плоскостями. Такие точки  $x$  образуют призму с основанием, параллельным  $P$ .

Каждая точка  $x$  покрыта проекцией одной из граней,  $F$ , на  $P$ . Итак, мы разбили  $P$  на призмы, определенные выше. Это разбиение периодически и, следовательно, определяет разбиение Пенроза трехмерного тора. След этого разбиения на  $P$  есть квазипериодическое покрытие плоскости параллелограммами — проекция разбиения многогранной поверхности на грани.

Следовательно, эти параллелограммы образуют покрытие Пенроза.

**Теорема 2.** *Существуют квазипериодические покрытия Пенроза плоскости конгруэнтными ромбами с углами  $60^\circ$  и  $120^\circ$ , которые не вычислимы никакой машиной Тьюринга.*

**Доказательство.** Спроектируем многогранную границу вдоль диагонали куба. Мы получим покрытие плоскости параллелограммами трех типов. Эти параллелограммы порождены тремя векторами  $u$ ,  $v$ ,  $w$  такими, что

$$u + v + w = 0.$$

Такие параллелограммы можно одновременно преобразовать в ромбы с углами  $60^\circ$  и  $120^\circ$  аффинным преобразованием плоскости. В результате мы получим искомое покрытие ромбами.

Исходная иррациональная плоскость восстанавливается по порядку ромбов покрытия. Поэтому среди построенных покрытий несчетное количество различных. С другой стороны, множество всех программ всех машин Тьюринга счетно. Следовательно, большинство квазипериодических покрытий Пенроза, которые мы построили, не допускают построения никакой машиной Тьюринга.

Рассуждения, с помощью которых доказана теорема 1, применимы и в более общей ситуации. Рассмотрим иррациональное подпространство  $\mathbb{R}^k$  в  $n$ -мерном пространстве. Кубы, пересекающие  $\mathbb{R}^k$ , образуют многогранное тело. Рассмотрим его  $k$ -мерные грани. Их проекции в  $\mathbb{R}^k$  вдоль некоторого  $(n - k)$ -мерного направления  $l$  определяют покрытие  $\mathbb{R}^k$  многогранниками, которые являются пересечениями параллелепипедов.

**Теорема 3.** *Построенное покрытие является покрытием Пенроза.*

**Доказательство.** Как и в доказательстве предыдущей теоремы 1, многогранное тело (а значит, и его грани) определяется аффинной

плоскостью  $P$ . Заданное множество  $S$  его  $k$ -мерных граней принадлежит к границе объединения кубов, пересекающих  $P$ , тогда и только тогда, когда  $P$  пересекает ортогональное  $P$   $(n - k)$ -мерное пространство в точке, принадлежащей некоторому многограннику  $a(P, S)$ . Точка  $x$  из  $P$  покрыта проекциями граней, принадлежащих  $S$ , тогда и только тогда, когда  $x$  принадлежит произведению  $l$  на некоторый  $k$ -мерный многогранник  $b(l, S)$ . Призма разбиения Пенроза, содержащая  $x$ , есть произведение  $a \times b$ .

То же доказательство применимо и для более сложных алгоритмов, определяющих покрытие иррационального пространства  $P$ . Основное в этом доказательстве то, что условие, накладываемое на  $x$ , разбивается на два условия, из которых первое накладывается лишь на  $P$ , а второе — лишь на проекцию точки  $x$  вдоль направления  $l$ . Всякий алгоритм с этим свойством определяет квазипериодическое покрытие Пенроза на  $P$ .

**Пример.** Рассмотрим пятимерное пространство с его целочисленной решеткой, порожденной базисными векторами  $e_1, \dots, e_5$ . Циклические перестановки базисных векторов определяют группу пятого порядка, действующую на  $\mathbb{R}^5$ . Это представление разбивается в прямую сумму трех вещественных неприводимых представлений (в соответствии с разбиением характеров на три группы  $(\exp(\pm 2\pi i/5), \exp(\pm 4\pi i/5), 1)$ ).

Двумерная плоскость первого представления иррациональна (не содержит ненулевых целых точек). Конструкция теоремы 3 определяет покрытие Пенроза на этой плоскости. Это покрытие инвариантно относительно группы циклических перестановок. Итак, мы построили квазипериодическое покрытие Пенроза на двумерной плоскости, имеющее симметрию пятого порядка.

Аналогичная конструкция, определяющая квазипериодическое покрытие Пенроза трехмерного пространства с симметрией икосаэдра, описана ниже (в §3).

## 2. Функции Пенроза

**Определение.** Функцией Пенроза<sup>2</sup> на  $n$ -мерном торе называется функция, постоянная на каждой призме разбиения Пенроза.

<sup>2</sup> Пенроз таких функций, кажется, не рассматривал.

*Квазипериодической функцией Пенроза* называется ограничение функции Пенроза, определенной на  $n$ -мерном торе, на иррациональное подпространство  $\mathbb{R}^k$  накрывающего тор  $n$ -мерного пространства.

**Теорема 4.** *Каждая квазипериодическая функция допускает сколь угодно точные аппроксимации квазипериодическими функциями Пенроза той же периодичности.*

Действительно, квазипериодическая функция является ограничением на  $\mathbb{R}^k$  функции, определенной на  $T^n$ . Легко построить сколь угодно мелкое разбиение Пенроза на  $T^n$ . Поэтому можно приблизить любую (непрерывную) функцию на  $T^n$  функцией Пенроза с любой точностью (равномерно). Ограничение этой функции Пенроза на  $\mathbb{R}^k$  и есть искомая квазипериодическая функция Пенроза.

Эта простая теорема объясняет, почему многие квазипериодические функции определяют узоры, столь похожие на покрытия Пенроза (узор составляют линии уровня, или критические точки функции, или результаты какой-либо другой локальной алгоритмической переработки функций).

Если начинать с функции, допускающей какую-либо группу симметрий, то полученный при действии естественного алгоритма узор тоже будет иметь такую же симметрию. Приближая функцию функцией Пенроза с такой же симметрией, мы получаем новый источник симметричных покрытий Пенроза.

**Пример.** В своем исследовании резонансного взаимодействия частиц с электромагнитной волной Заславский, Сагдеев и др. [2], [3] рассматривали функцию Гамильтона  $H = \sum \cos a_k$ ,  $0 \leq k < q$ , где  $a_k$  — линейная функция на плоскости, равная скалярному произведению с радиус-вектором  $k$ -й вершины правильного  $q$ -угольника.

При  $q = 2, 3, 4, 6$  функция  $H$  периодична, для других значений  $q$  квазипериодична. Она очевидным образом симметрична относительно поворотов на углы, кратные  $2\pi/q$ .

Критические точки функции  $H$  образуют сеть, которая очень похожа на сеть вершин покрытия Пенроза той же симметрии.

В действительности  $H$  — это приближение к другой модели, которая тоже порождает покрытия Пенроза, — модели «стохастической паутины».

Чтобы получить «стохастическую паутину», рассмотрим отображение  $T = AB$  плоскости на себя, где  $A$  — поворот на угол  $2\pi r/q$  и  $B(x, y) = (x, y + \varepsilon \sin 2\pi x)$ . Вычислительный эксперимент показывает, что при подходящих начальных условиях и при малых  $\varepsilon$  последовательность образов начальной точки при итерациях отображения  $T$  заполняет «паутину» из тонких окрестностей линий, имеющую симметрию  $q$ -го порядка и выглядящую как покрытие Пенроза.

Чтобы объяснить этот эксперимент, рассмотрим отображение  $T^q$ . Оно  $\varepsilon$ -близко к тождественному преобразованию и сохраняет площади. Поэтому с погрешностью порядка  $\varepsilon^2$  оно является преобразованием фазового потока гамильтоновой системы. Гамильтониан легко вычисляется и оказывается описанной выше функцией  $H$ .

Стандартная теория возмущений гамильтоновых систем [4] предсказывает, что на расстоянии порядка  $\varepsilon$  от большинства замкнутых линий уровня функции  $H$  имеются в точности инвариантные относительно  $T^q$  замкнутые кривые. Разрушение сепаратрис превращает их в стохастическую паутину. Итак, стохастическая паутинка близка к объединению критических линий уровня функции  $H$ . Как это объяснено выше, узор, образованный критическими точками и линиями, естественно должен напоминать покрытие Пенроза.

Легко сформулировать и доказать математические теоремы, придающие предыдущим словам точный смысл. Но это можно сделать по-разному. В качестве примера рассмотрим точки локального максимума функции  $H$ . Очевидно,  $H \leq q$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  и отберем те точки локального максимума, где  $H \leq q - \varepsilon$ . Чем меньше  $\varepsilon$ , тем больше узор, образованный точками максимума, похож (после надлежащего сжатия) на узор, образованный вершинами покрытия Пенроза с симметрией порядка  $q$ .

Насколько я знаю, стохастическая топология квазипериодических функций (даже таких простых, как  $H$ ) слабо изучена. Например, рассмотрим какую-либо «экстенсивную» характеристику  $f$  функции  $H$  в шаре радиуса  $R$  (скажем, число точек локального максимума, или число компонент множества уровня  $H = c$ , или эйлерову характеристику множества  $H = c$ ). Для квазипериодической функции  $H$   $k$  переменных рассмотрим предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{f(R, c)}{R^k} = \bar{f}(c).$$

Должны существовать «эргодические» теоремы, утверждающие, что предел  $\bar{f}$  существует и является хорошей функцией  $c$ , исключая



лишь некоторые «критические» значения. Особенности  $\bar{f}$  в критических значениях должны вычисляться по исходной периодической функции  $H$   $n$  переменных и по расположению иррационального  $k$ -мерного подпространства относительно целочисленной решетки  $n$ -мерного пространства.

Для случая, когда исходная периодическая функция является тригонометрическим многочленом, должны существовать оценки средней топологической сложности его многообразий уровня в терминах многогранника Ньютона функции и в терминах числа одночленов, составляющих многочлен, как в [5], [6].

Первые шаги в этом направлении сделаны недавно С. М. Гусейн-Заде.

### 3. Квазикристаллическая симметрия и теория особенностей

Квазипериодические функции трех переменных, имеющие икосаэдральную симметрию, были открыты в теории особенностей систем лучей в 1982 году, почти в то же время они были обнаружены и кристаллографами.

Математическая задача в теории систем лучей на первый взгляд очень далека от кристаллографии. Рассмотрим область на плоскости, ограниченную гладкой кривой, имеющей простую точку перегиба (как у полукубической параболы).

Такая точка перегиба имеет общее положение, т.е. не исчезает при малом шевелении граничной кривой.

Рассмотрим расстояние фиксированной точки области от всех ее точек, т.е. длину кратчайшего пути, проходящего внутри области, соединяющего фиксированную точку с произвольной конечной точкой, принадлежащей области. Эта функция расстояния, рассматриваемая как функция конечной точки, непрерывна, но не обязательно гладка.

Одна из типичных особенностей функции расстояния — это ее особенность в точке перегиба границы. Оказывается, эта особенность связана с икосаэдром и ее изучение привело математиков к обнаружению квазипериодических функций с симметрией икосаэдра.

Связь функции расстояния с икосаэдром была обнаружена О. П. Щербаком [7] в 1982 году. История теоремы Щербака (и сама

формулировка впервые) изложена на с. 78–79 в статье [15]<sup>3</sup>. Группа симметрий икосаэдра порождена отражениями в пятнадцати зеркалах (плоскостях симметрии) икосаэдра в  $\mathbb{R}^3$ . Поэтому орбиты действия этой группы на комплексифицированное пространство  $\mathbb{C}^3$  образуют снова трехмерное комплексное пространство  $\mathbb{C}^3$  (координатами в котором являются базисные инварианты группы симметрий икосаэдра). Нерегулярные орбиты (те, которые состоят из меньшего числа точек, чем другие) образуют поверхность в пространстве орбит. Эта поверхность нерегулярных орбит называется *дискриминантной поверхностью*.

Дискриминантная поверхность — это образ зеркал при отображении факторизации, сопоставляющем точке исходного пространства содержащую ее орбиту. Эта поверхность имеет сложные особенности.

Присутствие какой-либо группы отражений в какой-либо задаче обычно обнаруживается благодаря дискриминантной поверхности. Особенности дискриминантной поверхности обычно легко узнаются в особенностях бифуркационных множеств, связанных с задачей.

В нашем случае бифуркационное множество — это график функции расстояния. Теорема Щербака утверждает, что этот график локально диффеоморфен дискриминантной поверхности группы симметрий икосаэдра (в окрестности точки перегиба общего положения на границе области). Изображение этого графика имеется в [13] на с. 76 (рис. 70), а в неявной форме — уже в курсе анализа Лопиталья (ср. [14], рис. 37 на с. 262).

Доказательство теоремы Щербака зависит от связи группы симметрий икосаэдра  $H_3$  с так называемой кристаллографической группой отражений (или группой Вейля)  $D_6$  (связанной с простой алгеброй Ли  $D_6 \approx L(O(12))$ ) и с простой особенностью  $x^2y + y^5 + z^2$ .

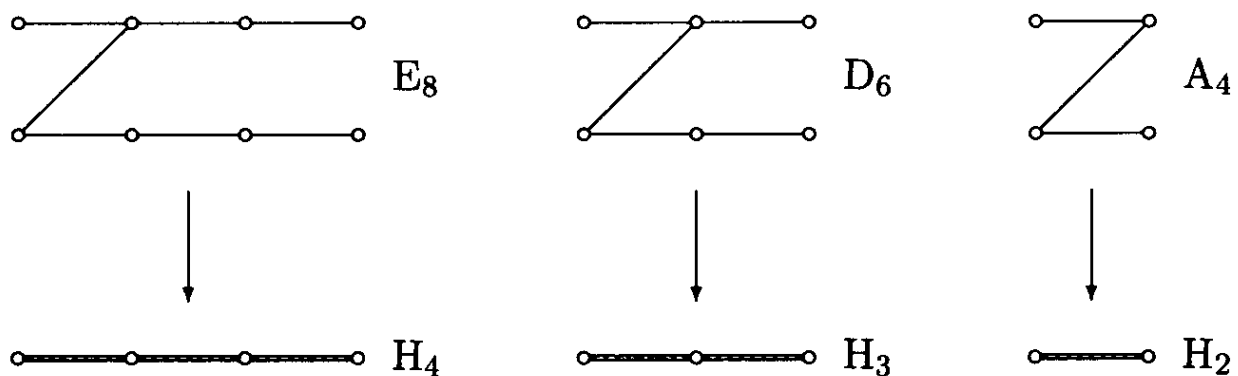
Группа Вейля  $D_6$  порождена отражениями в шестимерном евклидовом пространстве и сохраняет некоторую кристаллографическую решетку (множество целочисленных комбинаций шести независимых векторов). В доказательстве своей теоремы Щербак фактически строит разложение этого шестимерного пространства на два ортогональных трехмерных пространства, инвариантных относительно двух неприводимых вещественных представлений группы симметрий икосаэдра  $H_3$ .

Эти два трехмерных пространства иррациональны по отношению к целочисленной решетке  $D_6$ . Ограничения подходящих  $D_6$ -пери-

<sup>3</sup> При написании этой статьи определенную роль сыграло письмо Ж.-П. Серра М. Грею [16], что отмечено во французском издании [17] монографии [18].

одических функций на эти иррациональные подпространства и дают квазипериодические функции трех переменных с икосаэдральной симметрией.

Дальнейшие подробности об этих трехмерных пространствах см. в статье Варченко и Чмутова [8], где аналогичные конструкции проведены для всех групп отражений (включая  $H_4$ , группу симметрий правильного 600-гранника в четырехмерном евклидовом пространстве, связанную с  $E_8$  как  $H_3$  с  $D_6$  и как  $H_2$  с  $A_4$ ). Эти связи можно изобразить картинками:



В теории особенностей с каждой группой отражений связываются свои специальные функции. Из теории Щербака–Варченко–Чмутова следует, что специальные функции трех переменных, связанные с группой симметрий икосаэдра, являются ограничениями на иррациональное пространство периодических функций 6 переменных. Таким образом, эти функции квазипериодичны, определяют квазикристаллическую структуру в трехмерном пространстве и порождают его квазипериодические покрытия Пенроза, имеющие икосаэдральную симметрию.

Естественно, специалисты по теории особенностей не знали о работе [9], пока я не обнаружил [10] и связь между обеими теориями в мае 1985 года.

В последнее время теорема Щербака об икосаэдре и ее обобщение [12] на другие группы Кокстера были обращены А. Б. Гивенталем. Он указал задачу теории особенностей, ответ которой совпадает в точности со списком всех групп Кокстера, порожденных отражениями в евклидовом пространстве (конечных и неприводимых, кристаллографических или нет). А именно, Гивенталь [11] рассматривает лагранжевы многообразия с особенностями, диффеоморфные прямым произведениям плоских кривых. С лагранжевым подмногообразием пространства кокасательного расслоения связано многозначное особое ре-

шение уравнения Гамильтона–Якоби (график оптической длины пути вдоль лучей лагранжева многообразия, рассматриваемого как система лучей). Гивенталь доказывает, что особенности решения уравнения Гамильтона–Якоби просты (не имеют модулей) тогда и только тогда, когда их графики диффеоморфны дискриминантам конечных неприводимых групп Кокстера.

## Литература

- [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980, 187 с.
- [2] Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. *Письма в ЖЭТФ*, 1987, 7, 349–353.
- [3] Chernikov A. A., Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Zakharov M. Yu., Zaslavsky G. M. Minimal chaos and stochastic webs. *Nature*, 1987, 326(6113), 559–563.
- [4] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *УМН*, 1963, 18(6), 91–192.
- [5] Arnold V. I., Varchenko A. N., Givental' A. B., Khovanskii A. G. Singularities of functions, wave fronts, caustics and multidimensional integrals. *Math. Phys. Rev., Sov. Sci. Rev. C*, 1984, 4, 1–92.
- [6] Novansky A. G. Sur les racines complexes des systèmes d'équations algébriques comportant peu de termes. *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.*, 1981, 292(21), 937–940.
- [7] Щербак О. П. Особенности семейства эволюент в окрестности точки перегиба кривой и группа  $H_3$ , порожденная отражениями. *Функц. анализ и его прилож.*, 1983, 17(4), 70–72.
- [8] Варченко А. Н., Чмутов С. В. Конечные неприводимые группы, порожденные отражениями, суть группы монодромии подходящих особенностей. *Функц. анализ и его прилож.*, 1984, 18(3), 1–13.
- [9] Schechtman D., Bleck I., Gratiás D., Cahn J. W. *Phys. Rev. Lett.*, 1984, 83, 1953.
- [10] Schechtman D., Gratiás D., Cahn J. W. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1985, 300(18), 909–914.
- [11] Гивенталь А. Б. Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения. М., 1986, 94 с. (Рукопись деп. в ВИНТИ 05.06.86 г., № 4130-В)
- [12] Щербак О. П. Волновые фронты и группы отражений. *УМН*, 1988, 43(3), 125–160.
- [13] Арнольд В. И. Теория катастроф. Изд. 2-е, доп. М.: Изд-во МГУ, 1983, 80 с.

- 
- [14] Арнольд В. И. Теория катастроф. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5: Динамические системы – 5. М.: ВИНТИ, 1986, 219–277.
- [15] Арнольд В. И. Особенности систем лучей. *УМН*, 1983, 38(2), 77–147.
- [16] Серр Ж.-П. Письмо М. Грею. Дополнение А к кн.: Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука, 1989, 285–290.
- [17] Arnold V., Vartchenko A., Goussein-Zade S. Singularités des applications différentiables, 2-e partie. М.: Mir, 1986.
- [18] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984, 335 с.



## О некоторых задачах симплектической топологии

### 1. Теория Конли–Цендера

Симплектоморфизм называется *гомологичным тождественному преобразованием*  $id$ , если его можно соединить с  $id$  таким путем в группе всех симплектоморфизмов, что скорость вдоль этого пути есть гамильтоново векторное поле с однозначным (возможно, зависящим от времени) гамильтонианом.

Конли и Цендер недавно получили оценку снизу числа неподвижных точек симплектоморфизмов тора (со стандартной симплектической структурой), гомологичных тождественному. Число геометрически различных неподвижных точек на  $2n$ -мерном торе не меньше  $N + 1$ , где  $N = 2n$ , а алгебраическое число неподвижных точек (сумма кратностей) не меньше  $2^N$ .

Доказательство использует гиперболический аналог вариационного исчисления теории Морса. В основе обычной теории Морса для положительно определенных функционалов (например, таких, как энергия или длина) лежит тот факт, что высокочастотные деформации кривой ее удлиняют. Поэтому значение функционала становится большим для достаточно больших деформаций, лежащих в некотором подпространстве конечной коразмерности (порожденном высокими гармониками Фурье).

Это обстоятельство позволяет свести задачу к конечномерной. Грубо говоря, бесконечномерное пространство оказывается расслоенным на слои конечной коразмерности, причем на каждом слое рассматриваемый функционал имеет единственный невырожденный минимум, гладко зависящий от точки на базе. Полученные таким образом точки минимума образуют конечномерное многообразие — сечение расслоения. Исходная задача, таким образом, сводится к конечномерной — поиску критических точек ограничения функционала на это конечномерное многообразие.

Теорема Конли–Цендера основана на замечании, что вместо точек минимума (точечных аттракторов соответствующей градиентной

динамической системы) в описанной процедуре можно использовать седловые точки (у каждой из которых как положительный, так и отрицательный индексы инерции бесконечны). Гиперболическая ситуация «вдоль высоких гармоник» позволяет свести задачу к конечномерной точно так же, как эллиптическая ситуация в обычной теории Морса.

В качестве функционала с подобным гиперболическим поведением «по отношению к высоким гармоникам» Конли и Цендер использовали интеграл действия в фазовом пространстве. В простейшем случае кривой на плоскости этот функционал  $\oint p dq$  есть просто площадь. Высокие гармоники ряда Фурье возмущения ( $e^{ikz}$ , где  $z = p + iq$ ) вращаются направо или налево, в зависимости от знака  $k$ . Возмущение увеличивает ориентированную площадь для положительных достаточно больших  $k$  и уменьшает для отрицательных. Отсюда вытекает гиперболичность интеграла действия.

## 2. Частица в магнитном поле

Успех найденного Конли и Цендером доказательства гипотезы о неподвижных точках симплектоморфизмов позволяет надеяться, что и другие гипотезы, считавшиеся проблемами той же трудности в 60-х годах, могут быть доказаны сходным образом.

Ниже мы формулируем несколько вопросов, относящихся к одной из таких старых гипотез. Начнем с примера. Пусть  $K : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  — гладкая положительнозначная функция на римановом торе. Рассмотрим движение заряженной частицы на торе в присутствии нормального к тору магнитного поля  $K$ . Иначе говоря, мы рассматриваем движение вдоль кривых на торе, геодезическая кривизна которых в каждой точке равна заранее заданному (в этой точке тора) положительному числу  $K$ .

В этом частном случае гипотеза утверждает следующее: существует по крайней мере три геометрически различные замкнутые орбиты на торе, гомотопные нулю (и по крайней мере четыре с учетом кратностей).

Последнее утверждение было, кажется, недавно установлено С. П. Новиковым и его учениками. Объясним, как рассматриваемая задача связана с теоремой Конли–Цендера.

Предположим сначала, что метрика на торе стандартная (т.е. плоская). В этом случае установить соответствие между замкнутыми орбитами и неподвижными точками симплектоморфизмов очень легко.



Движение частицы (со скоростью 1) описывается кривой в  $\mathbb{T}^3 = T_1\mathbb{T}^2$  (расслоении единичных касательных векторов к двумерному тору). Стандартная метрика определяет параллелизацию, т.е. разложение  $\mathbb{T}^3 = S^1 \times \mathbb{T}^2$ . Если кривизна  $K$  положительна, то фазовые кривые на  $\mathbb{T}^3$  трансверсальны к слоям  $\varphi \times \mathbb{T}^2$ . Таким образом, мы получаем отображение Пуанкаре слоя  $0 \times \mathbb{T}^2$  в себя. Покажем, что это отображение является гомологичным тождественному симплектоморфизмом для подходящей симплектической структуры на  $0 \times \mathbb{T}^2$ .

Рассматриваемая динамическая система на  $\mathbb{T}^3$  сохраняет лиувиллев элемент объема — невырожденную 3-форму  $\tau$ . Обозначим через  $v$  векторное поле, определяющее эту систему, и рассмотрим соответствующую 2-форму  $\omega = i_v \tau$ .

**Лемма 1.** *Форма  $\omega$  замкнута.*

**Доказательство.**  $L_v \tau = 0 \implies i_v d\tau + di_v \tau = 0 \implies d(i_v \tau) = 0$ .

Замкнутая 2-форма  $\omega$  невырождена на слое  $0 \times \mathbb{T}^2$  (ибо векторы поля  $v$  трансверсальны слоям при положительной геодезической кривизне  $K$ ). Поэтому на торе  $0 \times \mathbb{T}^2$  возникает симплектическая структура  $\Omega$  (ограничение формы  $\omega$ ). Очевидно, что  $\Omega = K\sigma$ , где  $\sigma$  — риманов элемент площади.

**Лемма 2.** *Отображение Пуанкаре сохраняет эту симплектическую структуру.*

**Доказательство.** Применение формулы Стокса к трубке, составленной из фазовых кривых.

**Лемма 3.** *Отображение Пуанкаре гомологично тождественному.*

Доказательство основано на том, что поток поля  $v$  через поверхность, образованную всеми векторами пространства  $T_1\mathbb{T}^2$ , примененными в точках любой замкнутой кривой на  $\mathbb{T}^2$ , равен нулю. Последнее вытекает из свойств антиподальной инволюции в слоях расслоения  $T_1\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ : она сохраняет  $\tau$  и меняет знак любого вектора на  $\mathbb{T}^2$  (подробности приведены в моей работе «Замечания о числах вращения», Сиб. мат. ж., 1961, 2(6), 807–813).

Применяя теорему Конли–Цендера к отображению Пуанкаре, мы получаем из неподвижных точек последнего замкнутые орбиты.

### 3. Некоторые нерешенные задачи

#### I. Приложения теоремы Конли–Цендера

А) Доказать, что отображение Пуанкаре гомологично тождественному в случае движения с произвольной положительной геодезической кривизной  $K$  на торе с произвольной римановой метрикой, близкой к плоской.

Б) Доказать, что отображение Пуанкаре гомологично тождественному в случае движения на торе с произвольной римановой метрикой, если только геодезическая кривизна достаточно велика.

Из положительных решений будет следовать существование замкнутых орбит (согласно теореме Конли–Цендера). В общем случае, когда ни на риманову метрику, ни на геодезическую кривизну никаких ограничений не накладывается, возникает следующая задача.

В) Пусть на торе заданы произвольная метрика и произвольная положительнозначная функция  $K$ . Существует ли отображение Пуанкаре или даже существует ли поверхность, трансверсальная векторному полю и изотопная сечению расслоения  $T_1\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ?

#### II. Замкнутые орбиты в расслоениях на кривые

А) Доказать существование ожидаемого числа замкнутых траекторий движения заряженной частицы в магнитном поле на поверхности — по крайней мере в тех случаях, когда поле  $K$  достаточно сильное или когда метрика близка к метрике постоянной кривизны. (Я полагаю, что здесь целесообразно воспользоваться непосредственно «гиперболической теорией Морса», а не сводить задачу к неподвижным точкам симплектоморфизма.)

Естественное обобщение этих вопросов включает нетривиальное расслоение  $M^3 \rightarrow N^2$  со слоем  $S^1$  и со связностью (заданной полем двумерных плоскостей, трансверсальных слоям). Обозначим через  $\tau$  некоторый элемент объема на  $M^3$  и через  $v$  бездивергентное (относительно  $\tau$ ) векторное поле, трансверсальное плоскостям этой связности.

Б) Оценивается ли снизу число замкнутых орбит такого векторного поля минимальным числом критических точек функции на поверхности  $N^2$  (ориентированной и без края)?

В) В частности, у любого ли бездивергентного векторного поля на  $S^3$ , образующего в каждой точке острый угол с полем Хопфа, есть по меньшей мере две геометрически различные замкнутые орбиты?

---

В случае расслоения  $M^{2n+1} \rightarrow N^{2n}$  необходимо рассмотреть замкнутую 2-форму на  $M$ , ограничения которой на плоскости, задающие связность, невырождены. Число замкнутых характеристик этой 2-формы сравнивается затем с числом критических точек функций на  $N$ .



## Разветвленное накрытие $\mathbb{C}P^2 \rightarrow S^4$ , гиперболичность и проективная топология

В работе 1971 г. о топологии вещественных алгебраических кривых [1] я использовал как известный и очевидный факт то, что факторпространство комплексной проективной плоскости  $\mathbb{C}P^2$  по инволюции комплексного сопряжения диффеоморфно четырехмерной сфере  $S^4$ .

Из доклада Крека на топологической конференции в Баку (1987 г.) я узнал, что этот факт, используемый в современной дифференциальной топологии четырехмерных многообразий, известен сейчас под названием теоремы Кейпера–Масси, поскольку его доказательство, приведенное в работе Кейпера [2], устанавливает лишь гомеоморфность и кусочно-линейную эквивалентность фактора четырехмерной сфере, а доказательство диффеоморфности «гораздо более сложно и опирается на общую теорию сглаживания четырехмерных многообразий».

Поскольку мое первоначальное доказательство совершенно элементарно и сразу устанавливает диффеоморфность фактора четырехмерной сфере, я решил его опубликовать здесь. Это доказательство основано на довольно неожиданной связи инволюции комплексного сопряжения с геометрией гиперболических многочленов, т.е. главных символов гиперболических уравнений с частными производными.

А именно, сферичность фактора является частным случаем более общего факта: компоненты пересечения характеристического конуса гиперболического уравнения со сферой с центром в нуле, соответствующие последовательно приходящим волнам — первой, второй и т.д., — гомеоморфны сферам и обладают определенными свойствами выпуклости. В частности, первой волне отвечает выпуклая компонента, и этот простой общий факт теории гиперболических уравнений обеспечивает диффеоморфность сфере фактора комплексной проективной плоскости по инволюции комплексного сопряжения.

Доказательство сферичности фактора (§1) основано на исследовании специального гиперболического многочлена, а именно, дискриминанта квадратичной формы, подробнее изученного в §2. Анализ дифференциально-геометрических свойств многообразий нулей более

общих гиперболических многочленов приводит к ряду теорем и гипотез, которые обсуждаются в §§ 3 и 4. В частности, в §4 доказывается, что инфинитезимально строго выпуклая связная замкнутая гиперповерхность в проективном пространстве не пересекается с некоторой гиперплоскостью и является в дополнительном аффинном пространстве границей выпуклого тела. Хотя этот факт, должно быть, известен специалистам по выпуклым поверхностям, мне не удалось найти его в литературе. Доказательство основано на индукции по размерности и теории Морса. Начальный шаг индукции — доказательство того, что связная несамопересекающаяся (необязательно замкнутая) кривая положительной геодезической кривизны на двумерной сфере уместается в полусфере, — основан на своеобразном варианте теорем типа теоремы Штурма.

Эти рассуждения одновременно доказывают известные теоремы Мёбиуса и др. о четырех вершинах замкнутой двусторонней несамопересекающейся кривой и о трех точках перегиба односторонней кривой на проективной плоскости (§3).

Мне кажется, все эти результаты следует относить к проективной топологии. Под этим термином я понимаю исследование взаимоотношений между топологическими и проективными свойствами подмногообразий проективного пространства (или другого многообразия с проективной структурой, например, сферы).

Вершины кривой — это критические точки кривизны, и может показаться, что теорема о четырех вершинах связана с метрикой. Однако это не так: во-первых, для нестандартной римановой метрики вершин может оказаться всего две, а во-вторых, вершины кривой не что иное, как перегибы кривой нормалей. Теорема о четырех вершинах вытекает из того, что кривая нормалей выпуклой кривой пересекает некоторую прямую в четырех точках, порядок которых на двулистом накрытии этой прямой такой же, как на кривой. Существование четырех точек перегиба на такой змеящейся кривой — факт проективной топологии (теоремы о перегибах и вершинах связаны также с симплектической и контактной топологией, но эта связь здесь обсуждаться не будет).

Теорема о том, что локально выпуклая связная проективная поверхность не пересекается с некоторой гиперплоскостью, имеет, по видимому, обобщения на случай гиперболических гиперповерхностей. Под гиперболической гиперповерхностью я понимаю такую связную гиперповерхность в проективном пространстве, вторая квадратичная

форма которой невырожденная и, следовательно, имеет постоянную сигнатуру. Простейший пример гиперболической поверхности — однополостный гиперболоид. Более общим образом квадрика (множество нулей квадратичной формы, рассматриваемое как проективная гиперповерхность) гиперболическа, если форма невырожденная.

В то время как локально выпуклая гиперповерхность не пересекается с некоторой гиперплоскостью и отделяет ее от точек «внутренней» области, гиперболические гиперповерхности, по-видимому, отделяют друг от друга проективные подпространства соответствующих сигнатуре размерностей.

Например, гиперболическая связная замкнутая поверхность в трехмерном проективном пространстве, по-видимому, отделяет друг от друга две прямые (это свойство, как и другие гипотезы о гиперболических поверхностях, сформулированные в §4, доказано лишь при некоторых дополнительных предположениях, по всей вероятности излишних).

## 1. Доказательство сферичности $\mathbb{C}P^2/\text{con}j$

**Лемма 1.** *Многообразие  $\mathbb{C}P^2/\text{con}j$  диффеоморфно многообразию вырожденных неотрицательных квадратичных форм от трех переменных со следом 1.*

**Доказательство.** Матрицей Грама системы  $k$  векторов  $z_j$  евклидова пространства называется матрица их скалярных произведений  $a_{jk} = (z_j, z_k)$ , т.е. матрица квадратичной формы Грама  $(\sum \lambda_j z_j)^2$  от  $k$  переменных  $\lambda_j$ .

Форма Грама очевидно неотрицательна. Она вырожденная, если и только если векторы линейно зависимы. Назовем отображение, сопоставляющее (упорядоченному) набору векторов матрицу Грама, *отображением Грама*.

Точка из  $\mathbb{C}P^2$  — это треугольник на евклидовой плоскости, рассматриваемый с точностью до вращений и такой, что суммарный момент инерции вершин  $\sum (z_j, z_j)$  равен единице. Точка из  $\mathbb{C}P^2/\text{con}j$  — это такой же треугольник, рассматриваемый с точностью до действия группы  $O(2)$  вращений и отражений плоскости.

Скалярные произведения радиус-векторов вершин треугольника — инварианты действия группы  $O(2)$ . Они определяют треугольник с

точностью до вращений и отражений и образуют базис кольца инвариантов. Поэтому отображение Грама, построенное по вершинам треугольников, задает диффеоморфное вложение многообразия  $\mathbb{C}P^2/\text{conj}$  в пространство  $\mathbb{R}^6$  квадратичных форм от трех переменных (как многообразия с особенностями). При этом отображении треугольники с моментом 1 переходят в матрицы неотрицательных вырожденных форм со следом 1, поскольку три вектора на плоскости всегда зависимы. Обратно, всякая вырожденная неотрицательная форма со следом 1 является формой Грама подходящего треугольника с моментом 1. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Многообразие вырожденных неотрицательных квадратичных форм со следом 1 гомеоморфно сфере.*

**Доказательство.** Граница выпуклого конуса неотрицательных форм состоит в точности из неотрицательных вырожденных форм. Формы со следом 1 пересекают этот конус трансверсально по выпуклому компактному многообразию с краем. Гомеоморфизм края сфере осуществляется проекцией из центра в любой внутренней точке многообразия. А именно, вектору длины 1, приложенному во внутренней точке, сопоставляется точка пересечения содержащего его луча с краем.

**Теорема 1** (ср. [1], [2]). *Многообразие  $\mathbb{C}P^2/\text{conj}$  диффеоморфно  $S^4$ .*

**Доказательство.** Конструкции доказательств лемм 1, 2 определяют гомеоморфизм  $\mathbb{C}P^2/\text{conj} \rightarrow S^4$  и тем самым вводят на  $\mathbb{C}P^2/\text{conj}$  гладкую структуру. Докажем, что эта гладкая структура эквивалентна естественной гладкой структуре особого многообразия  $\mathbb{C}P^2/\text{conj}$ .

Лучи, выходящие из внутренней точки выпуклого тела, трансверсально пересекают границу тела. Поэтому обе структуры на  $\mathbb{C}P^2/\text{conj}$  — естественная и принесенная с  $S^4$  — различаются лишь в неподвижных точках инволюции, образующих многообразие  $\mathbb{R}P^2$  (соответствующих треугольникам с коллинеарными вершинами и формам коранга 2).

Особенность многообразия вырожденных форм в трехмерном пространстве, трансверсальном многообразию форм коранга 2 (имеющему коразмерность 3), — квадратичный конус. Поэтому принесенную с  $S^4$  структуру можно описать (вблизи многообразия форм коранга 2) как двухпараметрическое семейство гладких структур на половинах квадратичных конусов в  $\mathbb{R}^3$ . Структура на полуконусе определена проектированием конуса на его основание вдоль слоев расслоения, трансверсальных и конусу, и плоскостям, параллельным основанию.



Инволюция  $\text{conj}$  на  $\mathbb{C}P^2$  в окрестности неподвижной точки приводится к виду  $(x, y, u, v) \mapsto (-x, -y, u, v)$ . Естественная гладкая структура на  $\mathbb{C}P^2/\text{conj}$  определяется поэтому вблизи многообразия  $\mathbb{R}P^2$  неподвижных точек как семейство гладких структур на факторах  $\mathbb{R}^2/(-1)$ , параметризованных точками  $\mathbb{R}P^2$ . Естественная гладкая структура на  $\mathbb{R}^2/(-1)$  определяется инвариантами  $X = x^2 - y^2$ ,  $Y = 2xy$ , являющимися локальными координатами на факторе.

Базисные инварианты  $X, Y, Z = x^2 + y^2$  отображают фактор  $\mathbb{R}^2/(-1)$  на верхнюю половину конуса  $X^2 + Y^2 = Z^2, Z \geq 0$ . Проектирование полуконуса на плоскость  $X, Y$  вдоль оси  $Z$  определяет естественную структуру на  $\mathbb{R}^2/(-1)$ . При деформации направления проектирования, оставляющей его трансверсальным плоскости и конусу, структура меняется. Но все полученные такой конструкцией структуры эквивалентны (возникающие многообразия диффеоморфны), так как легко предъясвляется гомеоморфизм, переводящий одну структуру в другую.

Вместо стандартного линейного проектирования  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  здесь можно брать гладкое расслоение, лишь бы слои были трансверсальны и конусу, и параллельным его основанию плоскостям. Принесенная на конус с основания структура все равно эквивалентна стандартной. Вывод сохраняется и при наличии параметра (точки из  $\mathbb{R}P^2$ ). Но принесенная на  $\mathbb{C}P^2/\text{conj}$  с  $S^4$  структура устроена вдоль многообразия  $\mathbb{R}P^2$  форм коранга 2 именно так. Значит, она эквивалентна стандартной, что и утверждалось.

## 2. Геометрия многообразий вырожденных форм

Вырожденные формы от  $n$  переменных, отрицательные не более чем на  $k$ -мерном пространстве и положительные не более чем на  $l$ -мерном, где  $k + l = n - 1$ , образуют конус в пространстве  $\mathbb{R}^N$  ( $N = n(n + 1)/2$ ) квадратичных форм.

Рассмотрим пересечение  $L$  этого конуса со сферой  $S^{N-1}$  с центром в нуле (линк конуса, как говорят топологи).

**Теорема 2.** *Линк  $L$  гомеоморфен сфере  $S^{N-2}$ .*

Алгебраический конус степени  $d$  в  $\mathbb{R}^m$  называется *строго гиперболическим* относительно проходящей через нуль прямой, если всякая параллельная ей прямая пересекает конус в  $d$  вещественных различных

точках. Конус называется *нестрого гиперболическим*, если все точки пересечения вещественны, но могут сливаться.

Занумеруем области дополнения к конусу, гиперболическому относительно содержащей «времяподобный» вектор прямой, числом (трансверсальных) пересечений конуса при переходе по времяподобной прямой в компоненту времяподобного вектора (получающую номер нуль).

**Теорема 3.** *Граница между областями, занумерованными соседними номерами, высекаемыми на сфере  $S^{m-1}$  (нестрого) гиперболическим конусом, гомеоморфна сфере  $S^{m-2}$ .*

Строго гиперболические конусы фиксированной степени образуют связную область по теореме Нуя [3]. Поэтому линки всех строго гиперболических многочленов фиксированной степени диффеоморфны. Пример с диффеоморфными сфере компонентами линка легко строится из квадратик (если степень четна) и квадратик и плоскости (если нечетна). Значит, компоненты линков строго гиперболических конусов диффеоморфны сферам. Гомеоморфность сфере «компонент» линка нестрого гиперболического конуса получается отсюда предельным переходом (на деталях которого я здесь не останавливаюсь). Таким образом, теорема 3 вытекает из результатов Нуя. Впрочем, легко видеть, что «компоненты» линка звездны на  $S^{N-1}$ .

Конус вырожденных форм (нестрого) гиперболический относительно направления любой положительно определенной формы (ср. [4]). Линк  $L$ , о котором идет речь в теореме 2, — это в точности граница между  $k$ -й и  $(k+1)$ -й областями, высекаемыми конусом вырожденных форм на сфере  $S^{N-1}$ . По теореме 3 он гомеоморфен  $S^{N-2}$ , что и доказывает теорему 2.

**Замечание.** Теорема 3 содержательна уже для распадающегося на плоскости конуса в  $\mathbb{R}^3$ . Этот конус нестрого гиперболический относительно любого не принадлежащего ему «времяподобного» направления. «Компоненты» линка на сфере — сферические многоугольники, стороны которых — дуги больших кругов. Каждая компонента является звездной относительно конца  $P$  времяподобного вектора. Проектирование на окружность приложенных в точке  $P$  векторов длины 1 вдоль проходящих через  $P$  больших кругов приносит на линк гладкую структуру окружности. Аналогичная конструкция применима и в общей ситуации теоремы 3: «компоненты» линка получают гладкую структуру сферы.

**Пример.** Рассмотрим пересечение  $M^4$  конуса форм сигнатуры  $(\leq 1+, \leq 1-, 0)$  со сферой  $S^5$  в пространстве  $\mathbb{R}^6$  квадратичных форм от трех переменных. По теореме 2 это многообразие гомеоморфно  $S^4$ . Гомеоморфизм проектирования, описанный в предыдущем замечании, вводит на  $M^4$  гладкую структуру. Она эквивалентна имеющейся там естественной гладкой структуре. Последняя определена следующей конструкцией.

Форма определяется неупорядоченной парой плоскостей (быть может, совпадающих), где она обращается в нуль, с точностью до скалярного множителя. Плоскости можно задать единичными векторами нормалей.

Изменение знаков обоих векторов не меняет формы. Поэтому  $M^4$  имеет естественную структуру симметрического квадрата двумерной сферы  $S^2$ , профакторизованного по антиподальной инволюции, действующей сразу на оба множителя.

Отождествляя  $S^2$  с  $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , мы отождествляем симметрический квадрат с множеством  $\{[a : b : c]\}$  квадратных уравнений  $az^2 + 2bz + c = 0$ , рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевой скаляр. Антиподальная инволюция переводит  $(z, w)$  в  $(-1/\bar{z}, -1/\bar{w})$  и, следовательно,  $[a : b : c]$  в  $[\bar{c} : -\bar{b} : \bar{a}]$ . Принимая вместо  $a, b, c$  за координаты  $A = a + c, B = i(a - c), C = ib$ , приводим инволюцию к виду  $[A : B : C] \mapsto [\bar{A} : \bar{B} : \bar{C}]$ . По теореме 1  $M^4$  получает гладкую структуру  $S^4$ .

Антиподальная инволюция на  $S^5$  оставляет  $M^4$  на месте. Возникающая инволюция на  $S^4$  не имеет неподвижных точек. Фактор-пространство диффеоморфно  $\mathbb{R}P^4$ , ибо предыдущее описание  $M^4$  превращает  $M^4/(-1)$  в симметрический квадрат проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$ , а  $n$ -я симметрическая степень проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  — это  $\mathbb{R}P^{2n}$ .

Последнее вытекает из теоремы Максвелла в теории сферических функций в  $\mathbb{R}^3$ . По этой теореме каждая такая функция степени  $n$  получается с точностью до скалярного множителя по одному разу при дифференцировании  $r^{-1}$  вдоль  $n$  направлений и умножения на  $r^{2n+1}$ . Это показывает, что  $\text{Sym}^n \mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^{2n}$ .

**Теорема 4.** Сигнатура  $k - l$  второй квадратичной формы многообразия вырожденных квадратичных форм коранга 1 равна сигнатуре самой формы, если ориентирующую нормаль направить в сторону форм с меньшим числом отрицательных квадратов.

**Доказательство.** В окрестности формы  $\sum \lambda_p x_p^2$  уравнение многообразия вырожденных форм имеет вид  $\det(a_{p,q} + \lambda_p \delta_{p,q}) = 0$ . Пусть  $\lambda_n = 0$ . Раскрывая определитель по  $n$ -й строке и отбрасывая члены порядка 3 и выше по  $a$ , получаем  $a_{n,n} = \sum a_{n,p}^2 / \lambda_p + \dots$ , что и доказывает теорему.

### 3. Проективная топология меандров

*Меандром* будем называть связную ориентированную несамопересекающуюся кривую, пересекающую фиксированную ориентированную прямую в нескольких точках.

Дугу меандра между двумя последовательными точками пересечения назовем *положительной*, если отрезок прямой от начала до конца дуги ориентирует прямую положительно, *отрицательной* — в противном случае (рис. 1).

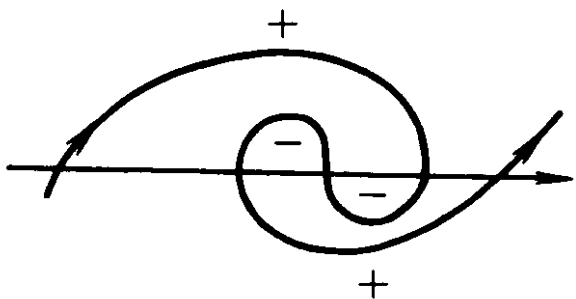


Рис. 1. Знаки дуг меандра на плоскости

**Лемма 1.** Число точек перегиба меандра в  $\mathbb{R}^2$  не меньше, чем число сохранений знака в последовательности знаков его дуг.

Действительно, обозначим через  $\varphi$  азимут направления меандра. По одну сторону от прямой  $\varphi$  увеличивается на положительных дугах и уменьшается на отрицательных (здесь используется то, что дуги несамопересекающиеся!), по другую — наоборот. Выберем на каждой дуге, где  $\varphi$  увеличивается, точку, в которой  $\dot{\varphi} > 0$ , а там, где уменьшается, — точку, в которой  $\dot{\varphi} < 0$ . Лемма вытекает из того, что между точками, где знаки  $\dot{\varphi}$  различны, есть нуль  $\dot{\varphi}$ .

**Замечание.** Числа топологически различных меандров, пересекающих ось  $x$  в  $n$  точках и совпадающих вне круга  $x^2 + y^2 < 1$  с лучами  $y = x$ ,  $x \leq -1$  и  $-y = (-1)^n x$ ,  $x \geq 1$  (рис. 2), образуют замечательную последовательность *меандрических чисел*  $M_n = 1, 1, 2, 3, 8, 14, 42, 81, 262, 538, 1828, 3926, 13820, 30694, 110954, 252939, \dots$ ,  $n = 1,$

2, ..., 16, ... Число  $M_n$  нечетно, если и только если  $n$  — степень двойки (С. К. Ландо).

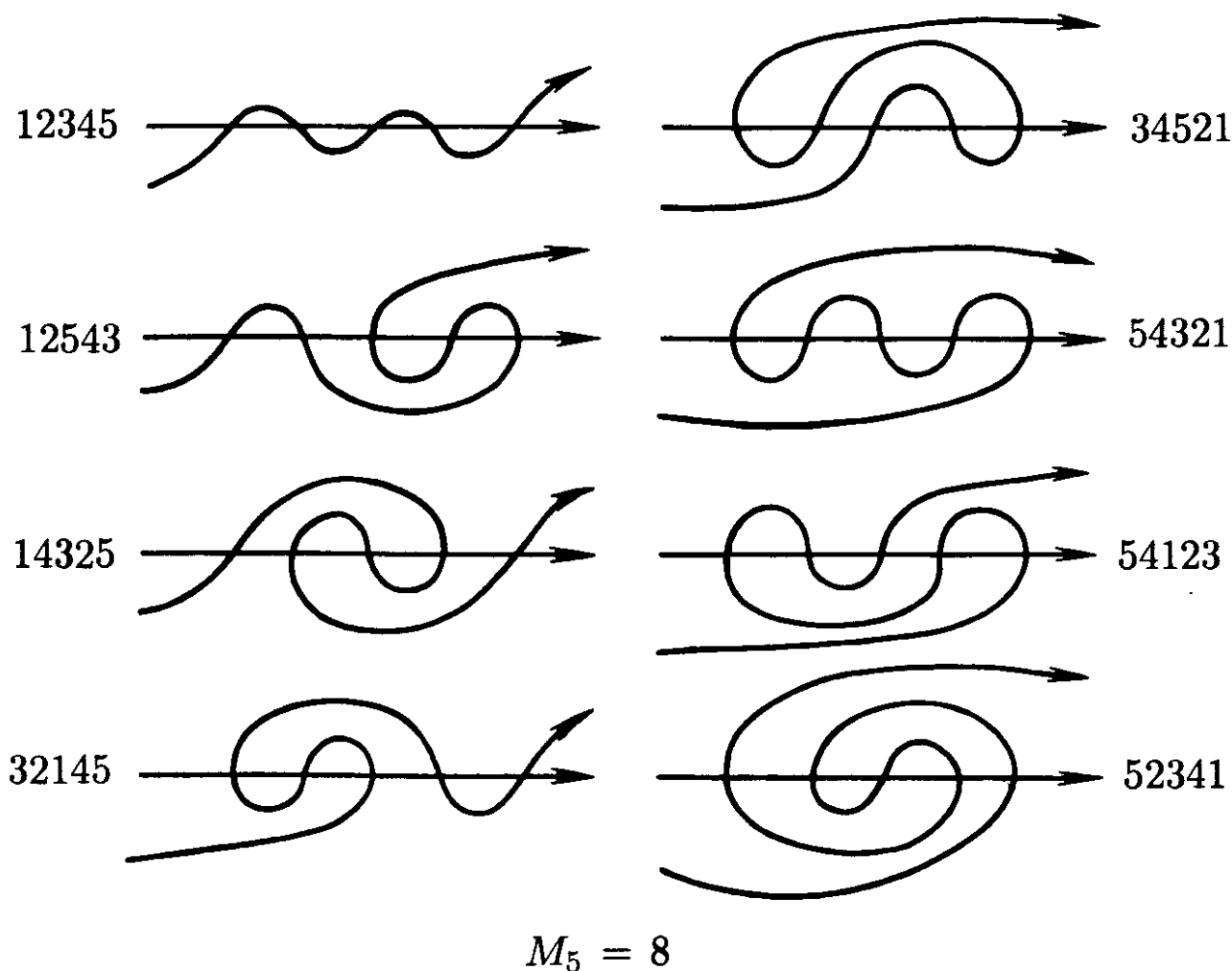


Рис. 2. Меандрические перестановки из пяти элементов

Рассмотрим теперь меандр на проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  с фиксированной ориентированной прямой  $\mathbb{R}P^1$ . Для определения знака дуги перейдем на накрывающую сферу. Прямая двулистно накрывается ориентированной окружностью. Начало и конец поднятой на накрывающую дуги лежат на этой окружности и не диаметрально противоположны (предполагаем, что меандр пересекает прямую более чем единожды). Дуга положительна, если кратчайший отрезок, соединяющий эти точки на окружности, ориентирует ее положительно (рис. 3).

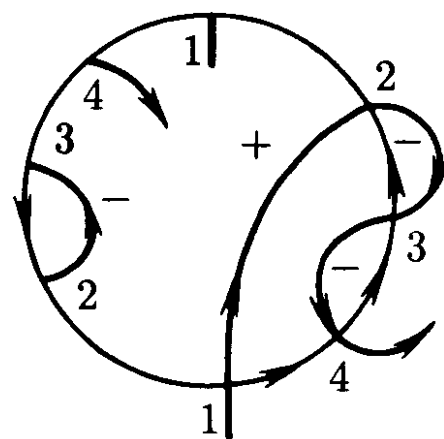


Рис. 3. Знаки дуг проективного меандра

**Лемма 2.** Число точек перегиба меандра в  $\mathbb{R}^2$  не меньше, чем число сохранений знаков в последовательности знаков его дуг.

Азимут  $\varphi(t)$  вектора скорости движения по меандру определен в  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1$ , но продолжается по непрерывности в точки  $t_i$  пересечения с  $\mathbb{R}P^1$  ( $t_1 < t_2 < \dots$ ). Возникающая функция  $\varphi(t)$  оказывается гладкой и в точках  $t_i$ . Эти точки критические для  $\varphi(t)$  (рис. 4). Значения  $\varphi$  увеличиваются при прохождении положительной дуги и

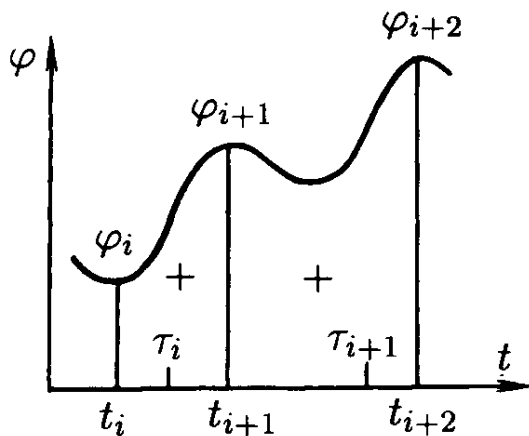


Рис. 4. Изменение азимута на последовательных положительных дугах

уменьшаются при прохождении отрицательной. Составим гладкую функцию  $\psi = \dot{\varphi} / \prod(t - t_i)$ . На положительной дуге  $(t_i, t_{i+1})$  выберем точку  $\tau_i$ , где  $\dot{\varphi} > 0$ , на отрицательной — где  $\dot{\varphi} < 0$ . Если дуги  $(t_i, t_{i+1})$  и  $(t_{i+1}, t_{i+2})$  одного знака, то между  $\tau_i$  и  $\tau_{i+1}$  функция  $\psi$  меняет знак. Точка изменения знака  $\psi$  и есть искомая точка перегиба.

Пусть  $t_1 < t_2 < \dots$  — последовательные моменты пересечения меандра с проективной прямой, а  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — соответствующие азимуты.

**Лемма 3.** Порядки 1324 ( $\varphi_1 < \varphi_3 < \varphi_2 < \varphi_4$ ), 4231, 3142, 2413 (рис. 5) невозможны.

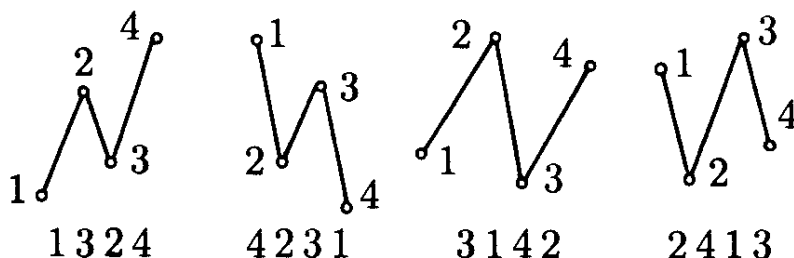
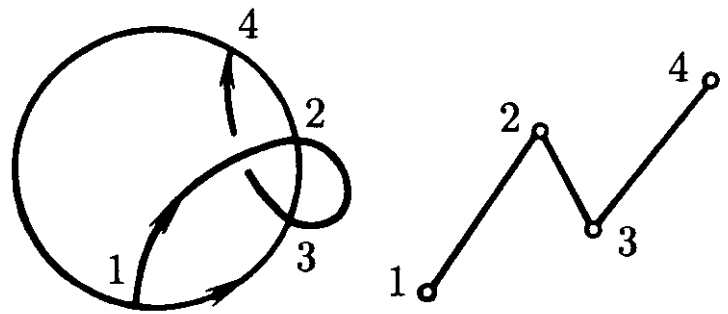


Рис. 5. Невозможные последовательности азимуты

Действительно, кривые с такими порядками самопересекаются (рис. 6).

**Лемма 4.** Для несамопересекающейся дуги  $|\varphi_i - \varphi_{i+1}| < \pi$ .

Рис. 6. Невозможность последовательности азимутов 1 3 2 4



Для доказательства достаточно прогнотопировать данную дугу (в классе несамопересекающихся дуг, не пересекающих прямую и соединяющих данные лежащие на прямой концы) в стандартную дугу, для которой приращение  $\varphi$  вычисляется явно (рис. 7).

**Лемма 5.** Число сохранений знака для замкнутого меандра из более чем двух дуг больше единицы.

**Доказательство.** В противном случае циклическую последовательность знаков можно разорвать так, чтобы получить последовательность чередующихся знаков  $+ - \dots$ . Последовательность азимутов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  можно продолжать неограниченно в обе стороны, причем ввиду замкнутости меандра  $\varphi_{i+n} - \varphi_i$  кратно  $2\pi$ .

Поскольку знаки чередуются, либо 1)  $\varphi_1 < \varphi_3 < \varphi_2$ , либо 2)  $\varphi_3 < \varphi_1 < \varphi_2$ .

В случае 1 по лемме 3 все  $\varphi_{i>2}$  принадлежат отрезку  $[\varphi_2, \varphi_3]$  (рис. 8). Это противоречит замкнутости исходного меандра, поскольку  $|\varphi_{n+1} - \varphi_1| \leq |\varphi_2 - \varphi_1| < \pi$  (лемма 4) и  $\varphi_{n+1} \geq \varphi_3 > \varphi_1$ . В этом случае лемма 5 доказана.

В случае 2 ограничение леммы 3 оставляет три возможности.

(А)  $\varphi_{2k-1} < \varphi_{2k-3} < \dots < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{2k-2} < \varphi_{2k+1} < \varphi_{2k}$  (рис. 9).

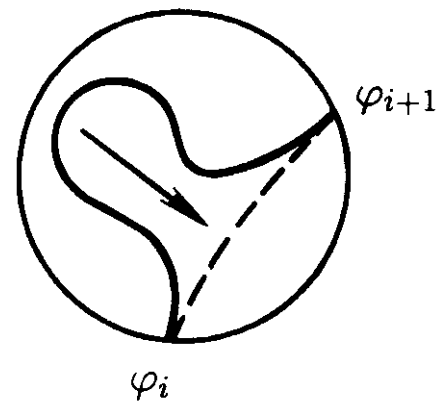


Рис. 7. Доказательство леммы 4

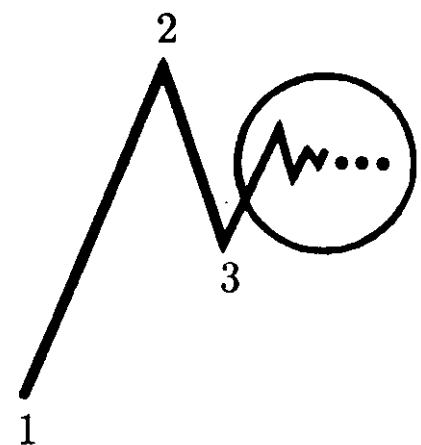


Рис. 8. Ловушка типа 1

Это противоречит замкнутости меандра, поскольку по лемме 3 все  $\varphi_{i>2k}$  принадлежат отрезку  $[\varphi_{2k}, \varphi_{2k+1}]$ ,  $|\varphi_{n+1} - \varphi_1| \leq |\varphi_{2k} - \varphi_{2k-1}| < \pi$  по лемме 4 и  $\varphi_{n+1} \geq \varphi_{2k-2} > \varphi_1$ .

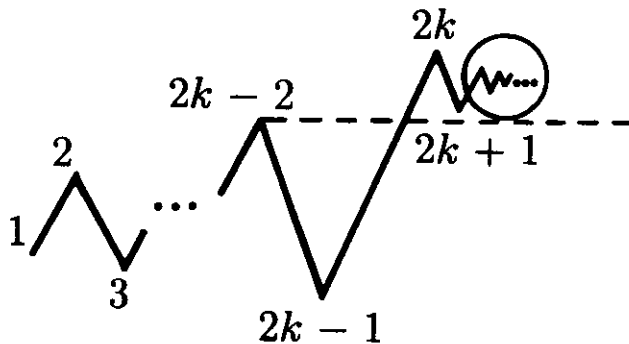


Рис. 9. Ловушка типа 2, (А)

(Б)  $\varphi_{2k-1} < \varphi_{2k} < \varphi_{2k-3} < \dots < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_4 < \dots < \varphi_{2k-2}$  (рис. 10).

По лемме 3 все  $\varphi_{i>2k-1}$  принадлежат  $[\varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}]$ , вопреки замкнутости ( $|\varphi_1 - \varphi_{i>2k-1}| \leq |\varphi_{2k-2} - \varphi_{2k-1}| < \pi$  по лемме 4 и  $\varphi_{n+1} \leq \varphi_{2k-3} < \varphi_1$ ).

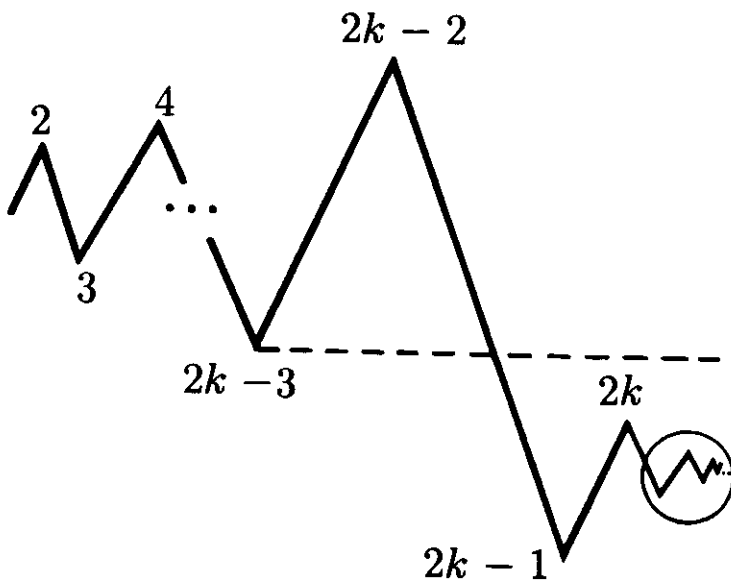


Рис. 10. Ловушка типа 2, (Б)

(В)  $\varphi_1 > \varphi_3 > \varphi_5 > \dots$ ,  $\varphi_2 < \varphi_4 < \dots$ ,  $\varphi_2 > \varphi_1$  (рис. 11).

Это также противоречит замкнутости, ибо  $|\varphi_i - \varphi_1| \leq |\varphi_{i+1} - \varphi_i| < \pi$  по лемме 4 и  $\varphi_{2p+1} < \varphi_1$ ,  $\varphi_{2p} > \varphi_1$ .

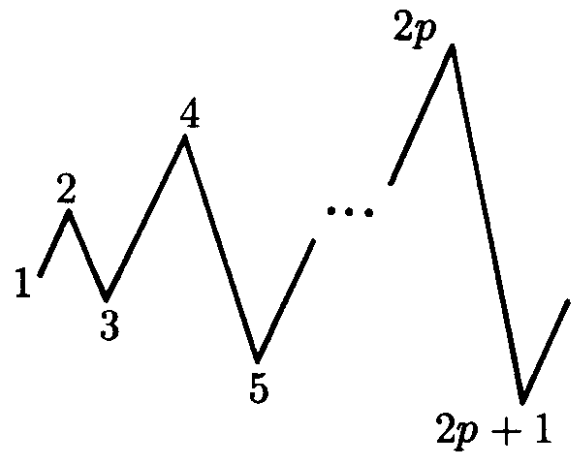
Из леммы 5 вытекает принадлежащая Мёбиусу [6]

**Теорема 5.** *Односторонне вложенная в  $\mathbb{RP}^2$  кривая имеет не менее трех точек перегиба (где кривизна обращается в нуль).*

Если эта кривая не прямая, то она не менее трех раз пересекает некоторую прямую, близкую к своей касательной в точке ненулевой



Рис. 11. Ловушка типа 2, (B)



кривизны. По лемме 3 число сохранений знака больше 1. По лемме 2 число точек перегиба больше 1. Будучи нечетным ввиду односторонности, оно не меньше трех.

**Теорема 6** (см. [7]). *Выпуклая замкнутая кривая имеет не менее четырех вершин.*

Ориентированные нормали кривой образуют кривую на сфере, накрывающей двойственную плоскость. Вершинам кривой отвечают точки перегиба кривой нормалей и обратно.

Выпуклая кривая имеет по меньшей мере два диаметра (диаметр — это отрезок, перпендикулярный кривой в концах). Один диаметр соединяет наиболее удаленные точки кривой, второй минимаксный (наиболее длинный по всем гомотопиям из наименее длинных отрезков, входящих в гомотопию наибольшего диаметра в тот же диаметр с другой ориентацией в классе отрезков с концами на кривой).

Точка пересечения диаметров лежит внутри ограниченной кривой области. На двойственной плоскости этой точке отвечает прямая, на сфере — большая окружность. Кривая нормалей пересекает ее не менее четырех раз. Поскольку нормаль выпуклой кривой поворачивается монотонно, порядки точек пересечения на кривой нормалей и на указанной окружности совпадают. Поэтому последовательность знаков дуг кривой нормалей состоит из одних плюсов, и число их не менее четырех. Лемма 2 справедлива и на сфере (доказательство сохраняется). Поэтому кривая нормалей имеет не менее четырех точек перегиба, что и требовалось.

**Замечание.** Выпуклость кривой на самом деле не нужна, важно, что кривая двусторонняя и у нее нет самопересечений:

**Теорема 7.** *Связная замкнутая квадратично локально выпуклая несамопересекающаяся кривая на проективной плоскости не пересекает некоторую прямую и ограничивает выпуклую фигуру в дополнительной аффинной плоскости.*

По лемме 2 последовательность знаков дуг локально выпуклой кривой всегда чередующаяся:  $+ - \dots$ . Рассмотрим малую хорду  $(1, 2)$  нашей кривой. Пусть ее продолжение пересекает кривую еще в следующей (вдоль кривой) точке 3. Построим функцию азимута  $\varphi$ , как в леммах 2–5. Пусть  $\varphi_2 > \varphi_1$ . Ввиду малости хорды  $\varphi_3 < \varphi_1$  (рис. 12). Обозначая азимуты предшествующих 1 точек пересечения через  $\varphi_0, \varphi_{-1}, \dots$ , находим, как в лемме 5, что  $\varphi_i \in [\varphi_1, \varphi_2]$  при  $i < 1$ . Это противоречит замкнутости кривой (поскольку  $|\varphi_2 - \varphi_3| < \pi$  по лемме 4).

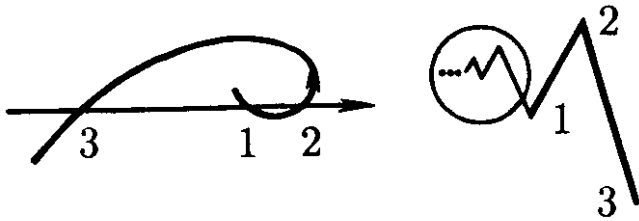


Рис. 12. Доказательство теоремы 7

Итак, продолжение малой хорды не может более пересекать кривую. Значит, касательная не имеет общих с кривой точек, кроме точки касания. Искомая прямая получается из касательной малым сдвигом. В аффинной плоскости кривая лежит по одну сторону от любой своей касательной и, следовательно, ограничивает выпуклую фигуру.

**Теорема 8.** *Связная незамкнутая несамопересекающаяся квадратично локально выпуклая кривая в  $\mathbb{RP}^2$  не пересекает некоторую прямую.*

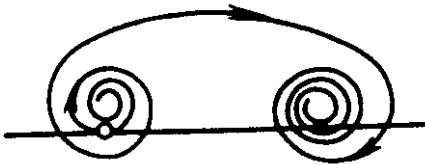


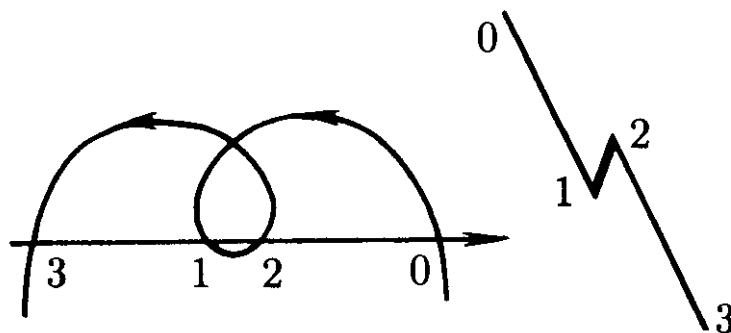
Рис. 13. Касательная, пересекающая кривую впереди точки касания

**Лемма 6.** *Пусть связная незамкнутая несамопересекающаяся кривая локально квадратично выпукла. Тогда все точки ее пересечения с касательной лежат вдоль кривой по одну сторону от точки касания (рис. 13).*

Действительно, в противном случае, образовав функцию азимута  $\varphi$ , как в леммах 2–5, мы получили бы для близкой к касательной секущей, пересекающей кривую в близких точках 1, 2 и в лежащих на кривой по разные стороны от 1, 2 соседних с 1, 2 точках пересечения 0 и 3, неравенства  $\varphi_3 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_0$ , противоречащие по лемме 3 тому, что кривая несамопересекающаяся (рис. 14).

каж 1, 2 и в лежащих на кривой по разные стороны от 1, 2 соседних с 1, 2 точках пересечения 0 и 3, неравенства  $\varphi_3 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_0$ , противоречащие по лемме 3 тому, что кривая несамопересекающаяся (рис. 14).

Рис. 14. Азимуты точек пересечения с секущей, близкой к касательной



**Лемма 7.** *Одна из касательных более не имеет с кривой общих точек.*

В начальной точке все точки пересечения еще впереди по кривой, а в конечной — позади. Множества точек кривой, для которых дополнительные точки пересечения касательной лежат впереди (позади), замкнуты, непусты и не пересекаются. Следовательно, они покрывают не всю кривую, что и доказывает лемму 7.

Не пересекающая кривую прямая получается из этой касательной малым сдвигом.

#### 4. Квазивыпуклость постоянной сигнатуры

Рассмотрим связную замкнутую квадратично выпуклую (имеющую положительно определенную вторую квадратичную форму) гиперповерхность без края  $M$ , вложенную в проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$ .

**Теорема 9.**  *$M$  не пересекает некоторую гиперплоскость, уместается в некотором аффинном пространстве и ограничивает в нем выпуклое тело.*

Докажем, что касательная к  $M$  в  $a$  прямая  $l$  более не пересекает  $M$ . Если  $b$  — другая точка пересечения, то в любой плоскости  $\mathbb{R}P^2$ , проходящей через  $l$ , точки  $a$  и  $b$  лежат в разных компонентах пересечения  $M \cap \mathbb{R}P^2$  (по теореме 7). Соединим  $a$  и  $b$  кривой  $\{c(t)\}$  в  $M$ , не имеющей с  $l$  общих точек, кроме  $c(0) = a$ ,  $c(1) = b$ , и не касающейся  $l$  в этих точках. Двумерные плоскости  $P(t)$ , содержащие  $l$  и  $c(t)$ , пересекают  $M$  по кривым  $\gamma(t)$ . При изменении  $t$  эти кривые испытывают морсовские перестройки рождения и уничтожения (вследствие локальной выпуклости).

При таких перестройках компоненты кривой не соединяются. Поэтому отрезки  $\{t, a\}$  и  $\{t, b\}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , в трехмерном многообразии  $\{t, P(t)\}$ ,  $t \in [0, 1]$ , принадлежат разным компонентам поверхности

$\{t, \gamma(t)\}$ . С другой стороны, путь  $\{t, c(t)\}$  соединяет точки  $\{0, a\}$  и  $\{1, b\}$  по этой поверхности. Противоречие доказывает, что  $b$  не существует.

Итак, касательная плоскость к  $M$  в  $a$  более не пересекает  $M$ . Искомая гиперплоскость получается из касательной плоскости малым сдвигом. Выпуклость ограниченного  $M$  тела в дополнительном пространстве также следует из того, что касательные к  $M$  плоскости более не пересекают  $M$ .

**Замечание.** Условия теоремы 9 можно значительно ослабить — не нужна ни столь строгая локальная выпуклость, ни гладкость  $M$ , ни (если  $n > 2$ ) даже отсутствие самопересечений: можно считать многообразие  $M$  погруженным, а не вложенным в  $\mathbb{R}P^n$ .

Представляются, однако, более интересными следующие обобщения выпуклости.

**Определение.** Связная замкнутая гиперповерхность (без края) в проективном пространстве называется *квазивыпуклой*, если ее вторая квадратичная форма всюду невырождена (и, следовательно, имеет постоянную сигнатуру).

**Пример.** Уравнение  $-x_1^2 - \dots - x_k^2 + y_1^2 + \dots + y_l^2 = 0$  задает в  $\mathbb{R}P^n$ ,  $n = k + l - 1$ , квазивыпуклую поверхность сигнатуры  $(k - 1, l - 1)$ .

В частности, однополостный гиперболоид в  $\mathbb{R}P^3$  — квазивыпуклая поверхность сигнатуры  $(1, 1)$ .

Однополостные гиперболоиды обладают следующими свойствами:

1. Гиперболоид диффеоморфен тору  $T^2$ .
2. Вложения всех однополостных гиперболоидов образуют связное множество, в частности, все они вложены стандартно.
3. Существуют две прямые, которые гиперболоид разделяет.
4. Более того, прямые можно выбрать так, что каждая прямая, соединяющая точку первой с точкой второй, трансверсально пересекает гиперболоид в двух точках. Таким образом, гиперболоид двулистно накрывает прямое произведение двух проективных прямых, причем это покрытие над каждым из сомножителей нетривиально.
5. Пересечение гиперболоида с любой плоскостью связно.
6. Пересечения гиперболоида с не касающимися его плоскостями не гомологичны нулю на нем, а именно, имеют тип  $(1, 1)$  или  $(1, -1)$ .

**Гипотеза.** Все квазивыпуклые поверхности сигнатуры однополостного гиперболоида в  $\mathbb{R}P^3$  обладают свойствами 1–6.

Свойство 1 доказывается легко (эйлерова характеристика поверхности равна нулю, так как на ней есть поле асимптотических пар направлений, а бутылка Клейна не вкладывается в  $\mathbb{R}P^3$ ). Свойство 4 подготавливает вывод 2, а свойства 3 и 5 — подготовительные для 4. К сожалению, доказать их мне удалось лишь при дополнительных ограничениях, главное из которых — существование выпуклого сечения (что тоже, быть может, следует из квазивыпуклости).

Попытки доказать гипотезу приводят к интересным теоремам общего характера. Например, имеет место такой аналог принципа максимума. Рассмотрим конус  $z^2 = x^2 + y^2$  в  $\mathbb{R}^3$  и связную  $(1, 1)$ -квазивыпуклую поверхность, расположенную в полосе  $|z| \leq 1$  и касающуюся конуса вдоль окружностей  $|z| = 1$ . Такая поверхность не может заходить внутрь конуса. (Окружность можно здесь заменить любой квадратично выпуклой кривой.)

Другой результат, полученный при попытке доказать гипотезу, состоит в следующем. Пусть  $M$  — гладкая поверхность в проективном пространстве  $\mathbb{R}P^3$ ,  $M^*$  — двойственная поверхность (образованная касательными к  $M$  плоскостями в двойственном пространстве  $\mathbb{R}P^{3*}$ ),  $l$  — прямая в  $\mathbb{R}P^3$ ,  $l^*$  — двойственная прямая в  $\mathbb{R}P^{3*}$  (образованная содержащими  $l$  плоскостями).

Обозначим через  $\#(M \cap l)$  число точек пересечения поверхности с прямой, а через  $\text{sgn}(M^* \cap l^*)$  — число точек пересечения двойственной поверхности с двойственной прямой, посчитанных со знаками.

Знак определяется как  $(-1)^i$ , где  $i$  — индекс второй квадратичной формы поверхности в точке пересечения (точке выпуклости приписывается знак  $+$ , седловой точке — знак  $-$ ).

**Теорема 10.** *Для типичной поверхности  $M$  сумма  $\#(M \cap l) + \text{sgn}(M^* \cap l^*)$  не зависит от прямой  $l$  и равна эйлеровой характеристике поверхности  $M$ .*

Доказательство теоремы 10 несложно; О. Я. Виро сообщил мне, что он обнаружил эквивалентный теореме 10 факт, рассматривая вещественные алгебраические поверхности.

**Следствие.** *Число точек в  $\mathbb{R}^3$ , где касательная плоскость к типичной  $(1, 1)$ -квазивыпуклой поверхности в  $\mathbb{R}P^3$  горизонтальна, равно числу точек пересечения горизонтального сечения поверхности с бесконечно удаленной плоскостью.*

Не опровергнуты и следующие многомерные обобщения гипотезы.

1. (Стандартность). Вложения квазивыпуклых гиперповерхностей фиксированной сигнатуры  $(k, l)$  в  $\mathbb{R}P^n$ ,  $k + l = n - 1$ , образуют связное множество.

2. (Накрытие). Такая гиперповерхность двулистно покрывает прямое произведение проективных пространств  $\mathbb{R}P^k \times \mathbb{R}P^l$ , причем покрытие на сомножителях нетривиально, так что гиперповерхность диффеоморфна фактору произведения сфер  $S^k \times S^l$  по антиподальной инволюции  $(-1, -1)$ .

3. (Квазизвездность). Гиперповерхность разделяет подходящую пару подпространств  $\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^l$  в  $\mathbb{R}P^n$  и трансверсально пересекает в двух точках каждую соединяющую их прямую.

4. (Дивизоры). Все гиперплоские сечения такой гиперповерхности связны и диффеоморфны квадратам, причем классы гомологий трансверсальных сечений на гиперповерхности такие же, как для сечений гиперboloида.

Теорема 9 доказывает гипотезу звездности 3 при  $k = 0$ .

## Литература

- [1] Арнольд В. И. О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм. *Функц. анализ и его прилож.*, 1971, 5(3), 1–9.
- [2] Kuiper N. H. The quotient space of  $CP(2)$  by complex conjugation in the 4-sphere. *Math. Ann.*, 1974, 208(2), 175–177.
- [3] Nuij W. A note on hyperbolic polynomials. *Math. Scand.*, 1968, 23, 69–72.
- [4] Garding L. Inequalities for hyperbolic polynomials. *J. Math. Mech.*, 1959, 8(1), 157–165.
- [5] Maxwell J. C. A treatise on electricity and magnetism. V. 1. Oxford, 1981, 179–214.  
Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. 3-е изд., испр. Т. 1. М.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1951; гл. VII, §5.5.
- [6] Sasaki S. The minimum number of points of inflection of closed curves in the projective plane. *Tôhoku Math. J.*, 1957, 9(2), 113–117.
- [7] Kneser A. Extreme der Krümmung auf geschlossenen Kurven. In: Festschrift zum 70 Geburtstag von H. Weber. Breslau, 1913, 170–192.

Предисловие к русскому переводу книги  
Дж. Бруса и П. Джиблина «Кривые и особенности»

Эта книга посвящена исследованию особенностей кривых. Бóльшая часть результатов, о которых в ней идет речь, восходит к оптическим работам Гюйгенса и Барроу — предшественников Ньютона и Лейбница — и имеется уже в первом (1696 г.) учебнике анализа (написанном Лопиталем), который так и назывался — «Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий». В курсах анализа эти результаты и излагались примерно до середины 20-го века. Но впоследствии эволюты, эвольвенты, каустики, огибающие и ребра возврата постепенно исчезли из математического преподавания, так как плохо укладывались в прокрустово ложе аксиоматически-дедуктивных построений теоретико-множественного бурбакистского толка.

Авторы предприняли попытку изложить этот материал, не предполагая у читателя почти никаких предварительных знаний и сообщая ему попутно некоторые основные идеи и методы теории особенностей дифференцируемых отображений.

С современной точки зрения бóльшая часть материала этой книги — разнообразные частные случаи теории лагранжевых особенностей симплектической геометрии и теории лежандровых особенностей контактной геометрии. Эти теории доставляют соответственно списки типичных особенностей каустик (огибающих систем лучей) и волновых фронтов, распространяющихся в произвольной (вообще говоря, неоднородной и неизотропной) среде, например — на римановом многообразии. В частных случаях, рассматриваемых в книге, среда предполагается плоской, однородной и изотропной, так что лучи — прямые линии — могут быть явно вычислены. В общем случае потребовалось бы решать дифференциальные уравнения Гамильтона, и столь явных формул для лучей и расстояний, как в рассматриваемых в книге примерах, не было бы. Хотя это не очевидно и в книге не доказывается, на самом деле ответы в общей теории лагранжевых и лежандровых особенностей кривых и поверхностей не сложнее, чем в рассматриваемых в книге элементарных частных случаях.

Преимущество избранного авторами уровня общности состоит в том, что им удается заменить простые общие идеи теории лагранжевых и лежандровых особенностей выкладочными доказательствами частных результатов (различными в разных частных случаях). Такой подход можно уподобить определению касательной к окружности как нормали к радиусу. Исходя из этого определения, можно доказывать теоремы об окружностях, но недостаток такого подхода в том, что читатель может лишь догадываться, какова степень общности получаемых результатов и от каких структур они на самом деле зависят (общие теоремы симплектической и контактной геометрии выглядят в книге как факты дифференциальной геометрии евклидовой плоскости). Из книги трудно понять, почему в непохожих на первый (а часто и на второй) взгляд задачах получаются одинаковые ответы. Можно надеяться, что вдумчивый читатель, познакомившись с изложенными здесь фактами, заинтересуется их связями и сам разыщет в литературе соответствующие общие теории.

Авторы почти нигде не указывают источников обсуждаемых результатов и, как правило, ссылаются не на первые, а на возможно более поздние изложения. В тех же немногих случаях, когда авторы затрагивают историю вопроса, они не всегда объективны. В связи с этим будет не лишним приводимый ниже краткий обзор.

Особенности эволют и эвольвент, каустик и систем лучей и фронтов были подробно изучены Гюйгенсом еще до появления математического анализа (1654 г.). В упомянутом выше учебнике Лопиталья 1696 г. исследование этих вопросов доведено уже до более сложных случаев, чем в книге Бруса и Джиблина, — например, Лопиталь описывает поведение семейства эвольвент кривой общего положения вблизи ее точки перегиба (попробуйте самостоятельно нарисовать эти эвольвенты!).

Л. Кронекер в 1878 г. подробно изучил ласточкин хвост, а в работах А. Кэли того же времени исследование особенностей распространяющихся волновых фронтов и каустик (фокальных поверхностей) общего положения проведено значительно дальше, чем в настоящей книге (попробуйте нарисовать, вслед за Кэли, множество центров кривизны трехосного эллипсоида и его параллели — аналогичная задача для эллипса решена в данной книге).

Необходимые для обоснования подобных теорий соображения общего положения, теперь формализуемые леммой Сарда и леммой трансверсальности Тома, в те времена считали очевидными не только физики



(типичный пример — «правило фаз» Гиббса, 1873 г.), но и математики. Сошлюсь лишь на исследование типичных особенностей функции расстояния на эллипсоиде, проведенное Якоби в 1866 г., и на постановку Кэли (1868 г.) задачи о топологическом описании типичных гладких функций — функций Морса, как мы сказали бы сейчас.

Впрочем, и с обоснованием дело обстояло не так плохо: в 1882 г. Бертини доказал теорему, заменяющую теорему трансверсальности или лемму Сарда в ситуации алгебраической геометрии (и достаточную, в действительности, для большинства приложений).

Общая теория гладких многообразий в виде, чрезвычайно близком к тому, в каком она изложена в настоящей книге, представлена А. Пуанкаре в *Analysis situs* (1885 г.). (Последующие поколения предпочитали менее удачные, хотя и эквивалентные определения многообразий, и даже сейчас в литературе можно встретить утверждение, что Пуанкаре не знал, что такое многообразие.) Теорема о вложимости  $n$ -мерных многообразий в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  принадлежит Уитни (1936 г.). Современная теория особенностей дифференцируемых отображений также начата Уитни в замечательной работе о типичных особенностях отображений поверхностей на плоскость (1955 г.).

Р. Том, усовершенствовавший ряд пунктов теории Уитни (1959 г.), первым осознал всеобъемлющий характер теории Уитни и всё ее значение для многочисленных приложений. В 1969 г. он опубликовал работу «Топологические модели в биологии», содержащую список типичных бифуркаций критических точек функций, встречающихся в четырехпараметрических семействах.

Том предполагал, что он описал все типичные топологические бифуркации фазовых портретов градиентных динамических систем, встречающихся в не более чем четырехпараметрических семействах (параметров четыре потому, что эти системы, по Тому, описывают химические реакции в разных точках организма в разные моменты времени).

К 1973 г. выяснилось, что составленный Томом список типичных градиентных бифуркаций не полон уже для случая трех параметров (для случаев одного и двух параметров списки Тома правильны). Полный список градиентных бифуркаций в типичных трехпараметрических семействах найден лишь в 1984 г. (Б. А. Хесиньм). Он оказался конечным, хотя и шире первоначального списка Тома. Конечен ли

топологически полный список градиентных бифуркаций в типичных четырехпараметрических семействах — неизвестно и сейчас.

Таким образом, программа исследования «катастроф» Тома на сегодняшний день выполнена в меньшей степени, чем та, которую Том считал достигнутой в первой своей работе на эту тему. Последующие работы Зимана и др. по теории катастроф скорее посвящены приложениям результатов теории особенностей и приведению в систему полученных ранее результатов других авторов, чем новым теоремам.

Важным вкладом Тома в теорию особенностей явилось открытие им непрерывных инвариантов (модулей) типичных особенностей гладких отображений многомерных пространств, рассматриваемых с точностью до диффеоморфизмов (1959 г.). Том предположил, а А. Н. Варченко доказал (1972–1973 гг.), что в топологической теории типичных особенностей гладких отображений (рассматриваемых с точностью до гомеоморфизмов) модулей нет. Из теории Варченко следует, например, конечность числа топологических типов типичных особенностей каустик и волновых фронтов в пространстве любого числа измерений (это следствие другим способом позже доказал Лоэйенга в 1974 г.

Завершение общей теории особенностей дифференцируемых отображений является заслугой Дж. Мазера (1965 г.), опубликовавшего в 1968–1971 гг. серию из 6 статей, в которых вычислены все «хорошие размерности», где нет модулей и дифференцируемая классификация конечна (ошибки, имевшиеся в классификации особенностей Мазера, исправлены позже Джустини и другими; на список хороших размерностей они не влияют).

Начала теории лагранжевых особенностей обсуждаются в книге В. П. Маслова 1965 г. (где исследуется, в частности, лагранжева сборка над точкой возврата каустики) и в моей статье 1967 г. «Математические методы классической механики» (Арнольд, 1974 г.) содержат уже и теорию лежандровых особенностей, из которой большинство результатов настоящей книги вытекает в качестве простых частных случаев. Список особенностей видимых контуров типичных поверхностей трехмерного пространства (проектируемых из бесконечности) опубликован мной в УМН в 1979 г.

Исследование особенностей проективно двойственных кривых, их разверток и метаморфоз проведено О. П. Щербаком (1982 г.) значительно дальше, чем в настоящей книге. В 1985 г. М. Э. Казарян связал эту теорию с теорией бифуркаций фундаментальных систем решений

линейных дифференциальных уравнений и с особенностями стратификаций Шуберта многообразий Грассмана.

С общей теорией систем лучей, построенной О. П. Щербаком, А. Б. Гивенталем, В. В. Горюновым, В. М. Закалюкиным, Е. Е. Ландис, О. А. Платоновой, И. Г. Щербак, В. А. Васильевым, А. А. Давыдовым, В. Д. Седых и другими авторами, далеко выходящей за рамки настоящей книги, можно познакомиться по обзорам «Особенности систем лучей» и «Особенности в вариационном исчислении» (Арнольд, 1983 г.). Более полные списки литературы имеются в двухтомнике В. И. Арнольда, А. Н. Варченко и С. М. Гусейн-Заде «Особенности дифференцируемых отображений» (М., Наука, 1982 и 1984) и в томах 4–6<sup>1</sup> серии «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», издаваемой ВИНТИ.

Но для того, чтобы проникнуть в мир современной теории особенностей, быть может, лучше всего начать с конкретных элементарных примеров, составляющих эту книжку.

---

<sup>1</sup> и 39 — прим. ред.



## Пространства функций с умеренными особенностями

Топологические инварианты пространств гладких функций с особенностями не сложнее данной не только являются интересной характеристикой области определения, но представляют интерес и сами по себе, и в связи с приложениями семейств функций в симплектической геометрии и в других областях.

В настоящей работе рассмотрен простейший случай функций одной переменной.

### 1. Формулировки результатов

Функции, имеющие критическую точку кратности выше  $k$ , образуют множество коразмерности  $k$ .

**Теорема 1.** *Фундаментальная группа пространства функций без критических точек кратности выше 2 на окружности изоморфна группе целых чисел. Такие же фундаментальные группы имеют пространства функций без критических точек кратности выше 2 на прямой, совпадающих при  $|x| > 1$  с  $x$  или с  $x^2$ .*

**Теорема 2.** *Последняя группа естественно изоморфна группе классов вложенных замкнутых плоских кривых без горизонтальных касательных перегиба.*

Классы определены ниже, в §2. Изоморфизм группы классов кривых группе целых чисел задается следующим «индексом» такой плоской кривой  $f(x, y) = 0$ :

$$\text{ind} = \# \max - \# \min,$$

где  $\# \max$  и  $\# \min$  — числа максимумов и минимумов функции  $y$  на компактной поверхности  $z^2 = f(x, y)$  (рис. 1).

В теореме 1 функции можно заменить многочленами фиксированной степени.

$$\text{ind } \text{ind} \begin{array}{c} \text{---} \\ \cup \\ \text{---} \end{array} = 1, \quad \text{ind} \begin{array}{c} \text{---} \\ \cup \\ \cup \\ \text{---} \end{array} = 2, \quad \text{ind} \begin{array}{c} \text{---} \\ \cup \\ \text{---} \\ \cup \\ \text{---} \end{array} = -1$$

Рис. 1

**Теорема 3.** *Гомотопические группы пространств  $G_k^d$  вещественных многочленов  $x^d + \dots$  не слишком высокой степени, не имеющих вещественных корней кратности выше  $k$  ( $> 1$ ), изоморфны гомотопическим группам сфер:*

$$\pi_i(G_k^d) \approx \pi_i(S^{k-1}) \quad \text{при } k < d \leq 2k + 1.$$

Более того, при указанных ограничениях пространство  $G_k^d$  диффеоморфно произведению сферы на евклидово пространство. Аналогичный результат имеет место для пространства многочленов с нулевой суммой корней.

**Пример.** Дополнение к ребру возврата ласточкиного хвоста стягивается на окружность.

**Теорема 4.** *Группы гомологий пространства  $G_k^d$  отличны от нуля только для размерностей, кратных  $k - 1$ , а именно,*

$$H^{r(k-1)}(G_k^d) \approx \mathbb{Z} \quad \text{при } d \geq (k+1)r.$$

**Следствие.** *Многочлен Пуанкаре пространства  $G_k^d$  есть*

$$p(t) = \frac{1 - t^{(r+1)(k-1)}}{1 - t^{k-1}} \quad \text{при } (k+1)r \leq d < (k+1)(r+1).$$

При  $d \rightarrow \infty$  группы  $H^i(G_k^d)$  стабилизируются<sup>1</sup>, и многочлены Пуанкаре пространств  $G_k^d$  превращаются в «ряд Пуанкаре пространства  $G_k^\infty$  ростков функций на прямой без критических точек кратности выше  $k$ »,

$$p(t) = (1 - t^{k-1})^{-1}.$$

<sup>1</sup> В. А. Васильев доказал, что и слабый гомотопический тип стабилизируется к типу пространства петель сферы.

Смысл теорем 3 и 4 понятнее из следующей таблицы гомотопических типов пространств  $G_k^d$  (где невычисленные типы заменены многочленами Пуанкаре):

Таблица 1

d	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$\{S^0 = \mathbb{Z}_2\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$\{\mathbb{Z}_2\}$	$\{S^1\}$	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$\{\mathbb{Z}_3\}$	$\{S^1\}$	$\{S^2\}$	.	.	.	.	.	.	.
5	$\{\mathbb{Z}_3\}$	$\{S^1\}$	$\{S^2\}$	$\{S^3\}$	.	.	.	.	.	.
6	$\{\mathbb{Z}_4\}$	$\{1+t+\dots\}$	$\{S^2\}$	$\{S^3\}$	$\{S^4\}$	.	.	.	.	.
7	$\{\mathbb{Z}_4\}$	$\{1+t+\dots+t^2\}$	$\{S^2\}$	$\{S^3\}$	$\{S^4\}$	$\{S^5\}$	.	.	.	.
8	$\{\mathbb{Z}_5\}$	$\{1+t+\dots+t^2+t^3\}$	$\{1+t^2+\dots+t^4\}$	$\{S^3\}$	$\{S^4\}$	$\{S^5\}$	$\{S^6\}$	.	.	.
9	$\{\mathbb{Z}_5\}$	$\{1+t+\dots+t^2+t^3\}$	$\{1+t^2+\dots+t^4\}$	$\{S^3\}$	$\{S^4\}$	$\{S^5\}$	$\{S^6\}$	$\{S^7\}$	.	.
10	$\{\mathbb{Z}_6\}$	$\{1+t+\dots+t^2+t^3\}$	$\{1+t^2+\dots+t^4+t^6\}$	$\{1+\dots+t^3+t^6\}$	$\{S^4\}$	$\{S^5\}$	$\{S^6\}$	$\{S^7\}$	$\{S^8\}$	$\{S^9\}$
11	$\{\mathbb{Z}_6\}$	$\{1+t+\dots+t^2+t^3\}$	$\{1+t^2+\dots+t^4+t^6\}$	$\{1+\dots+t^3+t^6\}$	$\{S^4\}$	$\{S^5\}$	$\{S^6\}$	$\{S^7\}$	$\{S^8\}$	$\{S^9\}$
12	$\{\mathbb{Z}_7\}$	$\{1+t+\dots+t^2+t^3+t^4\}$	$\{1+t^2+\dots+t^4+t^6\}$	$\{1+\dots+t^3+t^6\}$	$\{1+\dots+t^4+t^8\}$	$\{S^5\}$	$\{S^6\}$	$\{S^7\}$	$\{S^8\}$	$\{S^9\}$
13	$\{\mathbb{Z}_7\}$	$\{1+t+\dots+t^2+t^3+t^4\}$	$\{1+t^2+\dots+t^4+t^6\}$	$\{1+\dots+t^3+t^6\}$	$\{1+\dots+t^4+t^8\}$	$\{S^5\}$	$\{S^6\}$	$\{S^7\}$	$\{S^8\}$	$\{S^9\}$
14	$\{\mathbb{Z}_8\}$	$\{1+t+\dots+t^2+t^3+t^4\}$	$\{1+t^2+\dots+t^4+t^6\}$	$\{1+\dots+t^3+t^6\}$	$\{1+\dots+t^4+t^8\}$	$\{1+t^5+t^{10}\}$	$\{S^6\}$	$\{S^7\}$	$\{S^8\}$	$\{S^9\}$

**Пример.** Нетривиальные пространства столбца  $k = 2$  соответствуют, последовательно, плоскости многочленов  $\{x^3 + ax + b\}$  без точки  $a = b = 0$ , дополнению к ребру возврата ласточкиного хвоста в пространстве многочленов  $\{x^4 + ax^2 + bx + c\}$ , дополнению к раскрытому ласточкиному хвосту  $\{(x - t)^3(x^2 + \dots)\}$  в пространстве многочленов  $\{x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d\}$  и т.д.

**Замечание 1.** Результат, приведенный в первом столбце ( $k = 1$ ), легко доказывается непосредственно. Интересно, что его можно получить «аналитическим продолжением» многочленов Пуанкаре по  $k$ .

**Замечание 2.**  $\pi_1(G_k^d) = 0$  при  $k \neq 2$ ,  $\mathbb{Z}$  при  $k = 2, d \geq 3$ . Это доказывается, подобно теореме 1, при помощи соответствующего аналога теоремы 2. Вероятно,  $\pi_i(G_k^d)$  стабилизируется при  $d \rightarrow \infty, i > 0$ , но я это доказал лишь при  $i < k$ : из теоремы 4 видно, что

$$\pi_i(G_k^d) = 0 \quad \text{при} \quad i < k - 1, \quad \pi_{k-1}(G_k^d) = \mathbb{Z} \quad \text{при} \quad d > k > 2.$$

**Замечание 3.** Результаты настоящей работы были получены в процессе (неудачной) попытки сформулировать симплектическое обобщение теоремы о четырех вершинах плоской кривой.

Расстояние от точек кривой до точек ограниченной ею области можно рассматривать как семейство функций на окружности, параме-

тризованных точками диска. Вершины кривой отвечают критическим точкам кратности выше 2 функции семейства.

Семейство функций на окружности, параметризованных точками диска, определяет гомотопию замкнутого пути в пространстве функций на окружности в точку пространства функций.

Семейству функций соответствует лагранжево подмногообразие с краем в  $T^*\mathbb{R}^2$ , вершинам кривой — сборки его лагранжева проектирования на  $\mathbb{R}^2$ . Рассмотрим граничный воротник на этой лагранжевой поверхности. Если бы всякая лагранжева поверхность, затягивающая этот воротник, имела больше двух сборок, то из этого вытекала бы теорема о четырех вершинах.

К сожалению, теоремы настоящей работы дают лишь отрицательный результат в этом направлении.

Единственным инвариантом, препятствующим не имеющему сборок затягиванию петли в пространстве функций на окружности, является индекс. Индекс петли, соответствующей воротнику, равен, как легко видеть, нулю (достаточно рассмотреть случай эллипса). Поэтому воротник можно затянуть лагранжевой пленкой, даже вовсе не имеющей сборок, и в этом смысле теорема о четырех вершинах не включается в симплектическую топологию.

Остается, однако, возможность, что она включается в топологию оптических лагранжевых многообразий, удовлетворяющих уравнению эйконала (принадлежащих квадратично выпуклой по импульсам гиперповерхности пространства касательного расслоения). Соответствующая теорема оптической топологии должна была бы оценивать снизу множество лагранжевых особенностей оптической лагранжевой пленки, затягивающей данный лагранжев воротник. В частности, из этой оценки должно бы следовать, что каждая ветвь каустики замкнутой несамопересекающейся кривой на римановой сфере имеет не менее 4 точек возврата. Но это не доказано.

## 2. Функции без особенностей коразмерности 2

Здесь доказываются теоремы 1 и 2.

**2.1. От гомотопий к кобордизмам.** Сопоставим пути  $f$  в пространстве функций кривую  $\Gamma_f$  в произведении области определения и



отрезка  $I$  оси параметра  $t$ , образованную критическими точками функций семейства:

$$(f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto (\Gamma_f = \{(x, t) \in X \times I : \partial f / \partial x = 0\}).$$

Из теоремы трансверсальности Тома сразу следует, что для  $f$  общего положения

1) критические точки функций  $f(\cdot, t)$  — либо типа  $A_1$ , т.е. морсовские (при почти всех  $t$ ), либо типа  $A_2$ , т.е. эквивалентные  $x^3$  (при отдельных  $t$ );

2) кривая критических точек  $\Gamma_f$  гладкая и не имеет горизонтальных касательных перегиба;

3) не морсовские точки функции  $f(\cdot, t)$  отвечают на  $\Gamma_f$  в точности точкам с горизонтальной касательной (морсовским для ограничения  $t$  на  $\Gamma_f$ ).

Рассмотрим гомотопию  $F : (X \times I) \times I \rightarrow \mathbb{R}$  пути  $f$  в пространстве функций без критических точек  $A_3$  (и более сложных),  $f_s(x, t) = F(x, t, s)$ .

Из теоремы трансверсальности Тома следует, что для таких (не пересекающих  $A_3$ ) путей  $F$  общего положения кривые  $\Gamma_{f_s}$

1) гладкие при почти всех  $s$ ;

2) имеют морсовские особенности (как  $x^2 \pm y^2 = 0$ ) при отдельных критических  $s$ ,

3) испытывают морсовские перестройки при переходе  $s$  через критическое значение;

4) и при этом касательные в критических точках не горизонтальны.

Назовем семейство кривых  $\Gamma_{f_s}$ , удовлетворяющих этим условиям,  $A_3$ -кобордизмом между  $\Gamma_{f_0}$  и  $\Gamma_{f_1}$ . Гомотопным вне  $A_3$  путям  $f_0, f_1$  отвечают  $A_3$ -кобордантные кривые.

**2.2. От кобордизмов к гомотопиям.** Сначала рассмотрим случай функций на прямой ( $X = \mathbb{R}$ ), совпадающих с  $x$  при  $|x| \geq 1$ .

**Лемма.** Каждая замкнутая плоская кривая без горизонтальных касательных перегиба в области  $|x| < 1, 0 < t < 1$ , является кривой  $\Gamma_f$  для некоторого не пересекающего  $A_3$  пути  $f$  из  $x$  в  $x$ .

Каждый  $A_3$ -кобордизм между двумя такими кривыми может быть порожден гомотопией между соответствующими путями.

Для доказательства нужно записать уравнение кривой в виде  $g(x, t) = 0$ , где

$$\int_{-1}^1 g dx = 2 \quad \text{и} \quad g = 1$$

при  $|x| \geq 1$ , а также при  $t \geq 1$  и при  $t \leq 0$ , а затем положить

$$f(x, t) = \int_1^x g(y, t) dy.$$

**Замечание.** Отображение, сопоставляющее функции набор ее критических точек, напоминает тривиальное расслоение в смысле Серра. Например, пространство функций без критических точек (совпадающих с  $x$  на бесконечности) стягиваемо.

Соответствующая вещественным алгебраическим функциям аксиоматическая теория квазирасслоений, кажется, еще не построена.

Аналогичный лемме результат имеет место и для функций на прямой, совпадающих с  $x^2$  при  $|x| \geq 1$ . В этом случае вместо замкнутых кривых нужно рассматривать кривые с краем из двух точек  $(x = 0, t = 0)$  и  $(x = 0, t = 1)$ . В доказательстве нужно положить

$$\int_{-1}^1 g dx = 0, \quad g(x, t) = 2x$$

при  $|x| \geq 1$ , при  $t \geq 1$  и при  $t \leq 0$ .

Наконец, в пространстве функций на окружности  $X = \{x \bmod 2\pi\}$  мы отметим функцию  $\cos x$ . Соответствующая выходящей из  $\cos x$  петле кривая  $\Gamma_f$  на цилиндре  $X \times I$  имеет краем 4 точки  $(x = 0, \pi; t = 0, 1)$  и пересекает каждую параллель  $t = \text{const}$ . Утверждение леммы для кривых и кобордизмов этого класса доказывается так же, как в рассмотренных выше случаях (в доказательстве нужно положить

$$\int_0^{2\pi} g dx = 0,$$

что достижимо благодаря условию о пересечении).

**2.3. Группа классов кривых.** Итак, фундаментальная группа пространства функций без особенностей кратности выше 2, совпадающих с  $x$  при  $|x| \geq 1$ , изоморфна группе классов кобордизма замкнутых плоских кривых без горизонтальных касательных перегиба. Умножение в

этой группе классов определяется при помощи несвязного объединения кривых, помещенных в полуплоскости  $t < 0$  и  $t > 0$ , а обращение — при помощи изменения знака  $t$ .

**Теорема.** *Группа классов  $A_3$ -кобордизма плоских кривых без горизонтальных касательных перегиба — свободная циклическая, образующей является первая кривая рис. 1 («почка»).*

**Доказательство.** Индекс, описанный в теореме 2, одинаков для  $A_3$ -кобордантных кривых и потому задает гомоморфизм группы классов на  $\mathbb{Z}$ . Каждая кривая  $\Gamma_f$   $A_3$ -кобордантна степени образующей. Чтобы в этом убедиться, выберем по некритическому значению  $t_i$  между каждыми двумя критическими значениями  $t$  на  $\Gamma$  (считая их всех различными).

Линия  $t = t_i$  пересекает область  $g > 0$ , ограниченную кривой  $\Gamma$  (где  $g(\infty) > 0$ ), по нескольким отрезкам. Выберем внутри каждого из них по точке.

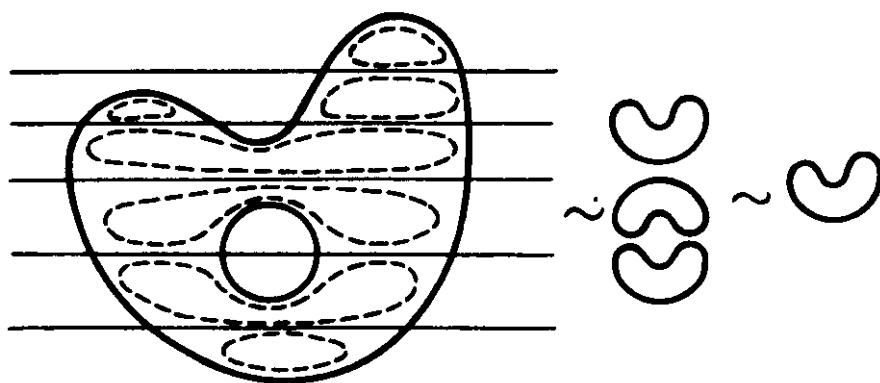


Рис. 2

Подтянем края отрезка к этой точке и сделаем морсовскую перестройку индекса 1 с касательными  $t - t_i = \pm c(x - x_j)$ ,  $c \ll 1$  (рис. 2).

Получим кривую,  $A_3$ -кобордантную исходной и состоящую из компонент с двумя и четырьмя горизонтальными касательными («дисков» и «почек»), причем в каждой полосе между последовательными критическими значениями не более одной почки.

Все диски уничтожаются морсовскими перестройками эллиптического типа. Остается  $A_3$ -кобордантная исходной кривая — произведение образующих в степени 1 и  $-1$ . Произведение «почки» и «антипочки»  $A_3$ -кобордантно нулю (рис. 3), что и требовалось.

Аналогичная теорема верна и для группы кривых, совпадающих на бесконечности с осью  $x = 0$ . В этом случае образующая состоит из непересекающегося объединения этой прямой и почки, расположенной справа от нее (почка, расположенная слева, дает обратную образующую).

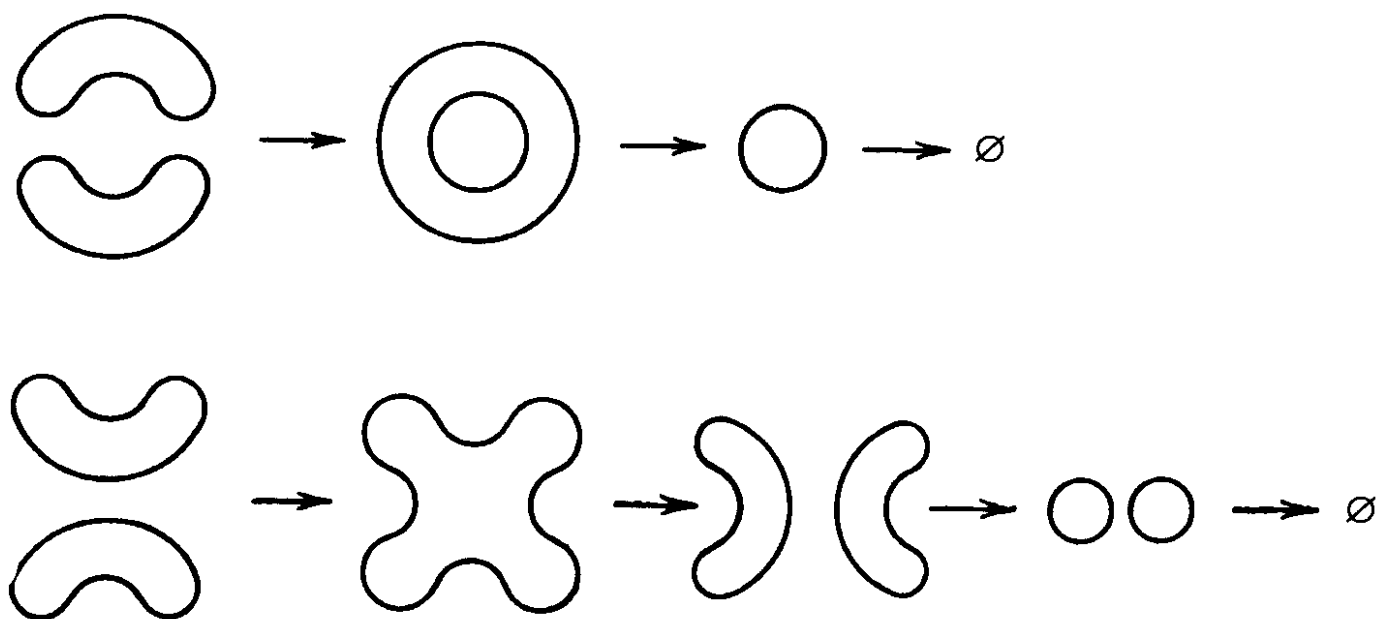


Рис. 3

Действительно, рассуждая, как в предыдущем доказательстве, получаем  $A_3$ -кобордизм кривой, составленной из почек и компонент рис. 4 слева. Преобразование последней кривой в прямую с почкой  $A_3$ -кобордизмом показано на рис. 4 справа.

Наконец, для кривых в кольце после проведения аналогичных предыдущему конструкций могут получиться кривые двух типов: соединяющие граничные точки на одном краю кольца и на разных.

Их  $A_3$ -кобордизм (при одинаковых значениях индекса) строится, как на рис. 5.

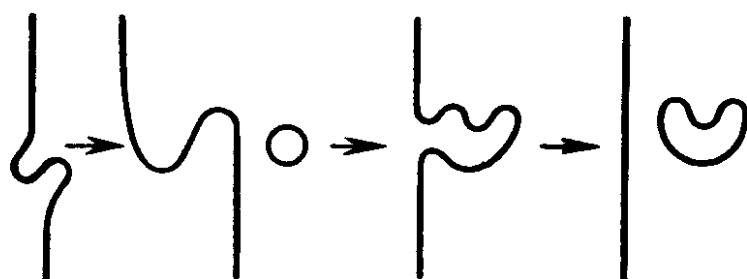


Рис. 4

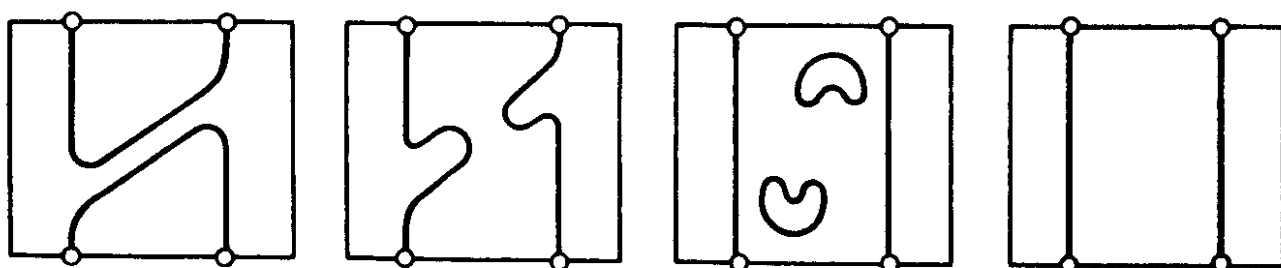


Рис. 5

**Замечание 1.** Аналогичные рассуждения позволяют вычислить фундаментальную группу пространства многочленов  $\{x^d + \dots\}$  без корней кратности выше 2:  $\pi_1(G_2^d) \approx \mathbb{Z}$ . В этом случае нужно рассматривать  $A_3$ -кобордизмы плоских кривых, образованных корнями многочленов семейства.

Поэтому надо следить, чтобы число точек пересечения с горизонтальными прямыми во всех предыдущих конструкциях  $A_3$ -кобордизма не возрастало. Для этого, когда  $d$  нечетно, в качестве образующей следует взять кривую рис. 4 слева, а не справа, и тогда доказательства сохраняют силу.

**Замечание 2.** Индекс кривой в пространстве функций на прямой можно трактовать как индекс пересечения со стратом Максвелла, состоящим из функций с кратными критическими значениями. Для этого последний нужно коориентировать, считая положительной деформацией функции ту, для которой критическое значение в правой точке становится выше левого, если они оба максимумы или оба минимумы, или ниже левого, если одно из них максимум, а другое минимум. Что это правило действительно задает трансверсальную ориентацию страта Максвелла, следует из рассмотрения версальной деформации особенности  $A_4$ .

### 3. Многочлены без корней высокой кратности

Здесь доказываются теоремы 3 и 4.

**3.1. Многочлены с корнем малой кратности.** Пусть  $k < d \leq 2k + 1$ . В этом случае многочлен степени  $d$  не может иметь более одного корня кратности  $k + 1$ . Поэтому многочлен степени  $d$  с корнем кратности  $k + 1$  однозначно представим в виде

$$(x + A)^{k+1}(x^s + B_1x^{s-1} + \dots + B_s), \quad s = d - (k + 1).$$

Эта формула задает собственное вложение  $\mathbb{R}^{s+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  пространства с координатами  $(A, B)$  в пространство многочленов  $x^d + \dots$ , имеющее образом множество  $A_k^d$  многочленов степени  $d$  с вещественным корнем кратности выше  $k$ . По двойственности Александера, гомологии дополнения  $G_k^d = \mathbb{R}^d \setminus A_k^d$  такие же, как у зацепленной с  $A_k^d$  сферы  $S^{k-1}$ .

Теорема 3 вытекает из следующего предложения о незаузленности.



от  $A$  не зависят. Поэтому выражение в квадратных скобках не зависит от  $x$ , т.е.

$$\frac{d}{dA} (x + A)^{k+1} Q = (x + A)^k F(A; a_2, \dots, a_k). \quad (2)$$

Теперь рассмотрим коэффициенты  $(a_{k+1}, \dots, a_{2k+1})$  произведения (1) как функции от  $A$  и  $(a_2, \dots, a_k)$ . Коэффициент  $a_{k+s}$  является квазиоднородным многочленом степени  $k + s$  от  $A$  и  $(a_2, \dots, a_k)$ . Из формулы (2) видно, что производные по  $A$  всех этих коэффициентов пропорциональны, а именно,

$$da_{k+s}/dA = C_k^{s-1} A^{s-1} F(A; a_2, \dots, a_k). \quad (3)$$

Здесь  $F$  — квазиоднородный многочлен степени  $k$ , линейный (неоднородный) по  $(a_2, \dots, a_k)$  с ненулевым коэффициентом при  $A^k$ .

Выберем теперь вещественные коэффициенты  $(c_2, \dots, c_k)$  так, чтобы производная по  $A$  от многочлена степени  $2k + 1$  от  $A$

$$R(A; a_2, \dots, a_k) = a_{2k+1} + c_2 a_2 a_{2k-1} + \dots + c_k a_k a_{k+1} \quad (4)$$

была полным квадратом, а именно,

$$\partial R / \partial A = a'_{2k+1} + c_2 a_2 a'_{2k-1} + \dots + c_k a_k a'_{k+1} = c F^2.$$

Формула (3) показывает, что все производные слагаемых делятся на  $F$ , так что коэффициенты  $c_k$  однозначно определяются из разложения

$$c F = A^k + c_2 a_2 A^{k-2} + \dots + c_k a_k.$$

При таком выборе коэффициентов  $\partial R / \partial A$  — неотрицательный многочлен от  $A$  с положительным при любых  $(a_2, \dots, a_k)$  старшим коэффициентом. Следовательно, отображение  $A \mapsto R(A)$  — собственный гомеоморфизм  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , а отображение

$$(a_2, \dots, a_k; A) \mapsto (a_2, \dots, a_k; R(A; a_2, \dots, a_k))$$

— собственный гомеоморфизм  $H : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

С другой стороны,  $R$  определяет расслоение  $\mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,

$$(a_2, \dots, a_{2k+1}) \mapsto (a_2, \dots, a_k; a_{2k+1} + c_2 a_2 a_{2k-1} + \dots + c_k a_k a_{k+1}),$$

где  $c_s$  — коэффициенты из (4).

Искомое сечение определяется гомеоморфизмом  $H^{-1}$ , доставляющим  $A(a_2, \dots, a_k; b)$ , поскольку коэффициенты  $(a_{k+1}, \dots, a_{2k})$  полиномиально выражаются через  $(A; a_2, \dots, a_k)$ .

**Пример.** При  $k = 2$  речь идет о поверхности в  $\mathbb{R}^4$ ,

$$\{x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x + A)^3(x^2 - 3Ax + B)\}.$$

При фиксированном  $a$  получается кривая (имеющая две точки возврата, если  $a < 0$ ) в трехмерном пространстве с координатами  $(b, c, d)$ . Эта кривая незаузлена, так как невырожденная функция  $R = d + ab/10$  меняется вдоль нее монотонно (рис. 6).

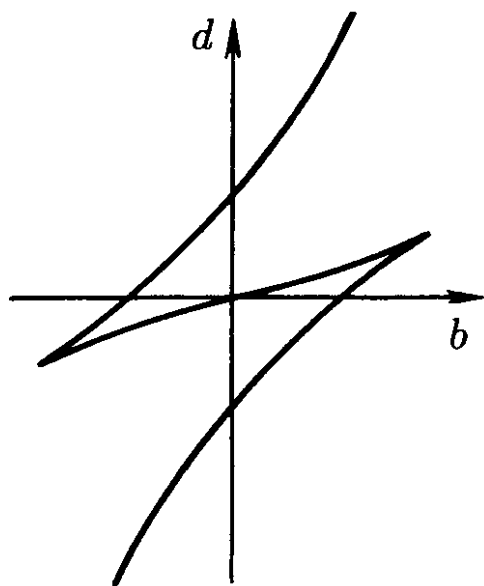


Рис. 6

### Окончание доказательства теоремы 3.

Переход от многочленов с суммой корней 0 к любым многочленам стандартен: пара  $(\mathbb{R}^d, A_k^d)$  диффеоморфна прямому произведению своего сечения гиперплоскостью  $a_1 = 0$  на  $\mathbb{R}$ .

Переход от многочленов степени  $2k+1$  к многочленам меньшей степени также стандартен после работы А. Б. Гивенталя [1]. Дело в том, что при  $d \leq 2k+1$  дифференцирование многочленов порождает расслоение  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ , диффеоморфно отображающее  $A_k^d$  на  $A_{k-1}^{d-1}$ . Это расслоение допускает гладкое сечение  $\mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , образ которого содержит  $A_k^d$  (ребро возврата ласточкиного

хвоста диффеоморфно проектируется на полукубическую параболу — дискриминант кубического многочлена — и лежит на гладкой поверхности, трансверсальной направлению проектирования).

Повторные дифференцирования диффеоморфно отображают  $A_k^d$  на  $A_s^{2s+1}$ , где  $d-k = s+1$ . Следовательно,  $G_k^d$  диффеоморфно дополнению к подпространству коразмерности  $s$  в  $(2s+1)$ -мерном подпространстве пространства  $\mathbb{R}^d$ , что и доказывает теорему.

**3.2. Многочлены с несколькими критическими точками высокой кратности.** Компактифицируем пространство  $\mathbb{R}^d$  одной точкой  $\infty$  и обозначим через  $A_k^{d*}$  одноточечную компактификацию подмножества вещественных многочленов  $\{(x + A)^{k+1}(x^s + \dots)\}$ .



Нам потребуются еще подмножества, образованные многочленами с  $r$  вещественными корнями кратности выше  $k$ , т.е. многочленами, представимыми в виде

$$(x + A_1)^{k+1} \dots (x + A_r)^{k+1} (x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s) = \\ = x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_d. \quad (*)$$

Одноточечную компактификацию этого подмножества обозначим через  $rA_k^d$ .

**Лемма.** Множества  $rA_k^d$ , где  $r > 1$ , гомотопически эквивалентны точке.

**Замечание.** Аналогичный результат имеет место для многочленов с суммой корней нуль.

**Пример.** Линия самопересечения ласточкиного хвоста ( $d = 4$ ,  $k = 1$ ,  $r = 2$ ) является отрезком, соединяющим 0 и  $\infty$  в  $S^3$ .

**Доказательство леммы.** Пусть сперва  $s = 0$ ,  $d = r(k + 1)$ . В этом случае компактификация гомеоморфна замкнутому шару  $B^r \simeq S^r/r!$ . Это следует из того, что конечная точка из  $rA_k^d$  однозначно определяется неупорядоченным набором чисел  $(A_1, \dots, A_r)$ . Поэтому конечная часть,  $rA_k^d$ , гомеоморфна фактору пространства по действию группы перестановок, т.е. симплициальному конусу  $\{A_1 \leq \dots \leq A_r\}$ . Компактификация превращает его в шар.

Пусть теперь  $d = r(k + 1) + s$ ,  $0 < s < k + 1$ . В этом случае конечная точка из  $rA_k^d$  однозначно определяется неупорядоченным набором чисел  $(A_1, \dots, A_r)$  и упорядоченным набором коэффициентов  $(B_1, \dots, B_s)$ .

Компактифицируя одной бесконечно удаленной точкой произведение полупространства (шара без одной граничной точки) и линейного пространства, снова получаем замкнутый шар, стягиваемый на бесконечность.

Наконец, пусть  $d = r(k + 1) + s$ ,  $s \geq k + 1$ . Рассмотрим многообразие  $rV_k^d$  разложений (\*). Такие разложения (пополненные несобственными) снова образуют шар  $rV_k^d \approx B^{r+s-1}$ . Сопоставляя разложению многочлен, мы получаем непрерывное (даже на  $\infty$ ) отображение  $\varphi : B^{r+s-1} \rightarrow rA_k^d$ . Это отображение взаимно-однозначно почти всюду, но не всюду: точки из  $(r + 1)A_k^d$  имеют более одного прообраза. Склеиваются при этом в точности такие точки из  $B^{r+s-1}$ , для которых многочлен  $x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s$  имеет корень кратности не ниже  $k + 1$ .

Отсюда следует, что множество  $M = \varphi^{-1}((r+1)A_k^d)$  стягивается по себе на  $\infty$ . Действительно, ограничение накладывается только на коэффициенты  $B_i$ , поэтому стягивание шара  $\{A_1 \leq \dots \leq A_r\} \cup \infty$  продолжается до стягивания всего множества  $M$ .

Предположим, что гомотопическая эквивалентность точке множества  $(r+1)A_k^d$  уже известна. Тогда множество  $rA_k^d$  тоже гомотопически эквивалентно точке. Действительно,  $rA_k^d$  получено из шара некоторым отождествлением точек стягиваемого множества. Такое отождествление не меняет гомотопического типа, поэтому  $rA_k^d \sim \cdot$ .

Но при достаточно больших  $r$  стягиваемость доказана выше.

Тем самым лемма доказана.

**3.3. Вычисление когомологий.** По двойственности Александра достаточно вычислить когомологии пространства  $A_k^d$ . Рассмотрим, как и выше, отображение, сопоставляющее разложению  $(x+A)^{k+1}(x^s + B_1x^{s-1} + \dots + B_s)$  многочлен-произведение, как отображение  $\mathbb{R}^{s+1} \rightarrow A_k^d$ ,  $d = k + s + 1$ . После компактификации получается отображение, взаимно-однозначное всюду, кроме прообраза стягиваемого (по лемме) множества  $2A_k^d$ .

Прообраз этот (до компактификации) образован в точности парами  $(A, B)$ , где  $B \in A_k^s$ . Следовательно, образ имеет гомотопический тип сферы  $S^{s+1}$  со стянутой в точку надстройкой множества  $A_k^s$ :

$$A_k^d \sim S^{d-k}/E(A_k^s), \quad s = d - (k + 1).$$

Это позволяет вычислять гомотопический тип множеств  $A_k^d$ , последовательно увеличивая  $d$  на  $k + 1$ .

С другой стороны, в п. 3.1 доказан гомеоморфизм

$$A_k^d \simeq S^{d-k} \quad \text{при} \quad k < d \leq 2k + 1.$$

Следовательно, при  $2k + 1 < d \leq 3k + 2$  имеем гомотопические эквивалентности

$$A_k^d \sim S^{d-k}/ES^{d-(2k+1)} \sim S^{d-k}/S^{d-2k} \sim S^{d-k} \vee S^{d-2k+1}.$$

Вообще, если уже установлено, что

$$A_k^s \sim S^a \vee \dots \vee S^b$$

— букет сфер, то и при  $d = s + (k + 1)$  получается букет сфер:

$$\begin{aligned} A_{k*}^d \sim S^{d-k} / E(S^a \vee \dots \vee S^b) &\sim S^{d-k} / S^{a+1} \vee \dots \vee S^{b+1} \sim \\ &\sim S^{d-k} \vee S^{a+2} \vee \dots \vee S^{b+2}. \quad (**) \end{aligned}$$

В применении к гомологиям дополнений  $G_k^d = S^d \setminus (A_{k*}^d)$  увеличение  $d$  на  $k + 1$  приводит к следующему преобразованию набора размерностей:

$$(i, \dots, j) \mapsto (k - 1, i + (k - 1), \dots, j + (k - 1))$$

— формула (\*\*), и двойственность Александера,

$$i = s - a - 1, \quad d = s + (k + 1), \quad d - (a + 2) - 1 = s - a - 1 + k - 1.$$

Это, вместе с доставляемыми теоремой 3 начальными условиями, и доказывает теорему 4.

**Замечание.**  $\pi_2(G_2^4) = 0$  по теореме 3. Рассмотрим компактные поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , проектирование которых вдоль вертикальной оси  $z$  на плоскость  $x, y$  имеет особенностями только складки (не имеет сборок Уитни).

$A_3$ -кобордизм таких поверхностей — это отношение эквивалентности, при котором поверхности эквивалентны, если они переводятся друг в друга изотопиями без сборок и перестройками Морса без вертикальных образующих конических особых поверхностей. Из теоремы 3 вытекает

**Следствие.** *Всякая поверхность, проектируемая без сборок,  $A_3$ -кобордантна пустому множеству, если она пересекает любую вертикаль не более, чем в четырех точках (причем кобордизм можно осуществить в классе поверхностей, пересекающих любую вертикаль не более, чем в четырех точках).*

Для поверхностей, пересекающих вертикаль в шести точках, положение совершенно иное.

## Литература

- [1] Гивенталь А. Б. Многообразия многочленов, имеющих корень фиксированной кратности, и обобщенное уравнение Ньютона. *Функц. анализ и его прилож.*, 1982, 16(1), 13–18.



## Некоторые нерешенные задачи теории дифференциальных уравнений и математической физики

**1.** На какое наибольшее число частей делят сферу нули сферической функции, являющейся многочленом степени  $n$ ?

[Известная теорема Куранта дает (для двумерной сферы) оценку сверху величиной  $n^2/2 + O(n)$ , а примеры В. Н. Карпушкина — оценку снизу величиной  $n^2/4 + O(n)$ .]

Каково наибольшее число максимумов такой функции?

**2.** Найти число компонент пространства невырожденных однородных уравнений  $\dot{x} = P(x)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ , компоненты  $P$  — однородные многочлены второй степени, не имеющие, кроме начала координат, общих нулей.

[Геометрическая задача (при  $n = 4$ ) сводится к исследованию деформаций четверок квадрик (эллипсоидов) в проективном пространстве. Квадрикам разрешается вырождаться, даже исчезать, но запрещается всем вместе иметь общую точку. Спрашивается, сколько имеется негомотопирующихся друг в друга четверок (при  $n = 3$  — троек эллипсов; в этом случае ответ 2, эллипсы одной тройки не пересекаются, а для другой тройки каждый эллипс разделяет две точки пересечения двух других эллипсов).]

**3.** Сколько предельных циклов может родиться при малом полиномиальном возмущении интегрируемой полиномиальной системы степени  $n$ ?

[Вопрос сводится к исследованию числа нулей интеграла  $I(h) = \oint \frac{P dx + Q dy}{M}$  по овалам  $H = h$  системы  $\dot{x} = X(x, y)$ ,  $\dot{y} = Y(x, y)$  с интегрирующим множителем  $M$ , где  $X, Y, P, Q$  — многочлены степени  $n$ . Он не решен даже при  $n = 2$  и даже в случае  $M = 1$ , когда  $H$  — многочлен. В случае, когда  $M = 1$ ,  $H, P, Q$  — многочлены

фиксированной степени, для числа нулей имеется равномерная оценка сверху (А. Н. Варченко, А. Г. Хованский), но она неэффективна.]

4. Последовательность меандрических чисел  $1, 1, 2, 3, 8, 14, 42, 81, \dots$  определяется так. Пусть бесконечная река, текущая с юго-запада на восток, пересекает бесконечное шоссе, идущее прямо с запада на восток, под  $n$  мостами, занумерованными числами  $1, \dots, n$  с запада на восток вдоль шоссе. Порядок, в котором мосты встречаются на реке, определяет меандрическую перестановку чисел  $1, \dots, n$ . Меандрическое число  $M_n$  — это число меандрических перестановок из  $n$  элементов.

[Меандрические числа обладают замечательными свойствами, например,  $M_n$  нечетно, если и только если  $n$  — степень двойки (С. К. Ландо).] Найти асимптотику  $M_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . [Известно, что  $c 4^n < M_n < C 16^n$ ,  $c, C = \text{const.}$ ]

5. Верно ли, что минимум хаусдорфовых размерностей минимальных аттракторов уравнения Навье–Стокса (скажем, на двумерном торе) растет с возрастанием числа Рейнольдса?

[Не доказано даже существование хотя бы каких-нибудь минимальных аттракторов растущей с числом Рейнольдса размерности, известны лишь оценки размерности всех аттракторов сверху степенью числа Рейнольдса (результаты Ю. С. Ильяшенко, М. И. Вишика и А. В. Бабина).]

## $A$ -градуированные алгебры и непрерывные дроби

Простейший пример  $A$ -градуированной алгебры — это алгебра многочленов от одной переменной (или усеченных многочленов) с естественной градуировкой  $\deg x^a = a$  (для усеченных многочленов  $a \leq n$ ,  $x^{n+1} = 0$ ).

**Определение.**  $A$ -градуированной алгеброй называется градуированная алгебра, изоморфная, как градуированное линейное пространство, градуированному линейному пространству алгебры многочленов (или усеченных многочленов) от одной переменной. Иными словами, в каждой степени  $a \leq n$  ( $< \infty$ ) существует ровно одна аддитивная образующая. Следовательно, ряд Пуанкаре  $A$ -градуированной алгебры равен  $1 + t + t^2 + \dots + t^n$ ,  $n \leq \infty$ .  $A$ -градуированные алгебры с двумя мультипликативными образующими определяются соотношениями  $a^u = 0$ ,  $\deg b = u$ ,  $b^k a^r = 0$ ,  $r < u$ .

### 1. Классификация (ассоциативных, коммутативных)

#### $A$ -градуированных алгебр над $\mathbb{C}$ с тремя мультипликативными образующими

Существует только конечное число  $N(n)$  таких алгебр  $\mathbb{C}$ -размерности  $n$ . Последовательность  $N(n)$  возрастает. Например, существует ровно 5  $A$ -градуированных алгебр произвольной размерности  $n + 1$ ,  $n \geq 6$ , с тремя мультипликативными образующими степеней  $(1, 2, 3)$ , а также ровно 5 бесконечномерных  $A$ -градуированных алгебр с такими образующими.

Обозначим через  $N_{u,v}(n)$  число различных  $A$ -градуированных алгебр размерности  $n + 1$  с тремя мультипликативными образующими степеней  $1, u, v$ .

Стабилизированные числа  $N_{u,v}(\infty)$  приведены в следующей таблице (существует ровно  $N_{u,v}(\infty)$  бесконечномерных  $A$ -градуированных алгебр с образующими таких степеней):

$u \backslash v$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
3		7	7	1	7	7	1	7	7	1	7	7	1	7
4			9	5	9	1	9	5	9	1	9	5	9	1
5				11	9	9	11	1	11	9	9	11	1	11
6					13	7	5	7	13	1	13	7	5	7
7						15	11	11	11	11	15	1	15	11

Я приведу формулу для этих чисел и для чисел  $N_{u,v}(n)$   $(n+1)$ -мерных  $A$ -градуированных алгебр с образующими степеней  $1 < u < v$ .

**Теорема.** Пусть

$$\frac{v}{u} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

— разложение  $\frac{v}{u}$  в непрерывную дробь. Тогда число  $N_{u,v}(\infty)$  бесконечномерных (или достаточно большой размерности)  $A$ -градуированных алгебр с тремя мультипликативными образующими степеней 1,  $u$ ,  $v$  равно

$$N_{u,v}(\infty) = 2(a_1 + a_2 + \dots) + 1.$$

**Пример.**  $\frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$ . Следовательно,

$$N_{5,8}(\infty) = 2(1 + 1 + 2) + 1 = 9.$$





$u$	$v$	$N_{u,v}(\infty)$	$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	3	5		1	3	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
3	4	7			1	1	3	3	3	5	5	5	5	5	7	7	7	7	7
2	4	1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	5	9				1	1	1	3	3	3	3	5	5	5	5	7	7	7
3	5	7				1	3	3	3	3	5	5	5	5	5	7	7	7	7
2	5	5				1	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	6	11					1	1	1	1	3	3	3	3	3	5	5	5	5
4	6	5					1	1	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	5
3	6	1					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	6	1					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	7	13						1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	5
5	7	9						1	1	1	3	3	3	3	3	5	5	5	5
4	7	9						1	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5
3	7	7						1	1	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5
2	7	5						1	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5
7	8	15							1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3
6	8	7							1	1	1	1	3	3	3	3	3	5	5
5	8	9							1	1	3	3	3	3	3	3	5	5	5
4	8	1							1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	8	7							1	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5
2	8	1							1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\Sigma(n)$				1	5	8	20	25	39	52									

Стабилизация наступает при  $n \geq$  наименьшему общему кратному  $u$  и  $v$ .

**Замечание.** Все предыдущие и последующие результаты справедливы как над  $\mathbb{C}$ , так и над  $\mathbb{R}$ . Для простоты я здесь классифицирую  $A$ -градуированные  $\mathbb{C}$ -алгебры с точностью до градуированных изоморфизмов алгебр. По-видимому, классификация с точностью до  $\mathbb{C}$ -изоморфизмов алгебр приводит к такому же ответу. Другими словами,  $A$ -градуировка данной алгебры по существу единственна ( $A$ -градуировка определяется структурой  $\mathbb{C}$ -алгебры с точностью до  $\mathbb{C}$ -изоморфизма алгебр). Но я проверил это только для малых  $n$ .

## 2. Стандартные мономы

Рассмотрим  $A$ -градуированную конечнопорожденную  $\mathbb{C}$ -алгебру  $\mathbb{C}$ -размерности  $1 + n$ . Существует ненулевой элемент  $a$  степени 1 (если  $n > 0$ ). Последовательность  $a^2, \dots, a^{u-1} \neq 0$  определяет аддитивный базис вплоть до  $\deg = u$ . Если  $a^u = 0$  и  $n \geq u$ , то существует элемент  $b \neq 0$  такой, что  $\deg b = u$ . Выберем  $b$  как вторую мультипликативную образующую и будем рассматривать ненулевые слова вида  $a^p b^q$ , как это описано ниже в более общей ситуации.

Предположим, что мы уже выбрали мультипликативные однородные образующие  $a, b, \dots, y$  такие, что существуют ненулевые слова из  $a, b, \dots, x$  всех степеней от 1 до  $\deg y$ .

Рассмотрим множество степеней слов из  $a, b, \dots, y$ . Пусть  $v$  — первый пропуск в множестве целых чисел  $1, \dots, \deg y, \dots$ . Если  $v \leq n$ , то существует ненулевой элемент  $z$  степени  $v$ , и мы его выбираем в качестве следующей мультипликативной образующей.

Продолжая этот процесс, мы получаем каноническую конечную последовательность мультипликативных однородных образующих  $a, b, \dots$  степеней  $1, u, v, \dots$ . Эти образующие определены однозначно с точностью до умножения на ненулевые числа. Множество их степеней не зависит от их выбора и является инвариантом  $A$ -градуированной алгебры (возможно, также  $\mathbb{C}$ -алгебры,  $\mathbb{C}$ -изоморфной нашей  $A$ -градуированной алгебре).

Одновременно мы получили по крайней мере один аддитивный однородный базис, образованный некоторыми мономами из образующих:  $1, a, a^2, \dots, a^{u-1}, b, \dots$

В случае двух образующих этими мономами будут  $a^r b^k$ , где  $r < u$ . Если все они отличны от нуля, то алгебра бесконечномерна и однозначно определена числом  $u = \deg b$ . Если  $a^r b^k = 0$  — первый нуль в последовательности  $1, a, \dots, a^{u-1}, b, ba, \dots, ba^{u-1}, b^2, b^2 a, \dots$ , то размерность алгебры равна  $1 + n = uk + r$ ,  $r < u$ , и алгебра  $A$  однозначно определяется двумя числами  $\deg b = u$  и  $n + 1 = \dim A$ .

Поэтому классификация  $A$ -градуированных алгебр с двумя мультипликативными образующими тривиальна.

## 3. Что происходит при трех образующих?

Начнем с примера, в котором стандартные мультипликативные образующие  $a, b, c$  имеют степени 1, 2, 3.

Так же, как и в §2, имеем соотношения  $a^2 = 0$ ,  $ab = 0$ . Рассмотрим пространство степени  $\deg = 4$ . У нас есть два монома  $ac$  и  $b^2$  степени 4. Будем называть их критическими мономами. Следовательно, имеют место три возможности:

(i)  $ac = 0$ .

В этом случае  $b^2 \neq 0$ , и мы можем выбрать его в качестве базисного вектора степени 4.

(ii)  $ac \neq 0 \neq b^2$ .

В этом случае  $ac = \lambda b^2$ ,  $\lambda \neq 0$ . Можно нормализовать с таким образом, что  $ac = b^2$ . Мы выбираем  $ac$  в качестве базисного вектора степени 4 (и будем ниже заменять  $b^2$  на  $ac$  всюду, где только возможно).

(iii)  $b^2 = 0$ .

В этом случае  $ac \neq 0$ , и мы выбираем его в качестве базисного вектора степени 4.

В последнем случае, (iii), ненулевые мономы образуют цепь  $(1, a, b)$ ,  $(c, ac, bc)$ ,  $(c^2, ac^2, bc^2)$ , ..., содержащую в точности один моном в каждой степени. Следовательно, алгебра однозначно определяется своей размерностью  $1 + n \leq \infty$ .

То же самое остается верным и в случае (ii), поскольку все другие мономы канонически равны этим (к примеру,  $b^2 = ac$ ,  $b^3 = 0$ ,  $abc = 0$ , ...).

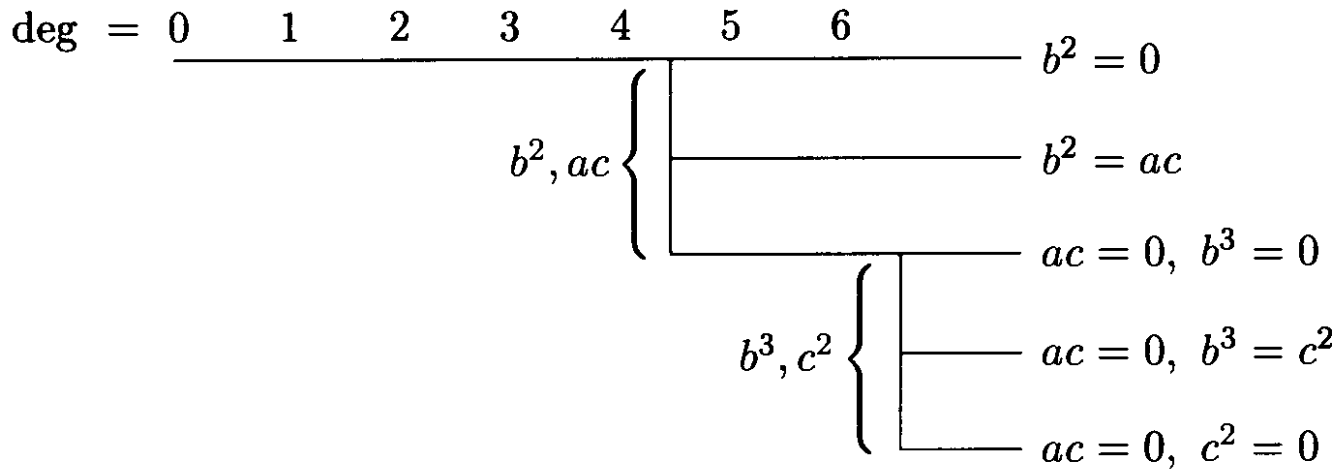
В случае (i) рассмотрим пространство степени  $\deg = 5$ . Единственный нетривиальный моном — это  $bc$ , следовательно, он ненулевой (если  $1 + n > 5$ ). Выберем его в качестве базисного вектора и рассмотрим пространство степени  $\deg = 6$ . Находим в точности два критических монома степени 6 —  $b^3$  и  $c^2$ .

Существуют три возможности: 1)  $b^3 = 0$ ; 2)  $b^3 \neq 0 \neq c^2$ ; 3)  $c^2 = 0$ . Алгебры этих трех типов не изоморфны.

В случаях 1) и 3) получаем единственные цепи мономов, образующие канонические базисы  $(1, a, b, c, b^2, bc)$ ,  $(c^2, c^2a, c^2b, c^3, c^2b^2, c^3b)$ , ... и  $(1, a, b, c, b^2, bc)$ ,  $(b^3, b^3a, b^4, b^3c, b^5, b^4c)$ , ...

В случае 2) имеем  $b^3 = \lambda c^2$  с  $\lambda \neq 0$ . Нормализуем  $b$  так, чтобы выполнялось условие  $\lambda = 1$ . Подставляя  $c^2$  вместо  $b^3$ , приведем все ненулевые мономы от переменных  $(a, b, c)$  к виду первого канонического базиса, указанного выше.

Следовательно, во всех трех случаях алгебра однозначно определяется своей размерностью  $1 + n$ . Так мы получаем полную классификацию  $A$ -градуированных алгебр с мультипликативными образующими степеней 1, 2, 3:



(во всех случаях  $a^2 = ab = 0$ ). Каждой вертикальной линии соответствуют два критических монома (такая линия представляет вершину нашего дерева).

Для других значений  $u$  и  $v$  классификация  $A$ -алгебр с образующими степеней  $(1, u, v)$  полностью аналогична. Всегда получается дерево с тремя возможностями в некоторых вершинах (степени 4 и 6 в предыдущем примере).

Каждой такой вершине соответствует два критических монома —  $(b^k, c^l a^r)$  или  $(b^k a^r, c^l)$ ,  $0 < r < u$ .

Тремя возможностями являются:

- 1)  $b^k = 0$ , 2)  $b^k \neq 0 \neq c^l a^r$ , 3)  $c^l a^r = 0$ ,

или, соответственно,

- 1)  $c^l = 0$ , 2)  $c^l \neq 0 \neq b^k a^r$ , 3)  $b^k a^r = 0$ .

В случае 1 ненулевые мономы образуют стандартную цепь, и алгебра однозначно определяется своей размерностью.

Случай 2 сводятся к  $b^k = c^l a^r$  (соответственно  $c^l = b^k a^r$ ). Все ненулевые мономы равны мономам стандартной цепи, соответствующей случаю 1.

В случаях 3 надо продолжить такие же рассуждения, увеличивая размерность.

Так как мы используем нормализацию только однажды для каждой конкретной ветви нашего дерева, то можно нормализовать все коэффициенты в наших соотношениях.

#### 4. Описание критических мономов в терминах непрерывных дробей

Рассмотрим теперь алгоритм «вытягивания носов», определяющий разложение  $v/u$  в непрерывную дробь (мы будем изучать  $A$ -градуированные алгебры с мультипликативными образующими степеней  $1, u, v$ ). На рис. 1 представлен случай  $u = 5, v = 8$ . Целые точки на плоскости  $(k, l)$  представляют мономы  $c^k b^l$ .

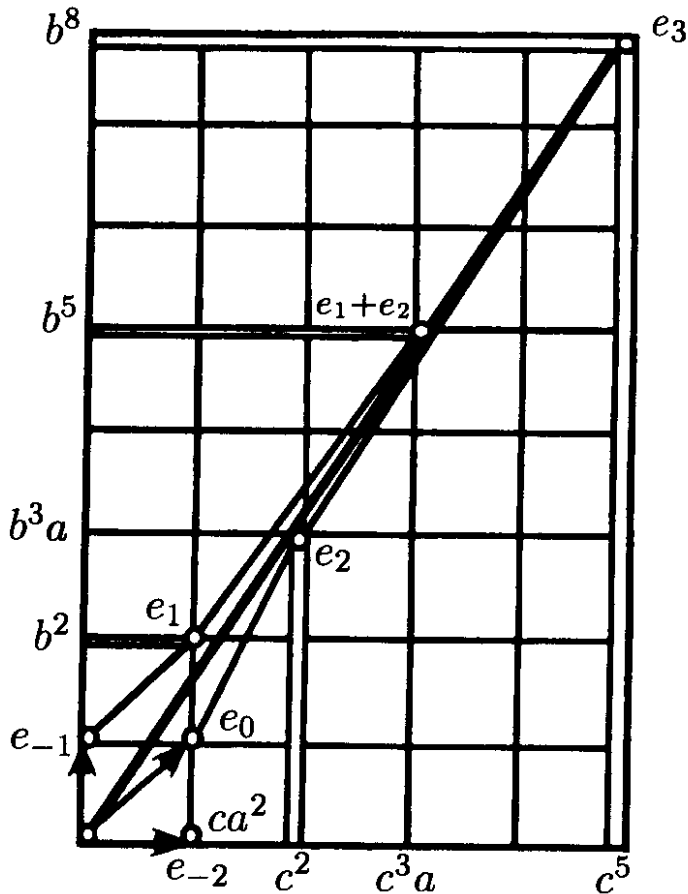


Рис. 1

Рассмотрим прямую, соединяющую  $(0, 0)$  с  $(u, v)$ , и два базисных вектора  $e_{-2} = (1, 0)$  и  $e_{-1} = (0, 1)$ . Они лежат по разные стороны от прямой, а площадь определяемого ими параллелограмма равна 1.

Алгоритм работает следующим образом: прибавим вектор  $e_{k+1}$  к точке  $e_k$  столько раз, сколько будет возможно без пересечения с прямой. Результат этого суммирования есть  $e_{k+2}$ . Ясно, что все точки  $e_{\text{четное}}$  ( $e_{\text{нечетное}}$ ) лежат ниже (выше) прямой. Эти точки являются вершинами выпуклой оболочки всех целых точек с неотрицательными координатами, отличными от  $(0, 0)$  и лежащими ниже (выше) нашей прямой. Алгоритм кончает работу, как только очередная точка попадает на прямую.

По определению,  $e_{k+2} = e_k + a_{k+2}e_{k+1}$  ( $e_3 = e_1 + 2e_2$ ), где числа  $a_k$  образуют непрерывную дробь

$$\frac{v}{u} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}, \quad \frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Последовательные критические мономы соответствуют последовательным шагам алгоритма. А именно, рассмотрим произвольную целую

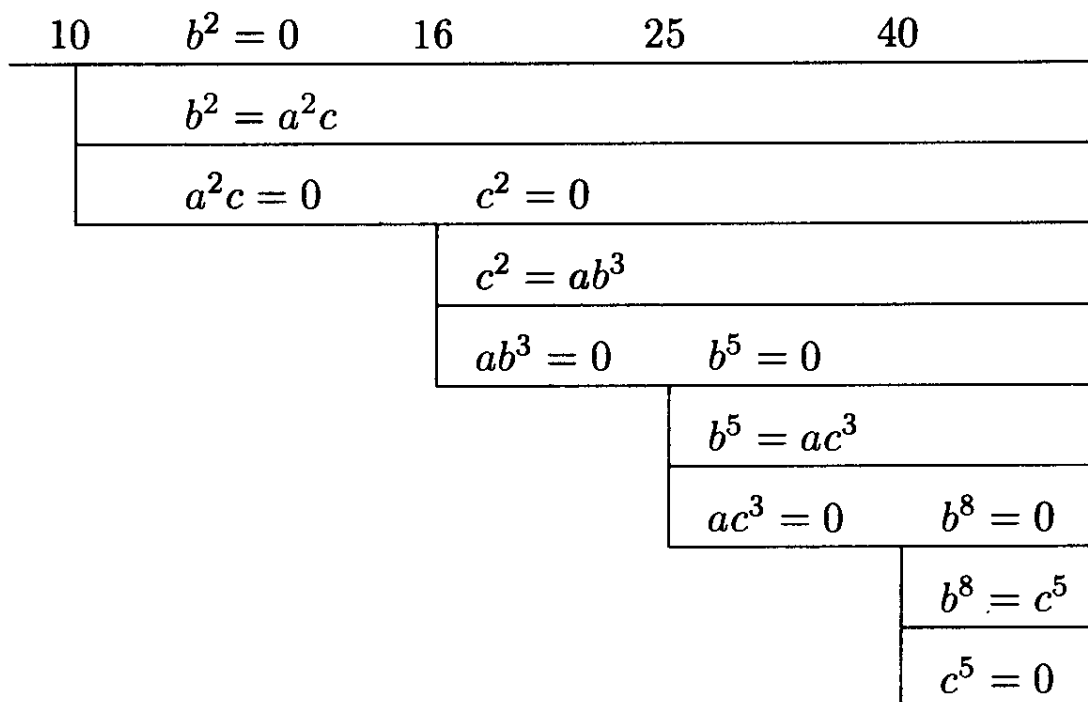
точку  $e_k + se_{k+1}$  (где  $0 < s < a_{k+2}$ ). Так задаются все целые точки на границах выпуклых оболочек, определенных выше, лежащие между  $e_{-1}$  и  $e_{\text{последним}}$  и между  $e_0$  и  $e_{\text{последним}}$  (исключая начальные точки  $e_{-1}$  и  $e_0$ ).

Двумя критическими мономами, ассоциированными с такой точкой  $(p, q)$ , являются  $c^p, a^r b^q$  для точек ниже прямой и  $b^q, a^r c^p$  для точек выше прямой. Здесь  $r$  определяется условием равенства весов:  $vr = uq + r$  в первом случае и  $uq = vp + r$  — во втором.

**Пример.** Для  $u = 5, v = 8$  (рис. 1) последовательные точки и критические пары мономов приведены в таблице:

	$e_1$	$e_2$	$e_1 + e_2$	$e_3$
$p$	1	2	3	5
$q$	2	3	5	8
критические мономы	$b^2$ $a^2c$	$c^2$ $ab^3$	$b^5$ $ac^3$	$b^8$ $c^5$
deg	10	16	25	40

Следовательно, дерево  $A$ -алгебр, соответствующих весам  $(5, 8)$ , имеет вид



$N_{5,8}(n \geq 40) = 9.$

## 5. Заключительные замечания

Я надеюсь, что задача классификации  $A$ -градуированных алгебр с большим числом образующих приведет к алгебраически естественному обобщению непрерывных дробей.

Эти исследования мотивированы вычислением когомологий пространства вещественных многочленов  $x^{n+1} + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ , не имеющих корней кратности выше  $k+1$ . Полином Пуанкаре такого пространства всегда имеет вид  $1 + t^k + t^{2k} + \dots$  (одна аддитивная образующая в каждой не слишком большой размерности, делящейся на  $k$ ).

Описанные здесь исследования соответствуют четным  $k$ . В случае нечетных  $k$  также возникают интересные задачи, такие как классификация антикоммутативных  $A$ -градуированных алгебр; это должно вести к «супернепрерывным дробям».

Однако, все эти алгебраические игры не используются в первоначальной топологической задаче: структура кольца когомологий, вычисленная В. А. Васильевым, определяется соотношениями  $e_p e_q = C_{p+q}^q e_{p+q}$  (в четном случае), а сами пространства многочленов слабо гомотопически эквивалентны пространствам петель сфер (увеличивающейся с ростом степени многочленов  $n$  размерности). Пространство всех функций (не только многочленов), не имеющих корней кратности выше  $m$ , (по крайней мере, слабо) гомотопически эквивалентно пространству петель сферы  $S^m$ .



## Введение к книге «Особенности каустик и волновых фронтов»

**Из предисловия:** Каустики и волновые фронты систем лучей изучаются с давних пор. Но только совсем недавно было установлено, что особенностями систем лучей управляет теория групп евклидовых отражений и групп Вейля простых алгебр Ли. Это неожиданное и в чем-то загадочное соотношение между геометрической оптикой, вариационным исчислением и теорией оптимального управления, с одной стороны, и теорией инвариантов групп Ли и алгебр Ли, алгебраической топологией и дифференциальной геометрией, с другой стороны, привело к значительному прогрессу в развитии теории распространения волн.

Начнем с примера: рассмотрим расстояние от точки евклидовой плоскости до данной кривой; например, от точки, лежащей во внутренней области эллипса, до границы этого эллипса (рис. 1). Соответствующие лучи (экстремали этой вариационной задачи) суть нормали к эллипсу. Минимальное значение функционала (расстояния) удовлетворяет как функция начальной точки уравнению Гамильтона–Якоби  $(\nabla u)^2 = 1$  (в точках гладкости). Однако эта функция имеет особенности (на отрезке, соединяющем фокальные точки эллипса). Система лучей также имеет особенности. Они лежат на астроиде, являющейся огибающей системы нормалей к эллипсу. Огибающая системы экстремалей называется *каустикой* системы. Каустика нашей системы имеет четыре точки возврата. Эти особенности устойчивы: любая кривая, достаточно близкая к эллипсу, имеет каустик, близкую к астроиде и имеющую четыре полukuбические точки возврата.

Линии уровня решения уравнения Гамильтона–Якоби называются *фронтами*. В нашем примере фронты — это эквидистанты эллипса. Эквидистанты, близкие к эллипсу, — гладкие кривые. Однако эквидистанты, достаточно удаленные от эллипса, имеют особенности. На рис. 2 изображены четыре *полукубические точки возврата* на экви-

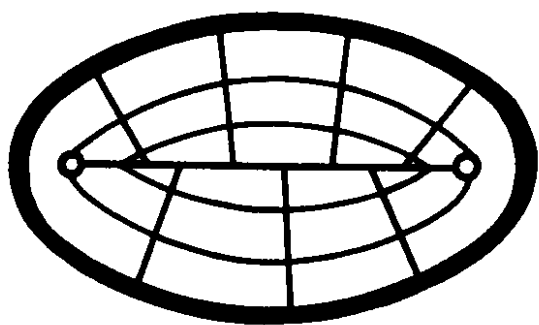


Рис. 1. Лучи и фронты возмущения, распространяющегося внутри эллипса

дистанте эллипса. Эти особенности устойчивы: эквидистанты любой кривой, достаточно близкой к эллипсу, имеют похожие особенности.

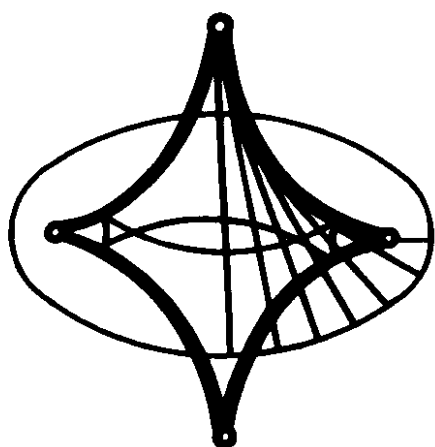


Рис. 2. Каустики как огибающие систем лучей и как множество особых точек эквидистант

Конечно, линия уровня кратчайшего расстояния до эллипса образует только часть эквидистанты. Однако большинство свойств особенностей систем лучей, каустик и фронтов становится более наглядным, если мы рассмотрим не только минимумы, но и остальные экстремальные точки функционалов. В нашем примере мы начали с изучения эквидистант и затем выделили нужные части.

Например, рассмотрим расстояние до кривой как функцию начальной точки. Ее удобно рассматривать как многозначную функцию, принимая во внимание не только минимальное расстояние, но и длины других нормалей к этой кривой.

График многозначной функции расстояния (от точки из внутренней части эллипса до границы эллипса) имеет замечательную особенность в фокальной точке эллипса. Ее график локально диффеоморфен поверхности, называемой *ласточкин хвост* (рис. 3). Ласточкин хвост есть поверхность в трехмерном пространстве многочленов

$$\mathbb{R}^3 = \{x^4 + ax^2 + bx + c\},$$

образованная полиномами, имеющими (вещественный) кратный корень. Эта особенность графика функции расстояния устойчива: после малого возмущения эллипса особенность не изменится (с точностью до диффеоморфизма пространства, в котором лежит график).

Рис. 3. Поверхность ласточкина хвоста в пространстве многочленов

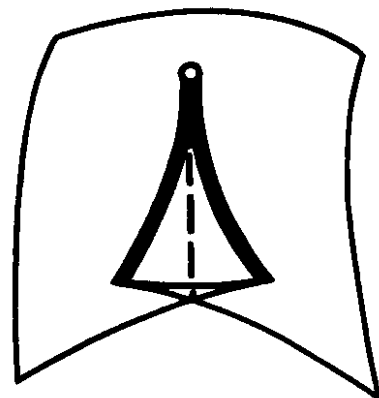


График функции времени (для движения с единичной скоростью от данной начальной точки области до границы этой области) лежит в пространстве-времени и пересекает изохроны пространства-времени вдоль эквидистант. Следовательно, перестройка эквидистант эллипса (возникающая в тот момент, когда эквидистанта проходит через фокальную точку) диффеоморфна перестройке сечений ласточкина хвоста поверхностями уровня функции времени в трехмерном пространстве-времени.

Типичная функция  $f(a, b, c)$  в этом трехмерном пространстве, содержащем ласточкин хвост, приводится к нормальной форме  $f = \pm a + \text{const}$  сохраняющим ласточкин хвост локальным диффеоморфизмом (в окрестности точки  $a = b = c = 0$ ; условие типичности:  $\partial f / \partial a|_0 \neq 0$ ). Следовательно, перестройки эквидистант такие же, как и перестройки плоских сечений ласточкина хвоста  $a = \text{const}$  (рис. 4). Изучение этих сечений — гораздо более простая задача по сравнению с первоначальной — изучением типичных перестроек фронтов. Для того чтобы изучать точки минимума, достаточно удалить часть ласточкина хвоста, а именно, пирамиду, ребра которой состоят из полукубических точек возврата и линии самопересечения ласточкина хвоста.

Принципы применения теории особенностей к изучению систем лучей, волновых фронтов, каустик и их перестроек в общих вариационных задачах те же, что мы видели в предыдущем примере.

1. Существует список стандартных особенностей (таких как полукубическая точка возврата и ласточкин хвост в предыдущем примере).

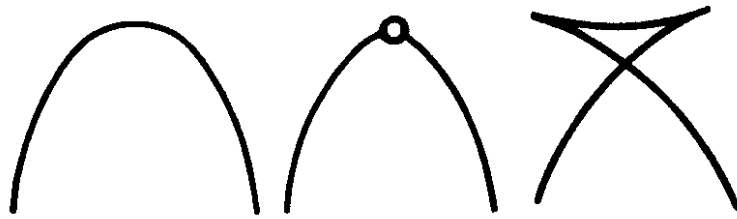


Рис. 4. Перестройка сечений ласточкина хвоста

Эти особенности (довольно загадочным образом) связаны с геометрией групп, порожденных отражениями. Их можно изучать, используя соответствующие алгебраические средства (группы Ли, теорию инвариантов, системы корней, диаграммы Дынкина и т.д.).

2. Доказывается, что стандартные особенности устойчивы, и что в общем случае появляются только они. Например, каустика окружности состоит только из одной точки — ее центра. Такая особенность не типична, но если немного деформировать окружность, эта вырожденная каустика в центре трансформируется в небольшую кривую, чьи особенности становятся типичными: полукубические точки возврата и точки самопересечения.

3. Таким образом, изучение особенностей и перестроек таких объектов, как волновые фронты, каустики, системы лучей и т.д., связанных с типичными вариационными задачами, сводится к изучению стандартных особенностей соответствующих объектов. Например, изучение перестроек движущихся волновых фронтов сводится к изучению сечений гиперповерхностями (обобщенных) ласточкиных хвостов.

В этой книге собраны главные результаты, полученные при реализации описанной выше программы, начиная с 1972 года, когда была открыта связь между особенностями систем лучей, их каустик, волновых фронтов, преобразований Лежандра, групп, порожденных отражениями, и групп Вейля. Группы  $A$ ,  $D$ ,  $E$  (имеющие только простые ребра в диаграммах Дынкина) появились в первую очередь. Впоследствии, в 1978 году, была открыта взаимосвязь между группами с двойными ребрами ( $B$ ,  $C$ ,  $F$ ) и особенностями на границе (например, особенностями функции расстояния до многообразия с краем).

Немедленно начался поиск других групп ( $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$ ;  $I_2(p)$ ), порожденных отражениями. В течение осени 1982 г. совместные усилия О. В. Ляшко, А. Б. Гивенталя, О. П. Щербака и автора привели к истолкованию группы симметрий икосаэдра  $H_3$ ; она контролирует особенно-

сти систем лучей и фронтов в вариационной задаче о скорейшем обходе плоского препятствия, ограниченного типичной кривой с точкой перегиба. Другими словами, эта группа управляет семейством эвольвент плоской кривой, имеющей точку перегиба (подобно кубической параболе), рис. 5.

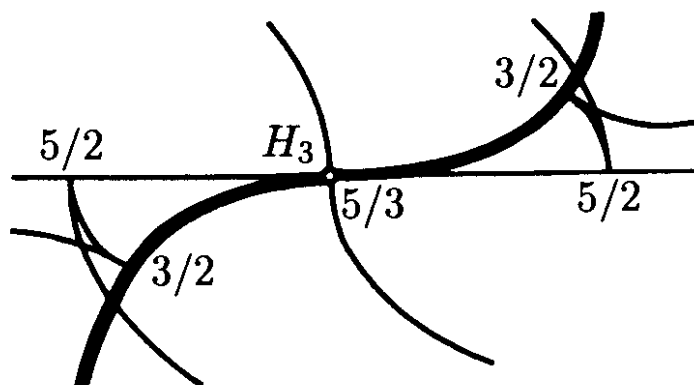


Рис. 5. Система эвольвент в точке перегиба кривой

О. П. Щербак нашел в 1984 г. наиболее сложный «гиперикосаздр»  $H_4$ , связанный с особенностью в задаче об обходе препятствия в трехмерном пространстве.

Техника, на которую опирается изучение особенностей систем лучей, каустик, волновых фронтов и других объектов, связанных с геометрической оптикой и вариационным исчислением, идет из симплектической и контактной геометрии. Симплектический анализ работы О. П. Щербака привел А. Б. Гивенталя к открытию задачи классификации волновых фронтов, решения которой взаимно однозначно соответствуют конечным группам Кокстера, порожденным евклидовыми отражениями.

В то время как большинство результатов, обсуждаемых в этой книге, были получены в течение последних двадцати лет, сам предмет является классическим и идет от Архимеда, Гюйгенса, Барроу, ... ; достаточно странно, что классики не заметили этих результатов. Например, локальная классификация проекций типичной гладкой поверхности из точек обычного трехмерного пространства была открыта только в 1981 г. (О. А. Платонова, О. П. Щербак). Существует конечный список неэквивалентных ростков таких проекций; он состоит из 14 проекций. Это в точности число различных форм окрестности точки на типичной поверхности, видимых из различных точек пространства.

Одно из возможных объяснений такого позднего открытия этих фундаментальных классификационных теорем состоит в том, что

доказательства трудны и опираются на неожиданные соотношения между многими областями математики. Для того чтобы понять неожиданные сокращения многих членов в утомительных и длинных вычислениях, странные совпадения бифуркационных диаграмм в на первый взгляд не связанных проблемах и мистическое появление правильных многогранников в задачах прикладной математики, необходимо заменить прямые вычисления дифференциальной геометрии простым и общим подходом симплектической и контактной геометрии.

Общий принцип здесь таков: нужно поднять геометрические объекты из «конфигурационного» пространства  $V$  в «фазовое» пространство  $T^*V$ , в котором особенности или исчезают, или упрощаются (в теории дифференциальных уравнений в частных производных и в квантовой теории такой подход называется «микрлокальным»). Это поднятие превращает простые факты дифференциальной геометрии в общие теоремы симплектической и контактной геометрии, чья область применения гораздо шире (например, можно использовать дифференциально-геометрическую интуицию, рассматривая поверхности в евклидовом пространстве, для того чтобы получить результаты, касающиеся общих вариационных задач с односторонними ограничениями).

Поэтому я начну с краткого изложения хорошо известных элементарных фактов симплектической и контактной геометрии. Я надеюсь, что читатель сможет понять по крайней мере формулировки необходимых ему результатов, даже если он не овладеет некоторыми обоснованиями.

## Динамика сложности пересечений

Топологическая сложность пересечения подмногообразия, перемещающегося под действием динамической системы, с фиксированным подмногообразием фазового пространства может возрастать со временем. Мы доказываем, что числа Морса и Бетти трансверсальных пересечений «в общем случае» растут не быстрее, чем экспоненциально, в то время как для некоторых специальных бесконечно гладких систем топологическая сложность пересечений может преодолеть любую наперед заданную функцию времени (для растущей подпоследовательности целочисленных моментов времени).

### Введение

Рассмотрим диффеоморфизм компактного многообразия на себя и два подмногообразия. Подействуем на первое подмногообразие нашим диффеоморфизмом  $N$  раз и рассмотрим пересечение образа со вторым подмногообразием. Это пересечение  $Z(N)$  в общем случае является гладким многообразием. Мы оценим сверху его топологическую сложность экспоненциальной функцией от  $N$  (при условии, что второе подмногообразие — общего положения).

В частности, я доказываю, что «в общем случае» сумма  $|Z|$  чисел Бетти пересечения удовлетворяет неравенству

$$|Z(N)| \leq C e^{\lambda N} \quad \text{при всех } N \geq 0, \quad (1)$$

где  $C$  и  $\lambda$  не зависят от  $N$  и  $Z(N) = (A^N X) \cap Y$ . Здесь  $A : M^m \rightarrow M^m$  — рассматриваемый диффеоморфизм, а  $X^k$  и  $Y^l$  — первое и второе подмногообразия.

Слова «в общем случае» означают «для почти всех значений параметра  $t$  в любом достаточно богатом семействе  $\{Y_t\}$ ».

Что означает выражение «достаточно богатое», объясняется ниже (см. определение «очень богатых» семейств в разделе 2). Достаточно богатые семейства деформаций подмногообразия  $Y$  образуют открытое

всюду плотное множество в пространстве всех семейств, если только размерность пространства параметров превышает некоторое значение, зависящее только от  $m$ .

**Замечание 1.** Если  $M$ ,  $A$ ,  $X$  и  $Y$  алгебраические, экспоненциальная оценка сверху чисел Бетти пересечений  $Z(N)$  может быть получена при помощи того же рассуждения, которое Артин и Мазур [1] использовали для доказательства экспоненциальной оценки числа периодических точек (см. [2]).

**Замечание 2.** В классе  $C^\infty$  существуют примеры, когда все пересечения трансверсальны, но  $|Z(N)|$  растет быстрее *любой* наперед заданной функции от  $N$  (по крайней мере для растущей подпоследовательности  $N_i$  значений  $N$ ). В описанном в [2] примере

$$\begin{aligned} M &= \mathbb{T}^2 = \{x, y \bmod 1\}, \\ X &= Y = S^1 (y = 0), \\ A(x, y) &= (x, y + f(x)), \end{aligned}$$

где  $f$  — функция класса  $C^\infty$ . Аналитические примеры сверхэкспоненциального роста неизвестны.

**Замечание 3.** Представляется правдоподобным, что экспоненциальная оценка сверху имеет место в общем случае для любого разумного дифференциально-топологического инварианта многообразия  $Z(N)$  (например, для суммы чисел Бетти, для числа образующих фундаментальной группы и т.д.). В [2] экспоненциальная оценка была получена для

$$|Z| = (k + l - m)\text{-мерный объем подмногообразия } Z.$$

В настоящей статье такая оценка доказана для величины  $|Z|$ , равной  $(k + l - m)$ -мерному объему множества касательных плоскостей к  $Z$  в пространстве расслоения на многообразия Грассмана  $(k + l - m)$ -мерных плоскостей, касательных к  $M$ . Другие аспекты связи между динамическими системами и ростом объемов рассматривал Йомдин [6].

**Замечание 4.** Создается впечатление, что экспоненциальные оценки сверху всегда имеют место для трансверсальных пересечений в случае *аналитических* четверок  $(M, A, X, Y)$ , но это не доказано даже для заведомо более легких локальных задач.



Рассмотрим, например, два аналитических подмногообразия  $X^k$  и  $Y^l$  дополнительных размерностей ( $k + l = m$ ), которые пересекаются в неподвижной точке диффеоморфизма  $A$ . Тогда кратность (комплексно изолированного) пересечения  $A^N X$  и  $Y$  в этой точке должна оцениваться сверху экспонентой от  $N$ .

Насколько я знаю, даже оценки кратностей соответствующих ориентированных пересечений в этом случае неизвестны. Единственным исключением является оценка Шуба–Сулливана [3] индексов Пуанкаре неподвижной точки. Индексы Пуанкаре — это кратности ориентированных пересечений диагонали произведения  $M \times M$  с ее образами при итерациях отображения  $\text{Id} \times A$ .

**Замечание 5.** Аналогичные результаты, возможно, справедливы для динамических систем с непрерывным временем (потоков). В этом случае в качестве  $Z(N)$  следует брать соответствующее многообразие хорд, т.е. множество начальных точек на  $X$ , чьи орбиты пересекают  $Y$  в момент времени  $\tau \leq N$ .

**Замечание 6.** Указанные результаты должны также переноситься на гладкие отображения  $A : M \rightarrow M$ , не имеющие обратного, но в этой статье  $A$  считается диффеоморфизмом.

**Замечание 7.** Возможно, аналогичные результаты верны для достаточно богатых деформаций  $(M_t, A_t, X_t, Y_t)$  четверок  $(M, A, X, Y)$ .

**Замечание 8.** Рассмотрим гомоклиническую седловую неподвижную точку  $O$  отображения  $A$  плоскости в себя. Зафиксируем некоторую окрестность этой неподвижной точки и рассмотрим точку  $a$  пересечения притягивающей и отталкивающей сепаратрис седла. Образы точки  $a$  при итерациях  $A^N$  отображения  $A$  стремятся к  $O$  при  $N \rightarrow \pm \infty$ . Определим *порядок* точки  $a$  как число ее образов, лежащих вне зафиксированной окрестности седла  $O$ . По всей видимости, число орбит порядка  $N$  возрастает с ростом  $N$  не быстрее, чем экспоненциально, если только  $A$  — отображение общего положения (в описанном выше смысле), ср. [5].

Настоящая работа была написана в IMPA (Институт чистой и прикладной математики в Рио-де-Жанейро). Автор благодарен IMPA за гостеприимство и особенно Ж. Палису за приглашение. Палис также предложил мне написать эту статью.

## 1. Экспоненциальная оценка сверху для объема

Рассмотрим  $p$ -параметрическое семейство деформаций подмногообразия  $Y$ . Такое семейство есть отображение  $i : Y \times T \rightarrow M$ , где база  $T$  семейства есть  $p$ -мерное многообразие с отмеченной точкой  $O$ , а ограничение отображения  $i$  на  $Y \times O$  является тождественным преобразованием. Обозначим подмногообразия  $i(Y \times t)$  через  $Y_t$ , а пересечения  $(A^N X^k) \cap Y_t$  — через  $Z_t(N)$ .

**Определение.** Семейство называется *богатым*, если образом дифференциала отображения  $i$  в каждой точке подмногообразия  $Y \times O$  является все касательное пространство к  $M$  в этой точке.

Богатые семейства существуют и даже образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех семейств, если только размерность  $p$  пространства параметров достаточно велика (а именно, если  $p \geq m$ ).

Действительно, согласно формуле «корамерность = произведение корангов» (см., например, [4]) для семейства общего положения при  $p \geq m$  мы находим, что

$$\begin{aligned} \text{codim}(\text{множество плохих точек подмногообразия } Y) &= \\ &= p - m + l + 1 > l = \dim Y. \end{aligned}$$

Зафиксируем какое-нибудь богатое семейство и заменим его базу  $T$  шаром  $B$  малого радиуса с центром в  $O$ . Ограничение семейства на  $B$  есть гладкое отображение

$$j : Y \times B \rightarrow M,$$

являющееся ограничением гладкого собственного расслоения с компактной базой на компактное подмногообразие  $Y \times B$  с краем.

Зафиксируем на  $B$  и на  $M$  (а следовательно, и на всех подмногообразиях  $X, Y, Z, \dots$  многообразия  $M$ ) риманову метрику. При этом мы считаем, что метрика на  $B$  нормирована условием  $\text{volume}(B) = 1$ .

Обозначим через  $|Z|$  неориентированный  $(k+l-m)$ -мерный риманов объем подмногообразия  $Z$ .

**Теорема 1.** Если семейство  $\{Y_t\}$  богато, то для почти всех  $t \in B$  существуют  $C > 0$  и  $\lambda > 0$  такие, что

$$|Z_t(N)| < C e^{\lambda N} \quad \text{для всех } N > 0. \quad (2)$$

**Доказательство.** Рассмотрим интеграл Лебега

$$I(X) = \int_B |Z_t| |dt|, \quad (3)$$

где  $Z_t = X^k \cap Y_t^l$ , а  $|dt|$  обозначает риманов элемент объема на  $B^p$ . Существование этого интеграла хорошо известно: вклад плохих значений  $t$ , где  $|Z_t| = \infty$ , равен нулю, так как они образуют множество меры ноль. Действительно, рассмотрим многообразие  $W = j^{-1}X$ . Плохие значения параметра  $t$  являются критическими значениями ограничения естественной проекции  $Y \times B \rightarrow B$  на  $W$ , поэтому они образуют множество меры ноль согласно лемме Сарда.

**Лемма 1.** Для любого богатого семейства  $\{Y_t\}$  существует не зависящая от  $X$  константа  $C_1$  такая, что

$$I(X) \leq C_1 |X|, \quad (4)$$

где через  $|X|$  обозначен  $k$ -мерный риманов объем подмногообразия  $X$ .

**Доказательство.** Из (3) вытекает, что

$$I(X) \leq |W|,$$

где  $W^p = j^{-1}X^k$  есть подмногообразие произведения  $Y^l \times B^p$ , образованное прообразами точек подмногообразия  $X^k$  при отображении  $j$ , а  $|W|$  означает риманов объем.

С другой стороны, существует не зависящая от  $X$  константа  $C_1$  такая, что

$$|W| \leq C_1 |X|,$$

ибо  $j$  является ограничением собственного расслоения над компактным многообразием.

Применим теперь (4) к последовательным образам  $X_N = A^N X$  подмногообразия  $X$  при диффеоморфизме  $A$ .

**Лемма 2.** Интеграл  $I_N = I(X_N)$  растет не быстрее, чем экспоненциально:

$$I_N \leq C_2 e^{\alpha N} \quad \text{для всех } N \geq 0, \quad (5)$$

где  $C_2(X)$  и  $\alpha(A)$  суть некоторые положительные константы.

**Доказательство.** Обозначим через  $a$  максимум по  $M$  нормы дифференциала отображения  $A$ . Тогда из (4) мы получаем

$$I(X_N) \leq C_1 a^{kN} |X|,$$

и оценка (5) доказана с  $\alpha = k \ln a$  и  $C_2 = C_1 |X|$ .

Окончание доказательства теоремы 1 стандартно (Борель–Кантелли), как в [2]. Функция  $|Z_t|$  неотрицательна. Из неравенства Чебышева вытекает, что для любого  $C_3 > 0$

$$\text{mes}\{t \in B : |Z_t(N)| \geq C_2 C_3 N^2 e^{\alpha N}\} \leq 1/(C_3 N^2)$$

(напомним, что мера на  $B$  нормирована условием  $\text{mes } B = 1$ ). Следовательно,

$$\text{mes}\{t \in B \mid \exists N > 0 : |Z_t(N)| \geq C_2 C_3 N^2 e^{\alpha N}\} \leq \pi^2/(6C_3).$$

Рассматривая пересечение множеств, отвечающих большим  $C_3$ , мы находим

$$\text{mes}\{t \in B \mid \forall C_3 > 0 \exists N > 0 : |Z_t(N)| \geq C_2 C_3 N^2 e^{\alpha N}\} = 0.$$

Поэтому для почти всех  $t \in B$  существует  $C_3 > 0$  такое, что для всех  $N > 0$

$$|Z_t(N)| < C_2 C_3 N^2 e^{\alpha N}.$$

Наконец,  $N^2 \leq C_4(\beta) e^{\beta N}$  для любого  $\beta > 0$ , так что мы получаем требуемую оценку (2) с  $C = C_2 C_3 C_4$  и  $\lambda = \alpha + \beta$  (в качестве  $\lambda$  можно выбрать любое число, большее  $\alpha$ ).

## 2. Экспоненциальная оценка сверху для полной кривизны

Обозначим теперь размерность  $k+l-t$  подмногообразия  $Z$  через  $s$  и рассмотрим многообразие  $\tilde{M}$   $s$ -мерных линейных подпространств касательных пространств к  $M$ . Компактное риманово многообразие  $\tilde{M}$  размерности  $\tilde{m} = t + s(m-t)$  является пространством расслоения на многообразии Грассмана над  $M$ . Через  $\tilde{X}$  обозначим многообразие  $s$ -мерных подпространств касательных пространств к  $X^k$ . Многообразие  $\tilde{X}$  есть компактное подмногообразие многообразия  $\tilde{M}$  размерности  $\tilde{k} = k + s(k-s)$ . Аналогично, многообразие  $\tilde{Y}$   $s$ -мерных подпространств

касательных пространств к  $Y^l$  является компактным подмногообразием многообразия  $\widetilde{M}$  размерности  $\widetilde{l} = l + s(l - s)$ .

Наконец,  $\widetilde{X} \cap \widetilde{Y} = \widetilde{Z}$  есть многообразие касательных плоскостей к  $Z = X \cap Y$ . Это многообразие диффеоморфно  $Z$  и

$$\widetilde{k} + \widetilde{l} - \widetilde{m} = k + l - m = s.$$

Произвольное семейство  $i : Y \times T \rightarrow M$  деформаций  $Y_t$  подмногообразия  $Y$  индуцирует семейство  $\tilde{i} : \widetilde{Y} \times T \rightarrow \widetilde{M}$  деформаций  $\widetilde{Y}_t$  подмногообразия  $\widetilde{Y}$  (через  $\widetilde{Y}_t$  здесь обозначено многообразие касательных  $s$ -мерных подпространств к  $Y_t$ ).

**Определение.** Семейство  $\{Y_t\}$  называется *очень богатым*, если индуцированное семейство  $\{\widetilde{Y}_t\}$  богато.

Легко видеть, что очень богатые семейства существуют (и образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех семейств деформаций подмногообразия  $Y$  с достаточно большим числом параметров). В самом деле, любое  $s$ -мерное подпространство касательного пространства к  $M$  в любой точке вблизи  $Y$ , близкое к некоторому  $s$ -мерному касательному подпространству к  $Y$ , является касательным подпространством к некоторому  $l$ -мерному подмногообразию, близкому к  $Y$ .

Зафиксируем в  $T$  шар  $B$  малого радиуса с центром в  $O$ , как в разделе 1.

**Теорема 2.** Если семейство  $\{\widetilde{Y}_t\}$  очень богато, то для почти всех  $t \in B$  существуют  $C > 0$  и  $\lambda > 0$  такие, что

$$|\widetilde{Z}_t(N)| < Ce^{\lambda N} \quad \text{для всех } N > 0. \quad (2)$$

**Доказательство.** Применим теорему 1 к подмногообразиям  $\widetilde{X}$  и  $\widetilde{Y}$  многообразия  $\widetilde{M}$  и семейству  $\{\widetilde{Y}_t\}$ . Диффеоморфизм  $A : M \rightarrow M$  индуцирует диффеоморфизм  $\widetilde{A} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ , и

$$\widetilde{Z}_t(N) = (A^N X \cap Y_t)^\sim = (\widetilde{A}^N \widetilde{X}) \cap \widetilde{Y}_t.$$

Так как семейство  $\{\widetilde{Y}_t\}$  богато, из теоремы 1 вытекает оценка (2).

**Замечание.** Объем  $|\widetilde{Z}|$  подмногообразия  $\widetilde{Z}$  зависит от производных касательных плоскостей к  $Z$  вдоль  $Z$ , так что он является мерой некоторой «полной кривизны» подмногообразия  $Z$ .

**Следствие.** Любое характеристическое число пересечения  $Z_t(N)$  для почти всех  $t$  возрастает с ростом  $N$  не быстрее, чем экспоненциально.

**Доказательство.** Рассмотрим диффеоморфное вложение  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^q$  многообразия  $M$  в евклидово пространство. Так как  $M$  компактно, полная кривизна образов подмногообразий многообразия  $M$  не превышает произведения полной кривизны самих подмногообразий в  $M$  и некоторой константы, не зависящей от подмногообразия.

Любое характеристическое число подмногообразия  $Z$  равно интегралу от соответствующей универсальной дифференциальной формы, определенной на расслоении на многообразия Грассмана  $s$ -мерных плоскостей в  $\mathbb{R}^q$ , по многообразию касательных плоскостей к  $uZ$ . Поэтому это число оценивается сверху полной кривизной подмногообразия  $uZ$ , а значит, и полной кривизной  $|Z|$ , умноженной на не зависящую от  $Z$  константу.

Таким образом, из экспоненциальной оценки сверху полной кривизны (2) вытекают аналогичные экспоненциальные оценки для любого характеристического числа (например, для эйлеровой характеристики пересечений).

### 3. Экспоненциальные оценки сверху для полных чисел Морса и Бетти

Из экспоненциальной оценки сверху для полной кривизны следуют аналогичные оценки для полного числа Морса (минимально возможного числа критических точек морсовской функции) и полного числа Бетти (суммы чисел Бетти) пересечений  $Z_t(N)$  для почти всех  $t$  (если только семейство  $\{Y_t\}$  очень богато).

Следующая лемма, возможно, хорошо известна<sup>1</sup>.

**Лемма 3.** Полное число Морса  $\mu$  и, следовательно, полное число Бетти компактного гладкого подмногообразия евклидова пространства  $\mathbb{R}^q$  не превышают полной кривизны этого подмногообразия, умноженной на некоторую не зависящую от подмногообразия положительную константу.

<sup>1</sup> L. Jorge сообщил мне, что эта лемма содержится в [7].

**Доказательство.** Рассмотрим расслоение контактных элементов  $E^{2q-1} \rightarrow \mathbb{R}^q$  (его слой над любой точкой  $a \in \mathbb{R}^q$  состоит из контактных элементов, т.е. из  $(q-1)$ -мерных подпространств касательного пространства в точке  $a$ ). Многообразие  $E$  обладает естественной римановой метрикой.

Те контактные элементы, которые касаются данного компактного подмногообразия  $Z \subset \mathbb{R}^q$  (любой размерности), образуют  $(q-1)$ -мерное гладкое (лежандрово) компактное подмногообразие  $Z'$  пространства  $E$ . Рассмотрим естественную проекцию  $E \rightarrow \mathbb{R}P^{q-1}$  (сопоставляющую каждому контактному элементу параллельный элемент в начале координат). Проективное пространство  $\mathbb{R}P^{q-1}$  также обладает естественной римановой метрикой (индуцированной евклидовой метрикой на  $\mathbb{R}^q$ ).

Определим теперь *гауссово отображение* подмногообразия  $Z$  как ограничение  $g : Z' \rightarrow \mathbb{R}P^{q-1}$  описанной проекции. Интеграл функции кратностей отображения  $g$  равен

$$k(Z) = \int_{\mathbb{R}P^{q-1}} |g^{-1}(p)| |dp| = \int_{Z'} |\partial g / \partial z| |dz|. \quad (6)$$

Так как  $|\partial g / \partial z| \leq 1$ , последний интеграл не превосходит объема многообразия  $Z'$ , а значит, и полной кривизны подмногообразия  $Z$ , умноженной на не зависящую от  $Z$  константу. Действительно, рассмотрим расслоение над множеством  $s$ -мерных касательных плоскостей к  $\mathbb{R}^q$ , слой которого над данной  $s$ -мерной плоскостью состоит из контактных элементов, содержащих эту плоскость. Многообразие  $Z'$  является ограничением этого расслоения на подмногообразии  $\tilde{Z}$  базы ( $\tilde{Z}$  есть многообразие касательных плоскостей к  $Z$ ). Следовательно,

$$k(Z) \leq |Z'| \leq C_5(q) |\tilde{Z}|, \quad (7)$$

где  $|\tilde{Z}| = \text{volume}(\tilde{Z})$  — полная кривизна  $s$ -мерного подмногообразия  $Z$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^q$ .

Но подынтегральное выражение  $|g^{-1}(p)|$  в (6) есть число критических точек ограничения на  $Z$  линейной функции, чьи гиперплоскости уровня параллельны  $p$ . Отсюда

$$|g^{-1}(p)| \geq \mu(Z), \quad k(Z) \geq C_6(q) \mu(Z).$$

Сравнивая эти неравенства с (7), мы получаем оценки

$$\mu(Z) \leq C_7(q) |\tilde{Z}|, \quad \sum b_i(Z) \leq C_7(q) |\tilde{Z}| \quad (8)$$

на полные числа Морса и Бетти через полную кривизну, что и утверждает лемма 3.

**Замечание.** Можно предположить, что полная кривизна вещественного алгебраического многообразия, являющегося полным пересечением, оценивается через число мономов, входящих в уравнения, т.е. через сложность системы определяющих уравнений.

Было бы интересно выяснить, ограничено ли число многообразий (или число гомотопических типов многообразий) с ограниченной полной кривизной, а в случае положительного ответа — оценивается ли это число сверху полиномиальной функцией полной кривизны.

**Лемма 4.** *Полное число Морса ( $\mu$ , следовательно, полное число Бетти) компактного гладкого подмногообразия компактного риманова многообразия не превышает полной кривизны этого подмногообразия, умноженной на некоторую не зависящую от подмногообразия положительную константу.*

**Доказательство.** Зафиксируем вложение данного компактного многообразия в евклидово пространство (возможно, без сохранения метрики). Это вложение индуцирует гладкое отображение многообразия касательных  $s$ -мерных плоскостей к нашему многообразию (где  $s$  — размерность изучаемых подмногообразий) в многообразии касательных  $s$ -мерных плоскостей к евклидову пространству. Так как многообразии касательных  $s$ -мерных плоскостей к исходному многообразию компактно, норма дифференциала индуцированного отображения ограничена. Поэтому полная кривизна образа  $s$ -мерного подмногообразия в евклидовом пространстве не превосходит полной кривизны этого  $s$ -мерного подмногообразия в исходном римановом многообразии, умноженной на не зависящую от подмногообразия константу.

Теперь лемма 4 следует из леммы 3.

Объединяя теорему 2 и лемму 4, мы наконец приходим к основному результату настоящей статьи.

**Теорема 3.** *Если семейство  $\{Y_t\}$  очень богато, то для почти всех  $t \in B$  существуют  $C > 0$  и  $\lambda > 0$  такие, что полные числа Морса и Бетти пересечений  $Z_t(N) = (A^N X) \cap Y_t$  удовлетворяют экспоненциальным неравенствам*

$$\mu(Z_t(N)) < Ce^{\lambda N}, \quad \sum b_i(Z_t(N)) < Ce^{\lambda N}.$$



## Литература

- [1] Artin M., Mazur B. On periodic points. *Ann. Math.*, 1965, **81**, 82–99.
- [2] Arnold V. I. Dynamics of intersections. In: Analysis, et cetera. Proc. Conf. in Honour of J. Moser, eds. P. Rabinowitz and E. Zehnder. Boston, MA: Academic Press, 1990, 77–84.
- [3] Shub M., Sullivan D. A remark on the Lefschetz fixed point formula for differentiable maps. *Topology*, 1974, **13**, 189–191.
- [4] Арнольд В. И. Особенности гладких отображений. *УМН*, 1968, **23**(1), 3–44.
- [5] Mendoza L. Topological entropy of homoclinic closures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1989, **311**(1), 255–266.
- [6] Yomdin Y. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 1987, **57**(3), 285–301.
- [7] Chern S. S., Lashof R. K. On the total curvature of immersed manifolds. II. *Michigan Math. J.*, 1958, **5**, 5–12.



## Предисловие к третьему изданию книги «Теория катастроф»

Математическое описание мира основано на тонкой игре непрерывного и дискретного. Дискретное более заметно. «Функции, как и живые существа, характеризуются своими особенностями», как заметил П. Монтель. *Особенности, бифуркации и катастрофы* — термины, описывающие возникновение дискретных структур из гладких, непрерывных.

За последние 30 лет теория особенностей достигла высокого технического уровня, главным образом благодаря работам Х. Уитни (1955), Р. Тома (1959) и Дж. Мазера (1965). Сейчас это — мощный новый математический аппарат, имеющий широкую область приложений в естествознании и технике (в особенности в комбинации с теорией бифуркаций, восходящей к диссертации А. Пуанкаре 1879 г. и далеко развитой А. А. Андроновым, 1933).

Цель этой книги — объяснить, как этот аппарат работает, читателю-нематематику. Однако я надеюсь, что и специалисты найдут здесь новые для себя факты и идеи.

Одни считают теорию катастроф частью теории особенностей, другие, наоборот, включают теорию особенностей в теорию катастроф. Чтобы избежать схоластического диспута, я называю катастрофистами тех, кто сам заявляет, что его работа относится к теории катастроф, предоставляя тем самым свободный выбор между терминами «особенности», «бифуркации» и «катастрофы» самим авторам соответствующих работ.

Первые разделы этой книжки впервые появились в виде статьи в журнале «Природа» (1979, № 10). Французский перевод с комментариями Р. Тома был опубликован в 1980 г. в сборнике переводов «Математика». Русские издания 1981 и 1983 гг. и английские 1984 и 1986 гг. каждое содержало новые разделы. Настоящее, наиболее полное издание, во многом отличается от предыдущих. Добавлены сведения об истории теории катастроф, расширены разделы о геометрических приложениях, о теории бифуркаций и о приложениях к «мягкому моделированию»,

включая исследование перестроек. Быть может, интересно отметить, что мои попытки, начиная с 1986 г., опубликовать анализ перестроек с точки зрения теории особенностей увенчались успехом лишь теперь, несомненно вследствие самой перестройки.

Из более математических вопросов, включенных в новое издание, отмечу здесь теорию затягивания потери устойчивости, результаты о нормальных формах неявных дифференциальных уравнений и релаксационных колебаний, теорию внутреннего рассеяния волн в неоднородной среде, теорию граничных особенностей и несовершенных бифуркаций, описание каустики исключительной группы Ли  $F_4$  в терминах геометрии поверхности с краем и появление группы симметрий  $H_4$  правильного четырехмерного 600-гранника в задачах вариационного исчисления и оптимального управления, теорию перестроек ударных волн, универсальность каскадов удвоений, утроений и т.д.

Автор благодарен профессорам Р. Тому, М. Берри и Дж. Наю за полезные замечания о предыдущих изданиях этой книжки. Том указал, что термин «теория катастроф» изобретен К. Зиманом, а термин «аттрактор», заменивший прежнее «притягивающее множество», употреблялся уже С. Смейлом (тогда как в первых изданиях эти заслуги были приписаны Тому). По совету Берри я включил в это издание аннотированную библиографию (для читателей-специалистов, которые найдут в ней источники большинства сообщаемых здесь сведений, за исключением небольшого числа результатов, впервые опубликованных в этой книжке с любезного согласия авторов). Профессор Най заметил, что некоторые очень интересные топологические причины препятствуют реализации ряда перестроек каустик (таких, как рождение «летающей тарелочки») в оптике для каустик, порожденных уравнением эйконала или Гамильтона–Якоби с выпуклым по импульсам гамильтонианом.

Я научился теории особенностей в четырехчасовой беседе с Б. Мореном после его замечательного доклада об особенностях Уитни и Морена на семинаре Тома в 1965 г. Морен объяснил мне тогда формулировку фундаментальной теоремы Мазера об устойчивости, анонсированной Мазером в только что полученном Мореном письме (доказательство — не такое, как у Мазера, — я нашел позже, в тот же день). Неопубликованная работа Мазера 1968 г. о правой эквивалентности, к несчастью (или к счастью), не была мне известна, и я осознал взаимоотношение между аналогичной работой Мазера работой Г. Н. Тюриной 1967 г. (опубликованной в 1968 г.) и моей работой 1972 г. об « $A$ ,  $D$ ,  $E$ »,

посвященной памяти Тюриной, только после того, как Дж. Милнор разъяснил мне его.

Ни в 1965 г., ни позже я никогда не был в состоянии понять ни слова в собственных докладах Тома о катастрофах. Однажды он описал их мне (по-французски?) как «бла-бла-бла», когда я спросил его, в начале семидесятых годов, доказал ли он свои утверждения. Даже сегодня я не знаю, справедливо ли утверждение Тома о локальной топологической классификации бифуркаций в градиентных динамических системах, зависящих от четырех параметров (в исправленной форме, ибо контрпример к исходной «теореме» Тома, анонсированной в «Topology» в 1969 г., был опубликован Дж. Гукенхеймером в 1973 г., и «великолепная семерка», столь превозносимая катастрофистами, должна быть увеличена, чтобы теорема стала верной). Локальная топологическая классификация бифуркаций в градиентных динамических системах, зависящих от *трех* параметров, недавно получена Б. А. Хесиным (1985). Число топологически различных бифуркаций оказалось конечным, но значительно бóльшим, чем предполагал Том, пропустивший ряд бифуркаций. *Конечно ли* число таких бифуркаций при *четыре*х параметрах (Том утверждал, что их семь) — вопрос, до сих пор не решенный.

Я не в состоянии также обсуждать и философские или поэтические декларации Тома, сформулированные таким образом, чтобы нельзя было решить, справедливы они или нет (в стиле, типичном для средневековой науки до Декарта и Бэкона или даже Бэконов). К счастью, фундаментальные математические открытия великого тополога независимы от какой бы то ни было иррациональной философии.

Пуанкаре сказал как-то, что математики не уничтожают препятствия, мешающие им, но просто отодвигают их за границы своей науки. Отодвинем же эти специфические препятствия как можно дальше от границ науки, в область бессознательного и иррационального.



## Числа Спрингера и пространства морсификаций

В статье [4] Т. А. Спрингер связал с каждой конечной группой, порожденной отражениями евклидова пространства, целое число. В настоящей заметке мы обсудим топологический смысл чисел Спрингера в теории особенностей гладких функций. Например, числа Спрингера групп симметрий  $k$ -мерных кубов при  $k = 1, 2, \dots$  таковы:

$$b_k = 1, 3, 11, 57, 361, 2763, \dots$$

Мы покажем, что  $b_k$  — число топологических типов нечетных функций Морса одной переменной (имеющих  $2k$  критических точек и ведущих себя на бесконечности подобно  $x^{2k+1}$ ).

Этот подход приводит к алгоритму быстрого вычисления чисел  $b_k$ , похожему на классический «треугольник Бернулли–Эйлера» [2], который вычисляет числа Эйлера и числа тангенса (числа  $a_k$  в обозначениях Спрингера). Читатель может угадать алгоритм вычислений, рассматривая следующие два треугольника:

				0				
			1	1				
		0	1	2				
	11	11	10	8				
	0	11	22	32	40			
361	361	350	328	296	256			
			1					
			1	0				
		2	3	3				
		8	6	3	0			
	40	48	54	57	57			
256	216	168	114	57	0			

$a_k$  — это число Спрингера для группы симметрий  $k$ -мерного симплекса. Оно совпадает с числом топологических типов вполне правильных функций Морса одной переменной (имеющих  $k + 1$  критическую точку и ведущих себя на бесконечности подобно  $x^{k+2}$ ).

Это совпадение проясняет топологическую структуру сложной стратификации, образованной каустиками и стратами Максвелла в пространстве усеченной версальной деформации простой особенности  $A_{k+1}$  (см. [3], [5]). Часть этой стратификации, лежащая в (замкнутом) конусе  $M$ -морсификации, гомеоморфна разбиению (замкнутого) конуса Спрингера на части зеркалами группы  $A_k$ .

Автор благодарен профессору Т. Спрингеру, который познакомил его с заметкой [4]. Он благодарит за теплый прием Математический Институт в Утрехте, где была написана данная статья, профессора Д. Сирсму, приглашение которого сделало эту работу возможной, и Джин Артур — за быструю расшифровку сложной рукописи.

## 1. Определение чисел Спрингера

Рассмотрим конечную группу линейных преобразований, порожденную отражениями евклидова пространства размерности  $k$ . Зеркала группы разбивают пространство на симплицальные конусы, которые мы будем называть камерами. Каждая камера ограничена  $k$  гиперплоскостями, которые делят пространство на  $2^k$  частей.

**Определение.** Эти  $2^k$  частей называются *конусами Спрингера*. Два из конусов Спрингера являются камерами. Остальные состоят из нескольких камер. Спрингер указывает алгоритм определения числа камер в каждом конусе.

**Определение.** *Число Спрингера* группы Кокстера — это число камер в наибольшем из  $2^k$  конусов Спрингера. Мы будем называть его *главным конусом Спрингера*.

**Замечание.** Профессор Спрингер сообщил автору, что не рассматривал этих конусов. Наши обозначения согласуются со стандартным обозначением  $W$  для группы Кокстера.

**Пример 1.** Минимальный угол между осями симметрии правильного  $p$ -угольника на плоскости равен  $\frac{\pi}{p}$ . Поэтому числа Спрингера для групп симметрий многоугольников  $I_2(p)$  равны:

$$i_2(p) = p - 1, \quad a_2 = 2, \quad b_2 = 3, \quad g_2 = 5$$

(в том числе для  $I_2(3) = A_2, I_2(4) = B_2, I_2(6) = G_2$ ).



**Пример 2.** Любая трехмерная камера имеет две перпендикулярные стенки. Эти два зеркала разбивают пространство на четыре конгруэнтные части, каждая из которых содержит  $|W|/4$  камер, где  $|W|$  — общее число камер (т.е. порядок группы, порожденной отражениями). Поэтому число Спрингера любой группы, порожденной отражениями трехмерного пространства, равно

$$s_3 = |W|/4 - 1.$$

Например,

$$a_3 = 4!/4 - 1 = 5, \quad b_3 = 8 * 3!/4 - 1 = 11, \quad h_3 = 120/4 - 1 = 29.$$

Конфигурации соответствующих конусов Спрингера и зеркал на проективной плоскости показаны на рис. 1. Каждый симплекс представляет две «противоположные» камеры. Конусы Спрингера представлены большими симплексами, ограниченными жирными линиями (один из них в случае  $b_3$  живет в бесконечности). Первоначальная камера заштрихована.

**Замечание.** Неожиданным образом, число камер в клетках Спрингера для  $H_3$  (1, 11, 19, 29) связано со степенями инвариантов для  $H_4$  (2, 12, 20, 30). Таким же образом число камер для  $A_3$  (1, 3, 3, 5) порождает степени (2, 4, 4, 6) для  $D_4$ , а число камер для  $B_3$  (1, 5, 7, 11) — степени (2, 6, 8, 12) для  $F_4$ .

**Пример 3.** Объем (и, следовательно, число камер) сферического треугольника выражается хорошо известной формулой через углы между ограничивающими его гиперплоскостями.

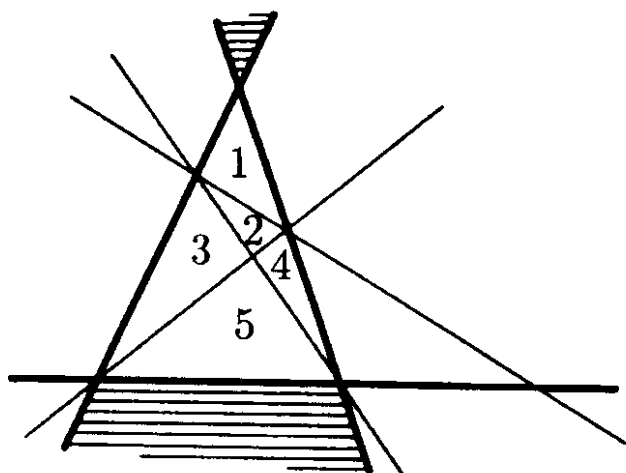
Эта формула выводится из рассмотрения площадей двуугольников (которые пропорциональны углам) с помощью обычного метода включений-исключений. Применяя этот метод последовательно несколько раз, можно получить число камер для многомерных конусов Спрингера.

Например, для  $H_4$  получаем:

$$|W| = 14400 = 2(2281 + 1681 + 1199 + 719 + 601 + 599 + 119 + 1),$$

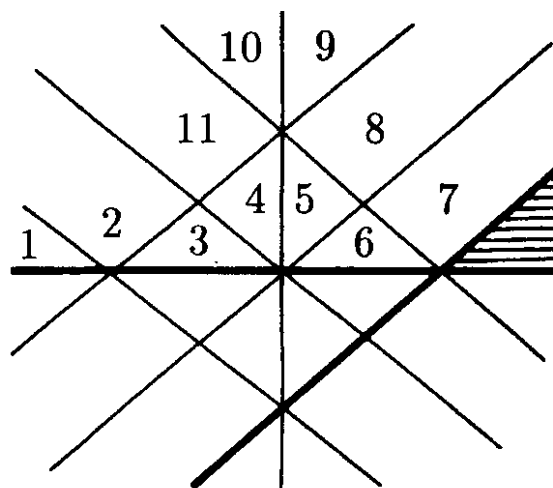
откуда  $h_4 = 2281$ . Именно таким образом Спрингер вычислял эти числа. Для исключительных групп он получил:

$$e_6 = 2663, \quad e_7 = 94121, \quad e_8 = 14422081, \quad f_4 = 169.$$



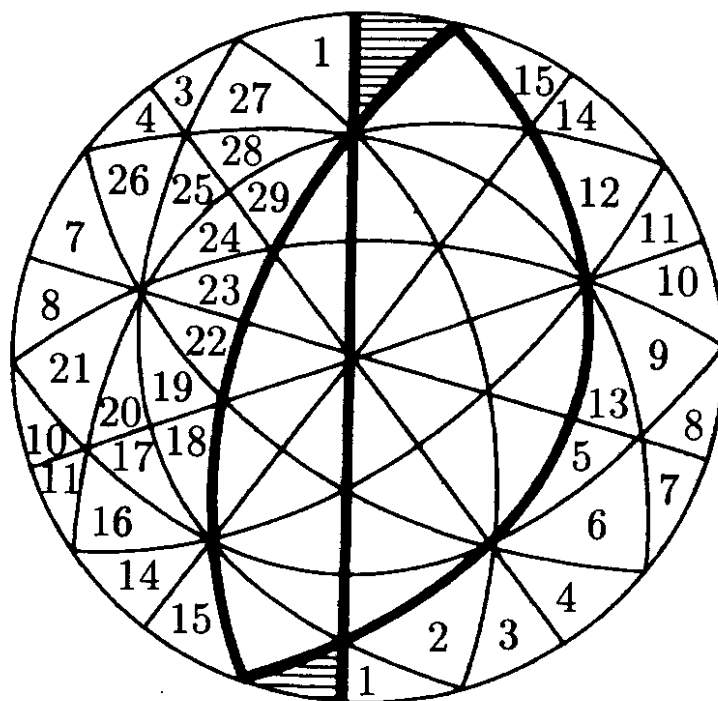
$$a_3 = 5$$

$$24 = 2(5 + 3 + 3 + 1)$$



$$b_3 = 11$$

$$48 = 2(11 + 7 + 5 + 1)$$



$$h_3 = 29$$

$$120 = 2(29 + 19 + 11 + 1)$$

Рис. 1

## 2. Числа Спрингера $a_k$ и вполне правильные функции Морса на прямой

Пусть  $f$  — вещественный многочлен

$$f(x) = x^{\mu+1} + \lambda_1 x^{\mu-2} + \dots + \lambda_{\mu-1} x,$$

в котором  $\lambda_i$  — вещественные параметры.

**Определение.** Такой многочлен называется *вполне правильной  $M$ -морсификацией* одночлена  $x^{\mu+1}$ , если все его  $\mu$  критических значений вещественны и различны ( $M$  от слова «максимальная» — это понятие было введено Петровским). Вполне правильные  $M$ -морсификации образуют открытое множество в пространстве  $\mathbb{R}^{\mu-1}$  с координатами  $\lambda_i$ .

**Теорема 1.** Пара (замыкание множества вполне правильных  $M$ -морсификаций, граница этого множества) гомеоморфна паре (замкнутый главный конус Спрингера для  $A_{\mu-1}$ , его пересечение с зеркалами).

**Следствие.** Множество вполне правильных  $M$ -морсификаций в базе версальной деформации функции с особенностью  $A_{\mu}$  содержит  $a_{\mu-1}$  связных компонент. Здесь  $a_k$  обозначает число Спрингера для  $A_k$  ( $a_k = 1, 2, 5, 16, 61, 272, \dots$  для  $k = 1, 2, \dots$ ).

**Пример.** На рис. 2 показано пересечение множества вполне правильных  $M$ -морсификаций в базе усеченной версальной деформации

$$A_4 \sim x^5 + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x$$

с плоскостью  $\lambda_1 = -1$ . Оно состоит из  $a_3 = 5$  компонент связности. Треугольник, ограниченный пересечением каустики с плоскостью, делится стратом Максвелла на пять криволинейных треугольников в точности так же, как треугольник, изображающий главный конус Спрингера на рис. 1, делится зеркалами.

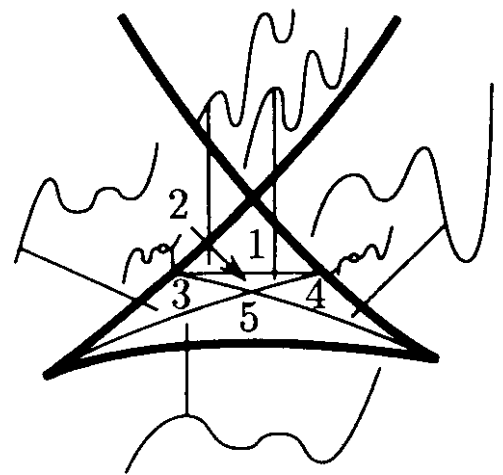


Рис. 2

**Доказательство теоремы 1.** Свяжем с вполне правильной  $M$ -морсификацией, имеющей  $\mu$  упорядоченных критических точек  $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_\mu$ , множество соответствующих критических значений  $z_i = f(x_i)$ , упорядоченное индексом  $i$ . Вычтем из каждого критического значения их среднее арифметическое и обозначим через  $z_1 < z_2 > z_3 < \dots$  полученное упорядоченное множество  $\mu$  вещественных чисел с суммой 0.

Мы определили непрерывное отображение множества вполне правильных  $M$ -морсификаций в главный конус Спрингера для  $A_{\mu-1}$  (поскольку «чередующиеся неравенства»  $z_1 < z_2 > z_3 < \dots$  определяют, согласно [4], в точности главный конус Спрингера для  $A_{\mu-1}$  в пространстве  $z_1 + z_2 + \dots + z_\mu = 0$ ). Это отображение можно непрерывно продолжить на границу множества вполне правильных  $M$ -морсификаций. Мы докажем, что это продолжение и является искомым гомеоморфизмом.

Это утверждение более или менее равносильно известной теореме Вакуленко (см. [3]). Доказательство этой теоремы, однако, никогда не публиковалось. Поэтому мы приводим ниже схему доказательства.

**Лемма.** *Всякая «змеевидная» последовательность  $z_1 < z_2 > z_3 < \dots$ ,  $z_1 + z_2 + \dots + z_\mu = 0$ , является последовательностью сдвинутых критических значений в точках  $x_1 > x_2 > \dots$  для одного и только одного вещественного многочлена степени  $\mu+1$  со старшим коэффициентом, равным единице, и нулевым следующим коэффициентом.*

**Доказательство.** Разветвленное накрытие  $S^2 \rightarrow S^2$ , определенное требуемым многочленом, топологически однозначно определяется последовательностью его критических значений.

Кривая  $\text{Im } f(x) = 0$  (на комплексной сфере  $x$ ) состоит из вещественной оси  $\text{Im } x = 0$  и  $\mu$  гладких линий, пересекающих вещественную ось ортогонально в критических точках  $x_1 > \dots > x_\mu$ . Эти линии не пересекают одна другую. Каждая из них соединяет критическую точку с бесконечностью и симметрична (не изменяется при комплексном сопряжении).

Эти линии делят каждую из полуплоскостей  $\text{Im } x > 0$ ,  $\text{Im } x < 0$  на  $\mu + 1$  диск. Многочлен  $f$  отображает каждый из этих дисков в верхнюю (нижнюю) полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  ( $\text{Im } z < 0$ ) гомеоморфно, включая границу. На границе отображение  $f$  определяется порядком точек  $z_i$  (с точностью до гомеоморфизма окружности, сохраняющего ориентацию).

Таким образом, правильная змеевидная последовательность, порожденная  $M$ -морсификацией, однозначно определяет вещественное (инвариантное относительно сопряжения) разветвленное накрытие, связанное с этой  $M$ -морсификацией.

Построим теперь вещественный многочлен, порождающий априори заданную змеевидную последовательность. Рассмотрим  $\mu + 1$  экземпляр плоскости  $z$ . Разрежем первый экземпляр вдоль вещественного луча  $[-\infty, z_1]$ , второй — вдоль двух лучей  $[-\infty, z_1]$  и  $[z_2, +\infty]$ .  $i$ -й экземпляр разрезается вдоль лучей  $[z_i, (-1)^i \infty]$  и  $[z_{i-1}, (-1)^{i-1} \infty]$ . Последний,  $(\mu + 1)$ -й, экземпляр будет содержать только один разрез,  $[z_\mu, (-1)^\mu \infty]$ . Склеим точки  $z \pm 0i$  на разрезах с  $z \mp 0i$  на предыдущем и следующем экземплярах. Мы получили симметричное (коммутирующее с комплексными сопряжениями) разветвленное накрытие  $S^2 \rightarrow S^2$  с одним простым ветвлением в каждой точке  $z_i$  и с точкой типа  $z = x^{\mu+1}$  в бесконечности. Топологически это и есть требуемый многочлен.

Снабдим накрывающую сферу комплексной структурой, порожденной  $z$ -сферой. Мы получим комплексную структуру, относительно которой наше разветвленное накрытие является голоморфным отображением. Прообраз точки  $z = \infty$  состоит из одной точки  $\infty$  сферы-прообраза. Поэтому это отображение является многочленом. Он имеет в точности предписанные критические значения.

Комплексное сопряжение действует на сфере-прообразе как антиголоморфная инволюция (поскольку комплексная структура на сфере единственна). Поэтому мы можем выбрать координату  $x$  на сфере-прообразе, для которой многочлен  $z = f(x)$  имеет вещественные коэффициенты и старший член  $x^{\mu+1}$ . Наконец, мы обнуляем сумму критических точек многочлена с помощью вещественного сдвига начала координат  $x$ .

Полученный многочлен имеет требуемые критические значения  $z_1 < z_2 > \dots$  в критических точках  $x_1 > x_2 > \dots$ . Действительно, производная  $f$  вдоль вещественной оси меняет знак в каждой критической точке. Поэтому последовательность критических точек  $x_i$  либо убывающая, либо возрастающая. Но на вещественном луче, соответствующем лучу  $[z_1, +\infty]$  на первом экземпляре, значение  $z$  возрастает, когда точка движется от  $z_1$  к  $+\infty$ . Поэтому эта точка является минимумом. Если  $\mu + 1$  нечетно, наша последовательность убывающая:  $x_1 > x_2 > \dots$ . Если  $\mu + 1$  четно, то она может быть возрастающей, но мы можем сменить знак  $x$ .

Таким образом, мы нашли требуемый многочлен. Его единственность следует из вышеприведенных рассуждений (мы используем единственность комплексной структуры на  $S^2$ ). Лемма доказана.

**Замечание.** Аналогичное рассуждение доказывает, что лемма верна и в пограничном случае последовательностей с нестрогим чередующимися неравенствами

$$z_1 \leq z_2 \geq z_3 \leq \dots, \quad z_1 + z_2 + \dots + z_\mu = 0.$$

В этом случае топологическая структура комплексного полиномиального отображения слегка иная, но по-прежнему однозначно определяется последовательностью (см., например, [5], [6]).

**Окончание доказательства теоремы 1.** Построенное отображение — непрерывное, взаимно однозначное (согласно лемме и вышеприведенному замечанию) и собственное. Поэтому оно является гомеоморфизмом, и теорема доказана.

**Замечание.** Наше отображение на самом деле определяет диффеоморфизм из множества правильных (но не вполне правильных)  $M$ -морсификаций во внутреннюю область главного конуса Спрингера. (Правильные функции имеют невырожденные критические точки, но, в отличие от морсовских, могут иметь одинаковые критические значения в различных точках.) Ограничения этого диффеоморфизма на (открытые) страты граничной каустики также являются диффеоморфизмами на соответствующие грани главного конуса Спрингера. Мы получаем гомеоморфизм, отображающий замыкание множества  $M$ -морсификаций в замкнутый главный конус Спрингера.

### 3. Числа Спрингера $b_k$ и вполне правильные нечетные функции на прямой

Пусть  $f$  — вещественный нечетный многочлен

$$f(x) = x^{2\mu+1} + \lambda_1 x^{2\mu-1} + \dots + \lambda_\mu x,$$

в котором  $\lambda_i$  — вещественные параметры. Назовем его  $M$ -деформацией, если он не имеет комплексных (невещественных) критических точек.

**Определение.** Нечетный многочлен называется *вполне правильной нечетной  $M$ -морсификацией* одночлена  $x^{2\mu+1}$ , если все его  $2\mu$  критических значений вещественны и различны.

Такие многочлены образуют открытое множество в вещественном пространстве  $\mathbb{R}^\mu$  коэффициентов  $\lambda$ .

**Теорема 2.** Число компонент связности множества вполне правильных нечетных  $M$ -морсификаций одночлена  $x^{2\mu+1}$  в  $\mathbb{R}^\mu$  равно числу Спрингера  $b_\mu$ .

**Доказательство.** Свяжем с каждой нечетной  $M$ -деформацией (правильной или нет) множество  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_\mu \geq 0$  ее неотрицательных критических точек и соответствующую нестрого змеевидную последовательность  $z_1 \leq z_2 \geq z_3 \leq \dots \leq 0$  критических значений. Тем самым определено непрерывное собственное отображение пространства нечетных  $M$ -морсификаций в  $\mathbb{R}^\mu$ .

Поскольку нечетная функция имеет наряду с критическими значениями  $z_i$  также критические значения  $-z_i$ , вполне правильная нечетная  $M$ -морсификация удовлетворяет неравенствам

$$z_i \neq \pm z_j, \quad z_i \neq 0.$$

Таким образом, вектор критических значений вполне правильной нечетной  $M$ -морсификации принадлежит камере группы  $B_\mu$ . Эта камера одна и та же для всех нечетных  $M$ -морсификаций, принадлежащих одной компоненте связности. Наше соответствие отображает эту компоненту диффеоморфно на соответствующую камеру (это одна из версий стандартной теоремы Ляшко, см. [3]). Поэтому теорема следует из такой леммы:

**Лемма.** Всякая последовательность с нестрого чередующимися неравенствами  $z_1 \leq z_2 \geq z_3 \leq \dots \leq 0$  является последовательностью  $\mu$  критических значений (упорядоченных по убыванию  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_\mu \geq 0$  критических точек на положительной полупрямой) одной и только одной нечетной  $M$ -деформации одночлена  $x^{2\mu+1}$ .

Доказательство аналогично доказательству леммы из §2; и мы не приводим детали.

**Замечание.** Оба доказательства основаны на изучении отображения, переводящего упорядоченные множества критических точек (нормированные условием, что их сумма равна нулю, или условием симметрии)

в множество критических значений (нормированных теми же условиями), упорядоченных порядком критических точек. Это полиномиальное отображение переводит замкнутую камеру гомеоморфно в замкнутый главный конус Спрингера.

Замкнутая начальная камера также гомеоморфно отображается в замыкание множества  $M$ -морсификаций путем симметризации критических точек. Разбиение главного конуса Спрингера на камеры (зеркалами) порождает разбиение множества правильных  $M$ -морсификаций на области вполне правильных  $M$ -морсификаций (стратами Максвелла).

Было бы интересно изучить топологические свойства этих полиномиальных отображений  $(x_i) \mapsto (z_i)$  в комплексной области (возможно, также для более сложных особенностей, таких, как  $D$  или  $E$ ).

#### 4. Алгоритм быстрого вычисления чисел Спрингера $b_n$

Перечислим топологические типы (с точностью до гомеоморфизмов, сохраняющих ориентацию) вполне правильных нечетных  $M$ -морсификаций одночлена  $x^{2\mu+1}$ . Естественно классифицировать их положением критического значения, соответствующего максимальной критической точке, относительно других критических значений.

Обозначим через  $z_1$  значение многочлена в максимальной критической точке.

**Определение.** Назовем вполне правильную нечетную  $M$ -морсификацию одночлена  $x^{2n+1}$  *правой* функцией, если  $(-1)^n z_1 > 0$ , и *левой* функцией, если  $(-1)^n z_1 < 0$ .

**Обозначение.** Обозначим через  $R_{i,j}$  число типов правых функций, имеющих  $i$  положительных критических значений, больших, чем  $|z_1|$ , и  $j$  положительных критических значений, меньших, чем  $|z_1|$ .

Обозначим через  $L_{i,j}$  число типов левых функций, имеющих  $i$  положительных критических значений, меньших, чем  $|z_1|$ , и  $j$  положительных критических значений, больших, чем  $|z_1|$ .

**Пример.** Верхняя оконечность треугольников

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & L_{0,0} & & & & R_{0,0} & & \\
 & & L_{1,0} & L_{0,1} & & & R_{1,0} & R_{0,1} & \\
 & L_{2,0} & L_{1,1} & L_{0,2} & & & R_{2,0} & R_{1,1} & R_{0,2} \\
 L_{3,0} & L_{2,1} & L_{1,2} & L_{0,3} & R_{3,0} & R_{2,1} & R_{1,2} & R_{0,3}
 \end{array}$$



такова:

		0					1		
		1	1				1	0	
	0	1	2			2	3	3	
11	11	10	8	8	6	3	3	0.	

Строка, содержащая  $2n$  элементов, дает число типов вполне правильных нечетных  $M$ -морсификаций одночлена  $x^{2n+1}$ , расклассифицированных по положению критического значения  $z_1$  по отношению к остальным критическим значениям. Число «0» соответствует случаю, когда  $z_1$  является максимальным критическим значением (что невозможно, поскольку  $z_1$  — локальный минимум). Следующий элемент в той же строке перечисляет типы, для которых  $z_1$  является вторым сверху критическим значением, и т.д. В середине мы должны перепрыгнуть с одного треугольника на другой.

Заметим, что мы движемся слева направо, когда число элементов в строке каждого треугольника нечетно (т.е., когда  $i + j = n - 1$  четно), и справа налево в противном случае.

**Пример.** На рис. 3 показаны три типа вполне правильных нечетных  $M$ -морсификаций одночлена  $x^3$  и 11 типов вполне правильных нечетных  $M$ -морсификаций одночлена  $x^5$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}
 b_2 &= R_{0,1} + R_{1,0} + L_{0,1} + L_{1,0} = 0 + 1 + 1 + 1 = 3, \\
 b_3 &= L_{2,0} + L_{1,1} + L_{0,2} + R_{2,0} + R_{1,1} + R_{0,2} = \\
 &= 0 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 11.
 \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Каждое число в  $(L, R)$ -таблице, определенной выше, равно сумме чисел в предшествующей строке, расположенных справа от данного числа, если  $n$  четно, и слева, если  $n$  нечетно ( $n$  — это число элементов в строке, содержащей исходное число, в каждом из треугольников  $L$  и  $R$ ).

Числа на внутренних сторонах треугольников  $L$  и  $R$  в одной и той же строке равны, за исключением вершин:

$$L_{0,n} = R_{n,0} \quad \text{при } n > 1, \quad L_{0,0} = 0, \quad R_{0,0} = 1.$$

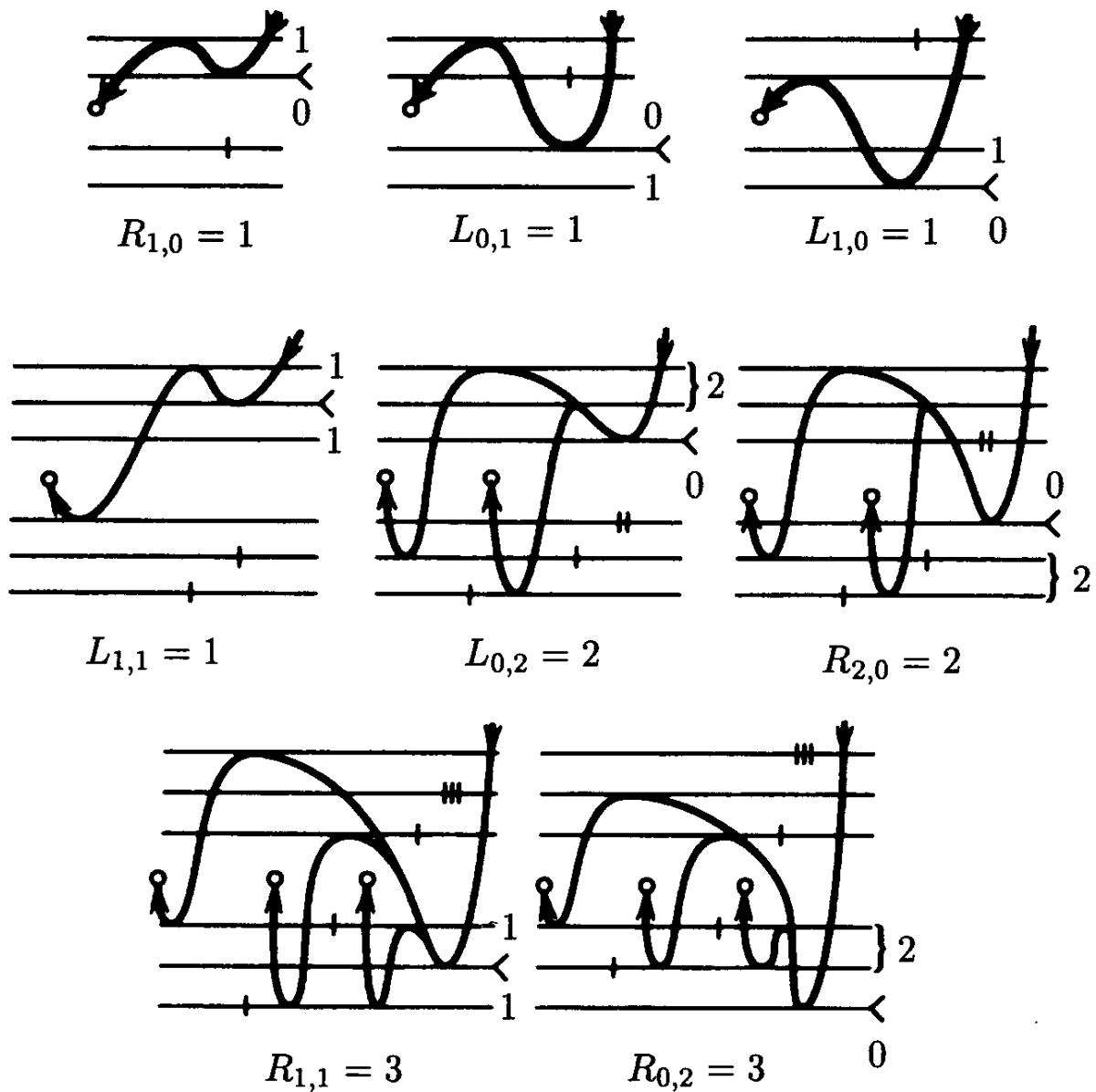


Рис. 3

Теорема дает алгоритм быстрого вычисления чисел  $L_{i,j}$  и  $R_{i,j}$ :

$$\begin{aligned}
 0 + 1 &= 1, & 1 + 1 &= 2; & 2 &= 2; \\
 2 + 1 &= 3, & 3 + 0 &= 3. \\
 0 + 3 &= 3, & 3 + 3 &= 6, & 6 + 2 &= 8; \\
 8 &= 8; & 8 + 2 &= 10, & 10 + 1 &= 11, & 11 + 0 &= 11.
 \end{aligned}$$

Самое левое и самое правое число в таблице дают значение  $b_k$ :

$$b_{2n} = R_{0,2n}, \quad b_{2n+1} = L_{2n+1,0} \quad (n > 0).$$

Доказательство теоремы 3 проводится путем установления взаимно однозначного соответствия и очень похоже на доказательство, данное в [2] для  $A$ -случая.

**Замечание.** Теорема 3 также определяет число компонент связности, соответствующих различным топологическим типам вполне правильных нечетных  $M$ -морсификаций одночлена  $x^{2n+1}$ , поскольку каждый топологический тип представлен ровно одной компонентой (см. теорему 2 и ее доказательство).

## 5. Экспоненциальные производящие функции

Для того, чтобы написать формулу для чисел  $L_{i,j}$  и  $R_{i,j}$ , изменим знаки в строках, для которых  $n \equiv 3$  или  $4 \pmod 4$  (этот весьма полезный прием был предложен Делинем):

$$l_{i,j} = \epsilon_{i,j} L_{i,j}, \quad r_{i,j} = \epsilon_{i,j} R_{i,j},$$

где  $\epsilon_{i,j} = (-1)^{(n-1)(n-2)/2}$ ,  $n = i + j + 1$ .

Определим экспоненциальные производящие функции

$$L(x, y) = \sum l_{i,j} \frac{x^i y^j}{i! j!}, \quad R(x, y) = \sum r_{i,j} \frac{x^i y^j}{i! j!}.$$

**Теорема 4.** Экспоненциальные производящие функции для чисел топологических типов вполне правильных нечетных функций задаются следующими формулами:

$$L(x, y) = \frac{\operatorname{sh}(x + y)}{e^y \operatorname{ch} 2(x + y)}, \quad R(x, y) = \frac{e^x \operatorname{ch}(x + y)}{\operatorname{ch} 2(x + y)}.$$

**Доказательство.** Числа, определенные этими функциями, обладают свойствами, указанными в теореме 3. Эти свойства могут быть записаны в виде линейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$L_x - L_y = L, \quad R_x - R_y = R$$

с граничными условиями

$$L(-x, 0) = -L(x, 0), \quad R(0, -y) = R(0, y), \quad 1 + L(0, z) = R(z, 0).$$

Эти свойства легко проверить. Поскольку они определяют числа однозначно, теорема доказана.

**Замечание.** Чтобы найти функции  $L$  и  $R$ , заметим, что числа на общей строке треугольников  $L$  и  $R$

$$1, 2, 8, 40, 256, 1952, \dots$$

делятся на возрастающие степени двойки:

$$1, 2 * 1, 4 * 2, 8 * 5, 16 * 16, 32 * 61, \dots$$

В числе 61 узнаём член последовательности Бернулли–Эйлера  $a_n$  (см. [2], [4])

$$1, 1, 2, 5, 16, 61, \dots,$$

перечисляющей up-down перестановки. Таким образом, мы приходим к предположению, что

$$L_{0,n} = R_{n,0} = 2^{n-2} a_{n-2} \quad (n \geq 2, a_0 = 1).$$

Этот факт может быть легко доказан путем установления взаимно однозначного соответствия. Поскольку экспоненциальная производящая функция для  $a_{n-2}$  хорошо известна, мы получаем начальные данные задачи Коши  $L(0, y)$  и  $R(x, 0)$  для дифференциальных уравнений, которые после этого легко решаются.

Значения

$$L(x, 0) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} 2x}, \quad R(0, y) = \frac{\operatorname{ch} y}{\operatorname{ch} 2y},$$

вычисленные Спрингером [4], также можно использовать в качестве граничных условий.

**Замечание.** Из тождеств для чисел Бернулли–Эйлера, доказанных в [2], вытекают соответствующие тождества для треугольников  $L$  и  $R$ , которые также заслуживают подробного изучения  $\bmod p^r$ .

## 6. Галереи конусов Спрингера для граничных особенностей

Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^{\mu-1}$  вещественных многочленов

$$x^\mu + \lambda_1 x^{\mu-1} + \dots + \lambda_{\mu-1} x$$

на вещественной прямой с фиксированной «границей»  $x = 0$ .

**Определение.** Вполне правильная  $M$ -морсификация граничной особенности  $B_\mu$  — это многочлен этого семейства, все  $\mu - 1$  критических значений которого на вещественной прямой различны и не совпадают с его значением на границе (мотивировку этого определения см. в [1]). Множество вполне правильных  $M$ -морсификаций является открытым подмножеством в  $\mathbb{R}^{\mu-1}$ . Его замыкание состоит из многочленов, которые имеют только вещественные критические точки. Оно разделяется на компоненты связности бифуркационной диаграммой, содержащей три гиперповерхности:

- (а) граничная каустика, состоящая из функций с критической точкой на границе ( $\lambda_{\mu-1} = 0$ );
- (б) обыкновенный страт Максвелла, состоящий из функций с равными критическими значениями в различных точках;
- (с) граничный страт Максвелла, состоящий из функций, значение которых на границе является критическим (такие функции имеют критическое значение, равное 0).

Число компонент связности пространства вполне правильных  $M$ -морсификаций граничной особенности  $B_n$  было подсчитано в [2]. В обозначениях Спрингера это число равно  $a_n$  — числу Спрингера для  $A_n$ . Например,  $a_4 = 16$ , и вполне правильные многочлены четвертой степени  $x^4 + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x$  образуют в  $\mathbb{R}^3$  открытое множество, имеющее 16 компонент связности. Каждая компонента связности для любого  $n$  стягиваема (см. [2]).

Теперь мы можем получить дополнительную информацию о конфигурации, образованной частью дискриминантной гиперповерхности, ограничивающей множество многочленов без комплексных критических точек, и тремя другими бифуркационными гиперповерхностями, описанными выше. А именно, эта конфигурация (включая границу) гомотопна конфигурациям, образованным зеркалами группы Кокстера  $A_n$  в полиэдральном конусе, который является объединением  $n$  конусов Спрингера, образующих галерею, в которой два последовательных конуса имеют общую стенку. Два конца этой галереи — это два главных конуса Спрингера.

Такое описание приводит к нескольким по-видимому новым тождествам для числа камер в конусах Спрингера. Эти тождества имеют вид

$$a_n = a_{n-1} + \dots + a_{n-1},$$

где многоточие означает число камер в промежуточных конусах галереи. Эти тождества получаются при сравнении результатов [4] с вычислением «числа Бернулли–Эйлера для  $B_n$ » в [2].

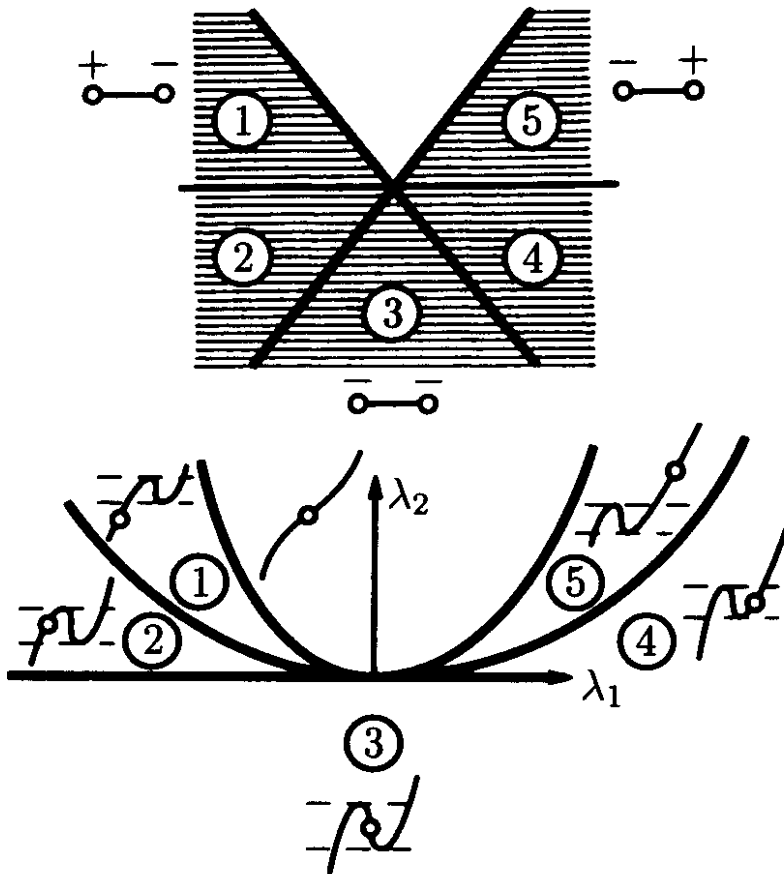


Рис. 4

в двух противоположных главных конусах Спрингера для  $A_3$ . Тройки — это числа камер в двух неглавных конусах Спрингера в  $\mathbb{R}^3$ . См. рисунок в [2].

Разложения  $a_5$  и  $a_6$  таковы:

$$\begin{aligned} 272 &= 61 + 35 + 40 + 40 + 35 + 61, \\ 1385 &= 272 + 155 + 181 + 169 + 181 + 155 + 272. \end{aligned}$$

Чтобы описать конусы Спрингера в  $A_n$ , образующие галерею для  $B_{n+1}$ , мы определим, как обычно,  $i$ -ю стенку в

$$\mathbb{R}^n = \{(z_0, \dots, z_n) : z_0 + \dots + z_n = 0\}$$

уравнением

$$z_i = z_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

**Пример 1.** Случай  $B_3$ : число компонент равно  $a_3 = 5$ ,  $5 = 2 + 1 + 2$ , где 2 есть число Спрингера для  $A_2$ , и 1 означает единственную камеру неглавного конуса Спрингера, соединяющего два главных конуса для  $A_2$ . Конфигурация конусов Спрингера и области вполне правильных  $M$ -морсификаций

$$x^3 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x$$

показаны на рис. 4.

**Пример 2.** Случай  $B_4$ : число компонент равно  $a_4 = 16$ ,  $16 = 5 + 3 + 3 + 5$ . Пятерки — это числа камер

Главный конус Спрингера определяется неравенствами

$$z_0 < z_1 > z_2 < \dots$$

Чтобы определить галерею, мы изменим знаки этих неравенств — сначала переходя от главного конуса к следующему через первую стенку, затем — к третьему конусу через вторую стенку, и т.д. На  $n$ -ом шаге мы попадем в главный конус, противоположный начальному:

$$z_0 > z_1 < z_2 > \dots$$

Рассмотрим теперь те точки  $\lambda$  в базе  $\mathbb{R}^n$  версальной деформации граничной особенности функции  $B_{n+1}$ , для которых многочлен  $x^{n+1} + \lambda_1 x^n + \dots + \lambda_n x$  не имеет комплексных критических точек.

Определим непрерывное собственное отображение из этого множества в пространство  $\mathbb{R}^n$ , на котором группа  $A_n$  действует как группа перестановок координат  $(z_0, \dots, z_n)$ . Сперва свяжем с многочленом множество из  $n$  его критических значений и числа 0, упорядочив эти числа по расположению критических точек и точки 0 на вещественной оси:

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0 \geq \dots \geq x_n.$$

Затем нормализуем полученный вектор в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ортогонально спроектировав его на пространство  $\mathbb{R}^n$  (т.е., вычитая среднее арифметическое критических значений и нуля из каждого из этих чисел).

Пусть  $w$  — полученный вектор в  $\mathbb{R}^n$ , а  $(w_1, w_2, \dots, w_{n+1})$  — его координаты в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , соответствующие  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0 \geq \dots \geq x_n$ , именно в этом порядке.

**Теорема 5.** *Отображение, сопоставляющее вектор  $w$  точке  $\lambda$ , является гомеоморфизмом подмножества  $\mathbb{R}^n$ , образованного многочленами, не имеющими комплексных критических точек, на определенную выше галерею конусов Спрингера особенности  $A_n$  в  $\mathbb{R}^n$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим вполне правильный многочлен, принадлежащий нашему множеству.

Последовательность критических значений и граничного значения 0 состоит из двух частей с чередующимися неравенствами, соединенных числом 0, окруженным двумя переходами с одноименными неравенствами. При вычитании среднего арифметического это свойство сохраняется. Таким образом, последовательность  $w$  принадлежит одному из конусов Спрингера галереи.

Замыкание каждой компоненты множества вполне правильных граничных  $M$ -морсификаций гомеоморфно переводится нашим отображением в камеру (что доказывается стандартными рассуждениями Ляшко–Лойенги, см. [3]).

Каждая последовательность  $(z_1, \dots, z_{n+1})$ , полученная из последовательности с чередующимися неравенствами включением нуля на любом месте между двумя членами (что нарушает чередование знаков неравенств) или в начале или в конце (что сохраняет чередование), является последовательностью критических значений и граничного значения 0 для единственного многочлена, не имеющего комплексных критических точек. Доказательство этого факта аналогично приведенному в §2.

Таким образом, наше отображение  $\lambda$  в  $w$  — собственный гомеоморфизм. Он гомеоморфно переводит множество многочленов без комплексных критических точек в полиэдральную гиперповерхность в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Эта гиперповерхность гомеоморфно отображается в гиперплоскость  $\mathbb{R}^n : w_1 + \dots + w_{n+1} = 0$  ортогональной проекцией, поскольку проекция сохраняет порядок точек, и, следовательно, положение нулевого члена расширенной последовательности  $(z_1, \dots, z_{n+1})$  однозначно определяется последовательностью  $w$ . Поэтому отображение, переводящее  $\lambda$  в  $w$ , является гомеоморфизмом каждой компоненты пространства правильных граничных  $M$ -морсификаций, образ которого однократно покрывает внутренние части конусов Спрингера галереи. Отсюда следует, что оно является гомеоморфизмом всего множества многочленов без комплексных критических точек, поскольку, как вытекает из обобщенной теоремы Ляшко, его ограничение на каждый граничный страт является гомеоморфизмом на соответствующую грань соответствующего конуса.

**Замечание.** На самом деле наше отображение является диффеоморфизмом внутри каждой компоненты связности множества гранично-правильных  $M$ -многочленов (имеющих в точности  $n$  различных вещественных критических точек с ненулевыми критическими значениями). Это вытекает из того факта, что версальная деформация является мультиверсальной, и, следовательно, критические значения в различных критических точках движутся независимо друг от друга. Образ каждой компоненты покрывает внутренность соответствующего конуса Спрингера.

Ограничения нашего отображения на страты естественной стратификации множества гранично-правильных  $M$ -многочленов также



являются диффеоморфизмами (на внутренние части соответствующих граней конусов Спрингера). Таким образом, особенности пересечений объединения бифуркационных диаграмм обыкновенного и граничного стратов Максвелла со стратами естественной стратификации объединения каустики и граничной каустики локально диффеоморфны гиперповерхностям, образованным пересечениями зеркал с гранями стенок конусов Спрингера (в точках границы множества гранично-правильных  $M$ -многочленов).

## 7. Четные морсификации и конусы Спрингера

Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^{n-1}$  четных вещественных многочленов

$$x^{2n} + \lambda_1 x^{2n-2} + \dots + \lambda_{n-1} x^2$$

(связь этого семейства многочленов с группой Кокстера  $B_n$  разъясняется в [1]).

**Определение.** (Вполне правильная)  $M$ -морсификация эквивариантной особенности  $B_n$  — это многочлен вышеприведенного семейства, все  $2n - 1$  критических точек которого различны, и который имеет  $n - 1$  различное критическое значение.

**Теорема 6.** Пара, образованная замыканием множества вполне правильных  $M$ -морсификаций эквивариантной особенности  $B_n$  и ее границей, гомеоморфна паре, образованной замкнутым главным конусом Спрингера для  $A_{n-1}$  в  $\mathbb{R}^{n-1}$  и его пересечением с объединением зеркал. Например, число компонент связности множества вполне правильных  $M$ -морсификаций эквивариантной особенности  $B_n$  равно числу Спрингера  $a_{n-1}$  ( $= 1, 2, 5, 16, \dots$  для  $n = 2, 3, \dots$ ).

**Доказательство.** Критические точки нашего многочлена — это начало координат и квадратные корни из критических точек многочлена

$$X^n + \lambda_1 X^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} X, \quad X = x^2.$$

Следовательно, производная этого многочлена имеет  $n - 1$  различных положительных корней. Отображение, определенное в §6, переводит его в главный конус Спрингера, поскольку значения в этих положительных корнях  $X_1 > X_2 > \dots > 0$  вместе с нулем образуют последовательность с чередующимися неравенствами

$$z_1 < z_2 > \dots > 0.$$

Таким образом, доказательство теоремы 5 дает искомый гомеоморфизм.

**Замечание.** Этот гомеоморфизм на самом деле является диффеоморфизмом внутренней части вышеописанного замыкания на внутреннюю часть главного конуса Спрингера. Он переводит объединение обыкновенного и граничного стратов Максвелла в объединение зеркал. Более того, его ограничение на страты каустики и граничной каустики, ограничивающие вышеупомянутое замыкание, является диффеоморфизмом на внутренность соответствующих граней границы главного конуса Спрингера.

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $F_4$  и особенности эволют. *УМН*, 1978, **33**(5), 91–105.
- [2] Arnold V. I. Bernoulli–Euler updown numbers associated with function singularities, their combinatorics and arithmetics. *Duke Math. J.*, 1991, **63**(2), 537–555.
- [3] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. I. Локальная и глобальная теория. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 6: Динамические системы – 6. М.: ВИНТИ, 1988, 256 с.  
Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. II. Классификация и приложения. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 39: Динамические системы – 8. М.: ВИНТИ, 1989, 256 с.
- [4] Springer T. A. Remarks on a combinatorial problem. *Nieuw Arch. Wisk.* (1), 1971, **19**(3), 30–36.
- [5] Thom R. L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynôme. *Topology*, 1965, **3**, suppl. 2, 297–307.
- [6] Здравковска С. Топологическая классификация полиномиальных отображений. *УМН*, 1970, **25**(4), 179–180.

## О топологических свойствах лагранжевых проекций в симплектической геометрии каустик

Каустика точки на римановом многообразии — это множество точек пересечения бесконечно близких геодезических, выходящих из этой точки.

Якоби заметил (применив топологическое рассуждение), что каустика точки на замкнутой выпуклой поверхности должна иметь точки возврата. Он также анонсировал (без доказательства), что для каустики на поверхности эллипсоида число этих точек равно четырем [1].

Настоящая статья является попыткой включить теоремы о точках возврата в более общий круг вопросов симплектической топологии. Немедленно получают многочисленные обобщения (включая, например, теорему о четырех вершинах замкнутой выпуклой кривой на евклидовой плоскости), а также гипотезы о топологии каустик и волновых фронтов.

Часть этих теорем и гипотез можно считать обобщениями (несколько странными) теории Штурма. Такой взгляд на теорию Штурма подсказывает ее обобщения, относящиеся, например, к симплектизации теоремы о четырех омбилических точках на выпуклой поверхности.

### 1. Лагранжев коллапс

**Определение.** Стандартный лагранжев цилиндр  $L^n \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^n$  — это график градиента функции  $\pm|q|$ :

$$L^n = \{p, q \mid \exists t : p^2 = 1, q = pt\}.$$

Эта формула определяет точное лагранжево вложение цилиндра  $S^{n-1} \times \mathbb{R}$  ( $p \in S^{n-1}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ) в кокасательное расслоение  $\mathbb{R}^{2n}$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Стандартный цилиндр является точным лагранжевым многообразием, поскольку  $p dq = dt$  на  $L$ .

**Определение.** *Стандартный лагранжев коллапс*

$$L^n \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$$

— это проекция стандартного лагранжева цилиндра  $L^n$  на базу кокасательного расслоения евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Проекция на базу кокасательного расслоения  $(p, q) \mapsto q$  отображает  $L^n$  на  $\mathbb{R}^n$  двулистно и локально диффеоморфно повсюду, кроме начала координат, в которое отображается целая сфера  $S^{n-1} \times 0$ .

Множество критических значений (каустика) отображения  $L^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  состоит из единственной точки 0 (бесконечно вырожденной). Цель настоящей работы — изучение каустик близких к  $L^n$  лагранжевых многообразий.

## 2. Примеры лагранжевых коллапсов

**А.** Рассмотрим семейство нормалей к окружности на плоскости. Все единичные векторы нормалей образуют лагранжев цилиндр (я отождествляю касательные и кокасательные векторы евклидовой плоскости).

Этот цилиндр  $S^1 \times \mathbb{R}$  есть стандартный лагранжев цилиндр в  $\mathbb{R}^4$ , а его проекция на  $\mathbb{R}^2$  — стандартный лагранжев коллапс.

При деформации окружности цилиндр единичных векторов нормалей также деформируется, оставаясь, однако, точным лагранжевым цилиндром. Критическими значениями проекции деформированного цилиндра служат центры кривизны деформированной окружности. Теорема о четырех вершинах утверждает, что каустика (= фокальное множество, = множество центров кривизны) общей выпуклой кривой имеет не менее четырех точек возврата.

**В.** Рассмотрим геодезические, выходящие из северного полюса сферы  $S^2$ . Они сходятся вновь на южном полюсе. Соответствующее лагранжево многообразие в кокасательном расслоении сферы образовано единичными векторами, касательными к геодезическим (как всегда, я отождествляю касательные и кокасательные векторы на римановом многообразии).

Это лагранжево многообразие — гладкое. Его проекция на сферу имеет особенности над окрестностями полюсов. Эти особенности симплектоморфны стандартному лагранжеву коллапсу цилиндра в  $\mathbb{R}^4$ .

При возмущении метрики сферы (сохраняющем положительность кривизны) многообразие  $L$ , образованное единичными векторами выходящих из северного полюса геодезических, остается лагранжевым (цилиндром, вложенным в  $T^*S^2$ ). Критические точки его лагранжевой проекции на  $S^2$  образуют последовательность замкнутых кривых, образы (т.е. проекции) которых и есть каустики (первая близка к южному полюсу, вторая к северному и т.д., если только возмущение метрики невелико).

Из приведенных ниже теорем следует, что каждая из этих маленьких каустик имеет минимум четыре точки возврата. Я думаю, что эта оценка снизу справедлива и для длинных каустик произвольной выпуклой поверхности. Для первой каустики это классический результат вариационного исчисления. Но для последующих каустик эта оценка, по-видимому, не известна даже в случае эллипсоида.

Задача о точках возврата каустик эллипсоида, кажется, не поддается решению методами алгебраической геометрии, см., например, статью [2] (ссылку на эту статью сообщил мне Х. Кноррер).

### 3. Особенности возмущенного коллапса

**Теорема.** *Для общего точного лагранжева вложения цилиндра, достаточно близкого к стандартному, число точек возврата каустики его лагранжевой проекции на плоскость не меньше четырех.*

Пределы допустимых возмущений описаны в §6. Я полагаю, что число точек возврата каустики не меньше четырех и для далеких от стандартного лежандровых вложений цилиндра (например, для тех вложений, которые можно получить гамильтоновой изотопией с компактным носителем). Для погружений такая оценка снизу не верна, см. [3].

Возможно также, что некоторые ограничения, использованные в доказательстве в §6, существенны. Например, допустимые цилиндры в нашей основной теореме являются «псевдооптическими» ( $p \neq 0$ ) и удовлетворяют условию «контактной псевдовыпуклости» (функция  $S = \int p dq$  не имеет критических точек на  $L$ ).

Цилиндры, которые появляются в теореме о четырех вершинах выпуклой кривой (или о  $n$ -ой ветви каустики точки на почти сферической поверхности) удовлетворяют условиям близости, достаточным для применимости наших рассуждений. Однако необходимая близость поверхности к сфере зависит от  $n$ .

#### 4. Теоремы типа Штурма и Табачникова

Доказательства при помощи производящих функций сводятся к следующей теореме типа Штурма.

**Теорема.** Пусть  $f(S, \varphi)$  —  $2\pi$ -периодическая по  $\varphi$  функция, ограниченная на всей плоскости вместе со второй производной по  $\varphi$ . Тогда ограничение  $S$  на гладкую кривую, заданную на цилиндре  $\{S, \varphi \bmod 2\pi\}$  уравнением

$$S + f(S, \varphi) + \partial^2 f / \partial \varphi^2 = 0,$$

имеет не менее четырех критических точек.

**Доказательство.** Эта кривая состоит из замкнутых компонент, целиком содержащихся в кольце  $|S| \leq c_1$ . Если их больше одной, требуемые четыре точки можно выбрать из минимумов и максимумов  $S$  на компонентах.

Если компонента связности одна, то функция

$$H(S, \varphi) = S + f + \partial^2 f / \partial \varphi^2$$

положительна с одной и отрицательна с другой стороны от этой компоненты, разделяющей также области  $S \geq c_1$  и  $S \leq -c_1$ .

Предположим, что число критических точек меньше четырех. В этом случае максимум (и минимум) функции  $S$  достигается в единственной точке, а всякое значение между максимумом и минимумом принимается ровно в двух точках. Разность значений аргумента  $\varphi$  в этих двух точках является непрерывной функцией от  $S$ , значения которой в максимуме и минимуме отличаются на  $2\pi$ . Итак, существует значение  $S_0$ , которое функция  $S$  принимает в двух противоположных точках:  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \bmod 2\pi$ . Знаки  $H(S_0, \cdot)$  на двух дугах, разделенных этими точками, различны.

Тогда существует функция вида

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi,$$

имеющая нули там же, где  $H(S_0, \cdot)$ , и тот же знак в остальных точках. Для такой функции имеем

$$\int_0^{2\pi} (a \cos \varphi + b \sin \varphi) H(S_0, \varphi) d\varphi > 0.$$

С другой стороны, при любом фиксированном значении  $S$  функция

$$f + \partial^2 f / \partial \varphi^2$$

ортогональна  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  (поскольку оператор  $\partial^2 / \partial \varphi^2 + 1$  убивает эти гармоники в ряду Фурье). Итак, интеграл положителен и в то же время равен нулю. Это противоречие доказывает существование не менее чем четырех критических точек.

**Замечание.** В инфинитезимальном варианте задачи о возникновении точек возврата каустики при возмущении стандартного лагранжева коллапса эти точки появляются как корни уравнения  $f''' + f' = 0$ , где  $f$  —  $2\pi$ -периодическая функция одной переменной, описывающая бесконечно малое возмущение.

Такое уравнение всегда имеет на окружности по меньшей мере четыре корня, потому что функция  $f''' + f'$  ортогональна к  $1, \sin \varphi, \cos \varphi$ .

С. Табачников [4] заметил, что, более общим образом, функция

$$\sum (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad k \geq n$$

имеет на окружности не менее  $2n$  корней (и что подобный результат имеет место для собственных функций других операторов Штурма-Лиувилля).

Я не нашел применений этой теоремы для получения оценок снизу числа лагранжевых особенностей  $A_k$  высших порядков.

Обобщения теории Штурма для сферических функций, необходимые для получения оценок снизу количества особенностей возмущенного стандартного коллапса в  $T^*\mathbb{R}^n$  при  $n > 2$ , не найдены пока что даже в инфинитезимальном варианте. Эти обобщения должны, например, дать симплектический вариант теоремы о четырех омбилических точках выпуклой поверхности (при  $n = 3$ ).

Я должен признаться, что не понимаю ни глубоких истоков доказанной теоремы (например, я не знаю ее обобщений на случай  $2n > 4$  корней), ни причин, по которым в задачах о возмущении лагранжева коллапса появляются теоремы типа Штурма.

## 5. Приспособленные координаты

Для того, чтобы сформулировать ограничения близости возмущенного цилиндра к стандартному, удобно описывать первый из них, используя специальные координаты в окрестности второго. Мы будем

пользоваться тем, что окрестность лагранжева многообразия симплектоморфна окрестности лагранжева сечения его кокасательного расслоения. Опишем этот симплектоморфизм явно.

Рассмотрим отображение  $S^1 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , определенное формулами

$$\begin{cases} p_x = A \cos \varphi, & p_y = A \sin \varphi, \\ x = r \cos \varphi + B \sin \varphi, & y = r \sin \varphi - B \cos \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varphi \bmod 2\pi$  — координата на  $S^1$ ,  $(r, A, B)$  — координаты в  $\mathbb{R}^3$  и  $(x, y; p_x, p_y)$  — в  $T^*\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}^4$ .

Прямым вычислением проверяется

**Лемма.** *Имеет место равенство*

$$p_x dx + p_y dy = P_r dr + P_\varphi d\varphi, \quad (2)$$

где

$$P_r = A, \quad P_\varphi = AB. \quad (3)$$

**Следствие.** *Формулы (1) задают симплектоморфизм области  $\{P_r = A > 0\} \subset T^*(\mathbb{R} \times S^1)$  на область  $T^*\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2$  ( $p \neq 0$ ).*

**Доказательство.** По точке  $p = (p_x, p_y)$  однозначно определяются  $A > 0$  и  $\varphi \bmod 2\pi$ . Если  $\varphi$  известно, вектор  $(r, B)$  получается из вектора  $(x, y)$  поворотом на угол  $\varphi$ .

## 6. Основная теорема

Пусть  $S(r, \varphi)$  —  $2\pi$ -периодическая по  $\varphi$  функция, совпадающая с  $r$  при  $|r| \geq c_2$  и строго монотонная по  $r$  ( $\partial S / \partial r > 0$ ).

Определим точный лагранжев цилиндр  $L \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^2$  с производящей функцией  $S$  посредством формул

$$P_r = \partial S / \partial r, \quad P_\varphi = \partial S / \partial \varphi \quad (4)$$

(в обозначениях §5).

**Теорема.** *На каустике проекции цилиндра  $L$  общего положения на плоскость  $(x, y)$  вдоль слоев кокасательного расслоения имеется по крайней мере четыре точки возврата.*



**Доказательство.** Множество критических точек лагранжевой проекции определяется уравнением

$$\det(\partial(x, y)/\partial(r, \varphi)) = 0.$$

Пользуясь (1)–(4), перепишем его в виде

$$\det \begin{pmatrix} c + B_r s & s - B_r c \\ Bc + (-r + B_\varphi)s & Bs - (-r + B_\varphi)c \end{pmatrix} = 0,$$

где  $c = \cos \varphi$ ,  $s = \sin \varphi$ .

Итак, множество критических точек — кривая с уравнением

$$-r + B_\varphi - BB_r = 0.$$

В направлении ядра дифференциала проектирования в особой точке  $dx$  и  $dy$  обращаются в ноль. Тогда из (2) и (4) следует, что это ядро определяется уравнением  $dS = 0$ .

В описанной в теореме ситуации за независимые переменные вместо  $(r, \varphi)$  можно принять  $(S, \varphi)$ . Частные производные при фиксированном  $\varphi$  либо  $r$  я буду обозначать индексами  $(u_r, u_\varphi)$ , а при фиксированном  $\varphi$  либо  $S$  — дробями  $(\partial u/\partial S, \partial u/\partial \varphi)$ .

Я также буду использовать старинные обозначения, при которых заданная на многообразии функция, скажем,  $u$ , обозначается одной и той же буквой, независимо от используемой системы координат.

Выражение для  $r$  как функции координат  $S$  и  $\varphi$  может быть записано в виде

$$r = S + f(S, \varphi), \quad \partial f/\partial S > -1,$$

где  $f = 0$  при  $|S| \geq c_3$ .

Переходя к дифференциалам, получаем

$$dr = (1 + \partial f/\partial S)dS + \partial f/\partial \varphi d\varphi.$$

Теперь из (4) следует, что  $L$  задается функциями

$$P_r = (1 + \partial f/\partial S)^{-1}, \quad P_\varphi = -(\partial f/\partial \varphi)(1 + \partial f/\partial S)^{-1}.$$

Итак, из (4) и (3) следует простое выражение для  $P_\varphi/P_r$ :

$$B = -\partial f/\partial \varphi|_{S=\text{const}},$$

и, следовательно, находим

$$B_\varphi - BV_r = \partial B / \partial \varphi |_{S=\text{const}}.$$

Таким образом, уравнение кривой особых точек принимает вид

$$S + f(S, \varphi) + \partial^2 f / \partial \varphi^2 = 0,$$

где  $f$  — определяющая возмущенный цилиндр известная  $2\pi$ -периодическая по  $\varphi$  функция, обращающаяся в ноль при больших значениях  $|S|$ .

Точки возврата каустики являются проекциями точек касания ядра ( $dS = 0$ ) с кривой особых точек. Следовательно, это критические точки ограничения функции  $S$  на эту кривую (которая для общих  $L$  и  $f$  является гладкой).

По теореме Штурма–Табачникова (§4) число этих точек не меньше четырех. Основная теорема доказана.

**Замечание.** Из доказательства видно, что условие « $S = r$  при  $|r| \geq c_2$ » не имеет большого значения. Достаточно, например, чтобы функция  $S - r$  была ограничена вместе со вторыми производными, лишь бы выполнялось неравенство  $\partial S / \partial r > c_4 > 0$ .

Можно даже допустить возрастание (умеренное) функции  $f$  при  $|S| \rightarrow \infty$ . Достаточно, чтобы функция  $H(S, \varphi) = S + f + \partial^2 f / \partial \varphi^2$  стремилась к  $\pm\infty$  при  $|S| \rightarrow \infty$ .

Это замечание позволяет приспособить наше рассуждение, к примеру, для доказательства теоремы о четырех вершинах выпуклой плоской кривой. Последняя теорема является, таким образом, частным случаем нашего симплектического обобщения.

## Литература

- [1] Якоби К. Г. Я. Лекции по динамике. Л.-М.: ОНТИ. Главн. ред. общетехн. лит-ры, 1936, 271 с.
- [2] Braunmühl A. V. Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf Dreiachsigem Flächen Zweiten Grades. *Math. Ann.*, 1982, **20**, 557–586.
- [3] Арнольд В. И. Пространства функций с умеренными особенностями. *Функц. анализ и его прилож.*, 1989, **23**(3), 1–10.
- [4] Табачников С. Л. Вокруг четырех вершин. *УМН*, 1990, **45**(1), 191–192.

## О некоторых задачах теории динамических систем

«Если я и сделал что-то в математике, то это не потому, что я много знал, а, скорее, потому, что я многого не знал», — говорил И. Г. Петровский, один из моих учителей в математике. — «Но при этом, — добавлял он, — всегда было важно знать, что та или иная задача еще не решена». Восемь задач, сформулированных ниже, насколько мне известно, открыты, и я надеюсь, что вам будет полезно это знать.

### 1. Фальшивые пространства $\mathbb{R}^4$ и динамические системы

Встречаются ли фальшивые  $\mathbb{R}^4$  (дифференцируемые многообразия, гомеоморфные, но не диффеоморфные линейному пространству  $\mathbb{R}^4$ ) в обычном анализе?

Я предлагаю естественную конструкцию, которая, в принципе, описывает все фальшивые многообразия  $\mathbb{R}^4$  явными формулами [1].

Рассмотрим векторное поле в линейном пространстве  $\mathbb{R}^5$ .

*Многообразие орбит такого поля (выбранного подходящим образом) диффеоморфно произвольному фальшивому многообразию  $\mathbb{R}^4$ .*

В самом деле, прямое произведение фальшивого  $\mathbb{R}^4$  и  $\mathbb{R}$  диффеоморфно линейному пространству  $\mathbb{R}^5$ . Таким образом, всякое фальшивое  $\mathbb{R}^4$  может быть определено пятью дифференцируемыми функциями пяти переменных (компонентами поля).

**Задача.** *Можно ли получить фальшивое  $\mathbb{R}^4$ , исходя из векторного поля с полиномиальными компонентами? тригонометрическими? аналитическими? элементарными? Можно ли явно выписать хотя бы одно такое векторное поле?*

### 2. Псевдопериодическая топология

Псевдопериодическая топология мотивирована задачами квантовой физики твердых тел и геометрией квазикристаллов, изучением замкнутых 1-форм, не являющихся точными, и исследованиями медленного

перемешивания и «стохастических паутин» в интегрируемых и почти интегрируемых гамильтоновых системах.

**Определение 1.** *Псевдопериодическое отображение* — это сумма двух отображений: линейного и периодического.

**Пример.** Формула

$$f(x, y) = ax + by + \sin x + \cos y$$

определяет псевдопериодическую функцию на  $\mathbb{R}^2$  (с решеткой периодов  $2\pi\mathbb{Z}^2$ ).

**Определение 2.** *Псевдопериодическое многообразие* — это прообраз точки при псевдопериодическом отображении.

**Пример.** Пересечение периодической поверхности в  $\mathbb{R}^3$  (например, некоторой поверхности Ферми) с некоторой иррациональной плоскостью (ортогональной «магнитному полю») — это псевдопериодическая кривая, исследованная С. П. Новиковым [2].

Рассмотрим некоторую псевдопериодическую (но не периодическую) кривую в  $\mathbb{R}^n$  (относительно фиксированной решетки периодов  $\mathbb{Z}^n$ ).

Предположим, что ранг линейной части соответствующего отображения максимален (т.е. равен  $n - 1$ ). В этом случае кривая, очевидно, содержит бесконечную ветвь (находящуюся на конечном расстоянии от некоторой прямой).

**Задача.** Верно ли, что некомпактная компонента такой псевдопериодической кривой всегда единственная?

**Замечание 1.** Гипотеза единственности бесконечной ветви не доказана и в случае, когда линейная часть псевдопериодического отображения находится в общем положении (например, удовлетворяет обычным диофантовым неравенствам, нарушаемым на множестве нулевой меры Лебега).

**Замечание 2.** Пример плоских кривых ( $n = 2$ ) показывает, что число компактных компонент может быть бесконечным.

**Замечание 3.** Тот же пример показывает, что в периодическом случае число бесконечных компонент может быть произвольным нечетным.

**Замечание 4.** При  $n = 2$  (более общим образом, для псевдопериодических гиперповерхностей размерности  $n - 1$  в  $\mathbb{R}^n$ ) существует не более одной некомпактной компоненты [3].

**Замечание 5.** Если псевдопериодическое отображение  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ , определяющее нашу кривую, не имеет особых точек (например, если периодическое возмущение мало по сравнению с главной линейной частью), каждая кривая  $f^{-1}(c)$  состоит не более, чем из одной компоненты. В этом случае отображение  $f$  «выпрямляемо»: оно может быть приведено к своей линейной части диффеоморфизмом тора  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  (см. [4]; для  $n = 2$  этот результат принадлежит А. Н. Колмогорову [5]).

**Замечание 6.** Недавно И. А. Дынников (аспирант Московского университета) доказал гипотезу единственности бесконечной компоненты для плоских псевдопериодических кривых в  $\mathbb{R}^3$  (когда одна из двух псевдопериодических функций, задающих кривую, линейна).

**Пример.** Плоская кривая, заданная уравнением

$$y = ax + F(x, y, bx)$$

(где  $F$  — функция периода 1 по каждой из своих трех переменных), содержит единственную бесконечную ветвь, если  $a$  иррационально.

**Замечание 7.** И. А. Дынников также доказал гипотезу С. П. Новикова [2] о пересечениях поверхностей Ферми с плоскостями. Гипотеза Новикова состояла в том, что каждая связная компонента такой кривой находится в конечной окрестности некоторой прямой. Эта гипотеза доказана для плоскостей общего положения (удовлетворяющих обычным диофантовым условиям). Между тем, Царёв и Дынников построили контрпримеры к этой гипотезе для исключительных плоскостей (образующих множество меры нуль).

### 3. Число периодических точек и предельных циклов

**Определение 3.** Точка  $x$  называется *периодической точкой периода  $n$*  отображения  $A$ , если она — неподвижная точка для его  $n$ -ой итерации:

$$A^n x = x.$$

Пусть  $A : M \rightarrow M$  — аналитический диффеоморфизм компактного аналитического многообразия (например, тора  $\mathbb{T}^2$ ).

**Задача.** Верно ли, что число периодических точек периода  $n$  оценивается сверху показательной функцией от  $n$ ?

Здесь предполагается, что периодические точки невырождены (т.е. что 1 не является собственным значением производной отображения  $A^n$  в  $x$ ). Диффеоморфизмы  $A$  общего положения не имеют вырожденных периодических точек.

**Замечание 1.** Пример отображения тора  $\mathbb{T}^2$ , заданного матрицей  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , показывает, что число периодических точек периода  $n$  может расти не медленнее показательной функции от  $n$  (это справедливо и для отображений общего положения).

**Замечание 2.** М. Артин и Б. Мазур показали, что число периодических точек периода  $n$  оценивается сверху функцией  $Ce^{\lambda n}$  для алгебраических многообразий и отображений [6].

**Задача.** Верно ли, что число периодических орбит периода не более  $T$  полиномиального векторного поля (на компактном шаре в  $\mathbb{R}^m$ ) оценивается сверху показательной функцией от  $T$ ?

**Замечание 3.** Напротив, для многообразий и отображений класса  $C^\infty$  никакая оценка сверху невозможна [7].

**Гипотеза.** Число периодических точек отображения класса  $C^\infty$  почти всегда растет не быстрее некоторой показательной функции от периода.

«Почти всегда» здесь означает «для почти всех значений параметра (в смысле мере Лебега) во всяком типичном семействе отображений, зависящих от достаточно большого числа параметров».

**Замечание 4.** Это определение общности, позволяющее пренебрегать явлениями, встречающимися только в исключительных случаях (в смысле теории меры) в конечнопараметрических семействах, существенно отличается от топологических и вероятностных определений.

Топологические определения, использующие понятие категории, будут пренебрегать канторовским множеством, мера которого составляет 99% полной меры рассматриваемого многообразия.

Вероятностные определения рассматривают меры на пространствах функций, сосредоточенные на не очень гладких функциях (как броуновское движение).

Определение понятия «почти всегда», данное выше и введенное Колмогоровым [8], хорошо приспособлено к теории динамических систем.

#### 4. Асимптотическая топологическая сложность пересечений

Эта задача, обобщающая задачу 3, мотивирована теорией солитонов (см. [2]).

Рассмотрим два компактных подмногообразия  $X^k$  и  $Y^l$  в компактном многообразии  $M^m$ . Пусть  $A : M \rightarrow M$  — дифференцируемое отображение. Рассмотрим последовательные образы многообразия  $X$  под действием итераций  $A^n$  отображения  $A$ . Чтобы измерять их сложность (увеличивающуюся с ростом  $n$ ), рассматриваются их пересечения с неподвижным многообразием  $Y$ :

$$Z(n) = (A^n X) \cap Y.$$

Это пересечение  $Z$ , как правило, является гладким многообразием размерности  $s = k + l - m$ .

*Задача состоит в изучении асимптотического поведения топологической сложности  $|Z(n)|$  многообразия  $Z(n)$  как функции времени  $n$ .*

**Пример 1.** Если  $X$  и  $Y$  имеют дополнительные размерности, то  $Z(n)$  является, как правило, конечным множеством, и  $|Z(n)|$  — это число его точек.

**Пример 2.** Пусть  $g : \Omega \rightarrow \Omega$  — динамическая система общего положения. Рассмотрим многообразие  $M = \Omega \times \Omega$ , отображение  $A = (\text{Id}, g)$ , и пусть  $X = Y$  — диагональ в  $M$ . В этом случае  $Z(n)$  — конечное множество пар  $(x, x)$ , где  $x$  — периодическая точка периода  $n$  отображения  $g$ . Таким образом, задача 3 есть частный случай задачи 4.

**Замечание 1.** Если  $(A, M, X, Y)$  — алгебраические вещественные отображение и многообразия, то топологическая сложность растет не быстрее показательной функции времени:

$$|Z(n)| \leq C e^{\lambda n}.$$

Это доказано в [9], [10] для таких мер топологической сложности, как числа Бетти, характеристические числа и др.

Рассмотрим теперь случай многообразий и отображений класса  $C^\infty$ .

**Задача.** Верно ли, что топологическая сложность пересечения  $Z(n)$  почти всегда оценивается сверху некоторой показательной функцией времени  $n$ ?

**Замечание 2.** В случае, когда  $A$  — диффеоморфизм, эта гипотеза доказана в [10] для следующих мер топологической сложности: число связных компонент, числа Бетти, числа Морса, характеристические числа, риманов объем, полная абсолютная кривизна и др.

Доказательства основаны на лемме Бореля–Кантелли (неравенство Чебышева) из теории вероятностей, с одной стороны, и на оценке сверху чисел Бетти через полную абсолютную кривизну, принадлежащей Чженю и Лашову [11], с другой.

**Замечание 3.** Можно также оценить число образующих и соотношений в фундаментальной группе, но я не умею доказывать никакой оценки сверху для длин соотношений.

**Замечание 4.** «Почти всегда» в [10] означает: для почти всех значений параметра  $t$  в типичных семействах неподвижных многообразий  $Y_t$  имеем

$$|Z_t(n)| \leq C(t)e^{\lambda n},$$

если только число параметров  $p = \dim\{t\}$  достаточно велико. «Топологические» аргументы из [10] используют в качестве  $p$  величины порядка  $m^2$ .

**Замечание 5.** Вероятно, результат [10] остается верен почти всегда, если не  $Y$ , а  $A$  или же  $X$  зависит от параметров.

**Замечание 6.** Существуют примеры класса  $C^\infty$ , а также аналитические, где  $|Z(n)|$  растет быстрее любой наперед заданной функции (для некоторой возрастающей последовательности  $n_i$  моментов времени).

Пример О. С. Козловского [12] (студента Московского университета) особенно показателен. В этом примере  $M$  есть тор  $\mathbb{T}^2 = \{(x, y) \bmod 2\pi\}$ ,  $X = Y$  — окружность  $y = 0$ , а  $A$  — аналитический диффеоморфизм вида

$$(x, y) \mapsto (x + 2\pi\lambda, y + f(x)).$$



Выберем иррациональное число  $\lambda$  и очень лакунарный ряд

$$f(x) = \sum_i f_{M_i} \sin M_i x.$$

Возможность получить произвольный рост  $|Z(n_i)|$  гарантируется существованием иррациональных чисел  $\lambda$ , у которых элементы соответствующих непрерывных дробей растут как угодно быстро.

## 5. Рост чисел Милнора и голоморфная динамика

Это локальный вариант задачи 4. Рассмотрим два ростка голоморфных кривых, проходящих через начало координат плоскости  $\mathbb{C}^2$ :

$$(X, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \leftarrow (Y, 0),$$

и росток голоморфного отображения, сохраняющего начало координат:  $A : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ .

Будем действовать на  $X$  итерациями  $A$  и изучать пересечения  $A^n X$  с  $Y$ .

**Определение 4.** Число Милнора  $\mu(n)$  есть кратность пересечения кривых  $A^n X$  и  $Y$  в начале координат.

**Пример.**  $A(x, y) = (x, y^2)$ ,  $X = \{(x, x)\}$ ,  $Y = \{(x, 0)\}$ . Образы  $A^n X$  суть «параболы»  $y = x^{2^n}$ , следовательно,  $\mu(n) = 2^n$ .

Вернемся к общему случаю произвольных  $(A, X, Y)$ .

**Задача.** Допускают ли числа Милнора  $\mu(n)$  оценку сверху, экспоненциальную по времени  $n$ ?

Здесь предполагается, что  $A$  — конечнократное отображение, и что  $A^n X$  и  $Y$  различны для каждого  $n$ .

**Замечание 1.** Экспоненциальная оценка сверху доказана в [13] для случая гладких кривых  $A^n X$  (таких, как в примере).

**Замечание 2.** По-видимому, такая же экспоненциальная оценка справедлива для голоморфных подмногообразий любой размерности  $(X^k, 0)$ ,  $(Y^l, 0)$  в  $(\mathbb{C}^m, 0)$  и для обобщенных чисел Милнора, которые определяются с помощью следующей конструкции.

Рассмотрим некоторую алгебраическую фильтрацию  $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \dots$  пространства  $V_1 = J^\infty$  бесконечных струй пар голоморфных отображений

$$f : (\mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0), \quad g : (\mathbb{C}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$$

в начале координат.

Многообразия  $V_i$  суть алгебраические подмногообразия в  $J^\infty$ , т.е. каждое из этих многообразий задается полиномиальными уравнениями (на конечное число коэффициентов Тейлора). Это конечное число, однако, зависит от  $i$ .

**Определение 5.** *Обобщенное число Милнора  $\mu(f, g)$  — это наибольшее из чисел  $i$ , для которых пара  $(f, g)$  принадлежит  $V_i$ .*

**Пример.** Локальные версии топологических (или, более общим образом, дискретных) пересечений, рассматриваемых в задаче 4, суть обобщенные числа Милнора (ассоциированные с очень специальными фильтрациями).

**Гипотеза.** *Обобщенные числа Милнора  $\mu(n)$  пар  $(A^n X, Y)$  допускают экспоненциальную по  $n$  оценку сверху (если только  $A$  — отображение конечной кратности, и все его числа Милнора конечны).*

**Замечание 3.** Для диффеоморфизмов  $A$  эта гипотеза справедлива. Более того, в этом случае последовательность обобщенных чисел Милнора  $\mu(n)$  ограничена некоторой константой. Доказательство этого факта [13] основано на следующей теореме Сколема.

*Пусть  $f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_m f(n-m)$  — некоторая рекуррентная последовательность. Тогда множество значений  $n$ , для которых  $f(n) = 0$ , есть объединение некоторого конечного множества и конечного семейства арифметических прогрессий.*

Эта теорема из теории чисел, доказанная логиком, в действительности принадлежит теории динамических систем.

**Замечание 4.** Результаты работы [13] обобщают теорему Шуба-Сулливана [14]: значения индекса Пуанкаре итераций диффеоморфизма класса  $C^1$  в его неподвижной точке ограничены (при условии,

что все эти индексы конечны). В обоих утверждениях последовательности значений (обобщенного числа Милнора и индекса) периодичны, начиная с некоторого момента.

Теорема Шуба–Сулливана была обобщена Д. Фридом [26], который рассмотрел вместо индекса Пуанкаре комплексные индексы Атьи–Ботта.

## 6. Инфинитезимальный вариант 16-й проблемы Гильберта и абелевы интегралы

16-я проблема Гильберта состоит из двух частей: вопрос об овалах алгебраических кривых и вопрос о предельных циклах полиномиальных векторных полей.

Между этими двумя проблемами имеется еще промежуточный вопрос: изучение предельных циклов, рождающихся из линий уровня некоторого первого интеграла.

Эта задача содержит, как частный случай, задачу изучения числа вещественных нулей периодов абелевых интегралов как функции от параметров. Предположим, что полиномиальное векторное поле на плоскости имеет первый интеграл, линии уровня которого являются циклами (заполняющими, по крайней мере, некоторое кольцо на плоскости).

Рассмотрим малые полиномиальные возмущения (фиксированной степени) этого векторного поля. Места рождения предельных циклов даются, в первом приближении, нулями некоторого интеграла (найденного Пуанкаре) вдоль невозмущенных замкнутых орбит (эти орбиты суть линии уровня первого интеграла).

**Задача.** *Является ли число нулей интеграла Пуанкаре ограниченным (константой, зависящей только от степени возмущений)?*

**Пример.** Обобщенная система Лотка–Вольтерра

$$\dot{x} = x(a + bx + cy), \quad \dot{y} = y(d + ex + fy)$$

иногда имеет первый интеграл

$$I = x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

где  $z$  — линейная (неоднородная) функция от  $x$  и  $y$ . Невозмущенные орбиты  $I = \text{const}$  суть кривые — либо алгебраические, либо нет, в зависимости от коэффициентов  $(a, \dots, f)$ . Задача состоит в том, чтобы

выяснить, ограничено ли число невозмущенных орбит, порождающих предельные циклы, функцией от степеней возмущений.

**Замечание 1.** Это число, вероятно, ограничено некоторой константой, общей для всех значений коэффициентов исходной системы.

Однако ограниченность числа нулей интеграла Пуанкаре не доказана и для случая гипергеометрических интегралов (в смысле Гельфанда, Варченко, Аомото и др.), отвечающих индивидуальным обобщенным системам Лотка–Вольтерра (а также для необобщенных систем Лотка–Вольтерра, где  $b = f = 0$ ).

**Замечание 2.** В частном случае, когда невозмущенная система гамильтонова с полиномиальной функцией Гамильтона  $H$ , задача может быть сформулирована в терминах периодов абелевых интегралов. Рассмотрим полный абелев интеграл

$$I(h) = \oint (P dx + Q dy) \quad (1)$$

вдоль овала алгебраической кривой  $H(x, y) = h$ . Многочлены  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  описывают инфинитезимальную вариацию гамильтонова векторного поля, а  $I$  — интеграл Пуанкаре.

*Задача состоит в том, чтобы оценить сверху число вещественных нулей функции  $I$  для всех многочленов  $(P, Q)$  фиксированной степени.*

Эта задача о равномерной оценке числа вещественных нулей полных абелевых интегралов была решена А. Н. Варченко [15] и А. Г. Хованским [16] двумя разными способами, но ни то, ни другое доказательство не дает явной оценки сверху; доказано только существование такой оценки для числа вещественных корней функции  $I$ .

**Замечание 3.** В еще более специальном случае системы с кубической функцией Гамильтона

$$H(x, y) = y^2 + x^3 - x \quad (2)$$

точная оценка числа нулей интегралов Пуанкаре (на этот раз эллиптических) была найдена Г. С. Петровым [17] (студентом Московского университета).

Семейство функций (1), получаемых из всех многочленов  $P, Q$  (ограниченной степени), образует линейное пространство конечной размерности  $N$ . Следовательно, существуют возмущения  $(P, Q)$ , для которых интеграл Пуанкаре  $I(h)$  имеет, как минимум,  $N - 1$  вещественных нулей (причем расположенных в произвольных точках  $h_i$ ).

**Определение 6.** Линейное семейство размерности  $N$  функций одной переменной называется *чебышевским*, если число нулей каждой функции семейства (не обращающейся в ноль тождественно) меньше  $N$ .

Линейное дифференциальное уравнение, решениями которого являются функции семейства, называется в этом случае *неосцилляционным уравнением*.

**Теорема (Петров).** Семейство интегралов Пуанкаре  $I(h)$ , отвечающее кубическому гамильтониану (2), является чебышевским.

Возмущения  $(P, Q)$ , определяющие интеграл (1), являются здесь произвольными многочленами степени не больше  $n$ . Семейство интегралов (1) имеет в этом случае размерность  $n$ . Тем самым максимальное число вещественных нулей интегралов Пуанкаре (1) в случае (2) равно степени возмущения минус 1.

**Замечание 4.** Результаты Петрова показывают, что уравнение Пикара–Фукса (соответствующей связности Гаусса–Манина) является неосцилляционным. Симплектическая теория Штурма (см. [18]) подсказывает, что это свойство неосцилляционности должно быть связано с вариационным принципом для этого линейного уравнения Пикара–Фукса, так что (квадратичный) лагранжиан должен быть положительно определен.

В этом случае из теорем симплектической геометрии вытекает свойство лагранжевой неосцилляционности: число моментов нетрансверсальности подвижной лагранжевой плоскости и неподвижной плоскости будет минимальным.

Для гиперэллиптического гамильтониана  $H = y^2 + p(x)$  эта программа была реализована А. Б. Гивенталем [19]. Он доказал свойство лагранжевой неосцилляционности соответствующего уравнения Пикара–Фукса.

Однако из лагранжевой неосцилляционности не вытекают непосредственно оценки сверху числа нулей частных решений линейного уравнения Гамильтона (она дает только оценку числа нулей некоторых детерминантов, образованных из нескольких решений).

## 7. Материализация резонансов в голоморфной динамике

Хорошо известно из работ Пуанкаре по небесной механике, что резонансы (соизмеримости частот) вызывают расходимость рядов, описывающих возмущенные движения (вследствие «малых знаменателей», обращающихся в ноль, когда имеет место точный резонанс).

Расходимость ряда Тейлора функции  $\operatorname{arctg} x$  при  $|x| > 1$  объясняется наличием комплексной особенности в точке  $i$ . Эта особенность, представляющая топологическое препятствие к сходимости, материализует иначе таинственную расходимость.

Идея материализации резонансов состоит в том, чтобы найти топологические препятствия к сходимости рядов теории возмущений в поведении орбит возмущенной системы в комплексном фазовом пространстве.

Много примеров реализации этой программы содержится в работах [20]–[22]. Доказательства Пуанкаре и Зигеля расходимости рядов теории возмущений могут быть интерпретированы как указание на наличие периодических орбит (с очень длинными периодами) в комплексных окрестностях вещественного фазового пространства.

Здесь я привожу мою старую гипотезу (сформулированную в 1958 г.) этого типа, которая, по-видимому, остается недоказанной и сегодня (по крайней мере формально).

Рассмотрим голоморфное отображение окрестности  $G$  окружности  $S^1$  (в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ ) на некоторую другую окрестность той же окружности:

$$A : (G, S^1) \rightarrow (G', S^1).$$

Предположим, что  $A$  индуцирует диффеоморфизм окружности  $S^1$ , сопряженный с поворотом  $R_\lambda$  на угол  $2\pi\lambda$ , так что сопрягающий диффеоморфизм  $B$  голоморфен в некоторой окрестности окружности:

$$A = BR_\lambda B^{-1}.$$

Предположим, что «число вращения Пуанкаре»  $\lambda$  иррационально.

**Замечание 1.** По другой гипотезе 1958 г., доказанной М. Эрманом [23], сопрягающий голоморфный диффеоморфизм  $B$  существует, если число вращения  $\lambda$  отображения  $A$  удовлетворяет обычным диофантовым условиям (нарушаемым лишь на множестве чисел  $\lambda$ , имеющем нулевую меру Лебега).

**Пример.** Голоморфная  $2\pi$ -периодическая функция  $f$  в окрестности вещественной оси, вещественная на этой оси, определяет диффеоморфизм  $x \mapsto x + f(x)$  окружности  $\{x \bmod 2\pi\}$ , если  $f'(x) > -1$  на вещественной оси.

Предположим, что максимальное кольцо  $M$  (диффеоморфное  $S^1 \times \mathbb{R}$ ), в котором отображение  $A$  сопряжено с поворотом, содержится в окрестности  $G$  окружности  $S^1$  вместе со своей границей  $\partial M$ .

В этом случае гипотеза о материализации резонансов может быть сформулирована следующим образом.

**Задача.** Верно ли, что любая окрестность всякой точки границы  $\partial M$  содержит точку периодической орбиты отображения  $A$ , лежащей в произвольно малой окрестности границы? Верно ли это хотя бы в случае общего положения?

**Замечание 2.** Периодические точки отображения  $A$  лежат вне окрестности окружности, где  $A$  сопряжено с иррациональным поворотом  $R_\lambda$ . Поэтому эти точки препятствуют сходимости рядов теории возмущений и материализуют резонансы.

**Замечание 3.** В случае, когда сопрягающий диффеоморфизм  $B$  не голоморфен, можно ожидать присутствие точек периодических орбит, лежащих в произвольно малой окрестности окружности  $S^1$ , в любой окрестности каждой точки этой окружности.

**Замечание 4.** Гипотезы об аппроксимации границы сопряженности периодическими точками могут быть сформулированы для локального случая неподвижной точки голоморфного отображения  $A : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , имеющего производную  $e^{2\pi i \lambda}$  в начале координат. В общем случае ожидается присутствие точек периодических орбит, лежащих в произвольно малой окрестности границы  $\partial M$  максимального диска  $M$ , где  $A$  голоморфно сопряжено с поворотом, вблизи каждой точки границы.

**Замечание 5.** Для исключительных иррациональных чисел  $\lambda$  Ж.-К. Йоккос и Р. Перес-Марко построили отображения  $A$ , для которых периодические точки не аппроксимируют границу  $\partial M$  кольца (диска) голоморфности сопрягающего диффеоморфизма.

**Замечание 6.** Напротив, для общих чисел вращения  $\lambda$  гипотеза аппроксимации не проверена и в случае полиномиальных и рациональных отображений.

**Замечание 7.** По-видимому, задача остается открытой (по крайней мере формально) и для отображений, заданных тригонометрическими многочленами, например, для отображений вида  $x \mapsto x + a + b \sin x$ , для которых гипотеза аппроксимации была первоначально сформулирована в 1958 г.

**Замечание 8.** В общей программе материализации резонансов остается сделать много. Я цитирую, например, недавние работы М. Б. Мишустина о нормальных формах окрестностей голоморфных кривых на голоморфных поверхностях.

**Замечание 9.** Совсем недавно Ю. Мозер изучил возмущения голоморфных кривых на поверхности тора  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$  при псевдоголоморфной деформации комплексной структуры тора. Нет сомнения, что для этой задачи можно построить теорию материализации резонансов, параллельную теории бифуркаций эллиптических кривых на голоморфных поверхностях, построенной в [21].

## 8. Аналитическая и геометрическая неразрешимость в теории хаоса

По-видимому, хаотическое поведение динамических систем приводит к неразрешимости чересчур точных вопросов об их структуре.

Я привожу здесь несколько старых гипотез (см. [24], [25]) о неразрешимости таких классических задач теории динамических систем, как проблемы устойчивости положений равновесия, интегрируемости в квадратурах обыкновенных дифференциальных уравнений и полной интегрируемости гамильтоновых систем в механике. Мои определения неразрешимости весьма отличаются от принятых в алгебре и в теории алгоритмов у логиков.

В духе геометрии многообразий, разрешимость задачи не должна зависеть от системы координат, в которой заданы условия задачи (правые части дифференциальных уравнений, гамильтонианы и т.д.).

**Определение 1.** Задача называется *геометрически неразрешимой*, если среди всех задач, получающихся из исходной диффеоморфными



заменами координат и параметров, не существует аналитически разрешимой (в смысле приведенного ниже определения 2) задачи.

**Пример.** Рассмотрим зависящее от параметров векторное поле в окрестности положения равновесия. Задача об устойчивости положения равновесия в таком семействе геометрически неразрешима, если она аналитически неразрешима для всякого семейства, эквивалентного данному (при локальных диффеоморфизмах, зависящих от параметров).

**Замечание 1.** Задача интегрирования дифференциального уравнения геометрически разрешима в окрестности неособой точки соответствующего векторного поля, хотя эта задача может быть аналитически неразрешимой для некоторых полей. С другой стороны, эта задача, вероятно, геометрически неразрешима в окрестности особой точки даже для полиномиальных векторных полей.

Определение аналитической разрешимости локальной аналитической задачи (которое упоминалось выше и будет приведено ниже) оставляет достаточно много свободы. Например, все диофантовы уравнения разрешимы в этом смысле. Таким образом, аналитическая неразрешимость в нашем смысле является гораздо более сильным свойством, чем алгоритмическая неразрешимость.

В качестве исходных данных локальной аналитической задачи я рассматриваю конечное число рядов Тейлора в фиксированной системе координат. В случае задачи об устойчивости неподвижной точки — это ряды, представляющие компоненты векторного поля в этой точке. Тогда пространство их многочленов Тейлора данной степени также обладает выделенной системой координат. Определение аналитической разрешимости описывает допустимые операции, приводящие к решению.

Начнем с определения *допустимых* функций, многообразий и отображений в арифметических пространствах  $\mathbb{R}^N$  и  $\mathbb{C}^N$ . Это минимальные множества многообразий и «отображений» со следующими свойствами:

- 1) арифметические пространства  $\mathbb{R}^N$  и  $\mathbb{C}^N$  (при любом  $N$ ) — допустимые многообразия;
- 2) все рациональные отображения допустимы;
- 3) образ и прообраз допустимого многообразия при допустимом отображении — допустимые многообразия;

- 4) допустимы пересечение и объединение двух допустимых многообразий, а также их прямое произведение и дополнение;
- 5) композиция двух допустимых отображений допустима;
- 6) отображение (возможно, многозначное) допустимо тогда и только тогда, когда его график является допустимым многообразием;
- 7) для допустимой функции  $f(x, y)$  допустимы ее частная производная и первообразная по  $x$  (ветвь которой определена начальными значениями на допустимом подмногообразии).

**Замечание 2.** Рассматриваемая первообразная определяется комплексным интегрированием. Следовательно, график этой многозначной функции является допустимым многообразием.

Аналитическое продолжение в этой теории также является допустимой операцией, как и все арифметические операции, дифференцирование, интегрирование, подстановки и взятие обратного отображения.

**Замечание 3.** Понятие аналитической разрешимости можно построить на основе вещественного интегрирования. Эта теория отличается от обсуждаемой здесь. Например, функция  $\sin$  на вещественной прямой допустима, если разрешено интегрирование в комплексной области, но не содержится в минимальном множестве допустимых функций, если разрешено только вещественное интегрирование (хотя ограничение этой функции на любой конечный интервал вещественной прямой всегда является допустимой функцией).

Пусть функция  $\sin$  допустима, множество целых чисел — тоже. Тогда множество целых значений параметра  $y$ , при которых многочлен  $f(x, y)$  имеет целый корень  $x$ , допустимо, каков бы ни был данный многочлен  $f$  с целыми коэффициентами.

Для простоты рассмотрим *бинарную* локальную аналитическую задачу, т.е. задачу, в которой возможны два ответа: «да» и «нет» (как в задаче об устойчивости положения равновесия). При любом значении  $k$  пространство многочленов Тейлора степени  $k$ , соответствующих заданным функциям данной бинарной локальной задачи, состоит из трех частей:

$A_k$ : многочлены Тейлора, для которых ответом является «да» (вне зависимости от членов более высокой степени).

$B_k$ : многочлены Тейлора, для которых ответом является «нет» (вне зависимости от членов более высокой степени).

$C_k$ : многочлены Тейлора, для которых ответ зависит от членов более высокой степени.

**Определение 2** (см. [24]). Бинарная локальная аналитическая задача аналитически разрешима, если:

1) множества  $A_k, B_k, C_k$  — допустимые многообразия (при любом  $k$ ),

2) коразмерность многообразия  $C_k$  стремится к бесконечности при стремлении к бесконечности степени  $k$  многочленов Тейлора.

**Задача.** Является ли геометрически разрешимой проблема устойчивости положения равновесия векторного поля в  $\mathbb{R}^n$ ?

**Замечание 4.** Старая гипотеза (см., например, [25]) состоит в том, что эта задача, вероятно, не является ни аналитически, ни даже геометрически разрешимой (по крайней мере при  $n \geq 3$ ).

Я думаю, что множества  $A_k, B_k, C_k$  не являются допустимыми даже при небольших значениях  $k$ , возможно, уже при  $k = 2$  (при  $k = 1$  эти множества являются допустимыми при любом  $n$  по классической теореме Ляпунова).

**Замечание 5.** Я думаю, что проблемы интегрируемости в квадратурах и полной интегрируемости гамильтоновых систем не являются ни аналитически, ни даже геометрически разрешимыми (в некотором смысле, близком к описанному выше для бинарных локальных задач).

**Замечание 6.** Возможно даже, что существуют вполне интегрируемые системы, интегрируемость которых не может быть установлена при помощи аналитических операций, применяемых к данным задачи (а именно, к выражению гамильтониана в стандартных координатах  $(p, q)$  в фазовом пространстве). Я не вижу причин, по которым это не может иметь места, например, для полиномиальных гамильтонианов.

**Замечание 7.** Я полагаю, что доказательство неразрешимости таких задач, как проблема устойчивости (в описанном выше смысле), невозможно без настоящего прогресса в понимании поведения динамических систем: эта задача не из области логики.

Предыдущие задачи, следуя русской традиции, сформулированы в наименьшей возможной общности. Обобщить их нетрудно. Однако

я считаю, что именно конкретные задачи остаются главным (и, вероятно, единственным) источником вдохновения математиков во всех общих теориях.

## Литература

- [1] Arnold V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: *Developments in Mathematics: The Moscow School*, eds. V. I. Arnold, M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.
- [2] Novikov S. P. Quasiperiodic structures in topology. In: *Topological Methods in Modern Mathematics. J. W. Milnor's Jubilee Volume*. Houston, TX: Publish or Perish, 1993, 223–233.
- [3] Арнольд В. И. Топологические и эргодические свойства замкнутых дифференциальных 1-форм с несоизмеримыми периодами. *Функц. анализ и его прилож.*, 1991, **25**(2), 1–12.
- [4] Арнольд В. И. Полиинтегрируемые потоки. *Алгебра и анализ*, 1992, **4**(6), 54–62.
- [5] Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе. *ДАН СССР*, 1953, **93**(5), 763–766.
- [6] Artin M., Mazur B. On periodic points. *Ann. Math.*, 1965, **81**, 82–99.
- [7] Росалес Г. Э. О росте чисел периодических орбит динамических систем. *Функц. анализ и его прилож.*, 1991, **25**(4), 14–22.  
Росалес Г. Э. О росте числа долгопериодических решений дифференциальных уравнений. *Функц. анализ и его прилож.*, 1992, **26**(2), 29–35.
- [8] Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика. В кн.: *Proc. Intern. Congr. Math. (1954). Vol. I*. Amsterdam, 1957, 315–333.
- [9] Arnold V. I. Dynamics of intersections. In: *Analysis, et cetera. Proc. Conf. in Honour of J. Moser*, eds. P. Rabinowitz and E. Zehnder. Boston, MA: Academic Press, 1990, 77–84.
- [10] Arnold V. I. Dynamics of complexity of intersections. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 1990, **21**(1), 1–10.
- [11] Chern S. S., Lashof R. K. On the total curvature of immersed manifolds. *Amer. J. Math.*, 1957, **79**, 306–318; *Michigan Math. J.*, 1958, **5**, 5–12.
- [12] Козловский О. С. Динамика пересечений аналитических многообразий. *Докл. АН*, 1992, **323**(5), 823–825.
- [13] Arnold V. I. Majoration of Milnor numbers of intersections in holomorphic dynamical systems. In: *Topological Methods in Modern Mathematics. J. W. Milnor's Jubilee Volume*. Houston, TX: Publish or Perish, 1993, 379–390.
- [14] Shub M., Sullivan D. A remark on the Lefschetz fixed points formula for differentiable maps. *Topology*, 1974, **13**, 189–191.

- [15] Варченко А. Н. Оценка числа нулей абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы. *Функц. анализ и его прилож.*, 1984, 18(2), 14–25.
- [16] Хованский А. Г. Вещественные аналитические многообразия со свойством конечности и комплексные абелевы интегралы. *Функц. анализ и его прилож.*, 1984, 18(2), 40–50.
- [17] Петров Г. С. О числе нулей полных эллиптических интегралов. *Функц. анализ и его прилож.*, 1984, 18(2), 73–74.  
Петров Г. С. Эллиптические интегралы и их неколеблемость. *Функц. анализ и его прилож.*, 1986, 20(1), 46–49.  
Петров Г. С. Чебышевское свойство эллиптических интегралов. *Функц. анализ и его прилож.*, 1988, 22(1), 83–84.  
Петров Г. С. Комплексные нули эллиптического интеграла. *Функц. анализ и его прилож.*, 1989, 23(2), 88–89.  
Петров Г. С. Неколеблемость эллиптических интегралов. *Функц. анализ и его прилож.*, 1990, 24(3), 45–50.  
Петров Г. С. Вопрос о числе нулей эллиптического интеграла является полуалгебраическим. *Матем. заметки*, 1988, 44(3), 393–401.
- [18] Арнольд В. И. Теоремы Штурма и симплектическая геометрия. *Функц. анализ и его прилож.*, 1985, 19(4), 1–10.
- [19] Гивенталь А. Б. Теоремы Штурма для гиперэллиптических интегралов. *Алгебра и анализ*, 1989, 1(5), 95–102.
- [20] Арнольд В. И. Замечания об особенностях конечной коразмерности в комплексных динамических системах. *Функц. анализ и его прилож.*, 1969, 3(1), 1–6.
- [21] Арнольд В. И. Бифуркации инвариантных многообразий дифференциальных уравнений и нормальные формы окрестностей эллиптических кривых. *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, 10(4), 1–12.
- [22] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
- [23] Herman M. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Publ. Math. IHES*, 1979, 49, 5–233.
- [24] Арнольд В. И. О локальных задачах анализа. *Вестн. МГУ, сер. I, матем., механ.*, 1970, 25(2), 52–56.
- [25] Thom R., Arnold V. I., Smale S. Dynamical systems and differential equations. In: *Mathematical developments arising from Hilbert problems*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 59–62. (Proc. Sympos. Pure Math., 28)
- [26] Fried D. Periodic points of holomorphic maps. *Topology*, 1986, 25(4), 429–441.



## Математические задачи в классической физике

Математика — это название для тех областей теоретической физики, которые временно вышли из моды. Немодность обладает тем преимуществом, что она позволяет строго и глубоко исследовать корректно заданные математические модели. Спящая «физическая теория» может быть сформулирована как цепь утверждений, имеющих точный математический смысл математических гипотез. Такие гипотезы могут быть в дальнейшем доказаны или опровергнуты. Во многих случаях математические задачи, возникающие на этом пути, чрезвычайно сложны, и прогресс в их решении довольно медленный. Гораздо легче получить новый результат в неизученной области. Поэтому большинство исследователей старательно избегает даже размышлять над старыми классическими проблемами.

С другой стороны, большинство новых открытий в физике получены путем последовательного применения физиками теорий, развитых математиками в ранее немодных областях. Следовательно, полезно публиковать время от времени списки спящих задач в немодных областях — просто чтобы знать, что эти задачи все еще не решены.

Включение той или иной задачи в приведенный ниже список не отражает ее объективной важности; выбор основан, скорее, на моем личном вкусе.

### 1. Дифференциальные инварианты и функциональные модули

Рассмотрим произвольную локальную классификационную задачу: мы классифицируем некоторые объекты (например, функции, поля, многообразия, или отображения) и мы называем два объекта эквивалентными, если один из них может быть переведен в другой подходящей заменой координат.

**Пример 1.** Классификация римановых (или эйнштейновых) метрик  $f$  в окрестности точки пространства с точностью до сохраняющего эту точку локального диффеоморфизма пространства.

**Пример 2.** Классификация векторных полей  $f$  на многообразии в окрестности особой точки поля с точностью до сохраняющего эту точку локального диффеоморфизма многообразия.

**Пример 3.** Классификация гладких отображений  $f: M^m \rightarrow N^n$  в окрестности точки  $x \in M$  с точностью до локальных диффеоморфизмов  $M$  и  $N$ , сохраняющих  $x$  и  $f(x)$ .

**Пример 4.** Классификация гамильтоновых векторных полей  $f$  в окрестности особой точки поля с точностью до локального симплектоморфизма, сохраняющего эту точку.

**Пример 5.** Локальная классификация дифференциальных уравнений вида  $y'' = f(x, y, y')$ .

**Пример 6.** Классификация ростков гиперкелеровых структур на многообразии размерности  $4n$  с точностью до локальных диффеоморфизмов.

Классические нормальные формы, к которым можно привести эти объекты действием соответствующей бесконечномерной группы, содержат произвольные функции. В большинстве случаев эти функции зависят от меньшего числа переменных, чем исходные объекты.

Тем не менее, подобные описания выглядят зависящими от выбора конкретного алгоритма редукции. Существует ли внутренний, бескоординатный смысл в утверждении, что ответ «зависит от  $m$  произвольных функций от  $n$  переменных»? Эти произвольные функции, внутренним образом связанные с объектами нашей классификации, называются *функциональными модулями*.

Формально задача может быть сформулирована следующим образом [1]. Мы начинаем с некоторого функционального пространства объектов, которые мы хотим классифицировать (или их рядов Тейлора в точке). На этом пространстве действует группа диффеоморфизмов.

Зафиксируем некоторое натуральное число  $k$  и рассмотрим  $k$ -струи (многочлены Тейлора степени  $k$ ) наших объектов. Они образуют конечномерное многообразие. Действие группы диффеоморфизмов определяет действие соответствующей конечномерной группы Ли на конечномерном пространстве струй.

Рассмотрим размерность пространства орбит в точке, соответствующей  $k$ -струе данного объекта  $f$ . Назовем эту размерность пространства орбит  $k$ -струи объекта  $f$  *числом модулей  $k$ -струи* и обозначим



его через  $m(k)$ . Чтобы описать все эти числа модулей в совокупности, определим ряд Пуанкаре чисел модулей

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m(k)t^k.$$

Если объекты зависят регулярно от  $q$  произвольных функций от  $p$  переменных в качестве модулей, то ряд Пуанкаре является рациональной функцией, а именно,  $M(t) = q/(1-t)^{p+1}$ .

**Задача.** Являются ли ряды Пуанкаре чисел модулей в большинстве локальных проблем анализа рациональными функциями?

Например, верно ли это для примеров 1–6 для почти всех  $f$  (для всех  $f$ , не принадлежащих некоторому подмножеству бесконечной ко-размерности в пространстве рядов Тейлора)?

В некотором смысле ситуация здесь аналогична той, которая имеет место в теореме Гильберта о конечности базиса идеала, заданного ростками произвольного набора аналитических функций. Отличие от классической теории состоит в том, что наши задачи принадлежат дифференциальной алгебре, а не коммутативной алгебре.

Теорема конечности в дифференциальной алгебре была по крайней мере сформулирована Трессе [2], учеником Ли. Он утверждает, что все дифференциальные инварианты порождены конечным числом инвариантных функций и инвариантных векторных полей (рассматриваемых в качестве дифференциальных многочленов). Однако не вполне ясно, какие точно должны быть предположения для справедливости этой теоремы. Ее доказательство, насколько мне известно, до сих пор не воспринято современной математикой и не прочитано на уровне современных критериев математической строгости. Приведенные выше вопросы о рядах Пуанкаре могут рассматриваться в качестве теста на зрелость теории дифференциальных инвариантов.

## 2. Логарифмические асимптотики и волновые фронты

Асимптотические разложения многих функций в математической физике содержат не только обычные мономы от координат, но также логарифмы: члены таких разложений имеют вид

$$(x_1^{n_1} \log^{m_1} x_1)(x_2^{n_2} \log^{m_2} x_2) \dots (x_k^{n_k} \log^{m_k} x_k),$$

где координаты  $x_i$  малы.

Для гладких или аналитических функций и отображений имеется теория достаточных струй в однородной или квазиоднородной градуировке (см., например, [3]). Эта теория позволяет пренебрегать «членами высокого порядка» разложения Тейлора в начале координат, когда топологическая (или даже аналитическая) структура объекта (функции, многообразия, отображения) определяется членами низшего порядка. Например, поведение функции в окрестности критической точки определяется членами второго порядка при условии, что они образуют невырожденную квадратичную форму («лемма Морса»).

*Возможно ли построить подобную теорию для разложений, содержащих логарифмические члены?*

Разумеется, логарифмы не меняют относительную силу двух обычных мономов, если их силы различны (так,  $x^2 \log^3 x$  слабее, чем  $x$ ). Однако  $x_1 \log x_1$  сильнее, чем  $x_2$  (в однородной градуировке).

Теория достаточных струй должна дать условия на системы мономов, содержащих логарифмы, при которых добавление членов более высокого порядка не влияет на топологическую или комбинаторную структуру объекта.

**Пример.**  $x^2 +$  (члены высшего порядка) имеет минимум в начале координат, даже если члены высшего порядка содержат логарифмы.

В качестве примера, где такая теория могла бы дать осмысленную информацию о физическом явлении, я упомяну *перестройки фронтов, управляемых вариационными принципами* в неоднородной нестационарной среде.

На уровне геометрической оптики эволюция волновых фронтов и типичные особенности систем лучей описываются рядами, содержащими логарифмы. Эти ряды приведены в [4], где можно найти также описания особенностей волновых фронтов и их типичных перестроек (рис. 1).

В действительности, на рис. 1 представлены типичные (нележандровы) проекции соответствующих лежандровых поверхностей из пятимерного контактного многообразия на трехмерное пространство, в то время как перестройки волновых фронтов описываются лежандровыми проекциями этих поверхностей на трехмерное пространство-время. Эти рисунки основаны на изучении «главной» части разложений, содержащих логарифмические члены.

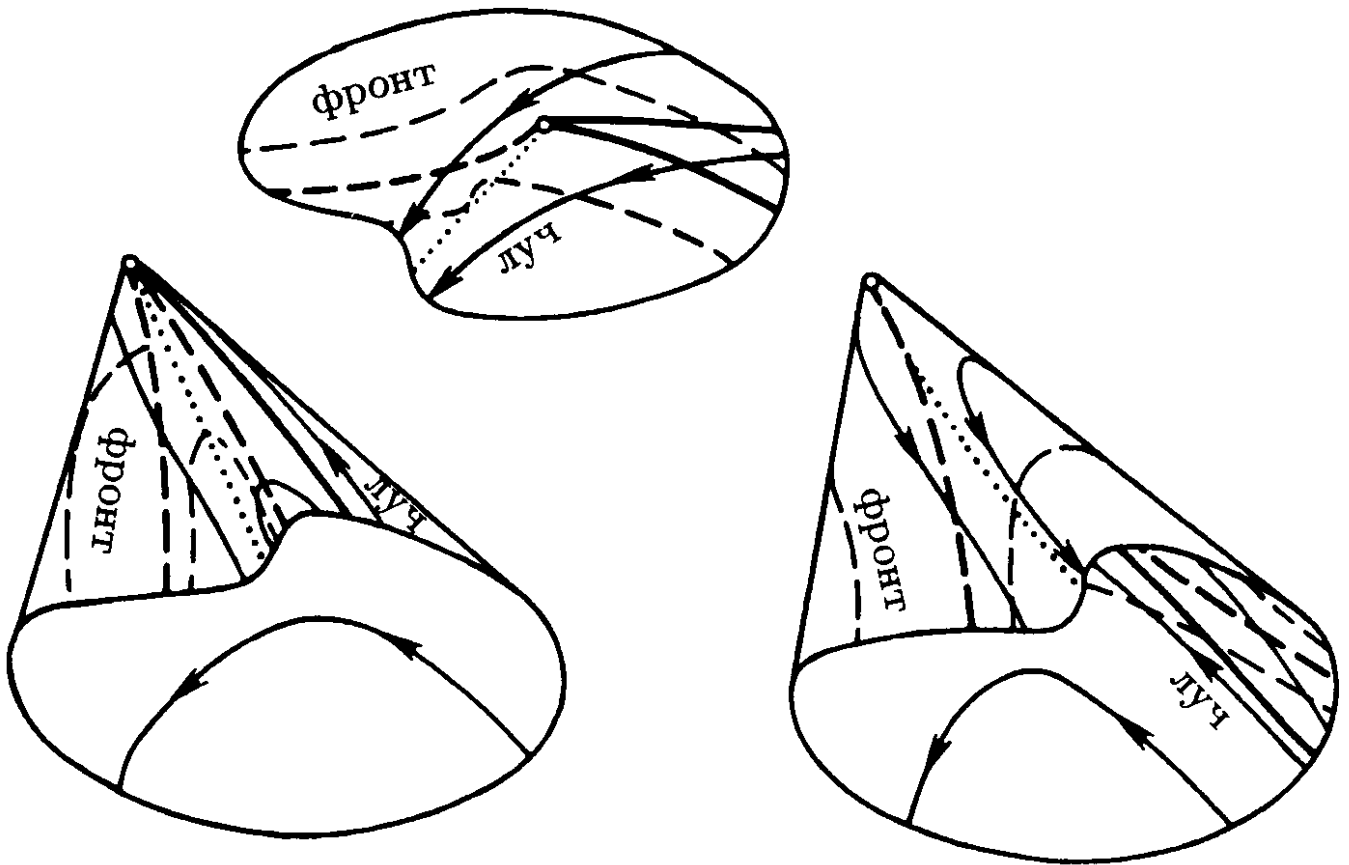


Рис. 1. Перестройки волновых фронтов  
при двукратном собственном значении

Не доказано, что обрывание разложений не изменит картины особенностей и их перестроек. Такое изменение кажется невероятным, но его невозможность не доказана. Отсутствие математических средств для изучения этой тестовой задачи показывает, как слабо наше понимание топологической структуры функций, зависящих от более, чем одной переменной, и имеющих в асимптотическом разложении логарифмы.

### 3. Гидродинамические аттракторы

Наблюдения показывают, что когда число Рейнольдса становится большим, движение жидкости становится хаотичным и турбулентным. Вопреки наличию большого количества математических работ, нет теорем, объясняющих это явление. Я приведу некоторые старые гипотезы, обсуждавшиеся еще в 1950-х (см. [5]) и, может быть, даже раньше, которые до сих пор остаются открытыми.

Рассмотрим систему уравнений Навье–Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости. Уравнение для поля завихренности  $\mathbf{r}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{r} / \partial t + \{\mathbf{v}, \mathbf{r}\} &= \nu(\Delta \mathbf{r} + \mathbf{R}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \mathbf{r}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \end{aligned}$$

где  $\{\cdot, \cdot\} = \operatorname{rot}(\cdot \wedge \cdot)$  — скобка Пуассона,  $\Delta$  — лапласиан,  $\nu$  — вязкость (малый параметр) и  $\nu \mathbf{R}$  — ротор внешней силы. Предположим для простоты, что наложены периодические граничные условия (областью движения является трехмерный тор  $T^3 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ ), и что поле  $\mathbf{R}$  имеет тот же период.

**Гипотеза 1.** *Существует минимальный аттрактор, размерность которого растет неограниченно при исчезающей вязкости ( $\dim \rightarrow \infty$  при  $\nu \rightarrow 0$ ).*

**Гипотеза 2.** *Минимум размерностей аттракторов системы Навье–Стокса растет неограниченно при исчезающей вязкости.*

**Замечание 1.** Поле внешних сил выбрано пропорциональным вязкости  $\nu$  для того, чтобы сделать размер аттракторов независимым от числа Рейнольдса.

**Замечание 2.** А. Н. Колмогоров (1958) предполагал, что гипотеза 2 может оказаться ошибочной, но у него не было сомнений по поводу гипотезы 1, даже для потоков на двумерных торах с внешними силами, заданными первыми гармониками (скажем, для  $\mathbf{R} = \sin y$ ).

**Замечание 3.** Аттракторы типа Лоренца отвечают несколько иным, но подобным моделям. Система Лоренца, так же, как и система Колмогорова, может быть записана в виде (бесконечной) системы обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичными функциями в правой части:

$$\dot{X}_i = \sum a_{jk}^i X_j X_k - b_i X_i + c_i.$$

Первый (квадратичный) член соответствует инерциальному члену  $\{\mathbf{v}, \mathbf{r}\}$  системы Навье–Стокса. Он имеет интеграл энергии вида  $E = \sum X_i^2 / 2$  (при подходящей перенормировке координат  $X_i$ ),

$$\dot{E} = 0, \quad \text{если } b_i = c_i = 0.$$

Баланс энергии, благодаря рассеиванию вследствие вязкости (линейный член) и накачке энергии внешними силами (постоянный член), имеет вид

$$\dot{E} = - \sum b_i X_i^2 + \sum X_i c_i.$$

Таким образом, происходит рассеивание энергии вне некоторого эллипсоида в фазовом пространстве и ее рост внутри эллипсоида.

Для модели Лоренца область накачки в фазовом пространстве является внутренностью квадратичного конуса. Это неограниченная область. Подобная крайняя неустойчивость движения в моделях типа Лоренца делает возможным доказать численно (и даже строго) существование многомерных аттракторов в таких моделях.

Для исходной системы Навье–Стокса (даже в размерности 2) до сих пор нет таких строгих результатов.

#### 4. Быстрое динамо и задачи стохастизации

Рассмотрим линейное уравнение идеальной магнитогидродинамики, где заданное поле скоростей  $\mathbf{v}$  несжимаемой жидкости стационарно (не зависит от времени). Неизвестное магнитное поле  $\mathbf{B}$  растягивается движением частиц жидкости, в то время как медленная магнитная диффузия рассеивает магнитную энергию:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \{\mathbf{v}, \mathbf{B}\} = \mu \Delta \mathbf{B}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

где магнитная вязкость  $\mu$  является малым параметром и  $\{\cdot, \cdot\}$  — скобка Пуассона векторных полей.

Предположим для простоты, что граничные условия периодические («звезда» или «планета»), рост магнитного поля которой мы моделируем, заменена трехмерным тором  $\mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3$ ). Следующий вопрос был сформулирован Я. Б. Зельдовичем.

*Существует ли бездивергентное поле скоростей  $\mathbf{v}$  такое, что магнитное поле  $\mathbf{B}$  экспоненциально растет со временем для некоторого начального поля  $\mathbf{B}_0$ ?*

Такое поле  $\mathbf{v}$  называется быстрым кинематическим динамо — при условии, что инкремент магнитного поля отделен от нуля некоторой положительной константой, когда магнитное число Рейнольдса  $1/\mu$  неограниченно возрастает:

$$\mathbf{B} = e^{i\lambda t} \mathbf{B}_0, \quad \operatorname{Re} \lambda(\mu) > C > 0, \quad \mu \rightarrow 0.$$

Существует ли бездивергентное векторное поле  $v$ , являющееся быстрым кинематическим динамо?

Возрастание магнитного поля происходит вследствие растяжения частиц жидкости потоком. Следовательно, естественно предположить, что векторное поле  $v$  быстрого динамо должно иметь положительные показатели Ляпунова на множестве начальных точек положительной меры.

Эта старая гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута. М. М. Вишик доказал, что если векторное поле  $v$  является быстрым динамо, то у него обязательно существует точка с положительным показателем Ляпунова. Так как большинство полей скоростей имеют точки с положительным показателем Ляпунова, эта теорема не исключает практически никаких кандидатов из числа бездивергентных полей; они могли бы быть полями быстрого кинематического динамо.

Численные эксперименты с так называемыми  $ABC$  потоками (являющимися собственными векторами оператора  $\text{rot}$  на  $T^3$ ) демонстрируют эффект динамо (с тем же порядком инкремента, что и у эмпирического числа Ляпунова) для магнитного числа Рейнольдса  $1/\mu$  в интервалах от 10 до 20 [6] и от 30 до по крайней мере 100 [7] (рис. 2).

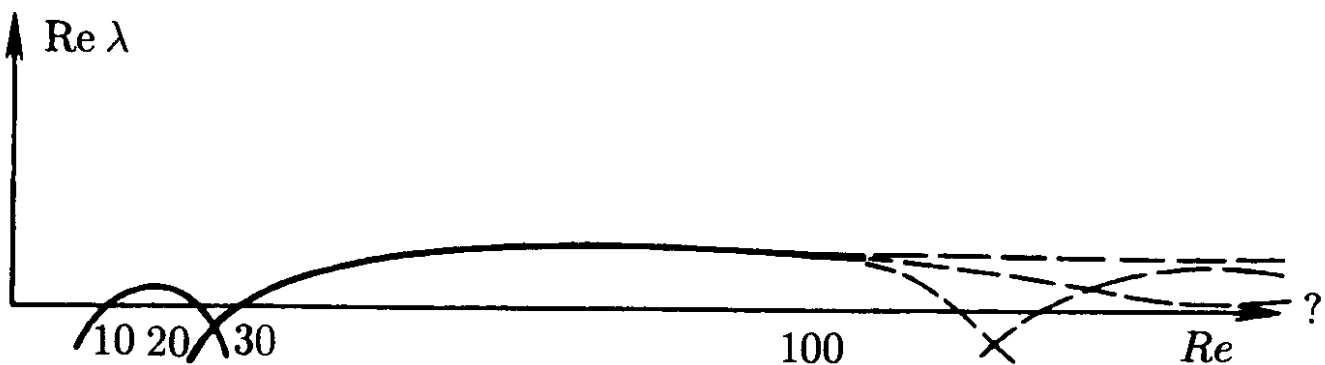


Рис. 2. Инкремент в задаче быстрого динамо как функция магнитного числа Рейнольдса

Имеется окно без динамо-эффекта между числами Рейнольдса 20 и 30. Не ясно, достигается ли асимптотика при числе Рейнольдса 100. Можно предположить, либо что существует бесконечная последовательность окон при  $1/\mu \rightarrow \infty$ , либо что инкремент,  $\text{Re } \lambda(\mu)$ , асимптотически убывает к нулю, либо что  $\liminf \text{Re } \lambda(\mu) > C > 0$ .

Численно это представляет собой задачу нахождения первого собственного числа для матриц порядка многих миллионов даже для умеренных чисел Рейнольдса (сотни). Физически значимые магнитные чи-

сла Рейнольдса имеют порядок  $10^8$ . Соответствующие матрицы являются (и всегда останутся) слишком большими для любых компьютеров.

Собственные функции, соответствующие возрастающим колебаниям, обнаруживают специфическую концентрацию в окрестностях инвариантных многообразий стационарных точек потока. Это наблюдение дает возможность коротковолнового «квазиклассического» асимптотического анализа явления концентрации.

Имеется упрощенная модель задачи динамо, в которой членом «диффузии» пренебрегают, и для которой механизм «физического» динамо предложен Я. Б. Зельдовичем [8] и А. Д. Сахаровым.

Рассмотрим трехмерный шар («звезду») и бездивергентное векторное поле в нем («магнитное поле»).

Диффеоморфизм шара в себя, сохраняющий элемент объема, моделирует стационарное движение проводящей жидкости внутри звезды.

*Существует ли такой диффеоморфизм, при итерациях которого энергия начального векторного поля экспоненциально растет с числом итераций?*

Если  $B_0$  — начальное магнитное поле и  $g$  — диффеоморфизм, то требуется, чтобы для всех  $n$

$$\iiint (g_*^n B_0)^2 d^3x \geq C e^{\lambda n}, \quad \lambda > 0.$$

Решение, предложенное Зельдовичем и Сахаровым, задается следующей конструкцией. Мы начинаем с полнотория  $S^1 \times D^2$ , погруженного в шар. Растянем  $S^1$  в два раза, сжав при этом  $D^2$  так, чтобы элемент объема сохранился. Затем сложим вдвое новое полноторие (используя двулистное накрытие  $S^1 \rightarrow S^1$ ; рис. 3) и поместим полученное полноторие на прежнее место.

Энергия векторного поля в полнотории, направленного вдоль параллелей (образующей  $S^1$  полнотория), растет экспоненциально при итерациях этой конструкции, так как поле растягивается в два раза при растяжении полнотория вдоль параллелей.

К сожалению, построенное отображение не является диффеоморфизмом шара. Делая его гладким, мы теряем контроль над растяжением в некоторой конечной части полнотория. Наличие этих маленьких частей не позволяет доказать экспоненциальный рост энергии. В любом случае мы встречаемся с той же сложностью, которая хорошо известна в теории стохастизации гамильтоновых динамических систем в гомоклинической точке; несмотря на то, что существование хаоса типа

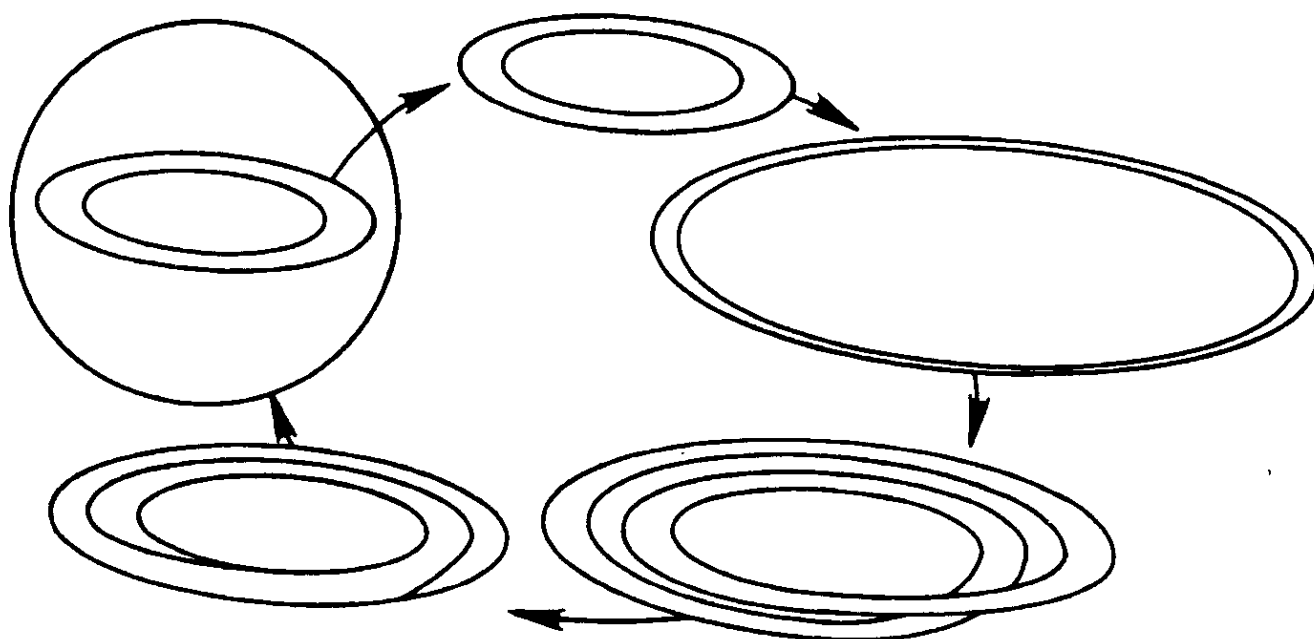


Рис. 3. Механизм топологического динамо Зельдовича-Сахарова

Бернулли известно еще с классических работ Алексеева [9], до сих пор неизвестно, имеет ли соответствующее инвариантное множество в фазовом пространстве положительную или нулевую меру.

**Замечание.** Следующая идея (принадлежащая М. Эрману) могла бы решить проблему. Рассмотрим эллиптическую кривую как двулистное накрытие сферы, разветвленное в четырех точках. Рассмотрим на торе автоморфизм Аносова (скажем,  $(x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$ ), итерированный 6 раз. Он индуцирует диффеоморфизм сферы с положительным показателем Ляпунова. После раздутия четырех фиксированных точек ветвления получается диффеоморфизм диска с тремя дырами с почти всюду положительными показателями Ляпунова. Это может быть осуществлено внутри шара.

## 5. Минимальное магнитное поле

Рассмотрим бездивергентное векторное поле на римановом трехмерном многообразии (магнитное поле внутри звезды). Сохраняющие объем диффеоморфизмы (движения идеально проводящей несжимаемой среды внутри звезды) переносят векторное поле (поле «вморожено»).

Для данного начального бездивергентного векторного поля мы ищем диффеоморфизм, который минимизирует энергию поля.



С физической точки зрения предполагается, что сила Лоренца, создаваемая магнитным полем, заставляет двигаться среду до тех пор, пока энергия поля не достигнет своего минимально возможного значения. Таким образом, часть магнитной энергии преобразуется в кинетическую энергию движения. Затем она рассеивается гидродинамической вязкостью. Окончательно движение остановится, когда энергия магнитного поля достигнет минимума.

С точки зрения математика мы ищем не минимум, а инфимум (точную нижнюю грань), так как минимум на группе  $SDiff$  сохраняющих объемы диффеоморфизмов может не достигаться.

Если минимум не достигается, последовательность минимизирующих диффеоморфизмов может сходиться к негладкому или даже разрывному отображению, сохраняющему объемы, и соответствующее поле может также становиться довольно плохим.

Не ясно, однако, насколько патологическим оно может оказаться в действительности даже в следующей простой двумерной модели [10].

Рассмотрим гладкую функцию  $u_0$ , заданную на диске  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Задача.** Найти инфимум интеграла Дирихле

$$I[u] = \iint \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy$$

на множестве всех гладких функций  $u$ , которые могут быть получены из  $u_0$  сохраняющим площади диффеоморфизмом диска на себя.

Предположим для простоты, что  $u_0$  равно нулю на границе и имеет единственной критической точкой максимум внутри диска. Тогда минимум достигается на функции, зависящей только от расстояния до центра диска, чьи множества меньших значений  $\{x, y : u(x, y) \leq c\}$  имеют те же площади, что и у исходной функции  $u_0$  (по существу, это следует из изопериметрического неравенства и неравенства Шварца).

Если начальная функция имеет больше критических точек (скажем, два максимума и седловую точку; рис. 4), ситуация не столь проста.

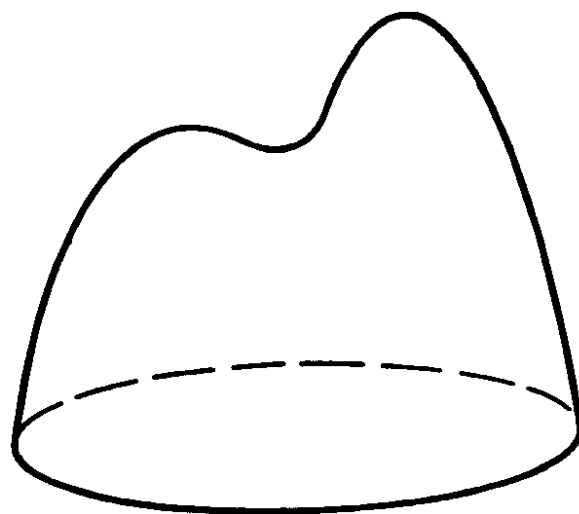


Рис. 4. График функции, интеграл Дирихле которой необходимо минимизировать

Согласно некоторым численным экспериментам, минимизирующая интеграл Дирихле функция должна иметь особую линию, но я не знаю ни одной теоремы, относящейся к этому случаю.

Вариационные задачи подобного типа возникают также при изучении установившихся потоков идеальной (несжимаемой, невязкой) жидкости. Уравнения Эйлера в обоих случаях формально совпадут, если мы заменим магнитное поле в задаче о магнитном поле на завихренность в гидродинамике. В двумерном случае это стационарное уравнение Эйлера связывает между собой неизвестную функцию и ее лапласиан:

$$J(u, \Delta u) = 0,$$

где  $J(f, g)$  — якобиан (в гидродинамическом случае  $u$  — функция тока).

Ситуация в трехмерной задаче даже еще хуже, чем в приведенном выше двумерном случае. Имеются топологические причины для того, чтобы минимизирующего диффеоморфизма не существовало. Топологические свойства экстремального векторного поля (удовлетворяющего вариационному уравнению Эйлера) очень специфичны. Эти экстремальные поля либо интегрируемые (имеют вложенные системы инвариантных торов), либо бессилловые (как собственные вектора оператора  $\text{rot}$ ). Бездивергентные начальные векторные поля, как правило, не диффеоморфны никакому экстремальному полю. По-видимому, инфимум не достигается, даже если заменить диффеоморфизмы гомеоморфизмами. Задача математического описания минимизирующих последовательностей в этом случае открыта; не существует даже гипотез, насколько мне известно. Известно только, что инфимум может быть нулем, если линии начального поля незацеплены (А. Д. Сахаров 1973, М. Фридман 1991). Инфимум положителен, если спиральность начального поля положительна [10], или если существуют по крайней мере две зацепленные линии поля [11].

Сложность трехмерной гидродинамики (например, сложность задачи существования и единственности решения трехмерного уравнения Навье–Стокса) связана, по-видимому, с тем же геометрическим различием между топологическими свойствами орбит в коприсоединенном представлении группы  $\text{SDiff}$  сохраняющих объемы диффеоморфизмов в размерностях два и три, которое отвечает за обсуждавшееся выше различие между двумерными и трехмерными экстремальными магнитными полями. Именно, в размерности два существует бесконечная по-

следовательность «интегралов типа энстрофии», являющихся функциями на пространстве полей, инвариантными относительно коприсоединенного действия. Поэтому орбиты являются замкнутыми подмногообразиями бесконечной коразмерности в пространстве двумерных векторных полей. В трехмерном же случае никаких таких интегралов, за исключением спиральности, не известно. Вероятно, они не существуют, и орбиты общего положения плотны в многообразиях уровня функционала спиральности в некотором пространстве трехмерных полей [12].

## 6. Гравитационные ударные волны

Рассмотрим пылевидную гравитирующую среду в обычном евклидовом трехмерном пространстве (мы пренебрегаем расширением Вселенной и релятивистскими эффектами). Предположим, что начальное распределение частиц описывается гладкой положительной функцией плотности и что начальное поле скоростей гладко и потенциально (имеются физические основания для последнего допущения: порядок роста непотенциальных возмущений меньше, чем потенциальных; см. [13]). Модель невзаимодействующих частиц показывает, что особенности функции плотности возникают в тех местах, где более быстрые частицы обгоняют более медленные. Компьютерные эксперименты показывают, что эти же особенности появляются и в случае, когда частицы движутся в гравитационном поле, порожденном всем распределением частиц.

Эти особенности образуют своеобразную ячеистую структуру. Особенности плотности образуют поверхности «каустики». Эти поверхности каустики разбивают пространство на *пустоты* — области малой плотности частиц. Каустики, образующие стенки пустот, сами имеют особенности вдоль некоторых линий, где плотность выше, чем в общих точках каустики. В свою очередь, эти линии имеют особые точки, где плотность еще выше, чем на линиях. Вся система каустик развивается во времени, и в отдельные моменты времени происходят перестройки. В моменты перестроек функция плотности имеет необычно высокий порядок особенности.

Для модели невзаимодействующих частиц вся картина имеет обоснование в математической теории лагранжевых особенностей [3]. Лагранжево подмногообразие фазового пространства — математический

эквивалент потенциальных потоков у физиков. Эволюция во времени фазовых точек описывается гамильтоновыми дифференциальными уравнениями. Фазовый поток гамильтоновой системы переводит лагранжевы многообразия в лагранжевы многообразия. Однако даже в случае, когда начальное лагранжево подмногообразие образует сечение кокасательного расслоения физического пространства (каждой физической точке соответствует единственный вектор скорости), образ этого лагранжева многообразия, перенесенного гамильтоновым фазовым потоком, может уже не быть сечением (рис. 5). Это означает, что поле скоростей может стать многозначным. Через одну и ту же «точку физического пространства» может одновременно двигаться несколько потоков частиц с различными полями скоростей — при условии, что их полные плотности не слишком большие.

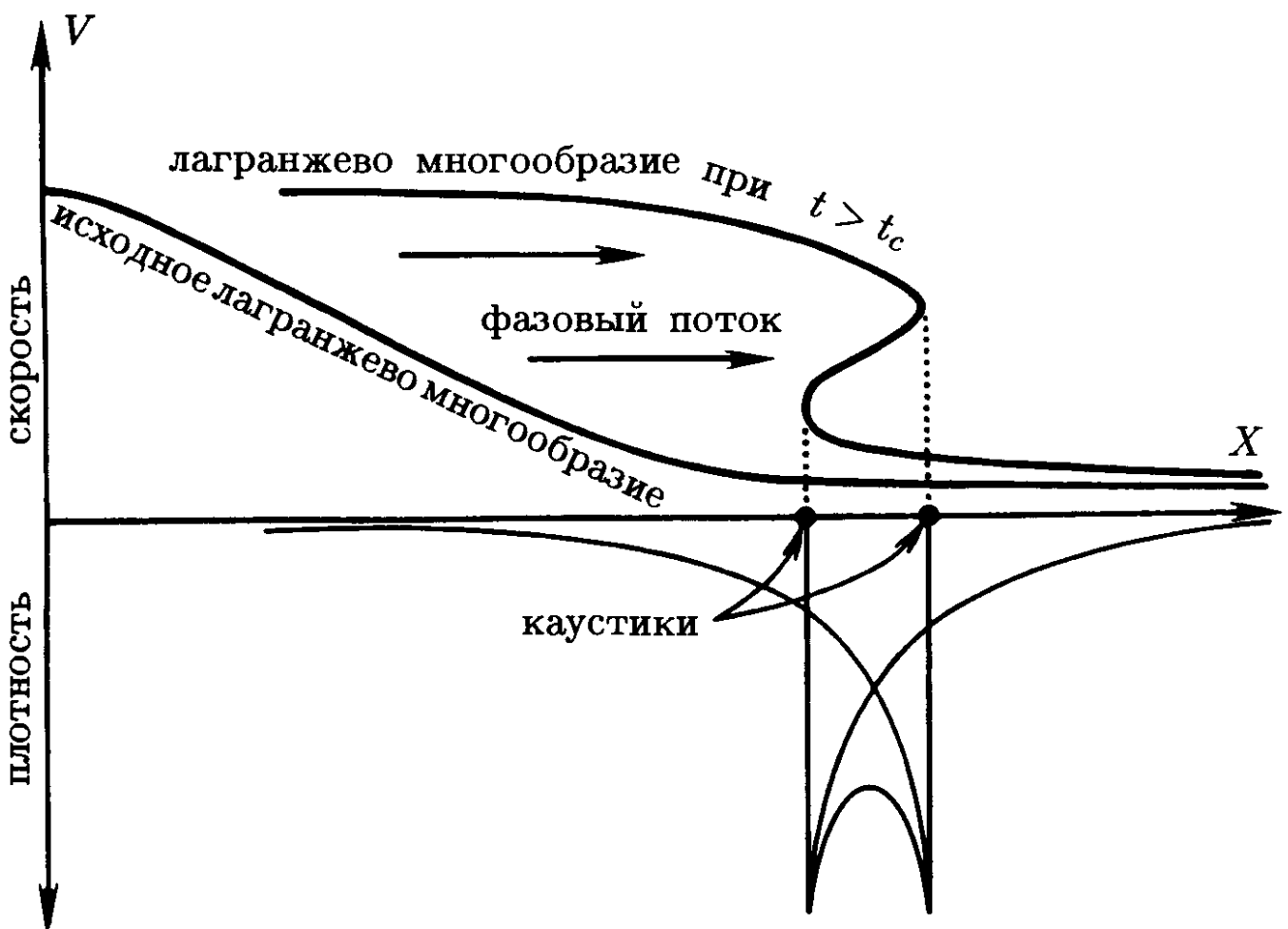


Рис. 5. Каустики и многозначное поле скоростей, порожденные эволюцией пылевидной среды

Каустики — это множества критических значений проекций лагранжевых подмногообразий на физическое пространство. Иерархия

особенностей каустик хорошо понята в теории лагранжевых особенностей и объясняет ячеистую структуру, описанную выше.

Компьютерные эксперименты с гравитационно взаимодействующими частицами показывают в сущности аналогичную общую картину возникновения особенностей, но математическое описание этих явлений гораздо менее полно.

С математической точки зрения задача состоит в изучении так называемой системы уравнений Власова–Пуассона. Эта система определяет эволюцию плотности фазовых точек в фазовом пространстве. Движение фазовых точек описывается гамильтоновой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Функция Гамильтона есть сумма стандартной кинетической энергии и потенциальной энергии, заданной гравитационным потенциалом распределения масс в физическом пространстве. Последнее распределение получается из плотности в фазовом пространстве интегрированием вдоль пространства скоростей, или импульсов (вдоль слоев кокасательного расслоения). Получается замкнутая система уравнений относительно зависящего от времени неизвестного распределения в фазовом пространстве. Система содержит дифференциальные уравнения переноса и уравнение Пуассона для потенциала. Правая часть уравнения Пуассона — интеграл от плотности в фазовом пространстве вдоль слоев.

Начальные условия заданы распределением, сосредоточенным на лагранжевом подмногообразии в фазовом пространстве, представляющем потенциальное векторное поле. Такое распределение определяет также плотность частиц в физическом пространстве. Мы предполагаем, что начальное распределение — это распределение общего положения в пространстве всех распределений, сосредоточенных вдоль лагранжевых сечений пространства кокасательного расслоения.

**Задача.** *Описать особенности гиперповерхностей каустик и плотности частиц в физическом пространстве после образования первых каустик.*

Лагранжево подмногообразие останется лагранжевым после эволюции, определенной уравнением Власова–Пуассона. Однако после появления каустик оно не будет больше гладким, а станет многообразием с особенностями над каустиками. Действительно, особенности проекции гладкого или негладкого лагранжева многообразия на физическое пространство порождают особенности плотности частиц в точках кау-

стик в физическом пространстве. Возникновение этих особенностей плотности делает гравитационный потенциал, а значит, и функцию Гамильтона, негладкими. Следовательно, отображения фазового потока не являются диффеоморфизмами над точками каустик. Поэтому гладкое вначале лагранжево подмногообразие фазового пространства переводится фазовым потоком в многообразие с особенностями над точками каустик.

Можно предполагать, что эти особенности относительно слабы в сравнении с общими лагранжевыми особенностями (на каустиках разрывны только члены более высокого порядка рядов Тейлора), и следовательно, топологическая структура должна быть та же, что и в случае невзаимодействующих частиц. Это, однако, не доказано даже для простейшего случая одномерной пылевидной среды, для которой гравитационный потенциал частицы равен расстоянию до нее [14]. В этом случае можно ожидать полукубическую особенность рождающейся каустики в двумерном пространстве-времени (расстояние между двумя только что родившимися точками каустики в физическом одномерном пространстве имеет порядок  $(t - t_c)^{3/2}$ , где  $t_c$  — момент образования каустик). Особенность плотности в точках каустик должна быть порядка  $-1/2$ .

Можно ожидать, что соответствующее лагранжево многообразие на фазовой плоскости имеет четыре особые точки (рис. 6). Две из них соответствуют точкам, где многообразие имеет вертикальную касательную. Эта вертикальность дает особенность плотности в физическом пространстве. Две остальные, более слабые, особенности лагранжева многообразия соответствуют пересечениям со слоями над точками каустик.

Несмотря на присутствие этих особенностей лагранжева многообразия, топологическая структура типичных каустик и их типичные бифуркации и особенности плотности, по-видимому, по существу такие же, как и в случае, когда взаимодействие частиц не принимается во внимание и соответствующее лагранжево многообразие остается гладким.

*Верно ли, что топологическая структура особенностей решения уравнений Власова-Пуассона для начальных распределений общего положения, сконцентрированных вдоль общих гладких лагранжевых сечений кокасательного расслоения, такая же, как и в случае уравнения Власова (где гравитационное взаимодействие не принимается во*

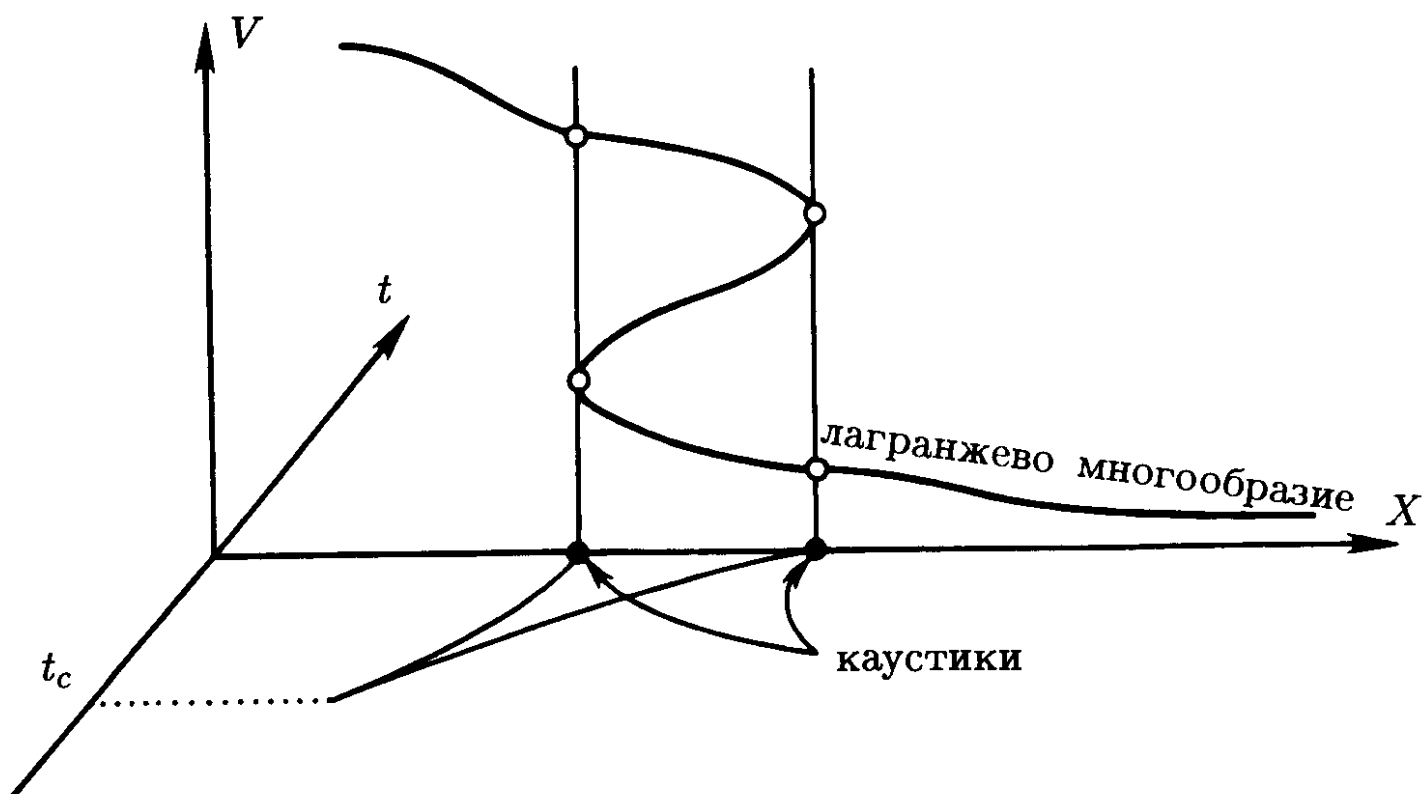


Рис. 6. Четыре особенности движущегося лагранжева многообразия в точках каустик

внимание)? Имеют ли особенности плотности в окрестности точек каустик и их особенностей такие же порядки, как и в случае невзаимодействующих частиц?

## 7. Осциллирующие интегралы

Осциллирующий интеграл — это функция вида

$$I(\hbar) = \int e^{iF(x)/\hbar} a(x) dx,$$

где  $\hbar \rightarrow 0$  — малый параметр, а фаза  $F$  — вещественная гладкая функция, заданная в  $\mathbb{R}^n$ . Мы будем для простоты предполагать, что амплитуда  $a$  имеет компактный носитель.

В соответствии с принципом стационарной фазы основной вклад в интеграл происходит от критических точек фазовой функции. Если фазовая функция  $F$  общего положения, то все ее критические точки невырождены (морсовские); в этом случае интеграл имеет асимптотическое поведение вида  $\hbar^{n/2}$  (Френель: см. [3] и [4]).

Если фазовая функция зависит от параметров, то при некоторых значениях этих параметров могут появляться неморсовские особенности даже для типичных семейств  $F(x, y)$  фазовых функций (где  $y$  —  $p$ -мерный параметр). Эти выделенные значения параметров называются *каустическими значениями*. Они на самом деле образуют каустическую лагранжеву подмногообразия, определенного условием стационарной фазы

$$\left\{ (y, z) : \partial F / \partial x = 0, \quad z = \partial F / \partial y \right\}$$

в пространстве кокасательного расслоения пространства параметров. В каустических точках пространства параметров интеграл больше, чем в остальных (некаустических):

$$I(h) \sim h^{n/2 - \beta(y)},$$

где число  $\beta$  называется *показателем осцилляции*, а « $\sim$ » означает, что мы пренебрегаем логарифмическими множителями вида  $\ln^\gamma h$ .

Показатель осцилляции зависит от особенности каустики. Для типичной точки на каустике общего положения  $\beta = 1/6$  (случай функции Эйри). Для обычного ребра возврата типичной каустики  $\beta = 1/4$ . Каждому типу особенности проекции лагранжева многообразия на базу кокасательного расслоения соответствует свой показатель осцилляции. Иерархия этих особенностей изучается в общей теории лагранжевых особенностей, в которой вычислены также показатели для всех особенностей, встречающихся в общих  $p$ -параметрических семействах при  $p \leq 10$  (см. [3] и [4]).

Физически  $F(x, y)$  означает оптическое расстояние от точки  $x$  источника до точки  $y$  наблюдения,  $h$  пропорционально длине волны, а интеграл  $I$  описывает яркость света в точке наблюдения.

Для любого числа  $p$  параметров имеется наихудшая особенность, встречающаяся неустранимо в общих  $p$ -параметрических семействах, т.е. имеющая максимальный показатель осцилляции  $\beta$ . Таким образом, имеется функция  $\beta(p)$  — максимальный показатель осцилляции для общих  $p$ -параметрических семейств. Если зафиксировать число  $n$  переменных  $x$  в интеграле, максимальный показатель осцилляции в  $p$ -параметрических семействах может уменьшиться:  $\beta_n(p) \leq \beta(p) = \beta_\infty(p)$ .

**Задача.** Вычислить асимптотическое поведение максимальных показателей осцилляции  $\beta(p)$  и  $\beta_n(p)$ , встречающихся в общих  $p$ -параметрических семействах осциллирующих интегралов от функций  $n$  переменных.



Естественная гипотеза состоит в том, что в случае, когда  $n$  не ограничено а priori, наилучшая фазовая функция имеет вид  $x_1^3 + \dots + x_n^3 + x_{n+1}^2 + \dots$  для подходящего  $n(p)$ , а в случае, когда  $n$  ограничено, — вид  $x_1^k + \dots + x_n^k$  для подходящего  $k(p)$ . Эти предположения приводят к следующим гипотезам:

$$\beta(p) \sim \sqrt{2p}/3 \quad (p \rightarrow \infty),$$

$$\beta_n(p) \sim n/2 - n/\sqrt[n]{n!p} + \dots \quad (p \rightarrow \infty).$$

## 8. Гамильтонов хаос

Рассмотрим аналитическую гамильтонову систему общего положения, близкую к интегрируемой:

$$H = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q, \varepsilon),$$

где возмущение  $H_1$  является  $2\pi$ -периодическим по угловым переменным  $(q_1, \dots, q_n)$ , и где невозмущенная функция Гамильтона  $H_0$  зависит от переменных действия  $(p_1, \dots, p_n)$  общим образом. Пусть  $n$  больше двух.

**Гипотеза 1** ([15], [16]). Для любых двух точек  $p', p''$  одной связной компоненты гиперповерхности уровня функции  $H_0$  в пространстве переменных действия существуют орбиты, соединяющие произвольно малую окрестность тора  $p = p'$  с произвольно малой окрестностью тора  $p = p''$ , если  $\varepsilon \neq 0$  достаточно мало и  $H_1$  общего положения.

**Гипотеза 2** ([15], [16]). Положение равновесия 0 общей аналитической гамильтоновой системы неустойчиво по Ляпунову, если квадратичная часть функции Гамильтона в 0 не является положительно или отрицательно определенной.

Первое, что необходимо сделать в этом направлении, — это изучить усредненную систему при двойном резонансе. Последняя есть лагранжева система на двумерном торе  $\{q_1, q_2 \bmod 2\pi\}$ , функция Лагранжа которой имеет вид  $L = T - U$ , где  $U(q)$  —  $2\pi$ -периодическая функция и  $T = a\dot{q}_1^2 + 2b\dot{q}_1\dot{q}_2 + c\dot{q}_2^2$  — трансляционно инвариантная квадратичная форма (возможно, не знакоопределенная).

Задача заключается в том, чтобы найти двойкоасимптотические орбиты, проекции которых на тор асимптотически приближаются при

$t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$  к двум периодическим решениям, соответствующим двум произвольным гомологическим классам [16].

В эллиптическом случае (когда  $T$ , скажем, положительно определена) можно использовать метрику Якоби. Если полная энергия превышает максимум потенциальной энергии  $U$ , то метрика Якоби — настоящая риманова метрика на торе. Для каждой точки и каждого целочисленного гомологического класса найдется геодезическая, выходящая из этой точки и асимптотически приближающаяся к замкнутой орбите из этого гомологического класса [17].

Когда полная энергия равна максимуму потенциальной энергии, можно надеяться найти геодезические, которые асимптотически приближаются к точке максимума в одном направлении и к периодической орбите, представляющей произвольный класс гомологий, — в другом. Две подобные орбиты образуют цепь, соединяющую две периодические орбиты, представляющие различные классы гомологий. Возмущая эту цепь, можно надеяться получить двоякоасимптотическую орбиту.

В случае лоренцевой кинетической энергии метрика Якоби не риманова, а финслерова. В этом случае нужно сначала доказать существование периодической орбиты в данном гомологическом классе. Современная техника вариационного исчисления в целом не имеет, по-видимому, готовых методов для этой задачи.

До сих пор не решена также, по-видимому, задача *оценки снизу числа замкнутых орбит движения заряженной частицы в магнитном поле, ортогональном поверхности, вдоль которой частицы движутся* (предположительно в общем положении число периодических орбит не меньше  $2g + 2$  на поверхности рода  $g$  для любой данной начальной энергии). С точки зрения математики это задача о замкнутых кривых заданной положительной геодезической кривизны в каждой точке римановой поверхности. В многомерном варианте сила магнитного поля заменяется замкнутой 2-формой. К этим задачам можно применить подходы и методы современной симплектической топологии; однако до сих пор получены только частичные результаты.

Имеется также большое количество интересных задач в области псевдопериодических интегрируемых гамильтоновых систем, в которых хаотическое поведение наблюдалось только численно. Хотя эти задачи связаны с геометрией квазикристаллов и поверхностей Ферми в физике твердого тела, они могут рассматриваться также и как задачи хаоса в гамильтоновых системах с 1 или  $3/2$  степенями свободы. Соот-

ветствующие численные исследования известны под названием теории *стохастических паутин*, описывающей фазовую плоскость частицы на прямой в электромагнитном волновом поле (Сагдеев, Заславский и др.; см., например, [18]). Я приведу здесь только одну из многих задач об этих системах.

Рассмотрим  $q$  векторов  $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_q)$ , приложенных в начале координат евклидовой плоскости, концы которых являются вершинами правильного  $q$ -угольника. Рассмотрим сумму  $q$  равных гармонических волн с этими волновыми векторами. Если  $q \neq 1, 2, 3, 4, 6$  (например, если  $q = 5$ ), эта сумма не является периодической (но квазипериодической) функцией.

### Пример.

$$H(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^5 \cos(\mathbf{k}_j, \mathbf{r}), \quad q = 5.$$

**Задача.** Верно ли, что все замкнутые компоненты линий уровня  $H = h$ , которые ограничивают области, содержащие начало координат, лежат в конечной окрестности начала координат?

Существует ли неограниченная фазовая кривая гамильтоновой системы, заданной функцией Гамильтона  $H$ ?

Аналогичные задачи не решены также для итераций отображения плоскости  $T = AB$ , где  $A$  — поворот на угол  $2\pi/q$  и  $B(x, y) = (x, y + a \sin x)$ . Численные эксперименты показывают, по-видимому, что существуют неограниченные орбиты для произвольно малых значений  $a$ .

Я закончу следующим старым вопросом об устойчивости для общих (негамильтоновых) динамических систем [1], [19]:

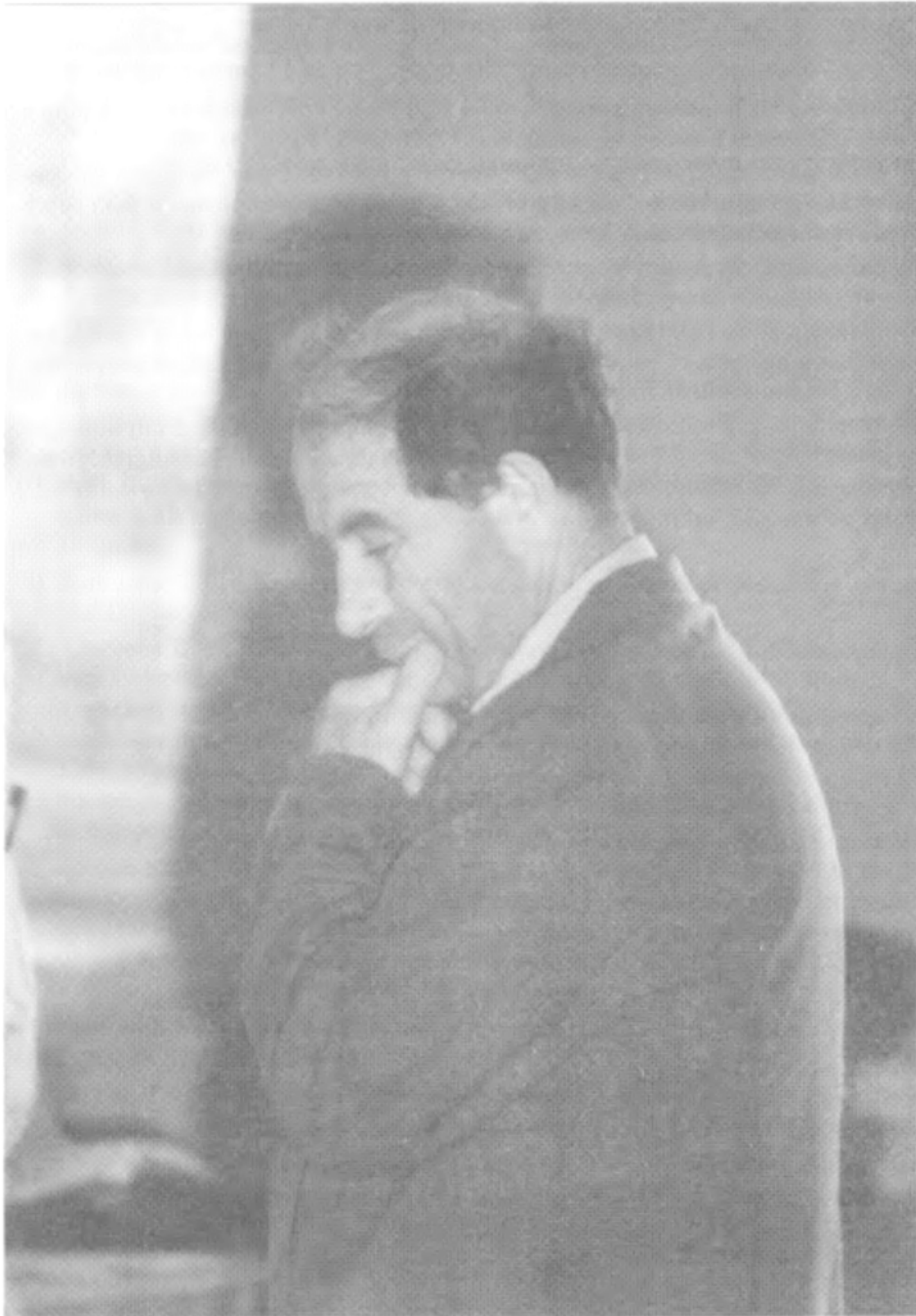
Является ли задача устойчивости положения равновесия векторного поля, компоненты которого суть многочлены с целыми коэффициентами, алгоритмически разрешимой?

### Литература

- [1] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
- [2] Tressé A. Sur les invariants différentiels des groupes continus des transformations. *Acta Math.*, 1894, 18, 1–88.

- [3] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982, 304 с.  
Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984, 335 с.
- [4] Arnold V. I. Singularities of Caustics and Wave Fronts. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1990, 259 p.
- [5] Arnold V. I. Kolmogorov's hydrodynamic attractors. In: Turbulence and Stochastic Processes: Kolmogorov's Ideas 50 Years on. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 1991, **434**(1890), 19–22.
- [6] Арнольд В. И., Коркина Е. И. Рост магнитного поля в трехмерном стационарном потоке несжимаемой жидкости. *Вестн. МГУ, сер. матем., механ.*, 1983, **3**, 43–46.
- [7] Frish U., Galloway D. A numerical investigation of magnetic field generation in a flow with chaotic streamlines. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1984, **29**(1), 13–18.
- [8] Зельдович Я. Б. Химическая физика и гидродинамика. Избранные труды. М.: Наука, 1984, 374 с.
- [9] Алексеев В. М. Квазислучайные динамические системы. I. Квазислучайные диффеоморфизмы. *Матем. сб.*, 1968, **76**(1), 72–134.  
Алексеев В. М. Квазислучайные динамические системы. II. Одномерные нелинейные колебания в периодически возмущаемом поле. *Матем. сб.*, 1968, **77**(4), 543–601.  
Алексеев В. М. Квазислучайные динамические системы. III. Квазислучайные колебания одномерных осцилляторов. *Матем. сб.*, 1969, **78**(1), 3–50.
- [10] Арнольд В. И. Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения. В кн.: Материалы Всесоюзной Школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 1973). Ереван: АН Арм. ССР, 1974, 229–256.
- [11] Freedman M. H., He Z.-X. Links of tori and energy of incompressible flows. *Topology*, 1991, **30**, 283–287.
- [12] Arnold V. I., Khesin B. A. Topological methods in hydrodynamics. In: Annual review of fluid mechanics. Vol. 24. Palo Alto, CA: Annual Reviews, 1992, 145–166.
- [13] Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Шандарин С. Ф. Крупномасштабная структура Вселенной. I. Общие свойства. Одномерная и двумерная модели. Препринт. М.: Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981, 32 с.  
См. также: Arnold V. I., Shandarin S. F., Zeldovich Ya. B. The large-scale structure of the Universe. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1982, **20**, 111–130.

- [14] Ройтварф А. А. О движении сплошной среды в силовом поле с корневой особенностью. *Вестн. МГУ, сер. 1, матем., механ.*, 1987, 1, 65–68.
- [15] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *УМН*, 1963, 18(6), 91–192.
- [16] Арнольд В. И. Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. В кн: Труды Международного конгресса математиков (Москва–1966). М.: Мир, 1968, 387–392.
- [17] Гайдуков Е. В. Асимптотические геодезические на римановом многообразии, негомеоморфном сфере. *ДАН СССР*, 1966, 169(5), 999–1001.
- [18] Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. М.: Наука, 1989, 96 с.
- [19] Arnold V. I. Problèmes résolubles et problèmes irrésolubles analytiques et géométriques. In: *Formes et Dynamique, Renaissance d'un Paradigme. Hommage à René Thom*. Paris: Eshel, 1995.



## О задачах, разрешимых и неразрешимых аналитически и геометрически

*Только французы умеют объяснять  
то, чего сами не понимают.*

Н. Лесков. Несмертельный Голован.

В еретических текстах Р. Тома более всего завораживает его умение освободить свою мысль от оков логики и не бояться фраз, лишенных всякого точного смысла. Я горжусь тем, что могу считать себя частично учеником Тома, поскольку я многому научился, будучи участником его семинара в IHES<sup>1</sup> в течение всего 1965 года. Быть может, главное, что я там воспринял, была следующая идея (приписываемая Тому его учениками): «всегда найдутся дураки, чтобы доказывать теоремы». Эта революционная мысль сильно повлияла на мой математический кругозор: я понял, что можно «перепрыгивать через теории», а не только «через вычисления», по выражению Галуа. Хотя мне никогда не удавалось избавиться от власти теорем и вкушать вытекающей из этого интеллектуальной свободы, я был глубоко отравлен ядом мечты о безответственных математических фантазиях.

Ниже я излагаю — в честь юбилея великого мэтра — несколько таких фантазий в виде довольно расплывчатых гипотез.

Точных формулировок я не даю по следующим причинам:

- 1) они чересчур длинны,
- 2) читатель сможет восстановить их самостоятельно,
- 3) существует множество неэквивалентных вариантов этих гипотез.

### 1. Задачи, неразрешимые геометрически

В следующих далее гипотезах речь идет о разрешимых и неразрешимых аналитических задачах. Типичными примерами аналитических

---

<sup>1</sup> Институт высших научных исследований в Бюр-сюр-Иветт под Парижем. — *Прим. ред.*

задач являются: а) проблема устойчивости движения в окрестности стационарной точки динамической системы, б) проблема интегрируемости системы дифференциальных уравнений, в) проблема полной интегрируемости системы канонических уравнений Гамильтона.

Самая расплывчатая формулировка гипотез состоит в утверждении, что все эти задачи неразрешимы.

Неразрешимость, о которой идет речь, сильнее, чем неразрешимость в теории алгоритмов, ибо, например, всякое уравнение в нашем смысле разрешимо. Таким образом, гипотеза подразумевает не только отсутствие алгоритма в смысле логиков, но отсутствие даже более общей процедуры (а именно, «аналитического алгоритма», см. ниже).

С точки зрения геометрии многообразий, разрешимость задачи не должна зависеть от системы координат, в которых записаны соответствующие данные (правые части дифференциальных уравнений, компоненты векторных полей, функции Гамильтона). Поэтому я предлагаю

**Определение.** Задача неразрешима геометрически, если среди задач, которые получаются из данной диффеоморфными заменами в пространстве параметров, нет задач, разрешимых аналитически.

Понятие аналитической разрешимости описывается ниже.

**Пример.** Проблема устойчивости стационарного решения системы дифференциальных уравнений, зависящей от параметров, геометрически неразрешима, если она аналитически неразрешима для всякого семейства, эквивалентного данному посредством локальных диффеоморфизмов, зависящих от параметров.

**Замечание.** Задача интегрирования дифференциального уравнения геометрически разрешима в окрестности неособой точки соответствующего векторного поля, хотя она может быть аналитически неразрешима. В окрестности особой точки эта же задача, по-видимому, геометрически неразрешима даже для полиномиальных векторных полей.

## 2. Аналитическая разрешимость

Опишем теперь аналитическую разрешимость. В этой теории система координат предполагается фиксированной. Данные задачи — это набор функций, ее определяющих (компоненты векторных полей,



функции Гамильтона и т.п.). Все эти функции фиксированы как функции координат и параметров. Задача (определения устойчивости, интегрируемости и т.д.) *аналитически разрешима*, если ее решение (множество значений параметров, для которых система устойчива, интегрируема и т.д.) выражается через данные посредством аналитических операций, в число которых входят:

- 1) все арифметические операции,
- 2) дифференцирование,
- 3) интегрирование,
- 4) подстановки,
- 5) обращение.

Более точно, следует ввести в рассмотрение множество «допустимых многообразий» и «допустимых отображений» со следующими свойствами:

1. Для любого  $n$  арифметические пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{C}^n$  допустимы.
2. Всякое рациональное отображение допустимо.
3. Образ и прообраз допустимого многообразия при допустимом отображении — допустимые многообразия.
4. Пересечение, объединение и взаимные дополнения двух допустимых многообразий — допустимые многообразия.
5. Суперпозиция двух допустимых отображений — допустимое отображение.
6. Если  $f(x, y)$  — допустимая функция, то ее производная по  $x$ , а также первообразная, ветвь которой фиксирована значением в некоторой допустимой точке, допустимы.

**Замечание.** Первообразная, о которой идет речь, понимается в смысле комплексного анализа; график полученной многозначной функции представляет собой допустимое многообразие. Заметим также, что аналитическое продолжение также является допустимой операцией в нашей теории.

Можно построить понятие разрешимости, основанное на интегрировании в вещественном смысле. Эта теория будет отличаться от обсуждаемой здесь. Например, функция синус на вещественной прямой

допустима, если разрешается комплексное интегрирование, но она не попадает в минимальное множество допустимых функций, если использовать только вещественный интеграл (хотя ограничение этой функции на любой конечный отрезок действительной прямой всегда представляет собой допустимую функцию).

Поскольку функция синус допустима, множество всех целых чисел также допустимо. Отсюда вытекает, что множество целых значений параметра  $y$ , для которых многочлен с целыми коэффициентами  $f(x, y)$  имеет целый корень  $x$ , является допустимым, каков бы ни был данный многочлен  $f$ .

### 3. Почти разрешимые задачи; гипотезы

Вернемся к аналитической задаче, заданной каким-то выбором функций (компонент векторных полей, функций Гамильтона и т.п.), которые могут зависеть от параметров. Эти функции суть *данные* задачи.

**Определение.** *Допустимое множество задачи* — это минимальное допустимое множество, содержащее данные задачи. Задача называется *аналитически разрешимой*, если ее решение есть допустимая функция параметров.

**Пример.** Проблема устойчивости стационарного решения  $O$  динамической системы, зависящей от параметров, аналитически разрешима, если множество значений параметров, для которых стационарное решение  $O$  устойчиво, есть допустимое многообразие.

**Гипотеза 1.** *Существует число  $M$  и две функции  $N$  и  $D$  такие, что проблема устойчивости положения равновесия  $O$  векторного поля в  $\mathbb{R}^n$ , компоненты которого суть многочлены степени  $d$ , аналитически неразрешима,*

- а) *если  $n$  и  $d$  больше, чем  $M$ ,*
- б) *если  $d > 1$  и  $n$  превосходит  $N(d)$ ,*
- в) *если  $n > 2$  и  $d$  превосходит  $D(n)$ .*

Гипотеза о том, что эта задача не допускает алгоритмического решения в смысле математической логики, если рассматривать только многочлены с целыми коэффициентами, была уже опубликована в моей работе [1].

**Гипотеза 2.** Проблема интегрируемости дифференциального уравнения, заданного векторным полем в пространстве размерности  $n > 1$ , компоненты которого являются многочленами степени  $d > 1$ , аналитически неразрешима.

**Гипотеза 3.** Проблема полной интегрируемости системы канонических уравнений Гамильтона, заданной полиномиальным гамильтонианом степени  $d > 2$  в пространстве размерности  $2n > 2$ , аналитически неразрешима.

**Гипотеза 4.** Задачи, упомянутые в гипотезах 1–3, неразрешимы также геометрически.

**Замечание 1.** Проблемы интегрирования, по всей вероятности, также неразрешимы. Не исключено, однако, что семейство систем может оказаться интегрируемым (в том смысле, что интеграл существует), хотя задача в целом неразрешима (этот интеграл не является допустимой функцией).

Например, набор интегралов в инволюции, доставляющий решение гамильтоновой системы, интегрируемой по Лиувиллю, может представляться недопустимыми функциями, т.е. не выразимыми через функцию Гамильтона и допустимые операции.

**Замечание 2.** В гипотезах 1–4 имеются в виду полиномиальные системы. Это ограничение неестественно; необходимо определение, в котором роль параметров будут играть функции (например, компоненты векторного поля). Такое определение легко сформулировать; оно позволяет выразить ответ задачи (об устойчивости, интегрируемости и т.д.) в терминах действия допустимых операций на функции-данные.

Однако в этом случае даже задача распознавания, является ли локальным минимумом данная критическая точка аналитической функции одной переменной, неразрешима (ибо порядок производных, необходимых для этого, априори неограничен).

Поэтому я предлагаю следующее определение [2]:

**Определение.** Задача, содержащая как параметр функцию, почти разрешима, если в пространстве функций существует убывающая последовательность исключительных подмногообразий возрастающей ко-размерности таких, что задача разрешима вне каждого из этих подмногообразий.

(Ответ допускает представление, допустимое в терминах функций-данных, при условии, что эти функции не принадлежат одному из исключительных подмногообразий; зависимость этого представления от исключительного подмногообразия может быть произвольной.)

Класс разрешимых задач можно еще более ограничить. Можно, например, добавить требование, что исключительные подмногообразия сами должны быть допустимыми; можно наложить условия на зависимость этого подмногообразия и соответствующей разрешающей процедуры от номера подмногообразия в последовательности.

Мне, однако, кажется, что все эти ограничения не нужны:

**Гипотеза 5.** Среди задач, о которых идет речь в гипотезах 1–4, нет почти разрешимых.

Я надеюсь, что будут найдены доказательства приведенных гипотез, основанные на понимании динамических систем, а не на ухищрениях формальной логики, и мы узнаем много нового о структуре дискриминантных многообразий и бифуркационных диаграмм динамических систем — объектов, изучение которых было начато Р. Томом [3].

## Литература

- [1] Thom R., Arnold V. I., Smale S. Dynamical systems and differential equations. In: Mathematical developments arising from Hilbert problems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 59–62. (Proc. Sympos. Pure Math., 28)
- [2] Арнольд В. И. О локальных задачах анализа. *Вестн. МГУ, сер. I, матем., механ.*, 1970, 25(2), 52–56.
- [3] Thom R. The bifurcation subset of a space of maps. In: Manifolds (Amsterdam, 1970). Berlin: Springer, 1971, 202–208. (Lecture Notes in Math., 197)

## Замечания о собственных числах и векторах эрмитовых матриц, фазе Берри, адиабатических связностях и квантовом эффекте Холла

Особенности стратификации пространства эрмитовых матриц по кратностям собственных чисел описаны как неформальная комплексификация исследованной ранее стратификации пространства вещественных симметрических матриц. Вырождение спектральной последовательности, связанной с этой стратификацией, приводит к странным комбинаторным тождествам. Расслоения собственных векторов над многообразиями эрмитовых матриц с простыми спектрами снабжены естественными связностями, описывающими также адиабатическое приближение к колебаниям в линейных системах, задаваемых медленно меняющимися косоэрмитовыми матрицами. Кривизна этих связностей имеет особенности на подмногообразии коразмерности 3, образованном эрмитовыми матрицами с кратными собственными числами. Получающийся вследствие этого скачок интеграла от формы кривизны при пересечении движущейся поверхности интегрирования с указанным подмногообразием проявляется в виде квантового эффекта Холла.

### 1. Введение

Пространство эрмитовых матриц стратифицировано по кратностям собственных чисел. Подмногообразие, образованное матрицами, имеющими кратное собственное число, имеет коразмерность три в пространстве эрмитовых матриц. Особые точки этого подмногообразия соответствуют матрицам с более высокими кратностями собственных чисел. Они образуют страты коразмерности 6 и выше в пространстве эрмитовых матриц.

Простейшие свойства этой стратификации были описаны в [1]. В настоящей работе описаны дальнейшие свойства этой стратификации, а также задачи и гипотезы, возникающие при ее исследовании.

Геометрия многообразия эрмитовых матриц без кратных собственных чисел управляет адиабатическими связностями расслоений собственных векторов, которые в физике называются фазой Берри, а многообразия эрмитовых матриц с кратными собственными числами проявляются в виде квантового эффекта Холла. Автор благодарен С. П. Новикову, указавшему ему на связь построений [1] с квантовым эффектом Холла, а также благодарен за полезные обсуждения А. Вайнштейну, Б. и М. Шапиро, А. Б. Гивенталю, В. А. Васильеву и А. И. Нейштадту.

## 2. Естественная стратификация пространства эрмитовых матриц

Страты описываются векторами кратностей упорядоченных собственных чисел  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ . Наша цель — исследовать особенности замыканий этих стратов, их примыкания друг к другу, поведение имеющихся над ними естественных расслоений собственных векторов и естественных связностей в этих расслоениях при примыканиях стратов.

При желании можно было бы рассматривать не эрмитовы, а косоэрмитовы матрицы (достаточно умножить все матрицы на  $i$ ), но я не буду этого делать, чтобы сохранить аналогию со стратификацией пространства вещественных симметрических матриц (а не с алгеброй Ли кососимметрических).

Технически удобнее рассматривать пространство матриц со следом 0. Чтобы избавиться от некомпактности, достаточно рассмотреть стратификацию сферы матриц с нормой 1 в этом пространстве.

Рассмотрим фильтрацию  $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots$  сферы замкнутыми подмногообразиями, где  $F_p$  — множество матриц с не более чем  $p + 1$  различными собственными числами (со следом 0 и нормой 1).

Эта фильтрация порождает спектральную последовательность, сходящуюся к (ко)гомологиям сферы.

**Предложение.** *Спектральная последовательность фильтрации  $F_p$  вырождается в члене  $E_2$ .*

Это предложение было по моей просьбе недавно доказано М. Шапиро и А. Вайнштейном.

**Пример.** Рассмотрим эрмитовы матрицы порядка  $n = 4$ . Соответствующая сфера имеет размерность  $n^2 - 2 = 14$ . Будем обозначать страты вроде  $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4$  символами вроде  $1\ 2|3\ 4$ . Вся наша стратификация сферы состоит из  $2^{n-1} - 1 = 7$  стратов (соответствующих вершинам куба размерности  $n - 1 = 3$ ).

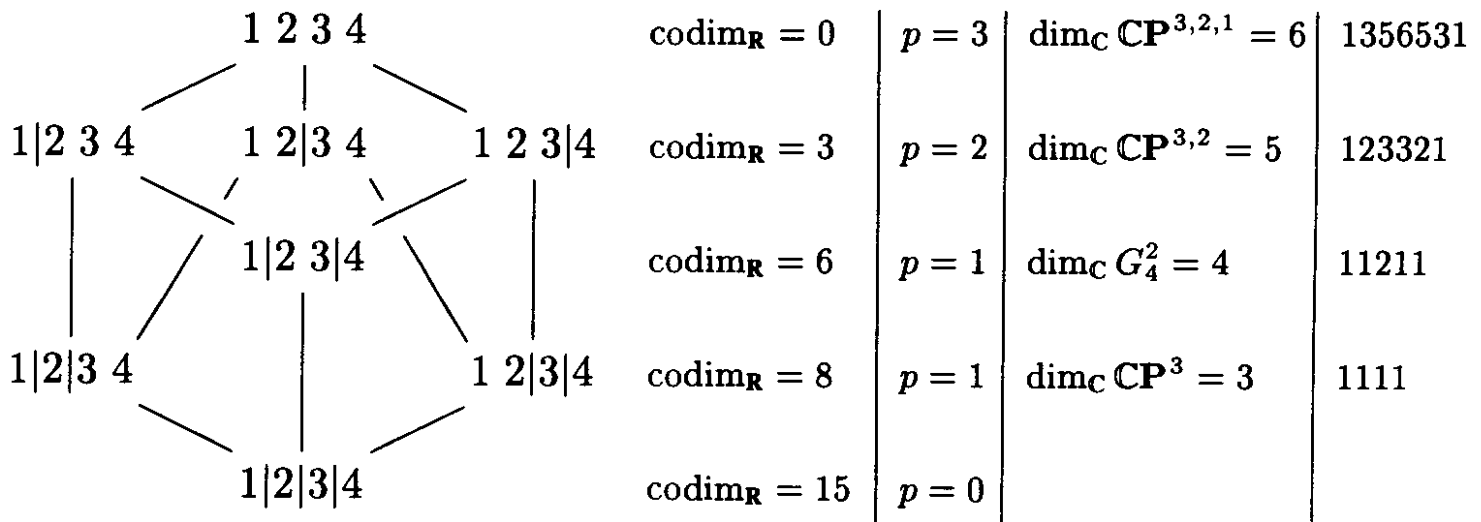


Рис. 1. Стратификация пространства эрмитовых матриц порядка 4

На рис. 1 изображены примыкания этих стратов и их коразмерности в  $S^{14}$ . Каждый страт в  $F_p \setminus F_{p-1}$  расслоен над открытым симплексом размерности  $p$  (состоящим из собственных чисел). Слои этих расслоений состоят из эрмитовых матриц с данными собственными числами и кратностями и также указаны на рис. 1. Эти слои являются комплексными многообразиями флагов. Действительно, эрмитова матрица определяется своими собственными числами и соответствующими им инвариантными подпространствами, которые попарно эрмитово ортогональны, а набор инвариантных подпространств  $V_i$  (упорядоченный порядком собственных чисел  $\lambda_i$  на вещественной оси) однозначно определяется флагом их сумм  $W_i = V_i + V_{i+1} + \dots$ .

Например, многообразие полных флагов в  $\mathbb{C}^4$  расслоено над  $\mathbb{C}P^3$  со слоем, расслоенным над  $\mathbb{C}P^2$  со слоем  $\mathbb{C}P^1$ . Поэтому я обозначаю многообразие полных флагов в  $\mathbb{C}^4$  через  $\mathbb{C}P^{3,2,1}$ .  $G_4^2$  — это многообразие Грассмана 2-плоскостей в  $\mathbb{C}^4$ ;  $\mathbb{C}P^{3,2}$  — это многообразие флагов  $\mathbb{C}^4 \supset \mathbb{C}^3 \supset \mathbb{C}^2$  в  $\mathbb{C}^4$ .

Справа на рис. 1 указаны числа Бетти (четной размерности) соответствующих многообразий флагов. Например, числа Бетти  $\mathbb{C}P^3$  обозначены через 1111.

Гомологии многообразий флагов — такие же, как у соответствующих прямых произведений (например,  $H_*(\mathbb{C}P^{3,2}) \approx H_*(\mathbb{C}P^3 \times \mathbb{C}P^2)$ ).

Это следует, например, из того, что все комплексные клетки Шуберта, из которых составляются пространства, слои и базы соответствующих расслоений, четномерны, поэтому все границы в соответствующих комплексах равны нулю (и все спектральные последовательности расслоений вырождаются).

Каждый страт представляет собой не только тривиальное, но и канонически тривиализированное расслоение: эрмитова матрица однозначно определяется различными собственными числами и соответствующими им инвариантными подпространствами.

Начальный член описываемой спектральной последовательности состоит из гомологий пространств (страт с фиксированным  $p$ , приведенный по модулю стратов с меньшим  $p$ ), эквивалентных пространствам Тома тривиальных расслоений над многообразиями флагов со слоями вещественной размерности  $p$ .

Эти гомологии получаются из гомологий соответствующих многообразий флагов сдвигом размерностей на  $p$ . Числа Бетти объединений пространств Тома, соответствующих стратам рис. 1, изображены на рис. 2.

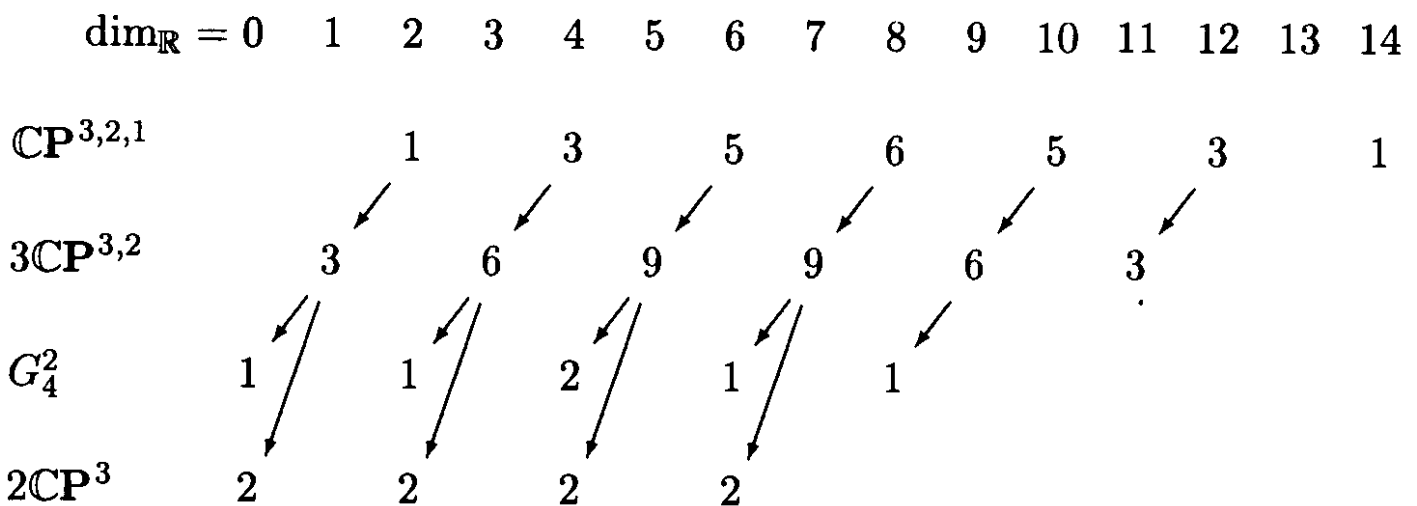


Рис. 2. Границы произведений циклов многообразий флагов на симплексы собственных чисел

Дифференциал определяется так: прямое произведение цикла многообразия флагов на границу симплекса собственных чисел естественно вложено в пространство матриц, но попадает в страты с меньшими значениями  $p$ . Дифференциал члена  $E_2$  оставляет от этой границы только



ее часть, лежащую над гранями симплекса, имеющими коразмерность 1 (пренебрегая частью над гранями большей коразмерности). Основное наблюдение состоит в том, что оставшаяся часть границы имеет меньшую размерность, чем размерность границы произведения цикла многообразия флагов на симплекс собственных чисел.

Утверждение о вырождении состоит в том, что гомологии построенного дифференциала тривиальны (кроме размерностей 0 и  $2^n - 2$ , где получаются гомологии сферы).

В частности, на рис. 2 это проявляется в равенстве нулю эйлеровых характеристик в комплексах, отмеченных стрелками. Например,  $6 - 9 + (1 + 2) = 0$ , и т.д.

**Замечание.** Проведя аналогичные вычисления для любого  $n$ , мы выводим из вырождения нашей спектральной последовательности большой набор сложных комбинаторных тождеств. Для стратов малой коразмерности эти тождества ниже выписаны явно.

### 3. Страты малой коразмерности

Комплексы рис. 2 разделяются следующей характеристикой сложности вырождения.

**Определение.** Дефектом страта называется разность между (комплексной) размерностью многообразия полных флагов и комплексной размерностью многообразия флагов, соответствующего этому страту (т.е. многообразия эрмитовых матриц с фиксированными собственными числами фиксированных кратностей).

**Лемма 1.** Дефект страта, соответствующего  $a_i$   $i$ -кратным собственным числам ( $i = 2, 3, \dots$ ), равен

$$q = a_2 + 3a_3 + 6a_4 + \dots + \frac{i(i-1)}{2}a_i + \dots$$

**Доказательство.** Многообразие полных флагов в  $\mathbb{C}^n$  имеет комплексную размерность  $(n-1) + \dots + 1$ . Многообразие неполных флагов в  $\mathbb{C}^n$ , соответствующее единственному не простому собственному числу кратности  $i$ , имеет комплексную размерность  $(n-1) + \dots + i$ . В этом случае дефект есть  $1 + \dots + (i-1) = i(i-1)/2$ .

Вклады различных собственных чисел в дефект независимы. Сложение этих вкладов и дает указанную в лемме формулу.

**Замечание.** Дефект равен также сумме чисел  $\binom{n_j}{2}$  по различным собственным числам кратностей  $n_j$ :  $q = \sum_j \frac{n_j(n_j - 1)}{2}$ .

Каждому страту, соответствующему  $a_i$  собственным числам кратности  $i$  ( $i = 2, \dots$ ), сопоставим диаграмму Юнга потерянных собственных чисел с  $a_i$  строками длины  $i - 1$ . Дефект страта зависит только от его диаграммы Юнга (которая, однако, не определяет сам страт).

**Лемма 2.** Страты, дефект которых не превосходит 4, соответствуют семи простейшим диаграммам Юнга, указанным на рис. 3. Объединение всех стратов большего дефекта имеет коразмерность 14.

диаграмма Юнга	страт	$\text{codim}_{\mathbb{R}}$	дефект $q$	число стратов
+ $\emptyset$	$1, \dots, n$	0	0	1
- $\square$	$1, \dots, i \mid i + 1, \dots, n$	3	1	$n - 1$
+ $\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$1, \dots, i \mid i + 1, \dots, j \mid j + 1, \dots, n$	6	2	$\binom{n-2}{2}$
- $\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	$1, \dots, i \mid i + 1, \dots, j \mid j + 1, \dots, k \mid$ $\quad \quad \quad \mid k + 1, \dots, n$	9	3	$\binom{n-3}{3}$
+ $\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	$1, \dots, i \mid i + 1, \dots, j \mid j + 1, \dots, k \mid$ $\quad \quad \quad \mid k + 1, \dots, m \mid m + 1, \dots, n$	12	4	$\binom{n-4}{4}$
+ $\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$1, \dots, i \mid i + 1 \mid i + 2, \dots, n$	8	3	$n - 2$
- $\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\begin{cases} 1, \dots, i \mid i + 1 \mid i + 2, \dots, j \mid j + 1, \dots, n \\ 1, \dots, i \mid i + 1, \dots, j \mid j + 1 \mid j + 2, \dots, n \end{cases}$	11	4	$2 \binom{n-3}{2}$

Рис. 3. Простейшие страты многообразия эрмитовых матриц

Заметим, что каждой диаграмме Юнга соответствует, вообще говоря, много стратов, так как диаграмма не учитывает того, которое именно из собственных чисел кратное. Числа стратов, соответствующих простейшим диаграммам, указаны на рис. 3 в последней колонке.

Многообразие комплексных флагов, соответствующее данному страту, определяется по его диаграмме Юнга.

**Определение.** Многочленом Пуанкаре страта  $X$  называется многочлен

$$b(t) = 1 + b_2(X)t + b_4(X)t^2 + \dots,$$

где  $b_{2i}$  — числа Бетти соответствующего многообразия флагов.

Многочлены Пуанкаре многообразий флагов легко вычисляются, так как для многообразий Грассмана клетки Шуберта четномерны и все границы в соответствующих комплексах равны нулю, а гомологии расслоений на многообразия Грассмана — такие же, как у соответствующих прямых произведений.

**Пример.** Для многообразия полных флагов в  $\mathbb{C}^n$

$$b(t) = \prod_{i=1}^n \frac{1-t^i}{1-t} = 1 + (n-1)t + \dots$$

**Замечание.** Многочлен  $b$  возратен ввиду двойственности Пуанкаре, например, в указанном примере

$$b(t) = t^N \left( 1 + \frac{n-1}{t} + \dots \right).$$

Именно в этой форме многочлены Пуанкаре стратов нашей стратификации используются ниже: мы будем сравнивать группы гомологий малой коразмерности в стартах малой коразмерности.

Начальные отрезки многочленов Пуанкаре всех семи стратов малых дефектов (при не слишком малых  $n$ ) приведены на рис. 4. Точками отмечены числа, которые я поленился посчитать (они не нужны для дальнейшего).

#### 4. Комбинаторные тождества

Эти тождества являются обобщением тождества  $5 - 9 + 2 + 2 = 0$  и ему подобных тождеств рис. 2.

Пользуясь двойственностью Пуанкаре, отождествим комплексно  $p$ -мерные гомологии каждого комплексного многообразия флагов с гомологиями дополнительной размерности. После этого наш дифференциал можно считать действующим из пространства комплексно  $p$ - (ко)мерных гомологий непересекающегося объединения комплексных

	$b_0$	$b_2$	$b_4$	$b_6$	$b_8$	#
+ $\emptyset$	1	$n - 1$	$\binom{n-1}{2} - 1$	$\binom{n+1}{3} - n$	$\binom{n+2}{4} - \binom{n+1}{2}$	1
- $\square$	1	$n - 2$	$\binom{n-1}{2}$	$\binom{n}{3} - 1$	...	$n - 1$
+ $\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	1	$n - 3$	$\binom{n-2}{2} + 1$	...	...	$\binom{n-2}{2}$
- $\begin{array}{ c } \hline \square \\ \square \\ \hline \end{array}$	1	$n - 4$	...	...	...	$\binom{n-3}{3}$
+ $\begin{array}{ c } \hline \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array}$	1	...	...	...	...	$\binom{n-4}{4}$
+ $\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	1	$n - 3$	$\binom{n-2}{2}$	$\binom{n-1}{3}$	...	$n - 2$
- $\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	1	...	...	...	...	$2\binom{n-3}{2}$

Рис. 4. Числа Бетти простейших стратов

многообразий флагов с данной диаграммой Юнга в пространство комплексно  $p'$ - (ко)мерных гомологий непересекающегося объединения комплексных многообразий флагов с непосредственно примыкающей диаграммой Юнга, где  $p + q = p' + q'$  (здесь  $q$  — дефект исходной, а  $q'$  — непосредственно примыкающей диаграммы).

По определению, *непосредственно примыкающие* страты — это примыкающие страты, у которых число различных собственных чисел на 1 меньше, чем у данного (т.е. площадь диаграммы Юнга на 1 больше исходной). Диаграмма Юнга примыкает к данной, если существует страт с такой диаграммой Юнга, примыкающий к некоторому страту с данной диаграммой Юнга.

**Пример.** Для диаграммы  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$  непосредственно примыкающими являются диаграммы  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \hline \end{array}$ ,  $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$  и  $\square\square$ . Последняя диаграмма примыкает

потому, что собственные числа  $\lambda_1 = \lambda_2$  и  $\lambda_3 = \lambda_4$  могут вырождаться в  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ . Общее правило таково: непосредственно примыкающая диаграмма Юнга получается из данной заменой двух (быть может, пустых) строк длин  $a$  и  $b$  одной строкой длины  $a + b + 1$ . Таблица непосредственных примыканий диаграмм Юнга не слишком большой площади изображена на рис. 5.

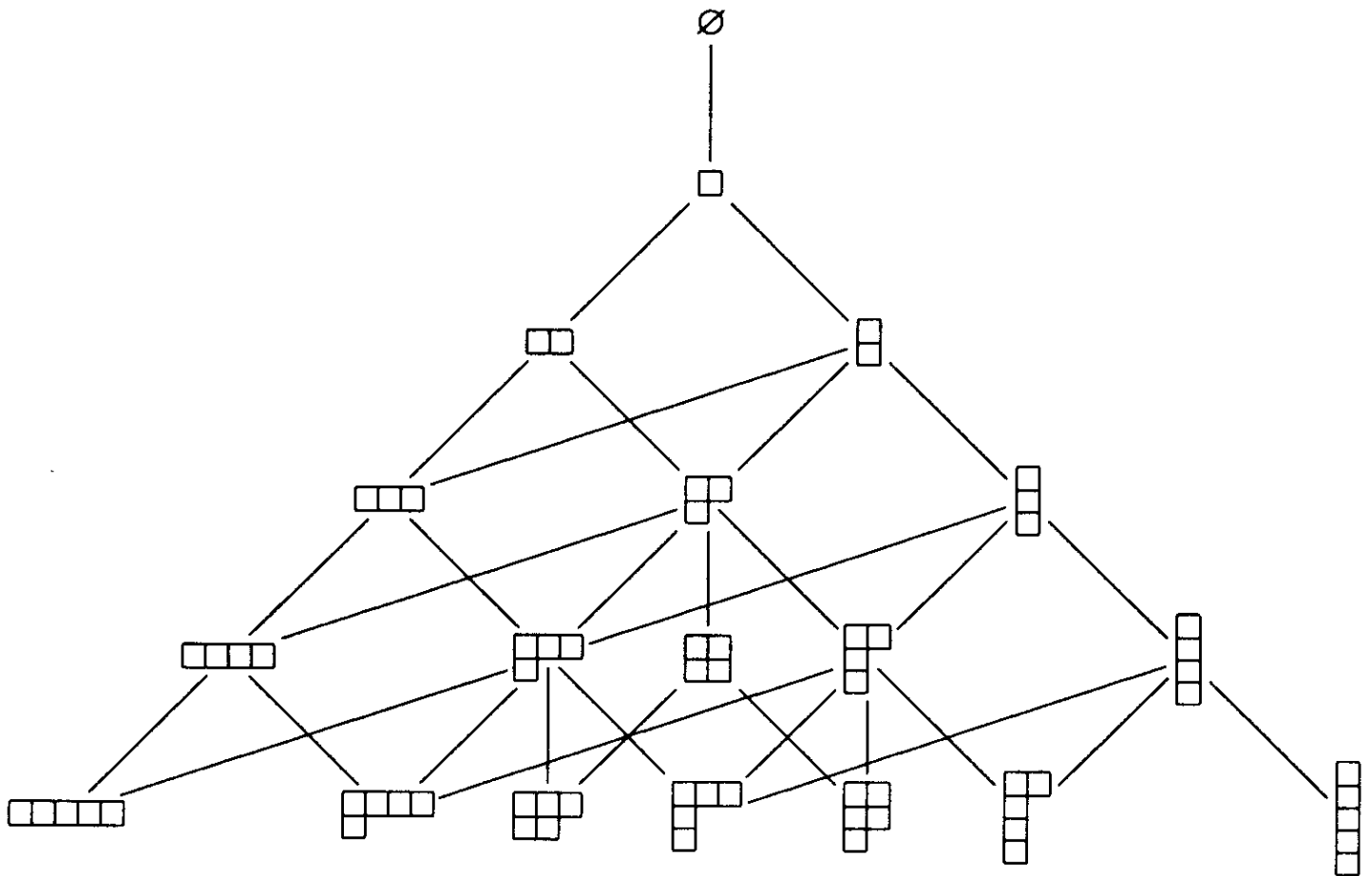


Рис. 5. Непосредственные примыкания простейших диаграмм Юнга

**Замечание.** Сохранение величины  $p + q$  следует из геометрического построения дифференциала. Действительно, пусть  $A$  — комплексная размерность многообразия полных флагов. Комплексная размерность исходного многообразия вырожденных флагов равна  $A - q$  по определению дефекта. Вещественная размерность цикла комплексной коразмерности  $p$  в этом многообразии флагов равна  $2(A - q - p)$ . Пусть  $s$  — число различных собственных чисел для исходного страта. Произведение цикла на этот симплекс определяет относительный цикл размерности  $2(A - q - p) + s$  (по модулю края). Часть его границы над  $s' = (s - 1)$ -мерным симплексом имеет размерность  $2(A - q - p) + s - 1$ .

Эта граница соответствует в примыкающем страте дефекта  $q'$  циклу такой коразмерности  $p'$ , что его произведение на симплекс размерности  $s'$  имеет такую же размерность, как указанная граница:

$$2(A - q' - p') + s' = 2(A - q - p) + s - 1,$$

откуда  $p' + q' = p + q$ .

Сопоставляя числа Бетти многообразий флагов с указанной выше информацией, мы получаем описание пространств начального члена нашей спектральной последовательности в старших размерностях, приведенное на рис. 6.

$p + q$ страт	4	3	2	1	0
$\emptyset$	$\binom{n+2}{4} - \binom{n+1}{2}$	$\binom{n+1}{3} - n$	$\binom{n}{2} - 1$	$n - 1$	1
$\square$	$(n - 1) \left( \binom{n}{3} - 1 \right)$	$(n - 1) \binom{n-1}{2}$	$(n - 1)(n - 2)$	$n - 1$	
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$\binom{n-2}{2} \left( \binom{n-2}{2} + 1 \right)$	$\binom{n-2}{2} (n - 3)$	$\binom{n-2}{2}$		
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	$\binom{n-3}{3} (n - 4)$	$\binom{n-3}{3}$			
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	$\binom{n-4}{4}$				
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	$(n - 2)(n - 3)$	$n - 2$			
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	$(n - 3)(n - 4)$				

Рис. 6. Спектральная последовательность гомологий малой коразмерности пространств флагов

В каждой клетке указана размерность пространства циклов комплексной коразмерности  $p$  во всех многообразиях флагов комплексной коразмерности  $q$  с данной диаграммой Юнга при  $p + q \leq 4$  и не слишком малых  $n$ . Дифференциал действует вниз, в гомологии с тем же

$p + q$  для многообразий флагов с примыкающей диаграммой Юнга на единицу большей площади.

Поскольку спектральная последовательность вырождается, эйлера характеристика в каждом столбце (кроме самого правого) равна нулю. Это и есть обещанные комбинаторные тождества: *альтернированная сумма произведений чисел Бетти многообразий флагов на числа стратов, имеющих данную диаграмму Юнга, со знаками, определяемыми четностью площади диаграммы Юнга, равна нулю.*

Итак, мы получаем бесконечную цепочку тождеств, первые из которых имеют вид:

$$\binom{n}{2} - 1 + \binom{n-2}{2} = (n-1)(n-2),$$

$$\binom{n+1}{3} - n + \binom{n-2}{2}(n-3) + n - 2 = (n-1)\binom{n-1}{2} + \binom{n-3}{3},$$

$$\begin{aligned} \binom{n+2}{4} - \binom{n+1}{2} + \binom{n-2}{2} \left( \binom{n-2}{2} + 1 \right) + \binom{n-4}{4} + (n-2)(n-3) = \\ = (n-1) \left( \binom{n}{3} - 1 \right) + \binom{n-3}{3}(n-4) + (n-3)(n-4). \end{aligned}$$

Биективные доказательства всех этих комбинаторных тождеств мне неизвестны, но ясно, что громоздкая комбинаторика маскирует здесь простую геометрию особенностей.

**Замечание 1.** Рассмотрение циклов малой размерности тоже приводит к цепочкам комбинаторных тождеств. Эти тождества отличаются от предыдущих.

**Замечание 2** (А. Б. Гивенталь). В действительности вырождение нашей спектральной последовательности содержит больше информации, чем эти тождества.

Естественные базисы когомологий многообразий флагов строятся из симметрических функций разных типов симметрии. Дифференциалы нашей последовательности достаточно легко выражаются в этих базисах явными формулами.

Обращение гомологий в нуль означает тождества между этими симметрическими функциями различных типов симметрии.

## 5. Комплекси́фикация

Каждое понятие вещественной геометрии имеет неформальный комплексный аналог (см. [3]). Примеры приведены в следующей таблице.

Вещественный вариант	Комплексный вариант
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$\pi_0$	$\pi_1$
$S^0$	$S^1$
$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{R}^n \setminus 0$	$\mathbb{C}^n \setminus 0$
$\pi_{n-1}$	$\pi_{2n-1}$
$O(n), SO(n)$	$U(n), SU(n)$
теория Морса	теория Пикара–Лефшеца
классы Штифеля–Уитни	классы Черна
$\mathbb{R}P^n$	$\mathbb{C}P^n$
$S^1 = \mathbb{R}P^1$	$S^2 = \mathbb{C}P^1$
$S^0$ -расслоение Мёбиуса	$S^1$ -расслоение Хопфа
многообразие с краем	разветвленное накрытие

Рассмотрим с этой точки зрения стратификации многообразий вещественных симметрических и комплексных эрмитовых матриц порядка  $n$  по кратностям собственных чисел. В вещественном случае многообразии матриц, имеющих кратное собственное число, имеет коразмерность 2, и его дополнение неодносвязно (см. [1]).

Фундаментальная группа этого дополнения описывается следующим образом. Рассмотрим матрицу без кратных собственных чисел. Выберем соответствующие простым собственным числам нормированные собственные векторы (они определены с точностью до выбора знака, т.е. до выбора элемента из  $S^0$ ). Рассмотрим замкнутую петлю в многообразии матриц с простыми собственными числами. Продолжая собственные векторы по непрерывности, мы вернемся, вообще говоря, с новым набором собственных векторов. Изменение собственных векторов при обходе вокруг многообразия матриц с кратными собственными числами описывается *мондромией*: представлением фундаментальной группы дополнения к этому многообразию в группу  $\mathbb{Z}_2^{n-1}$  изменений знаков координат, сохраняющих ориентацию. Это представление изоморфно представляет нашу фундаментальную группу.



На малой двумерной трансверсали к каждому из  $n - 1$  стратов  $\lambda_i = \lambda_{i+1}$  многообразии матриц с кратными собственными числами представлено точкой. Обходящая вокруг этой точки (т.е. зацепленная с ней) окружность представляет одну из образующих фундаментальной группы многообразия матриц без кратных собственных чисел. Расслоение нормированных собственных векторов над этой окружностью нетривиально. А именно, при обходе этой окружности  $i$ -й и  $(i + 1)$ -й собственные векторы меняют знак.

Иными словами,  $i$ -е и  $(i + 1)$ -е расслоения собственных векторов, ограниченные на эту окружность, являются мёбиусовскими  $S^0$ -расслоениями (расслоениями края листа Мёбиуса над его центральной окружностью).

Посмотрим теперь, во что превращается все это описание (заимствованное из [1]) при комплексификации, заключающейся в переходе к эрмитовым матрицам.

Многообразие матриц с кратным собственным числом имеет теперь (вещественную) коразмерность 3, а трансверсаль — (вещественную) размерность 3.

На малой трехмерной трансверсали к каждому из  $n - 1$  стратов  $\lambda_i = \lambda_{i+1}$  многообразии матриц с кратными собственными числами представлено точкой. Зацепленная с ней сфера  $S^2$  представляет одну из образующих двумерной группы гомологий (или даже гомотопий) многообразия эрмитовых матриц без кратных собственных чисел. Нормированный собственный вектор эрмитовой матрицы без кратных собственных чисел определен с точностью до умножения на комплексное число, по модулю равное единице.

Расслоение нормированных собственных векторов над зацепленной сферой нетривиально. А именно, оно является (как показывает несложное вычисление) расслоением Хопфа со слоем  $S^1$  над  $S^2$ .

**Пример.** Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^3$  эрмитовых матриц порядка 2 со следом 0,

$$A = \begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & -x \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Единственная матрица с кратным спектром в этом пространстве — нулевая. Зацепленная сфера имеет вид  $x^2 + z\bar{z} = 1$ . Расслоение собственных векторов над дополнением к точке 0 имеет *естественную связность*: при бесконечно малом изменении матрицы ее собственный

вектор переносится в ближайший собственный вектор бесконечно близкой матрицы.

Эта естественная связность является 2-формой на пространстве  $\mathbb{R}^3$  эрмитовых матриц порядка 2 со следом 0 (с особенностью на многообразии матриц с кратным собственным числом, которое в случае  $n = 2$  состоит из одной точки 0).

Прямое вычисление показывает, что интеграл от кривизны этой формы связности по сфере равен  $4\pi$ . Особенность этой 2-формы в точке 0 является ньютоновской. Замкнутая 2-форма в трехмерном пространстве (с фиксированным элементом объема) соответствует векторному полю. В нашем случае вектор поля обратно пропорционален квадрату расстояния до начала координат.

Из этих вычислений следует, в частности, что каждая из  $n - 1$  2-форм кривизны формы связности расслоений собственных векторов над пространством эрмитовых матриц без кратных собственных чисел имеет на соответствующих стратах многообразия эрмитовых матриц с кратными собственными числами полярную особенность ньютоновского типа.

Эти замечательные характеристические 2-формы (сумма которых тождественно равна нулю) порождают кольцо когомологий многообразия эрмитовых матриц со следом ноль без кратных собственных чисел, и было бы интересно выяснить, имеются ли среди сумм их произведений гомологичные 0, но не равные тождественно 0 формы.

Было бы интересно также понять, каковы «вычеты» этих характеристических форм на различных стратах нашей стратификации, как эти вычеты связаны между собой и с характеристическими формами расслоений над соответствующими стратами. Было бы интересно также попытаться выразить формы в дополнении в виде интегралов от их «вычетов» на тех или иных стратах.

Было бы интересно перенести описанные факты геометрии стратификации эрмитовых матриц на случай вещественных симметрических матриц.

## 6. Расслоения собственных векторов в физике: адиабатическая связность

Я коротко опишу теперь два (запоздавших) приложения комплексификации построений [1] к физике: эта комплексификация немедленно

приводит к адиабатическим связностям на расслоениях собственных векторов (которые в физике называются теорией фазы Берри [4], [5]) и к теории (целочисленного) квантового эффекта Холла.

Многообразие эрмитовых матриц порядка  $n$  с простым спектром является базой  $n$  расслоений собственных векторов. Естественные связности в этих расслоениях совпадают с *адиабатической связностью*, определенной ниже.

Рассмотрим «квантовую» систему с медленно меняющимся гамильтонианом

$$\frac{dz}{dt} = iA(\epsilon t)z, \quad \epsilon \ll 1,$$

где  $A$  — эрмитова матрица, зависящая от медленно меняющегося параметра  $\epsilon t$ . Предположим, что в начальный момент возбуждена только одна из мод. В *адиабатическом приближении* колебания описываются как навеки одномодовые, с медленно меняющимся со временем собственным вектором (быстрыми осцилляциями около этого усредненного приближения при этом пренебрегают). Такое приближение разумно на временах порядка  $t \sim 1/\epsilon$ .

Фаза адиабатического приближения определяется как интеграл от медленно меняющейся мгновенной частоты,  $S(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$ , где  $\lambda(\tau)$  — мгновенное собственное число матрицы  $A$  в момент  $\tau$ .

Адиабатическое приближение описывает медленный перенос собственного вектора вдоль пути в пространстве эрмитовых матриц с простым спектром. Этот усредненный адиабатический перенос задает в расслоении собственных векторов связность. Назовем эту связность *адиабатической связностью*.

**Предложение.** *Адиабатическая связность совпадает с естественной связностью расслоения собственных векторов.*

Я не нашел доказательства этого (в сущности известного, см. [5]) факта в литературе. Следующее строгое доказательство, основанное на современной технике метода усреднения классической механики, предложено А. И. Нейштадтом. Диагонализируем матрицы зависящими от параметра линейными (унитарными) заменами координат. В новых координатах матрицы преобразованной зависящей от времени системы будут лишь слегка недиагональными, если параметр меняется медленно. Диагонализируем их в первом приближении малой

унитарной зависящей от времени заменой переменных. В этих новых координатах адиабатическое приближение — это просто решение диагонализированной системы (причем остающееся возмущение имеет более высокий, второй порядок малости). Из этого вычисления адиабатического приближения следует совпадение адиабатической связности с естественной связностью.

Ниже, однако, приведено менее красивое рассуждение, основанное на явных формулах: мы вычислим компоненты обеих связностей в не зависящем от времени эрмитово-ортонормированном базисе  $(v_1, \dots, v_n)$  невозмущенного оператора  $A$ . Мы вычислим его собственные числа  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  и матричные элементы  $b_{k,m}$  возмущающего эрмитова оператора  $B$  в базисе собственных векторов оператора  $A$ . Обозначим через  $v_m + \varepsilon w_m + \dots$  собственные векторы возмущенного оператора  $A + \varepsilon B$  (мы переносим  $v_m$  при помощи естественной связности и обозначаем точками члены высшего порядка малости по отношению к параметру возмущения  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Поправка  $\varepsilon w_m$  к собственному вектору описывается компонентами  $u_{k,m}$  разложения  $w_m$  по собственному базису,  $w_m = \sum u_{k,m} v_k$ ,  $k \neq m$ .

Отсутствие слагаемого с  $k = m$  означает ортогональность поправки к исходному вектору, т.е. естественность связности.

Поправка первого порядка дается следующей классической формулой теории возмущений.

**Лемма 1.** *Компоненты поправки  $\varepsilon w_m$  к собственному вектору  $v_m$  ( $Av_m = \lambda_m v_m$ ) выражаются через элементы  $b_{k,m}$  матрицы оператора  $B$  формулой*

$$\varepsilon u_{k,m} = \frac{\varepsilon b_{k,m}}{\lambda_m - \lambda_k} \quad (k \neq m), \quad (1)$$

*а поправка к собственному числу — формулой*

$$\lambda_m(\varepsilon) = \lambda_m(0) + \varepsilon \delta_m + \dots,$$

*где  $\delta_m = b_{m,m}$  (здесь  $Bv_m = \sum b_{k,m} v_k$ ).*

**Доказательство.** Достаточно приравнять члены с  $\varepsilon$  в первой степени в тождестве

$$(A + \varepsilon B + \dots)(v_m + \varepsilon w_m + \dots) = (\lambda_m + \varepsilon \delta_m + \dots)(v_m + \varepsilon w_m + \dots).$$

Формула (1) определяет естественную связность в расслоении собственных векторов: матрица  $u$  косоэрмитова (так как  $B$  эрмитова) и линейно зависит от  $B$ .

Теперь вычислим адиабатическую связность. Для этого надо решить в первом приближении по  $\varepsilon t$  линейное уравнение с медленно меняющимися коэффициентами

$$\frac{dz}{dt} = i(Az + \varepsilon t Bz + \dots)$$

с начальным условием  $z(0) = v_m$  и усреднить скорость ухода решения от решения  $z_* = e^{i\lambda_m t} v_m$  невозмущенного уравнения по большому числу периодов собственных колебаний при столь малом  $\varepsilon$ , что произведение  $\varepsilon t$  остается малым. Точками обозначены члены высшего порядка малости (т.е.  $(\varepsilon t)^2$  и т.п.).

Разложим возмущенное решение в ряд по  $\varepsilon$ :  $z = z_* + \varepsilon x + \dots$  и обозначим через  $x_k$  компоненты вектора  $x = \sum x_k v_k$ .

**Лемма 2.** Компоненты поправки к решению невозмущенного уравнения даются формулами

$$\varepsilon x_k = \frac{\varepsilon}{\lambda_m - \lambda_k} b_{k,m} \left( t e^{i\lambda_m t} + i \frac{e^{i\lambda_m t} - e^{i\lambda_k t}}{\lambda_m - \lambda_k} \right) \quad \text{при } k \neq m,$$

$$\varepsilon x_m = \varepsilon i b_{m,m} e^{i\lambda_m t} t^2 / 2.$$

**Доказательство.** Вектор  $x$  удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{dx}{dt} = i(Ax + tBz_*), \quad x(0) = 0, \quad z_* = e^{i\lambda_m t} v_m.$$

Ищем решение в виде  $x = e^{iAt} C(t)$ , где  $C(t) = \sum c_k(t) v_k$ . Получаем

$$\dot{c}_k = i t e^{i\alpha t} b_{k,m}, \quad \alpha = \lambda_m - \lambda_k, \quad c_k(0) = 0.$$

Воспользуемся следующим очевидным тождеством:

**Лемма 3.** При  $\alpha \neq 0$

$$\int_0^t \tau e^{i\alpha \tau} d\tau = \frac{t}{i\alpha} e^{i\alpha t} + \frac{e^{i\alpha t} - 1}{\alpha^2}.$$

Из этой формулы находим при  $k \neq m$

$$c_k = \left( \frac{t}{\alpha} e^{i\alpha t} + i \frac{e^{i\alpha t} - 1}{\alpha^2} \right) b_{k,m},$$

в то время как при  $k = m$

$$c_m = it^2 b_{m,m}/2.$$

Этим доказана лемма 2.

Чтобы отделить в выражении леммы 2 адиабатический дрейф от быстрых осцилляций вокруг него, рассмотрим значения  $t$ , кратные большому целому числу колебаний частоты  $\lambda_m$  (этот стробоскопический трюк эквивалентен усреднению) и столь малое  $\varepsilon$ , что  $\varepsilon t$  остается малым. Тогда, пренебрегая осциллирующим вторым слагаемым в скобках в лемме 2 по сравнению с растущим первым слагаемым, получим адиабатическое приближение к компонентам поправки к собственному вектору  $v_m$  в виде

$$\varepsilon \widehat{x}_k = \frac{\varepsilon t b_{k,m}}{\lambda_m - \lambda_k} \quad \text{при } k \neq m, \quad \varepsilon \widehat{x}_m = i \varepsilon b_{m,m} t^2 / 2. \quad (2)$$

Поправка комплексного направления  $v_m$  в лемме 2 соответствует медленному изменению частоты  $\lambda_m$ . Действительно, фаза адиабатического приближения есть  $S(t) = \lambda_m t + \varepsilon t^2 b_{m,m}/2 + \dots$ . Эта фаза доставляет приближенное решение, проекция которого на направление  $v_m$  (в первом приближении) есть

$$e^{iS(t)} v_m = z_* (1 + i \varepsilon t^2 b_{m,m}/2 + \dots). \quad (3)$$

Поправочный член в формуле (3) имеет значение  $x_m$ , указанное в лемме 2. Формулы (1)–(3) показывают, что адиабатическая связность совпадает с естественной. Было бы интересно вывести естественные связности других расслоений из соответствующих адиабатических приближений.

**Замечание.** Связь между адиабатическим приближением и связностями в расслоениях была известна к 1920 году или даже ранее. Например, в классическом учебнике Ф. Клейна «Высшая геометрия» [11] связность Леви-Чивита в римановой геометрии истолковывается, следуя Радону, при помощи медленного перенесения осциллятора (вроде маятника) вдоль риманова конфигурационного многообразия. Однако эти идеи, насколько я знаю, никогда не были представлены в математически строгой форме.

В современной физической литературе квазиклассический аналог адиабатической связности в симплектической геометрии называется теорией *фазы Берри и углов Ханна*. В простейших (но уже очень содержательных) случаях эти связности были найдены С. М. Рытовым [6], [7] в 30-е годы и А. Ю. Ишлинским [8] в 40-е годы в теории поворота направления поляризации света в световоде и в теории гироскопов соответственно.

В случае световода рассматривается тонкое искривленное светопроводящее волокно. Поляризованный свет, входящий в начальной точке, выходит из конечной точки с некоторым направлением поляризации.

Изогнем волокно так, чтобы положение и направление волокна в начальной и конечной точках не менялось. Направление поляризации выходящего луча изменится. Рытов вычислил угол, на который повернется направление поляризации.

Рассмотрим гауссово отображение световода, сопоставляющее каждой точке волокна его направление в этой точке. Гауссовы образы исходного и искривленного волокна образуют на сфере две кривые, соединяющие одни и те же начальную и конечную точки на сфере. *Угол поворота направления поляризации равен площади между этими двумя кривыми*. Ясно, что эта формула Рытова вычисляет параллельный перенос (соответствующий связности) вдоль замкнутой петли в виде интеграла от кривизны связности (по 2-цепи, ограниченной петлей). Физики называют эту естественную связность «инерцией направления поляризации».

В случае теории гироскопов рассматривается медленный обнос быстро вращающегося твердого тела по замкнутому пути на поверхности Земли. Сравнение перенесенного тела с таким же телом, вращающимся в исходной точке, обнаруживает набег фазы. Формула Ишлинского [8] выражает величину этого набега через интеграл от кривизны соответствующей связности.

Квантово-механическим проявлением естественной (или адиабатической?) связности является хорошо известный эффект Агнона-Бома, согласно которому квантовая частица чувствует не только напряженность, но и *потенциал* магнитного поля, влияющий на квантово-механическую фазу частицы, даже когда последняя движется в области, где само поле отсутствует. Этот эффект казался настолько невероятным, что физики в него не верили, пока он не был подтвержден прямыми измерениями (при низких температурах).

## 7. Характеристические числа в физике: квантовый эффект Холла

Топологическая нетривиальность расслоения собственных векторов проявляется в физике квантового эффекта Холла [9].

Рассмотрим двумерную поверхность в пространстве эрмитовых матриц. Если эта поверхность общего положения, то все соответствующие матрицы будут иметь простые спектры (так как коразмерность многообразия эрмитовых матриц с кратными собственными числами равна 3).

Нормированные  $i$ -ые собственные числа матриц двухпараметрического семейства образуют  $S^1$ -расслоение над поверхностью-базой. Если поверхность замкнута (или если выполнены другие подходящие граничные условия), возникают и числа Черна — характеристические числа этих расслоений (вычисляемые как интегралы формы кривизны естественной связности вдоль поверхности).

Предположим теперь, что поверхность зависит еще от одного параметра («времени») и движется. Тогда в отдельные моменты времени движущаяся поверхность будет пересекать многообразие матриц с кратными собственными числами. В эти моменты числа Черна расслоений собственных векторов будут меняться.

При трансверсальном (общего положения) прохождении через точку многообразия матриц с кратными собственными числами число Черна меняется на 1 (в какую сторону — определяется естественной ориентацией многообразия эрмитовых матриц с кратными собственными числами в его регулярных точках).

Действительно, рассмотрим поверхность непосредственно перед прохождением через особую точку и непосредственно после. Чтобы получить вторую поверхность из первой, достаточно окружить особую точку зацепленной с ней в трехмерном пространстве малой сферой  $S^2$  и заменить первую поверхность ее связной суммой со сферой. Полученную поверхность можно затем продеформировать во вторую поверхность, уже не меняя числа Черна.

Расслоение собственных векторов над этой сферой является стандартным расслоением Хопфа с числом Черна, равным единице.

При связном суммировании к интегралу формы кривизны по первой поверхности прибавится интеграл по сфере, т.е. 1 (со знаком, опреде-



ляемым направлением прохождения: многообразие матриц с кратными собственными числами имеет естественную ориентацию).

Последовательность изменений числа Черна на 1 при движении поверхности в пространстве эрмитовых матриц наблюдается в эксперименте в виде так называемого (целочисленного) квантового эффекта Холла (см. [9]).

Таким образом, теория этого эффекта является почти что прямой (но упущенной) комплексификацией проведенного в [1] исследования монодромии собственных векторов симметрических матриц, зависящих от параметров.

Эти примеры показывают, что комплексификация, хотя и не аксиоматизированная в формальной математике, является весьма плодотворной операцией. Было бы, например, интересно понять, какая именно математическая структура доставляет комплексификацию теории гомотопий.

Ближе к теме настоящей статьи рассмотрение унитарной группы как комплексификации вещественного лагранжева многообразия Грассмана. Унитарная группа компактифицирует пространство эрмитовых матриц (определяющих «эрмитовы производящие функции») так же, как лагранжево многообразие Грассмана компактифицирует пространство симметрических матриц (определяющих квадратичные производящие функции симплектической геометрии). Это немедленно приводит к эрмитову варианту теории лагранжевых многообразий и к соответствующим проблемам симплектической топологии, ожидающим храбрых исследователей (возникающую теорию следует сравнить с построенной Гивенталем кватернионной версией [10] теории лагранжевых многообразий).

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Моды и квазимоды. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, 6(2), 94–101.
- [2] Shapiro M., Vainstein A. Stratification of Hermitian matrices, the Alexander mapping and the bundle of eigenspaces. Preprint, Weizmann Inst., 1994, 6 p.
- [3] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Труды семинара С. Л. Соболева. I. Новосибирск, 1976, 5–15.
- [4] Berry M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 1984, 392(1802), 45–57.

- [5] Aharonov Y., Anandan J. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(16), 1593–1596.
- [6] Рытов С. М. О переходе от волновой к геометрической оптике. *ДАН СССР*, 1938, **18**(4/5), 263–266.
- [7] Владимирский В. В. О вращении плоскости поляризации в искривленном световом луче. *ДАН СССР*, 1941, **31**(3), 222–225.
- [8] Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем. Киев: АН Укр. ССР, 1952, 430 с.  
Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976, 670 с.
- [9] Collin de Verdière Y. Effet quantique de Hall. In: Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Institut Fourier (Grenoble), 1993, No. II.
- [10] Givental A. B. Quaternionic Sturm theory and symplectic geometry. Lectures in Strasbourg (June 1991) and in Bologna (September 1991).
- [11] Klein F. Vorlesung über höhere Geometrie. 3 Aufl. Berlin: Grundlagen Math. Wiss. Einzeldarst., 1926, 8 + 405 S.

## Замечания об экстатических точках плоских кривых

Существует интересное соотношение между точками, где плоская кривая имеет необычно высокое касание с алгебраической кривой степени  $n$ , и точками уплощения пространственных кривых (точками, в которых высшее кручение обращается в нуль). В случаях  $n = 1, 2$  и  $3$  это соотношение приводит к оценкам снизу для числа точек касания высшего порядка; при  $n \geq 4$  задача нахождения такой оценки остается открытой (даже для кривых, близких к окружности).

Наряду с доказательством оценки снизу для числа  $n$ -экстатических точек при  $n < 4$  настоящая работа содержит приложение тех же самых идей к изучению тригонометрических многочленов, аппроксимирующих периодическую функцию. Полученная здесь оценка снизу для числа точек с необычно высоким порядком аппроксимации может рассматриваться как обобщение неравенства Морса на высшие производные.

Эти результаты показывают, что теория экстатических точек, равно как и теория точек уплощения, относится скорее к симплектической и контактной топологии, чем к проективной геометрии (ср. [1], [2]).

### 1. Экстатические точки плоских кривых

**Определение.** Точкой  $n$ -перегиба гладкой кривой в  $\mathbb{R}P^2$  называется точка, в которой кратность пересечения этой кривой с некоторой алгебраической кривой степени  $n$  необычно высокая, а именно, выше, чем

$$d(n) = n(n + 3)/2.$$

**Замечание.** Здесь  $d(n)$  — размерность пространства плоских алгебраических кривых степени  $n$ . В общей точке кривой общего положения кратность пересечения с ближайшей алгебраической кривой степени  $n$  равна  $d(n)$ .

**Пример.** Для  $n = 1$  имеем  $d(1) = 2$ . Точки 1-перегиба (в которых кратность пересечения с прямой больше 2 и равна 3 в общем положении) являются точками нулевой кривизны.

Для  $n = 2$  имеем  $d(2) = 5$ . Точки 2-перегиба (в которых некоторые коники пересекают кривую с кратностью  $\geq 6$ ) называются секстатическими точками.

Точками 3-перегиба являются точки, в которых некоторые кубики пересекают кривую с кратностью, не меньшей 10, и т.д.

Д. Эйзенбад предложил называть точки  $n$ -перегиба *экстатическими*, поскольку они вызывают необыкновенно приятные чувства у алгебраического геометра, изучающего гладкие кривые.

Основными результатами этих заметок являются теоремы 4 и 5 ниже, но я начну с более простых (и в основном известных) теорем 1–3.

**Теорема 1 (Мёбиус).** *Плоская кривая, достаточно близкая к прямой на проективной плоскости, имеет не менее трех точек 1-перегиба.*

*Существуют (кубические) кривые, сколь угодно близкие к прямой, имеющие ровно 3 ( $= d(1) + 1$ ) невырожденные точки 1-перегиба.*

Здесь и далее «близкая» означает «близкая с достаточным числом производных».

**Теорема 2.** *Плоская кривая, достаточно близкая к окружности, имеет не менее 6 ( $= d(2) + 1$ ) секстатических точек.*

«Достаточно близкими» в теореме 1 являются все вложенные нестягиваемые кривые, а в теореме 2 — все выпуклые кривые (см. [3]).

**Теорема 3.** *Существует плоская кривая, сколь угодно близкая к окружности, имеющая ровно 6 секстатических точек (все невырожденные).*

Основными результатами этих заметок являются следующие две теоремы.

**Теорема 4.** *Плоская кривая, достаточно близкая к овалу неприводимой кубики, имеет не менее 10 точек 3-перегиба ( $10 = d(3) + 1$ ).*

*Существуют кривые, сколь угодно близкие к овалу, имеющие ровно 10 точек 3-перегиба, каждая из которых невырождена.*

**Теорема 5.** *Существуют плоские кривые, сколь угодно близкие к окружности, имеющие ровно 8 точек 3-перегиба, причем невырожденных.*

Было бы интересно изучить границу между случаями теорем 4 и 5.

## 2. Гармонические и тригонометрические аппроксимации

Семейства алгебраических кривых, рассматриваемых в теоремах 1–5, могут быть заменены другими семействами кривых. Это приводит к многочисленным теоремам, и даже следующее элементарное следствие результатов из [1], по-видимому, является новым:

**Теорема 6.** *Для любой функции на окружности существуют по меньшей мере  $2n + 2$  точки и  $2n + 2$  тригонометрических многочлена степени  $n$ , графики которых пересекают график функции в этих точках с кратностью, не меньшей  $2n + 2$ . Существуют функции, для которых число таких точек в точности равно  $2n + 2$ .*

Тригонометрические многочлены могут быть заменены здесь другими чебышевскими семействами функций.

**Пример.** В случае  $n = 0$  аппроксимирующими многочленами являются минимальная и максимальная константы. Таким образом, теорема 6 обобщает неравенство Морса для функций на окружности.

При  $n = 1$  утверждение уже нетривиально: существуют по меньшей мере 4 точки  $t_i$ , в которых многочлены  $a_i + b_i \cos t + c_i \sin t$  аппроксимируют  $f(t)$  с ошибкой, не превышающей  $c|t - t_i|^4$ . Этот факт естественным образом связан с теоремой о четырех вершинах.

**Теорема 7.** *Всякая плоская кривая, достаточно близкая к окружности, имеет по меньшей мере  $2n + 2$  точки  $t_i$ , в которых ограничение данной функции  $z = R(x, y)$  на кривую может быть аппроксимировано ограничениями подходящих гармонических многочленов  $h_i(x, y)$  степени  $n$  с ошибкой, не превышающей  $c|t - t_i|^{2n+2}$ .*

Я не знаю, верно ли это для любой выпуклой кривой; функция  $R = x^2 + y^2$  — уже вполне подходящий пример.

### 3. Выпуклые кривые и их проекции

Все предыдущие теоремы тесно связаны с выпуклыми кривыми в вещественном проективном пространстве  $\mathbb{R}P^m$  (называемыми также чебышевскими системами функций).

**Определение.** Замкнутая кривая в  $\mathbb{R}P^m$  называется *выпуклой*, если она пересекает каждую гиперплоскость не более, чем в  $m$  точках (с учетом кратностей).

**Пример.** Кривая в  $\mathbb{R}^{2n}$

$$x_1 = \cos t, \quad y_1 = \sin t, \quad \dots, \quad x_n = \cos nt, \quad y_n = \sin nt$$

является выпуклой.

Выпуклые кривые в  $\mathbb{R}P^{2n}$  аффинны и, следовательно, стягиваемы. Выпуклые кривые в  $\mathbb{R}P^{2n-1}$  нестягиваемы. Выпуклые кривые образуют связную открытую область в пространстве отображений окружности в  $\mathbb{R}P^m$  (см. [1]), если  $m$  четно, и две такие области, если  $m$  нечетно.

**Теорема 8.** Для любой выпуклой кривой, лежащей в гиперплоскости  $\mathbb{R}^{2n}$  пространства  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , найдутся сколь угодно малые деформации в объемлющем пространстве такие, что деформированная кривая имеет  $2n + 2$  точки уплощения (все невырожденные) в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

**Замечание.** Согласно [1] кривая, проекция которой на гиперплоскость из какого-нибудь центра (вне кривой и гиперплоскости) является выпуклой, имеет не менее  $2n + 2$  точки уплощения.

**Теорема 9.** Спроектируем выпуклую кривую в  $\mathbb{R}P^m$  на гиперплоскость  $\mathbb{R}P^{m-1}$  (из центра вне кривой и гиперплоскости). Тогда спроектированная кривая имеет не более  $m$  точек уплощения.

**Замечание.** М. Э. Казарян предположил, что спроектированная кривая, возможно, всегда имеет  $m$  точек уплощения. Это не так, хотя спроектированные кривые, имеющие ровно  $m$  точек уплощения, существуют.

**Определение.** Прямая в дополнении к выпуклой кривой в  $\mathbb{R}P^m$  называется *внешней*, если проекция кривой из каждой точки этой прямой имеет ровно  $m$  точек уплощения.

**Пример.** Любая прямая, не пересекающая выпуклую кривую в  $\mathbb{R}P^2$ , является внешней.

**Гипотеза.** Внешние прямые существуют.

Эта гипотеза доказана недавно С. С. Анисовым и С. М. Гусейн-Заде (независимо друг от друга). Их доказательства будут опубликованы в другом месте.

**Определение.** Подпространство коразмерности 2 в  $\mathbb{R}^{2n}$  называется *внутренним* по отношению к выпуклой кривой, если каждая гиперплоскость, содержащая это подпространство, пересекает кривую в  $2n$  точках. Коэффициент зацепления внутреннего подпространства с кривой равен  $n$ .

**Пример.** Внутренними подпространствами выпуклой кривой в  $\mathbb{R}^2$  являются внутренние точки диска, ограниченного кривой.

**Гипотеза.** Внутренние подпространства существуют.

Эта гипотеза двойственна предыдущей (для  $m = 2n$ ) и также недавно доказана (теми же авторами).

**Замечание.** Я не знаю, имеет ли всякая выпуклая кривая в  $\mathbb{R}^{2n}$  выпуклую проекцию на некоторое подпространство  $\mathbb{R}^{2n-2}$ . Является ли она проекцией некоторой выпуклой кривой в  $\mathbb{R}^{2n+2}$ , также мне неизвестно. Я надеюсь, что ответ положителен в обоих случаях (ср. с леммой 7 в §12 ниже).

#### 4. Точки уплощения и производная Шварца

Рассмотрим отображение проективной прямой в проективную прямую,  $f : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ .

**Определение.** Проективно экстремальной точкой  $t_0$  отображения  $f$  называется точка, в которой  $f$  имеет необычно высокий порядок контакта с некоторым проективным отображением (а именно, их разность меньше, чем  $C|t - t_0|^4$  для некоторого  $C$ ). Это те точки, где производная Шварца отображения обращается в нуль.

Недавно Э. Жис [4] доказал следующее утверждение:

**Теорема 10.** *Всякий диффеоморфизм вещественной проективной прямой на себя имеет не менее 4 проективно экстремальных точек.*

Следующее замечание сделано М. Э. Казаряном в связи с докладом С. Л. Табачникова о теореме Жиса на семинаре по теории особенностей (Высшая нормальная школа, Париж, 1995):

**Теорема 11.** *Представим график отображения проективной прямой в проективную прямую как кривую на поверхности однополостного гиперboloида в  $\mathbb{R}P^3$  (рассматриваемого как произведение его двух прямых).*

*Тогда проективно экстремальные точки отображения будут точками уплощения графика.*

Это замечание позволяет переформулировать теорему Жиса следующим образом:

**Теорема 12.** *Замкнутая кривая, вложенная в поверхность однополостного гиперboloида в  $\mathbb{R}P^3$  и трансверсальная прямым гиперboloида, имеет не менее 4 точек уплощения.*

Овсиенко и Табачников [4] вывели теорему Жиса из теоремы о теннисном мяче [7].

**Замечание.** Теоремы 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 12 наводят на мысль, что теоремы симплектической и контактной топологии из [1] и [2] могут иметь нелокальные аналоги в том же смысле, в котором теория Конли–Цендера–Флоера–Шалперона и теорема Чеканова [5], [6] о лагранжевых пересечениях и лежандровых зацеплениях являются нелокальными аналогами теории Морса.

## 5. Высшие перегибы и уплощения кривой Веронезе

**Определение.**  $n$ -е отображение Веронезе  $V_n : P^2 \rightarrow P^{d(n)}$  ставит в соответствие (в аффинных координатах) точке  $(x, y)$  точку в  $\mathbb{R}^{d(n)}$ , аффинные координаты которой являются значениями мономов  $(x, y, \dots, x^n, \dots, y^n)$  степеней  $(1, \dots, n)$  в этой точке.

Образ кривой  $C \subset P^2$  при этом отображении называется  $n$ -й кривой Веронезе кривой  $C$ .

Кривая  $V_n C$  является пересечением  $V_n(P^2)$  с гиперплоскостью в  $P^{d(n)}$ , если и только если  $C$  — алгебраическая кривая степени  $n$ .



**Лемма 1.** При  $n$ -м отображении Веронезе точки  $n$ -перегиба плоской кривой  $C$  переходят в точки уплощения  $n$ -й кривой Веронезе  $V_n C$  в  $P^{d(n)}$ .

**Доказательство.** Соприкасающаяся гиперплоскость к кривой  $V_n C$  представляет собой алгебраическую кривую  $f(x, y) = 0$ , где  $f$  — многочлен степени  $n$ .

Следовательно, кратность пересечения соприкасающейся гиперплоскости с кривой Веронезе  $V_n C$  равна порядку нуля  $f$  вдоль  $C$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Эта лемма сводит изучение экстатических точек плоских кривых к изучению уплощений их кривых Веронезе. Оценка снизу числа точек уплощения дается следующей теоремой из [1]:

**(Основная) теорема.** Пусть дана выпуклая кривая в  $\mathbb{R}P^{d-1}$ . Тогда всякая кривая в объемлющем пространстве  $\mathbb{R}P^d$ , достаточно близкая к исходной кривой, имеет по меньшей мере  $d + 1$  точек уплощения (геометрически различных).

## 6. Доказательство теоремы 2

В качестве аффинных координат в  $\mathbb{R}^5 \subset P^{5=d(2)}$  выберем следующий базис из 5 многочленов (вместо 5 мономов  $(x, \dots, y^2)$ ):

$$(x, y, x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2) = (a_1, b_1, a_2, b_2, E).$$

Отображение Веронезе  $V_2$  переводит окружность  $x^2 + y^2 = 1$  в подмножество гиперплоскости  $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^5$ :  $E = 1$ . Образом служит кривая

$$a_1 = \cos t, \quad b_1 = \sin t, \quad a_2 = \cos 2t, \quad b_2 = \sin 2t,$$

выпуклая в  $\mathbb{R}^4$ .

Каждая возмущенная кривая имеет не менее 6 точек уплощения (согласно теореме из §5). Точки уплощения кривой Веронезе  $V_2 C$  являются образами точек 2-перегиба кривой  $C$  (лемма 1 из §5).

Следовательно, на каждой кривой, близкой к окружности, имеется по меньшей мере 6 точек 2-перегиба, что и требовалось доказать.  $\square$

## 7. Доказательство теоремы 4

Образ нашей кубической кривой  $C_0$  при отображении Веронезе  $V_3 : P^2 \rightarrow P^9$  принадлежит гиперплоскости  $P^8 \subset P^9$  (определенной уравнением кубики). Пусть  $C'_0$  — наш овал.

**Лемма 2.** *Кривая Веронезе  $V_3(C'_0)$  выпукла в  $P^8$ .*

**Доказательство.** Точки пересечения кривой  $V_3(C'_0)$  с гиперплоскостью в  $P^8$  являются образами точек пересечения кривой  $C'_0$  с другой кубикой (соответствующей гиперплоскости в  $P^9$ ). Их число не более 9 (по теореме Безу). Но число точек пересечения на овале четно. Следовательно, оно не более 8, что и требуется определением выпуклости.  $\square$

Возмущенная кривая  $C$  отображается под действием  $V_3$  в кривую в  $P^9$ , имеющую не менее 10 точек уплощения (теорема из §5). Они являются образами точек 3-перегиба кривой  $C$  (лемма 1). Следовательно,  $C$  имеет по меньшей мере 10 точек 3-перегиба, что и требовалось доказать.  $\square$

Пример возмущения, имеющего ровно 10 точек 3-перегиба, будет дан в §13 ниже.

## 8. Доказательство теоремы 3

Используем координаты  $(a_1, b_1, a_2, b_2, E)$  в  $\mathbb{R}^5 \subset P^5$ , введенные в §6. Рассмотрим плоскую кривую  $C_\epsilon$ :

$$x = r(t) \cos t, \quad y = r(t) \sin t, \quad r(t) = 1 + \epsilon f(t), \quad |\epsilon| \ll 1.$$

Отображение Веронезе  $V_3$  переводит  $C_\epsilon$  в следующую кривую:

$$a_1 = r c_1, \quad b_1 = r s_1, \quad a_2 = r^2 c_2, \quad b_2 = r^2 s_2, \quad E = r^2,$$

где  $c_k = \cos kt$ ,  $s_k = \sin kt$ .

Чтобы найти точки уплощения этой кривой  $R(t, \epsilon)$  в  $\mathbb{R}^5$ , вычислим определитель  $\Delta$ , образованный производными  $R_i = d^i R / (dt)^i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .

**Лемма 3.** *Определитель  $R_1 \wedge \dots \wedge R_5$  равен*

$$\Delta = \epsilon W[c_1, s_1, c_2, s_2, 2f] + O(\epsilon^2),$$

где  $W[u_1, \dots, u_N] = \det(\partial^j u_i / (\partial t)^j)$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ .

**Доказательство.** Непосредственное вычисление.  $\square$

**Лемма 4.** *Определитель  $W[c_{i_1}, s_{i_1}, \dots, c_{i_k}, s_{i_k}, F]$  с попарно различными  $i_j$  имеет вид  $LF$ , где  $L$  — линейный однородный дифференциальный оператор порядка  $2k + 1$ , а именно*

$$L = c\partial(\partial^2 + i_1^2) \dots (\partial^2 + i_k^2), \quad c \neq 0.$$

**Доказательство.** Ядро оператора  $L$  содержит функции  $(\cos(i_j t), \sin(i_j t), 1)$ , а вронскиан первых  $2k$  из них не обращается в нуль.  $\square$

Возьмем теперь  $f(t) = \cos 3t$  в определении кривой  $C_\epsilon$ . Тогда  $\Delta = \epsilon c' \sin 3t + O(\epsilon^2)$  и, следовательно,  $C_\epsilon$  имеет 6 точек 3-перегиба (все невырожденные): 6 нулей определителя  $\Delta(t)$ .  $\square$

## 9. Доказательство теоремы 5

В качестве координат в аффинном пространстве  $\mathbb{R}^9 \subset P^{9=d(3)}$  используем многочлены

$$(x, y, x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2 - 1, x^3 - 3xy^2, \\ 3x^2y - y^3, (x^2 + y^2 - 1)x, (x^2 + y^2 - 1)y),$$

обозначая их через

$$(a_1, b_1, a_2, b_2, E, a_3, b_3, A, B).$$

Рассмотрим кривую  $C_\epsilon$ , заданную уравнениями

$$x = r(t) \cos t, \quad y = r(t) \sin t, \quad r(t) = 1 + \epsilon f(t), \quad |\epsilon| \ll 1.$$

Отображение Веронезе  $V_3$  переводит  $C_\epsilon$  в следующую кривую в  $\mathbb{R}^9$ :

$$a_k = r^k \cos kt, \quad b_k = r^k \sin kt \quad (k = 1, 2, 3), \quad E = r^2 - 1, \\ A = (r^2 - 1)rc_1, \quad B = (r^2 - 1)rs_1.$$

Пусть  $R(t, \epsilon)$  — заданная этими формулами точка в  $\mathbb{R}^9$  и  $R_i = d^i R / (dt)^i$ .

**Лемма 5.** *Определитель  $R_1 \wedge \dots \wedge R_9$  равен*

$$\Delta = \epsilon^3 W[c_1, s_1, c_2, s_2, c_3, s_3, 2f, 2fc_1, 2fs_1] + O(\epsilon^4)$$

(где  $W$  определяется аналогично §8, лемма 3).

**Доказательство.** Непосредственное вычисление.  $\square$

Возьмем теперь  $f(t) = \cos 4t$ . Заметим, что тогда

$$2fc_1 = \cos 5t + \cos 3t, \quad 2fs_1 = \sin 5t - \sin 3t.$$

Заменяя  $2fc_1$  на  $2fc_1 - c_3$  и  $2fs_1$  на  $2fs_1 + s_3$ , мы не изменим  $W$ . Следовательно,

$$W[c_1, \dots, 2fs_1] = W[c_1, s_1, c_2, s_2, c_3, s_3, c_5, s_5, 2f].$$

По лемме 4 из §8

$$W[c_1, \dots, 2fs_1] = c \sin 4t, \quad c \neq 0.$$

Таким образом,  $\Delta = \epsilon^3 c \sin 4t + O(\epsilon^4)$  имеет 8 корней при  $|\epsilon| \ll 1$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Замечание.** Аналогичные вычисления для высших  $n$ -перегибов приводят к определителям

$$(*) = W[c_k, s_k, f_1, \dots, f_p],$$

$k = (1, 2, \dots, n; m_1, \dots, m_r)$  (где  $2n + 2r + p = d(n)$  — порядок матрицы).

**Лемма 6.** *Определитель (\*) равен определителю порядка  $p$ :*

$$(*) = cW[Lf_1, \dots, Lf_p] \quad (c \neq 0 \text{ не зависит от } f),$$

где  $L = \prod_k (\partial^2 + k^2)$ .

**Доказательство.** Укажем на три очевидных факта:

(1) При фиксированных  $(f_2, \dots, f_p)$  (\*) является линейным однородным дифференциальным оператором порядка  $d(n)$  относительно  $f_1$ ,

$$W = \sum a_j [f_2, \dots, f_p] \partial^j f_1, \quad 1 \leq j \leq d(n).$$

(2) Этот оператор с постоянными коэффициентами обращается в нуль на функциях  $f_1 = 1, c_k, s_k$ . По лемме 4 он имеет вид

$$\left( \sum_{s \geq 1} b_s [f_2, \dots, f_p] \partial^s \right) L.$$

(3) Определитель (\*) кососимметричен относительно  $(f_1, \dots, f_p)$ .

Лемма 6 следует из (1), (2) и (3).  $\square$

## 10. Доказательство теоремы 6

Построим кривую в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , определенную уравнениями

$$a_k = \cos kt, \quad b_k = \sin kt \quad (k = 1, \dots, n), \quad z = f(t),$$

где  $f$  — данная функция.

Эта кривая имеет не менее  $2n + 2$  точек уплощения (теорема из §5, см. [1]). Действительно, ее проекция на  $\mathbb{R}^{2n}$  вдоль оси  $z$  выпукла, а  $f$  можно сделать сколь угодно малой выбором масштаба  $z$ .

Пусть  $z = \sum(A_k a_k + B_k b_k) + C$  — уравнение соприкасающейся гиперплоскости в точке уплощения (коэффициент при  $z$  не равен нулю, поскольку проекция на  $\mathbb{R}^{2n}$  выпукла). Ограничение линейной функции  $z - \sum(A_k a_k + B_k b_k) - C$  на кривую обращается в нуль в нашей точке уплощения с кратностью, не меньшей  $2n + 2$ .

Поэтому функция  $C + \sum(A_k \cos kt + B_k \sin kt)$  — требуемый тригонометрический многочлен, аппроксимирующий  $f$  в точке уплощения.

Число таких точек равно  $2n + 2$  для  $f = \cos(n + 1)t$ .  $\square$

## 11. Доказательство теоремы 7

Определим «гармоническое отображение Веронезе»  $H_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , переводящее точку  $(x, y)$  в точку

$$(a_k = \operatorname{Re}(x + iy)^k, \quad b_k = \operatorname{Im}(x + iy)^k, \quad k = 1, \dots, n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Стандартная окружность  $(x = \cos t, y = \sin t)$  переходит в стандартную выпуклую кривую  $(x_k = \cos kt, y_k = \sin kt)$  в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Добавим новую координату  $z = R(x, y)$  и рассмотрим образ кривой  $C \subset \mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , где  $C$  близка к стандартной окружности:

$$t \mapsto (a_k(t), b_k(t), z(t)).$$

Эта пространственная кривая имеет выпуклую проекцию на  $\mathbb{R}^{2n}$  (вдоль оси  $z$ ). Следовательно, она имеет не менее  $2n + 2$  точек уплощения в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Пусть  $z - \sum(A_k a_k + B_k b_k) - C = 0$  — уравнение соприкасающейся гиперплоскости в точке уплощения. Линейная функция от  $(a_k, b_k, z)$ , равная

$$z - \sum(A_k a_k + B_k b_k) - C,$$

обращается в нуль на пространственной кривой в точке уплощения с кратностью, не меньшей  $2n + 2$ .

Функция

$$R(x, y) - \sum (A_k \cos kt + B_k \sin kt) - C$$

на исходной плоской кривой имеет в соответствующей точке нуль кратности, не меньшей  $2n + 2$ , что и требовалось.  $\square$

## 12. Доказательство теоремы 8

Нужная деформация может быть найдена в классе кривых, имеющих недеформированную проекцию на  $\mathbb{R}^{2n}$ :

$$x_k = a_k(t), \quad y_k = b_k(t), \quad z = \epsilon f(t).$$

Здесь все функции  $2\pi$ -периодические.

Точки уплощения являются нулями определителя

$$W[a_k, b_k (k = 1, \dots, n), f] = Lf,$$

где  $L$  — линейный однородный дифференциальный оператор порядка  $2n + 1$ , обращающийся в нуль на функциях  $(1, a_k, b_k)$ . Этот оператор и двойственный к нему оператор  $L^*$  являются неосцилляционными, так как кривая  $(a_k, b_k)$  выпукла (см. [1]).

**Лемма 7.** *Существует  $2\pi$ -периодическое решение  $f$  уравнения  $Lf = g$ , где  $g \neq 0$  — подходящий тригонометрический многочлен степени не выше  $n + 1$ .*

**Доказательство.** Образом оператора  $L$  является ортогональное дополнение ядра оператора  $L^*$ . Это ядро  $(2n + 1)$ -мерно (см. [1]). Следовательно, в  $(2n + 3)$ -мерном пространстве тригонометрических многочленов степени не выше  $n + 1$  существует по меньшей мере двумерное подпространство, ортогональное  $\text{Ker } L^*$ . Это подпространство лежит в  $\text{Im } L$ , и его элементы  $g$  имеют требуемый вид  $Lf$ .  $\square$

Для доказательства теоремы 8 выберем тригонометрический многочлен  $g$  из леммы 7. Он имеет не более  $2n + 2$  корней, так как его степень не превосходит  $n + 1$ .

С другой стороны, он имеет не менее  $2n + 2$  геометрически различных корней, поскольку лежит в  $\text{Im } L$  (или, поскольку он ортогонален  $\text{Ker } L^*$ , см. [1]).

Таким образом,  $Lf$  имеет ровно  $2n + 2$  корней, и все они простые.  $\square$

### 13. Деформация овала кубической кривой, имеющая ровно 10 точек 3-перегиба

Обозначим через  $t$  проекцию окрестности овала на овал и через  $P(x, y)$  — кубический многочлен, определяющий овал  $P = 0$ .

Требуемая кривая задается уравнением  $P(x, y) = \epsilon f(t(x, y))$ , где  $f$  — функция из леммы 7, построенная для выпуклой кривой  $(a_k(t), b_k(t))$  в  $\mathbb{R}^8$ , на которую овал отображается под действием  $V_3$  ( $n$  из леммы 7 здесь равно 4).

Точки 3-перегиба являются нулями определителя 9-го порядка, равного

$$\epsilon W[a_k, b_k; f] + O(\epsilon^2) = \epsilon g(t) + O(\epsilon^2), \quad g = Lf.$$

При выборе  $f$ , указанном в лемме 7,  $g$  является тригонометрическим многочленом степени 5, имеющим ровно 10 корней, причем простых.  $\square$

### 14. Доказательство теоремы 9

Эта теорема — следствие того факта, что кривая, проективно двойственная выпуклой кривой, выпукла (см. [1]).

Точка в  $P^m$ , из которой мы проектируем на  $P^{m-1}$ , является гиперплоскостью  $H$  в двойственном пространстве  $P^{m\vee}$ . Точка уплощения спроектированной кривой является проекцией точки исходной выпуклой кривой, для которой соприкасающаяся гиперплоскость содержит центр проекции. Точка двойственного пространства  $P^{m\vee}$ , представляющая эту соприкасающуюся гиперплоскость, принадлежит  $H$ .

Таким образом, точки уплощения спроектированной кривой являются проекциями тех точек исходной выпуклой кривой, для которых соприкасающаяся гиперплоскость (рассматриваемая как точка двойственного пространства) является точкой пересечения двойственной кривой с  $H$ .

Так как двойственная кривая выпукла (см. [1]), то она пересекает  $H$  не более, чем в  $t$  точках. Следовательно, спроектированная кривая имеет не более  $t$  точек уплощения.  $\square$

## Литература

- [1] Arnold V. I. On the number of flattening points of space curves. Preprint ISRN IML-R, 1-1994/95-SE, Inst. Mittag-Leffler, 1994, 13 p.  
См. также в: Ya. G. Sinai's Moscow Seminar on Dynamical Systems. AMS Translations, Ser. 2, Vol. 171, 1995.
- [2] Kazarian M. E. Nonlinear version of Arnold's theorem on flattening points. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 1996, **323**, 63–68.
- [3] Guieu L., Mourre E., Ovsienko V. Yu. Theorem on six vertices of a plane curve via the Sturm theory. Preprint CPT-CNRS, Luminy, 1994, 11 p.
- [4] Ovsienko V. Yu., Tabachnikov S. L. Sturm theory, Ghys theorem on zeroes of the Schwarzian derivative, and flattening of Legendrian curves. Preprint CPT-CNRS, Luminy, 1995, 13 p.
- [5] Арнольд В. И. Первые шаги симплектической топологии. *УМН*, 1986, **41(6)**, 3–18.
- [6] Чеканов Ю. В. Критические точки квазифункций и производящие семейства лежандровых многообразий. *Функц. анализ и его прилож.*, 1996, **30(2)**, 56–69.
- [7] Arnold V. I. Topological invariants of plane curves and caustics. Dean J. B. Lewis Memorial Lectures. Rutgers University. Providence, RI: AMS, 1994, 60 p. (University Lecture Series, 5)



## Топологическая классификация вещественных тригонометрических многочленов и многогранник циклических змей

Цель настоящей статьи — изучение многообразия вещественных тригонометрических многочленов степени  $n$ , имеющих максимально возможное число  $(2n)$  вещественных критических точек ( $M$ -многочленов).

Мы находим число компонент связности пространства общих  $M$ -многочленов, имеющих  $2n$  различных критических значений. Мы строим полиэдральную модель многообразия  $M$ -многочленов и вещественный алгебраический диффеоморфизм, отображающий многообразие  $M$ -многочленов на внутренность выпуклого многогранного конуса над прямым произведением двух  $(n-1)$ -мерных симплексов и прямой. Многочлены, не являющиеся общими, отображаются на некоторые диагональные гиперплоскости этого многогранного конуса. Наш диффеоморфизм продолжается до гомеоморфизма вплоть до границы конуса (и определяет диффеоморфизмы на внутренностях всех его граней любых размерностей).

### 1. Пространство циклических змей

**Определение.** *Циклической змеей* порядка  $2n$  называется последовательность  $2n$  вещественных чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$c_0 \leq c_1 \geq c_2 \leq \dots \geq c_{2n} = c_0.$$

Змея называется *собственной*, если все неравенства — строгие, и *общей*, если все  $2n$  чисел различны.

Пространство циклических змей порядка  $2n$  является многогранным выпуклым конусом в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Гиперплоскость  $c_1 + \dots + c_{2n} = 0$  пересекает его по строго выпуклому конусу *бесследовых циклических змей*. Конус же всех циклических змей представляет собой прямое произведение конуса бесследовых циклических змей на  $\mathbb{R}$ .

**Определение.** Пересечение конуса бесследовых циклических змей порядка  $2n$  с гиперплоскостью  $\mathbb{R}^{2n-2}$ , где  $\sum(-1)^{i+1}c_i = a > 0$ , называется *многогранником циклических змей*  $P_n$ .

Это компактный выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^{2n-2}$ .

**Пример.**  $P_2$  представляет собой квадрат на плоскости. Внутренность квадрата диффеоморфна области, ограниченной астроидой (которая является каустикой эллипса). Диагонали квадрата переводятся естественным диффеоморфизмом в страт Максвелла (состоящий из двух отрезков, соединяющих противоположные точки возврата астроиды).

Построенный ниже диффеоморфизм многогранника циклических змей на пространство тригонометрических многочленов является обобщением на высшие размерности приведенного комбинаторного описания каустики астроиды и ее страта Максвелла.

**Теорема 1.** *Многогранник циклических змей  $P_n$  является выпуклым многогранником в  $\mathbb{R}^{2n-2}$  с  $2n$  гранями и  $n^2$  вершинами — прямым произведением двух симплексов в  $\mathbb{R}^{n-1}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $c_{2k+1} - c_{2k} = a_k$ ,  $c_{2k+1} - c_{2k+2} = b_k$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ). Из уравнения гиперплоскости  $\mathbb{R}^{2n-2}$  вытекают условия  $\sum a_k = a$ ,  $\sum b_k = a$ . Из определения циклических змей следуют неравенства  $a_k \geq 0$ ,  $b_k \geq 0$ . Любое решение этой системы уравнений и неравенств определяет в точности одну бесследовую циклическую змею, лежащую в  $P_n$ . Следовательно,  $P_n$  — прямое произведение симплексов  $\sum a_k = a$ ,  $a_k \geq 0$  и  $\sum b_k = a$ ,  $b_k \geq 0$  в гиперплоскостях размерности  $n-1$ , определяемых уравнениями  $\sum a_k = a$ ,  $\sum b_k = a$  в  $n$ -мерных  $a$ -пространстве и  $b$ -пространстве.  $2n$  граней определяются уравнениями  $a_k = 0$ ,  $b_k = 0$ .

Опишем теперь диагональные гиперплоскости прямого произведения симплексов, определяемые уравнениями  $c_i = c_j$  в исходных координатах на пространстве змей.

Напишем циклическое слово  $A_1B_1A_2B_2\dots A_nB_n(A_1B_1\dots)$ . Разобьем его на две связных дуги. Каждое такое разбиение определяет диагональную гиперплоскость в прямом произведении двух симплексов с вершинами  $(A_1A_2\dots A_n)$  и  $(B_1B_2\dots B_n)$ .

**Определение.** *Главной диагональю в  $P_n$  называется гиперплоскость, содержащая вершины  $(A_i, B_j)$ , где  $A_i$  и  $B_j$  принадлежат одной той же*

дуге. (Здесь  $A_k$  — вершина вышеописанного симплекса в  $\mathbb{R}^{n-1}$ , определяемая равенством  $a_k = a$ , а  $B_k$  — равенством  $b_k = a$ .)

В исходных координатах такие диагонали определяются уравнениями  $c_i = c_j$ , а их число равно  $n(2n - 1)$ .

**Теорема 2.** Главные диагонали делят многогранник  $P_n$  на симплексы, число которых равно  $nT_n$ , где числа тангенса  $T_n = 1, 2, 16, 272, \dots$  ( $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ) определяются производящей функцией

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n x^{2n-1} / (2n-1)! = \operatorname{tg} x.$$

**Пример.** Для  $n = 2$  получаем  $2T_2 = 4$ . Две диагонали делят квадрат на 4 треугольника.

**Доказательство.** Достаточно изучить компоненты пространства всех циклических змей (обращение следа в нуль и нормировка несущественны). Главные диагонали определяются уравнениями  $c_i = c_j$ . Дополнение к ним представляет собой пространство общих змей.

Построим отображение из пространства общих бесследовых циклических змей порядка  $2n$  на пространство общих обычных змей порядка  $2n - 1$ . Удалим наименьшее из чисел  $c_i$  (скажем,  $c_{2k}$ ). Перенумеруем оставшиеся числа, обозначая их через

$$b_i = c_{2k+i \pmod{2n}}, \quad i = 1, \dots, 2n - 1.$$

Последовательность  $b_1 > b_2 < b_3 > \dots < b_{2n-1}$  является обычной змеей на луче  $(c_{2k}, +\infty)$ , диффеоморфном  $\mathbb{R}$ .

Таким образом, мы построили локальный диффеоморфизм из пространства (не обязательно общих) бесследовых циклических змей порядка  $2n$  на пространство (не обязательно общих) обычных змей порядка  $2n - 1$  в окрестности каждой такой точки  $c$ , для которой минимум из  $c_i$ -х достигается только один раз. Этот диффеоморфизм переводит общие циклические змеи в общие обычные. Поэтому компоненты многообразия общих бесследовых циклических змей являются конусами над симплексами (как и компоненты пространства обычных змей). Следовательно, компоненты дополнения к главным диагоналям в  $P_n$  — открытые симплексы.

Число таких конусов (симплексов) равно произведению числа компонент пространства общих обычных змей порядка  $2n - 1$  (которое равно  $T_n$ , см., например, [1]) и числа  $n$  возможных значений  $k = 1, \dots, n$ , определяющих минимум  $c_{2k} = \min c_i$ .

## 2. Пространство вещественных тригонометрических $M$ -многочленов

Мы нормируем тригонометрические многочлены степени  $n$ , фиксируя старший член и отбрасывая свободный,

$$f(t) = \cos nt + \sum_{0 < k < n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (1)$$

Рассмотрим пространство этих многочленов как вещественное линейное пространство  $\mathbb{R}^{2n-2}$  с координатами  $(a_k, b_k)$ .

**Определение.**  $M$ -многочлен — это тригонометрический многочлен степени  $n$ , не имеющий комплексных критических точек ( $2n$  вещественных критических точек могут быть вырожденными). Он называется *собственным*, если все  $2n$  критических точек различны (и, следовательно, невырождены). Если же все  $2n$  критических значений различны, то  $M$ -многочлен называется *общим*.

$M$ -многочлены вида (1) образуют вещественное полуалгебраическое множество в пространстве  $\mathbb{R}^{2n-2}$ .

Основным результатом настоящей статьи является

**Теорема 3.** Множество  $M$ -многочленов вида (1) в  $\mathbb{R}^{2n-2}$  гомеоморфно многограннику циклических змей  $P_n$ . Существует полуалгебраический гомеоморфизм, индуцирующий диффеоморфизм пространства собственных  $M$ -многочленов на внутренность  $P_n$  и переводящий необщие  $M$ -многочлены в главные диагонали многогранника  $P_n$ .

**Следствие.** Компоненты связности пространства общих  $M$ -многочленов вида (1) стягиваемы, а их число равно  $nT_n$ .

**Пример.** При  $n = 2$  многообразие собственных  $M$ -многочленов вида (1) — область на  $(a_1, b_1)$ -плоскости, ограниченная астроидой. Общие  $M$ -многочлены образуют четыре треугольника, на которые наша область разбивается двумя отрезками, соединяющими противоположные точки возврата. Это разбиение диффеоморфно разбиению открытого квадрата  $P_2$  на четыре треугольника диагоналями квадрата.

**Доказательство.** Комплексная версия требуемого отображения построена в [2] — это отображение ЛЗ (Ляшко–Лойенги–Лорана). Случай вещественных обычных многочленов описан в [3] как вещественная

версия отображения Л2 (Ляшко–Лойенги). Полиэдральная модель, аналогичная нашему многограннику  $P_n$ , представляет собой в этом случае конус Спрингера.

Чтобы применить эти конструкции в тригонометрическом случае, используется следующий факт (обобщающий конструкцию Вакуленко, описанную для обычных многочленов в [3]).

**Лемма.** Любая циклическая змея порядка  $2n$  является, с точностью до аддитивной постоянной и умножения на положительное число, последовательностью критических значений вещественного тригонометрического  $M$ -многочлена вида (1).

Этот многочлен определяется змеей однозначно с точностью до сдвига аргумента  $t$  на целое кратное  $2\pi/n$ .

Мы докажем эту лемму для собственных змей. Доказательство в несобственном случае проводится аналогично.

**Доказательство.** Возьмем  $2n$  экземпляров  $X_j$  (расширенной) комплексной  $s$ -плоскости ( $j = 0, \dots, 2n$ ;  $X_{2n} = X_0$ ). Разрежем  $X_{2k}$  вдоль вещественной оси от  $c_{2k}$  до  $-\infty$  и от  $c_{2k+1}$  до  $+\infty$ , а  $X_{2k+1}$  — от  $c_{2k+1}$  до  $+\infty$  и от  $c_{2k+2}$  до  $-\infty$ . Склеим противоположные стороны общего разреза  $(c_{j+1}, (-1)^j \infty)$  на  $X_j$  и  $X_{j+1}$  ( $j = 0, 1, \dots, 2n - 1$ ).

Построенная таким образом риманова поверхность  $X$  является сферой (в соответствии с формулой Римана–Гурвица). Точка  $s = \infty$  накрывается двумя точками кратности  $n$ , лежащими на поверхности  $X$ .

Из теоремы Римана о единственности комплексной структуры на сфере следует, что проектирование поверхности  $X$  на  $s$ -плоскость задается многочленом Лорана

$$s = f(z) = A_{-n}z^{-n} + \dots + A_n z^n,$$

где  $z$  — такая координата на  $X$ , что вещественная ось (множество неподвижных точек антиголоморфной инволюции, накрывающей комплексное сопряжение в  $s$ -плоскости) выделяется на  $X$  уравнением  $|z| = 1$ .

Из условия вещественности вытекает, что  $f(1/\bar{z}) = \bar{f}(z)$ . Таким образом,  $f$  — вещественный тригонометрический многочлен от  $t$ , где  $z = e^{it}$ . Сдвигом вдоль оси  $t$  мы можем привести старший член к виду  $a \cos nt$ ,  $a > 0$ .

Итак, требуемый многочлен построен. Его единственность следует из того факта, что топологический тип накрытия однозначно определяется змеей (см. [2]). Поэтому все вещественные тригонометрические

многочлены, определяющие одну и ту же змею, могут быть получены один из другого автоморфизмом сферы  $X$ .

Автоморфизмы, переводящие  $z^n + z^{-n}$  в себя, суть  $z \mapsto \varepsilon z$  и  $z \mapsto \varepsilon/z$ , где  $\varepsilon^n = 1$ . Автоморфизм второго типа (скажем, с  $\varepsilon = 1$ ) переводил бы змею  $c_0 \leq c_1 \geq c_2 \leq \dots$  в змею  $c_0 \leq c_{2n-1} \geq c_{2n-2} \leq \dots$ . Мы заключаем, что  $c_k = c_{2n-k}$ , и, следовательно, многочлен  $f$  четный и инвариантный относительно рассматриваемого автоморфизма. Таким образом, остаются только сдвиги  $t$  на  $2\pi k/n$ , и лемма доказана.

Чтобы доказать теорему, мы убиваем свободный член многочлена (прибавляя постоянную к критическим значениям). Умножая  $f$  на положительное число, мы приводим коэффициент  $a$  при  $\cos nt$  к единице. Таким образом, мы построили диффеоморфизм каждой компоненты связности многообразия общих  $M$ -многочленов вида (1) на один из симплексов, на которые разбивается своими главными диагоналями многогранник  $P_n$ .

Этот симплекс определяется общей циклической змеей критических значений только с точностью до действия циклической группы порядка  $n$ , поскольку многочлен не знает, который из его локальных минимумов есть  $c_0$ .

Компонента пространства общих  $M$ -многочленов вида (1) определяется циклической змеей тоже только с точностью до действия циклической группы (сдвигов аргумента  $t$  на целые кратные  $2\pi/n$ ).

Однако, обе неоднозначности согласованы.

Выберем любую пару (компонента, симплекс). Этот выбор определяет  $\mathbb{Z}_n$ -эквивариантный диффеоморфизм многообразия собственных  $M$ -многочленов вида (1) на внутренность многогранника циклических змей  $P_n$  (этот диффеоморфизм есть вещественная версия отображения ЛЗ).

В самом деле, рассмотрим общий путь, соединяющий общий  $M$ -многочлен вида (1) с ним же, но сдвинутым на  $2\pi k/n$ , в пространстве собственных  $M$ -многочленов. Этот путь накрывается вполне определенным общим путем в пространстве собственных змей, соединяющим змею критических значений исходного  $M$ -многочлена со сдвинутой змеей.

Общий путь, соединяющий общую змею с ее сдвинутой версией в пространстве собственных змей, однозначно определяет общий путь в пространстве собственных  $M$ -многочленов вида (1), соединяющий исходный общий  $M$ -многочлен вида (1) с его сдвинутой версией.

Следовательно, мы получаем гомеоморфизм пространства собственных  $M$ -многочленов вида (1) на внутренность многогранника циклических змей  $P_n$ . Этот гомеоморфизм является диффеоморфизмом, поскольку, согласно [2], критические значения являются локальными координатами в пространстве собственных  $M$ -многочленов вида (1).

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера. *УМН*, 1992, 47(1), 3–45.
- [2] Арнольд В. И. Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер. *Функц. анализ и его прилож.*, 1996, 30(1), 1–17.
- [3] Arnold V. I. Springer numbers and morsification spaces. *J. Algebraic Geom.*, 1992, 1(2), 197–214.





# Избранные работы о математике

Воспоминания. Размышления. Публицистика

В Арнагоде.

Если бы мне было позволено, то я перед  
всем ставил бы наше факультета высказал  
своё убеждение в том, что происходит гомогенизация  
первого советского населения — не только по силе  
полученных результатов, но и по температурному  
личности, по способности воспринимать новизну и  
смелости в преодолении препятствий.

В Арнагоде мы видели поразительную неоргани-  
зованную активность: если приучи — то жаль всех  
приучи, если купание в холодной воде, то без огра-  
ничения времени, если на лыжах, то бесконечно  
близко к пределу, — всё доводить до предела.

Сто километров было для нас всё-таки редким  
дальнейшим, но шестьдесят-семьдесят — это для  
нас обычные прогулки, самые заурядные дистанции  
и преодолеваются они в один миг. У нас и  
другой объект — знала различные виды животных.

Это такой бездельный изобреток сил. В  
месте он тоже может быть на большие  
дистанции, но эти моменты тоже неопытно, как  
это делается. Об этом, тем уютно во  
можно раскрывать и обнаруживать очень  
широкие знания.

А. Колмогоров

13.6.87.

## Несколько слов об Андрее Николаевиче Колмогорове

Андрей Николаевич Колмогоров прожил большую и счастливую жизнь.

Колмогоров — Пуанкаре — Гаусс — Эйлер — Ньютон: всего пять таких жизней отделяют нас от истоков нашей науки.

Пушкин сказал как-то, что он оказал на юношество и российскую словесность больше влияния, чем всё министерство народного образования, несмотря на полное неравенство средств. Таким же было влияние Колмогорова на математику.

Я познакомился с Андреем Николаевичем в студенческие годы. Тогда он был деканом механико-математического факультета Московского университета. Это были годы расцвета факультета, расцвета математики. Уровня, которого достиг тогда факультет, благодаря прежде всего Андрею Николаевичу Колмогорову и Ивану Георгиевичу Петровскому, он более никогда не достигал и вряд ли когда достигнет.

Андрей Николаевич был замечательным деканом. Он говорил, что надо прощать талантливым людям их талантливость, и я мог бы назвать очень известных сейчас математиков, которых он тогда спас от исключения из университета.

Последнее десятилетие жизни Андрея Николаевича было омрачено тяжелой болезнью. Сначала он стал жаловаться на зрение, и сорокакилометровые лыжные маршруты пришлось сократить до двадцатикилометровых.

Позже Андрею Николаевичу стало трудно бороться с морскими волнами, но он еще убежал за забор санатория «Узкое» от строгого надзора Анны Дмитриевны и врачей, чтобы купаться в пруду.

В последние годы жизнь Андрея Николаевича была очень тяжелой, иногда его приходилось буквально носить на руках. Все мы глубоко благодарны Анне Дмитриевне, Асе Александровне Букановой, ученикам Андрея Николаевича и выпускникам созданной им физико-математической школы-интерната № 18 за круглосуточное дежурство в течение нескольких лет.

Порой Андрей Николаевич мог произнести лишь несколько слов в час. Но все равно с ним всегда было интересно — помню, как несколько месяцев назад Андрей Николаевич рассказывал, как медленно летели трассирующие снаряды над Комаровкой, как он в 70 лет не мог выбраться из замерзающей Москвы-реки, как в Калькутте он впервые выкупал в Индийском океане своих тамошних учеников.

Это был все тот же Андрей Николаевич — он вспоминал подробности байдарочного путешествия, которые я давно забыл, спорил со мной о деталях географии Франции, о взаимном расположении Каркассона и Перпиньяна — и был, как всегда, прав...

## Математический тривиум

Уровень математической культуры падает; и студенты, и аспиранты, выпускаемые нашими вузами, включая механико-математический факультет МГУ, становятся не менее невежественными, чем профессора и преподаватели. В чем причина этого ненормального явления? В нормальных условиях студенты и аспиранты знают свою науку лучше профессоров, в соответствии с общим принципом распространения знаний: новое побеждает не потому, что старики его выучивают, а потому, что приходят новые поколения, которые его знают.

Среди множества причин, вызвавших это ненормальное положение, я хочу выделить те, которые зависят от нас самих, чтобы попытаться исправить то, что в наших силах. Одна из таких причин, по-моему, — наша система экзаменов, специально рассчитанная на систематический выпуск брака, т.е. псевдоученых, которые математику выучивают, как марксизм: зубрят наизусть формулировки и ответы на наиболее часто встречающиеся экзаменационные вопросы.

Чем определяется уровень подготовки математика? Ни перечень курсов, ни их программы уровень не определяют. Единственный способ зафиксировать, чему мы действительно научили своих студентов, — это перечислить задачи, которые они должны уметь решать в результате обучения.

Речь идет здесь не о каких-либо трудных задачах, а о тех простых вопросах, которые составляют строго необходимый минимум. Этих задач не обязательно должно быть много, но уметь решать их нужно требовать жестко. И. Е. Тамм рассказывал, что, когда он попал во время гражданской войны к махновцам, во время допроса он сказал, что учился на физико-математическом факультете. И он остался жив лишь благодаря тому, что сумел решить задачу из теории рядов, которая была ему тут же предложена, чтобы проверить, правду ли он говорит. Наши студенты должны быть готовы к таким испытаниям!

Во всем мире экзамен по математике — это письменное решение задач. Письменный характер испытаний считается повсюду столь же обязательным признаком демократического общества, как выборы из

нескольких кандидатов. Действительно, на устном экзамене студент полностью беззащитен. Мне случалось слышать, принимая экзамены на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ, экзаменаторов, которые топили за соседним столом студентов, дававших безукоризненные ответы (возможно, превосходящие уровень понимания преподавателя). Известны и такие случаи, когда топили нарочно (иногда от этого можно спасти, вовремя войдя в аудиторию).

Письменная работа — это документ, и экзаменатор поневоле более объективен при ее проверке (особенно если, как это и должно бы быть, работа для проверяющего анонимна).

Есть еще одно немаловажное преимущество письменных экзаменов: задачи остаются и могут быть опубликованы или сообщены студентам следующего курса для подготовки к своему экзамену. Кроме того, эти задачи сразу фиксируют и уровень курса, и уровень лектора, который их составил. Его сильные и слабые места сразу видны, специалисты сразу могут оценить преподавателя по тому, чему он хотел научить студентов и чему сумел научить их.

Между прочим, во Франции задачи общего для всей страны *Cours général* (примерно соответствующего нашей олимпиаде) составляются учителями, посылающими свои задачи в Париж, где из них отбираются лучшие, — и министерство получает объективные данные об уровне своих учителей, сравнивая, во-первых, предложенные ими задачи, а во-вторых, результаты их учеников. У нас же преподаватели оцениваются, как известно, по таким признакам, как внешний вид, быстрота речи и идеологическая «правильность».

Неудивительно, что наши дипломы не хотят признавать (думаю, что в дальнейшем это распространится и на дипломы по математике). Оценки, полученные на не оставляющих следов устных экзаменах, имеют не поддающийся объективному сравнению с чем бы то ни было, крайне расплывчатый и относительный вес, целиком зависящий от реального уровня преподавания и требований в данном вузе. При одних и тех же программах и отметках знания и умения дипломников могут отличаться (в понятном смысле) в десятки раз. К тому же устный экзамен куда легче фальсифицировать (что случается и у нас, на механико-математическом факультете МГУ, где, как некогда сказал один незрячий преподаватель, приходится ставить хорошую отметку студенту, «отвечающему очень близко к учебнику», который не может ответить ни на один вопрос).

Сущность и недостатки нашей системы математического образования прекрасно описал Р. Фейнман в своих воспоминаниях («Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман» — глава о преподавании физики в Бразилии, русский перевод которой опубликован в «Успехах физических наук», 148, вып. 3, 1986).

По словам Фейнмана, студенты эти ничего не понимают, но никогда не задают вопросов, делая вид, что понимают всё. А если кто-нибудь начинает задавать вопросы, то курс его быстро ставит на место, как зря отнимающего время у диктующего лекцию преподавателя и у записывающих ее студентов. В результате никто не может ничего из выученного применить ни в одном примере. Экзамены же (догматические, вроде наших: сформулируйте определение, сформулируйте теорему) благополучно сдаются. Студенты приходят в состояние «самораспространяющейся псевдообразованности» и могут в дальнейшем подобным же образом учить следующие поколения. Но вся эта деятельность полностью бессмысленна, и фактически наши выпуски специалистов в значительной мере являются обманом, липой и приписками: эти так называемые специалисты не в состоянии решить простейших задач, не владеют элементами своего ремесла.

*Итак, чтобы положить конец припискам, нужно зафиксировать не список теорем, а набор задач, которые должны уметь решать студенты. Эти списки задач нужно ежегодно публиковать (думаю, список должен содержать задач по десять для каждого семестрового курса). Тогда мы увидим, чему мы реально учим студентов и насколько это удастся. А для того, чтобы студенты научились применять свою науку, все экзамены нужно проводить только письменно.*

Естественно, задачи от вуза к вузу и от года к году будут меняться. Тогда можно будет сравнивать уровень разных преподавателей и выпусков разных лет. Студент, которому для вычисления с десятипроцентной точностью среднего от сотой степени синуса требуется значительно больше пяти минут, не владеет математикой, даже если он занимался нестандартным анализом, универсальными алгебрами, супермногообразиями или теоремами вложения.

Составление эталонных задач — трудоемкая работа, но я думаю, ее необходимо проделать. В качестве попытки я предлагаю ниже список из ста задач, составленных как математический минимум студента-физика. Эталонные задачи (в отличие от программ) не определены однозначно, и многие, вероятно, со мной не согласятся. Тем не менее

я считаю, что начать фиксировать уровень математических требований при помощи письменных экзаменов и эталонных задач необходимо. Хочется надеяться, что в будущем студенты будут получать эталонные задачи по каждому курсу в начале каждого семестра, а начетнически-зубрильные устные экзамены уйдут в прошлое.

1. Нарисовать график производной и график интеграла функции, заданной свободно начерченным графиком.

2. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x}.$$

3. Найти критические значения и критические точки отображения  $z \mapsto z^2 + 2\bar{z}$  (нарисовать ответ).

4. Вычислить сотую производную функции

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x}.$$

5. Вычислить сотую производную функции

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2}$$

в нуле с относительной погрешностью 10%.

6. Нарисовать на плоскости  $(x, y)$  кривую, заданную параметрически:

$$x = 2t - 4t^3, \quad y = t^2 - 3t^4.$$

7. Сколько нормалей к эллипсу можно провести из данной точки плоскости? Исследовать область, в которой число нормалей максимально.

8. Сколько максимумов, минимумов и седел имеет функция  $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4$  на поверхности  $x + \dots + v = 0$ ,  $x^2 + \dots + v^2 = 1$ ,  $x^3 + \dots + v^3 = C$ ?

9. Всякий ли положительный многочлен от двух вещественных переменных достигает своей нижней грани на плоскости?



10. Исследовать асимптотики решений  $y$  уравнения  $x^5 + x^2y^2 = y^6$ , стремящихся к 0 при  $x \rightarrow 0$ .

11. Исследовать сходимость интеграла

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{1 + x^4 y^4}.$$

12. Найти поток векторного поля  $\vec{r}/r^3$  через поверхность

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

13. Вычислить с относительной погрешностью 5%

$$\int_1^{10} x^x dx.$$

14. Вычислить с относительной погрешностью не более 10%

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^4 + 4x + 4)^{-100} dx.$$

15. Вычислить с относительной погрешностью 10%

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(100(x^4 - x)) dx.$$

16. Какую долю от объема пятимерного куба составляет объем вписанного в него шара? А от десятимерного?

17. Найти расстояние от центра тяжести однородного 100-мерного полушара радиуса 1 до центра шара с относительной погрешностью 10%.

18. Вычислить

$$\int \dots \int e^{-\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j} dx_1 \dots dx_n.$$

19. Исследовать ход лучей в плоской среде с показателем преломления  $n(y) = y^4 - y^2 + 1$ , пользуясь законом Снеллиуса  $n(y) \sin \alpha = \text{const}$ , где  $\alpha$  — угол луча с осью  $y$ .

20. Найти производную решения уравнения  $\ddot{x} = x + Ax^2$  с начальным условием  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$  по параметру  $A$  при  $A = 0$ .

21. Найти производную решения уравнения  $\ddot{x} = \dot{x}^2 + x^3$  с начальным условием  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = A$  по  $A$  при  $A = 0$ .

22. Исследовать границу области устойчивости ( $\max \text{Re } \lambda_j < 0$ ) в пространстве коэффициентов уравнения  $\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx = 0$ .

23. Решить квазиоднородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x^3}{y}.$$

24. Решить квазиоднородное уравнение

$$\ddot{x} = x^5 + x^2\dot{x}.$$

25. Может ли асимптотически устойчивое положение равновесия сделаться неустойчивым по Ляпунову при линеаризации?

26. Исследовать поведение при  $t \rightarrow +\infty$  решений систем

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2 \sin y - y - x, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2x - x^3 - x^2 - \varepsilon y, \end{cases}$$

где  $\varepsilon \ll 1$ .

27. Нарисовать образы решений уравнения

$$\ddot{x} = F(x) - k\dot{x}, \quad F = -dU/dx,$$

на плоскости  $(x, E)$ , где  $E = \dot{x}^2/2 + U(x)$ , вблизи невырожденных критических точек потенциала  $U$ .

28. Нарисовать фазовый портрет и исследовать его изменение при изменении малого комплексного параметра  $\varepsilon$ :

$$\dot{z} = \varepsilon z - (1 + i)z|z|^2 + \bar{z}^4.$$

29. Заряд движется со скоростью 1 по плоскости под действием перпендикулярного ей сильного магнитного поля  $B(x, y)$ . В какую сторону будет дрейфовать центр ларморовской окружности? Вычислить скорость этого дрейфа (в первом приближении). [Математически речь идет о кривых кривизны  $NB$ , где  $N \rightarrow \infty$ .]

30. Найти сумму индексов особых точек векторного поля  $z\bar{z}^2 + z^4 + 2\bar{z}^4$ , отличных от нуля.

31. Найти индекс особой точки 0 векторного поля с компонентами

$$(x^4 + y^4 + z^4, x^3y - xy^3, xyz^2).$$

32. Найти индекс особой точки 0 векторного поля

$$\text{grad}(xy + yz + xz).$$

33. Найти коэффициент зацепления фазовых траекторий уравнения малых колебаний  $\ddot{x} = -4x$ ,  $\ddot{y} = -9y$  на поверхности уровня полной энергии.

34. Исследовать особые точки кривой  $y = x^3$  на проективной плоскости.

35. Нарисовать геодезические на поверхности

$$(x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1.$$

36. Нарисовать эвольвенты кубической параболы  $y = x^3$  (эвольвента — это геометрическое место точек  $\vec{r}(s) + (c - s)\dot{\vec{r}}(s)$ , где  $s$  — длина вдоль кривой  $\vec{r}(s)$ ,  $c$  — константа).

37. Доказать, что поверхности в евклидовом пространстве

$$((A - \lambda E)^{-1}x, x) = 1,$$

соответствующие разным значениям  $\lambda$  ( $A$  — симметрический оператор), попарно ортогональны.

38. Вычислить интеграл от гауссовой кривизны поверхности

$$z^4 + (x^2 + y^2 - 1)(2x^2 + 3y^2 - 1) = 0.$$

## 39. Вычислить интеграл Гаусса

$$\oint \frac{(d\vec{A}, d\vec{B}, \vec{A} - \vec{B})}{|\vec{A} - \vec{B}|^3},$$

где  $\vec{A}$  пробегает кривую  $x = \cos \alpha$ ,  $y = \sin \alpha$ ,  $z = 0$ , а  $\vec{B}$  — кривую  $x = 2 \cos^2 \beta$ ,  $y = \frac{1}{2} \sin \beta$ ,  $z = \sin 2\beta$ .

40. Перенести параллельно направленный в Ленинграде (широта  $60^\circ$ ) на север вектор с запада на восток вдоль замкнутой параллели.

41. Найти геодезическую кривизну прямой  $y = 1$  на верхней полуплоскости с метрикой Лобачевского–Пуанкаре

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2.$$

42. Пересекаются ли в одной точке медианы треугольника на плоскости Лобачевского? А высоты?

43. Найти числа Бетти поверхности  $x_1^2 + \dots + x_k^2 - y_1^2 - \dots - y_l^2 = 1$  и множества  $x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq 1 + y_1^2 + \dots + y_l^2$  в  $(k+l)$ -мерном линейном пространстве.

44. Найти числа Бетти поверхности  $x^2 + y^2 = 1 + z^2$  в трехмерном проективном пространстве. То же для поверхностей  $z = xy$ ,  $z = x^2$ ,  $z^2 = x^2 + y^2$ .

45. Найти индекс самопересечения поверхности  $x^4 + y^4 = 1$  в проективной плоскости  $\mathbb{C}P^2$ .

46. Отобразить конформно внутренность единичного круга на первый квадрант.

47. Отобразить конформно внешность круга на внешность данного эллипса.

48. Отобразить конформно полуплоскость без перпендикулярного ее краю отрезка на полуплоскость.

49. Вычислить

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{\sqrt{1+z^{10}}}.$$

50. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx.$$

51. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx.$$

52. Вычислить первый член асимптотики при  $k \rightarrow \infty$  интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx} dx}{\sqrt{1+x^{2n}}}.$$

53. Исследовать особые точки дифференциальной формы  $dt = dx/y$  на компактной римановой поверхности  $y^2/2 + U(x) = E$ , где  $U$  — многочлен, а  $E$  — не критическое значение.

54.  $\ddot{x} = 3x - x^3 - 1$ . В которой из ям больше период колебаний (в более мелкой или в более глубокой) при равных значениях полной энергии?

55. Исследовать топологически риманову поверхность функции

$$w = \operatorname{arctg} z.$$

56. Сколько ручек имеет риманова поверхность функции

$$w = \sqrt{1+z^n}?$$

57. Найти размерность пространства решений задачи  $\partial u / \partial \bar{z} = \delta(z-i)$  при  $\operatorname{Im} z \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} u(z) = 0$  при  $\operatorname{Im} z = 0$ ,  $u(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ .

58. Найти размерность пространства решений задачи  $\partial u / \partial \bar{z} = a\delta(z-i) + b\delta(z+i)$  при  $|z| \leq 2$ ,  $\operatorname{Im} u = 0$  при  $|z| = 2$ .

59. Исследовать существование и единственность решения задачи  $yu_x = xu_y$ ,  $u|_{x=1} = \cos y$  в окрестности точки  $(1, y_0)$ .

60. Существует ли и единственно ли решение задачи Коши

$$x(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + y^3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=0} = 1$$

в окрестности точки  $(x_0, 0)$  оси  $x$ ?

61. При каком наибольшем  $t$  решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \sin x, \quad u|_{t=0} = 0$$

продолжается на интервал  $[0, t)$ ?

62. Найти все решения уравнения  $y \partial u / \partial x - \sin x \partial u / \partial y = u^2$  в окрестности точки  $(0, 0)$ .

63. Существует ли решение задачи Коши  $y \partial u / \partial x + \sin x \partial u / \partial y = y$ ,  $u|_{x=0} = y^4$  на всей плоскости  $(x, y)$ ? Единственно ли оно?

64. Имеет ли задача Коши  $u|_{y=x^2} = 1$ ,  $(\nabla u)^2 = 1$  гладкое решение в области  $y \geq x^2$ ? В области  $y \leq x^2$ ?

65. Найти среднее значение функции  $\ln r$  на окружности  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  (функции  $1/r$  на сфере).

66. Решить задачу Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{при } x^2 + y^2 < 1; \\ u &= 1 && \text{при } x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0; \\ u &= -1 && \text{при } x^2 + y^2 = 1, \quad y < 0. \end{aligned}$$

67. Какова размерность пространства непрерывных при  $x^2 + y^2 \geq 1$  решений задачи

$$\Delta u = 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 > 1, \quad \partial u / \partial n = 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 = 1?$$

68. Найти

$$\inf_{x^2 + y^2 \leq 1} \iint \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx dy$$

по  $C^\infty$ -функциям  $u$ , равным 0 в 0 и 1 при  $x^2 + y^2 = 1$ .

69. Доказать, что телесный угол, опирающийся на заданный замкнутый контур, — гармоническая вне контура функция вершины угла.

70. Вычислить среднее значение телесного угла, под которым виден круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ , лежащий в плоскости  $z = 0$ , из точек сферы  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$ .

71. Вычислить плотность заряда на проводящей границе полости  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , в которую помещен заряд  $q = 1$  на расстоянии  $r$  от центра.

72. Вычислить в первом приближении по  $\varepsilon$  влияние сжатия Земли ( $\varepsilon \approx 1/300$ ) на гравитационное поле Земли на расстоянии Луны (считая Землю однородной).

73. Найти (в первом приближении по  $\varepsilon$ ) влияние несовершенства почти сферического конденсатора  $R = 1 + \varepsilon f(\varphi, \theta)$  на его емкость.

74. Нарисовать график  $u(x, 1)$ , если  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u|_{x^2=x} = x^2.$$

75. Вследствие годовых колебаний температуры Земля в городе  $N$  промерзает на глубину 2 м. На какую глубину она промерзла бы вследствие суточных колебаний такой же амплитуды?

76. Исследовать поведение при  $t \rightarrow +\infty$  решения задачи

$$u_t + (u \sin x)_x = \varepsilon u_{xx}, \quad u|_{t=0} \equiv 1, \quad \varepsilon \ll 1.$$

77. Найти собственные числа оператора Лапласа  $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$  на сфере радиуса  $R$  в евклидовом пространстве размерности  $n$  и их кратности.

78. Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= 9 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2B, & \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= 6 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - 2A, \\ A|_{t=0} &= \cos x, & B|_{t=0} &= 0, & \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial B}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

79. Сколько решений имеет краевая задача

$$u_{xx} + \lambda u = \sin x, \quad u(0) = u(\pi) = 0?$$

80. Решить уравнение

$$\int_0^1 (x+y)^2 u(x) dx = \lambda u(y) + 1.$$

81. Найти функцию Грина оператора  $d^2/dx^2 - 1$  и решить уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} u(y) dy = e^{-x^2}.$$

82. При каких значениях скорости  $c$  уравнение  $u_t = u - u^2 + u_{xx}$  имеет решение в виде бегущей волны  $u = \varphi(x - ct)$ ,  $\varphi(-\infty) = 1$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ ,  $0 \leq u \leq 1$ ?

83. Найти решения уравнения  $u_t = u_{xxx} + uu_x$ , имеющие вид бегущей волны  $u = \varphi(x - ct)$ ,  $\varphi(\pm\infty) = 0$ .

84. Найти число положительных и отрицательных квадратов в нормальной форме квадратичной формы  $\sum_{i < j} (x_i - x_j)^2$  от  $n$  переменных. А для формы  $\sum_{i < j} x_i x_j$ ?

85. Найти длины главных осей эллипсоида

$$\sum_{i \leq j} x_i x_j = 1.$$

86. Через центр куба (тетраэдра, икосаэдра) провести прямую так, чтобы сумма квадратов расстояний до вершин была: а) минимальной, б) максимальной.

87. Найти производные длин полуосей эллипсоида  $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1 + \varepsilon xy$  по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$ .

88. Какие фигуры могут получиться при пересечении бесконечномерного куба  $|x_k| \leq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , двумерной плоскостью?

89. Вычислить сумму векторных произведений  $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$ .

90. Вычислить сумму коммутаторов матриц  $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$ , где  $[A, B] = AB - BA$ .

91. Найти жорданову нормальную форму оператора  $e^{d/dt}$  в пространстве квазимногочленов  $\{e^{\lambda t} p(t)\}$ , где степени многочленов  $p$  меньше 5; оператора  $\text{ad}_A : B \mapsto [A, B]$  в пространстве  $(n \times n)$ -матриц  $B$ , где  $A$  — диагональная матрица.



92. Найти порядки подгрупп группы вращений куба и ее нормальные делители.

93. Разложить пространство функций, заданных в вершинах куба, на инвариантные подпространства, неприводимые относительно группы: а) его симметрий, б) его вращений.

94. Разложить пятимерное вещественное линейное пространство на неприводимые инвариантные подпространства группы, порожденной циклической перестановкой базисных векторов.

95. Разложить пространство однородных многочленов пятой степени от  $(x, y, z)$  на неприводимые подпространства, инвариантные относительно группы вращений  $SO(3)$ .

96. Каждый из 3600 абонентов телефонной станции вызывает ее в среднем раз в час. Какова вероятность того, что в данную секунду поступит 5 или более вызовов? Оценить средний промежуток времени между такими секундами  $(i, i + 1)$ .

97. Частица, блуждающая по целым точкам полуоси  $x \geq 0$ , с вероятностью  $a$  сдвигается на 1 вправо, с вероятностью  $b$  влево, в остальных случаях остается на месте (при  $x = 0$  вместо сдвига налево точка остается на месте). Определить установившееся распределение вероятностей, а также математическое ожидание  $x$  и математическое ожидание  $x^2$  через большое время, если вначале частица находилась в точке 0.

98. Каждый из участников игры в очко на пальцах, стоящих по кругу, выбрасывает несколько пальцев правой руки, после чего для определения победителя суммарное число выкинутых пальцев отсчитывается по кругу от водящего. При каком числе участников  $N$  вероятность выигрыша хотя бы одного из подходящих  $N/10$  участников становится больше 0,9? Как ведет себя при  $N \rightarrow \infty$  вероятность выигрыша водящего?

99. Один из игроков прячет монету в 10 или 20 копеек, а другой отгадывает. Отгадавший получает монету, не отгадавший платит 15 копеек. Честная ли это игра? Каковы оптимальные смешанные стратегии обоих участников?

100. Найти математическое ожидание площади проекции куба с ребром 1 на плоскость при изотропно распределенном случайном направлении проектирования.

Какое-то бурювент ~~прозрачно~~ <sup>мисли</sup> мне  
 строювовой. Сидящая привирка обрывается  
 к Вам немедленно, не дожидая ответа на  
 письмо, стала для меня законом.  
 (в первом случае они обрывают через дупло).  
 Итак: как только я знаю, земляна о решетке,  
 с нулевой инкрементной маркировкой  
 Вам одобрения; она выполняется в ДАН.  
~~В~~ Ее можно доверять полностью и полностью, в  
 частности различая возмущения на фоне  
 периодического поля скорости  $v(\vec{r}) \equiv v(\vec{r} + a\vec{n}_1 + b\vec{n}_2 + c\vec{n}_3)$  а. Вещные  
 такие же периодические решения для  $T$  и  $B$  - на  
 решетке с возмущением. Так как же, это в рэвкшн  
 ДАН вполне могут ее называть законить - увы! -  
 и уже по той причине надо ли проводить  
 расщепление земляны на атомном для  
 J. Flu. Mech. Модифицировано или для Георг Австрих  
 Flu Mech. Кемани, итак же в том же направлении  
 выдвигать наша схема I с Кандаритками - и  
 порозумевается, что должна быть схема II  
 (трехмерная специфика и топология области)  
 Но главный предмет в связи с которым, я Вам  
 пишу - это же "Боло" (отдельно Гурини!) состоит в том, что

## ЯБ и математика

Обычно ЯБ звонил мне в семь утра. «Не кажется ли Вам...», — говорил он, и далее следовало что-нибудь парадоксальное. Последний такой звонок был за две недели до его смерти. Он рассказал о странном, «хаотическом» поведении решений уравнений Риккати с периодически коэффициентами. Эта (совместная с соавтором, фамилию которого я забыл) работа осталась ненаписанной, и я скажу о ней немного подробнее.

Уравнение Риккати — это дифференциальное уравнение, правая часть которого — многочлен второй степени относительно зависимой переменной. Решениям этого уравнения свойственно «убегать» на бесконечность за конечное время. При традиционном подходе в рамках обычной теории дифференциальных уравнений никакого хаоса тут быть не может. Хаос, о котором говорил ЯБ, возникает, если свернуть ось зависимой переменной в окружность, добавив одну бесконечно удаленную точку.

Периодичность коэффициентов позволяет свернуть в окружность и ось времени (ось независимой переменной). Получается динамическая система на замкнутом многообразии — на поверхности тора. Свойства таких систем изучал еще А. Пуанкаре, который обнаружил, что они сильно зависят от того, иррационально или рационально «число вращения» — средний по времени наклон траекторий. Если число вращения рационально («резонанс»), то некоторые (а для уравнения Риккати обычно все) траектории замкнуты. В иррациональном же (общем) случае траектория плотно покрывает тор и возвращается бесконечно много раз в любую окрестность начальной точки, никогда не повторяясь точно. Причем временное среднее любой функции вдоль траектории совпадает с ее средним на поверхности тора («эргодичность», т.е. первая ступень «хаоса»).

Речь шла, таким образом, о переоткрытии важного раздела современной математической теории динамических систем. Применения теории Пуанкаре к уравнению Риккати должны были бы входить в учебники, но, насколько я помню, никто из математиков их не заметил.

Психологическая трудность здесь — изменение топологии фазового пространства (переход от аффинной прямой к проективной) — сродни описанию решения Шварцшильда при помощи топологии черной дыры. Преодоление подобных трудностей — деятельность, по сути дела, математическая, но большинство математиков медленнее преодолевает стереотипы мышления в рамках точно поставленной задачи и неохотно идет на кардинальные изменения точки зрения.

ЯБ, напротив, всегда был готов к изменению точки зрения. Помнится, когда он первый раз позвал меня к себе на Воробьевское шоссе в начале 70-х годов и я рассказывал ему о недавних тогда достижениях теории динамических систем (непредсказуемость, хаотичность, турбулентность, странные аттракторы, инвариантные торы и т.д.), Яков Борисович некоторое время пытался упорствовать — держался за старые догмы. К счастью, я не поддался ни на запугивание авторитарным тоном, ни на ссылки на Ландау и (робко) сказал: «Но, Яков Борисович, на это можно взглянуть с другой точки зрения».

«Да?» — ответил ЯБ и немедленно сделал стойку на голове. Несколько минут он смотрел на доску, исписанную мелом, снизу вверх, потом перевернулся и стал обсуждать, на каких физических задачах следует немедленно пробовать новые математические теории.

Будучи прежде всего физиком<sup>1</sup>, ЯБ имел о математике свое собственное представление, резко отличное и от представления большинства математиков его поколения, воспитанных на аксиоматико-дедуктивной теоретико-множественной концепции, восходящей к Гильберту и Бурбаки, и от представления большинства физиков о том, что полезна в математике только аналитическая техника, своего рода продолжение арифметического счетного мастерства. Его точка зрения ближе к позиции более молодого поколения математиков и физиков-теоретиков (Л. Д. Фаддеев, А. М. Поляков, С. П. Новиков), для которых качественная, геометрическая, концептуальная математика сливается с теоретической физикой. Математика понятий и идей, а вовсе не одних только вычислений была его стихией.

---

<sup>1</sup> «Придется вызвать Вас на дуэль», — сказал мне ЯБ, когда я процитировал ему Ньютона: «Математики, которые все открывают, исследуют и доказывают, должны довольствоваться ролью сухих вычислителей и чернорабочих; другой (физик. — В. А.), который не может ничего доказать, но все схватывает на лету и на все претендует, уносит всю славу как своих предшественников, так и своих последователей».

Но и в техническом отношении некоторые его достижения предвосхитили математические исследования, иногда на десятки лет. Особенно это относится к теории особенностей, бифуркаций и катастроф — той области математики, которая описывает возникновение дискретных структур и всевозможных скачков и разрывов из плавных, гладких изменений.

Так, в его работах 1941 г. о реакциях в струе фактически построена теория бифуркаций кривой равновесий в произведении фазового пространства на ось параметра — теория рождения и умирания новых «островков» этой кривой. В современной математической теории уравнений с малым параметром эти явления изучены лишь в конце 70-х годов (в работах французских математиков по так называемому «нестандартному анализу» и «теории уток»). Когда эти работы появились, ЯБ сразу узнал в них небольшое обобщение своей старой теории. Замечательным свойством этой теории было то, что, хотя исследовалась конкретная система, заданная явными формулами, качественный характер результатов не зависел от деталей этих формул и оставался тем же для широкого класса систем «общего положения». Строгое математическое доказательство того, что системы, ведущие себя иначе, — исключение, получено математиками лишь недавно. Но сам характер явления был открыт ЯБ 50 лет назад, и универсальность его была ему, конечно, ясна.

Такая же универсальность и независимость от конкретных деталей характерна и для его объяснения крупномасштабной структуры Вселенной малыми и плавными неоднородностями первоначального поля скоростей пылевидной среды.

Возникновение особенностей на каустиках впервые обнаружили в этой задаче Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников и В. В. Судаков. Построенная ЯБ «теория блинов», в сущности, эквивалентна теории простейших (лагранжевых) особенностей в симплектической геометрии.

Эта же теория дает описание типичных особенностей каустик и их перестроек при изменении параметра в оптике. Ее математические трудности так велики, что многие вопросы остаются до сих пор нерешенными, а достигнутые (уже в последние годы) результаты получены лишь вследствие осмысления ряда экспериментов лазерной оптики и компьютерного моделирования. Тем больше заслуга ЯБ, сразу почувствовавшего важность своей «гидродинамики Вселенной» как общематематической теории.

Переход от локально-аналитического исследования к анализу глобально-топологических и статистически-перколяционных свойств возникающих структур в работах ЯБ также не может не вызвать восхищения математиков. В этих работах скорее физика становится служанкой математики, чем наоборот.

Подобно всем математикам, ЯБ любил выделить в физической проблеме точно сформулированный математический вопрос. Он верил, что стоит точно сформулировать задачу математически — и математики, «которые умеют, как мухи, ходить по потолку», найдут решение! Особенное возмущение вызывала у него неспособность современной математики решить вопросы о замороженном магнитном поле минимальной энергии и о быстром магнитном динамо.

Я помню обсуждение первого вопроса во время своего доклада об асимптотическом инварианте Хопфа<sup>2</sup> на семинаре ЯБ в Институте прикладной математики (вероятно, в 1973 г.): ЯБ и А. Д. Сахаров наперебой, размахивая руками, объясняли, как зацепленность силовых линий не позволяет уменьшить до нуля энергию замороженного поля.

Математически вопрос ЯБ ставился так: среди всех полей дивергенции нуль на трехмерном многообразии, получаемых из данного сохраняющими элементы объема преобразованиями, найти поле с минимальным интегралом квадрата (это минимизирующее поле может иметь особенности).

Эта задача, не решенная и сегодня, моделирует вопрос об эволюции магнитного поля звезды в пренебрежении магнитной вязкостью. Предполагается, что, пока энергия не минимальна, поле будет порождать силу Лоренца, которая, двигая среду, обеспечит рассеяние избыточной энергии за счет гидродинамической вязкости, пока среда не остановится, а поле не минимизируется.

ЯБ и АД утверждали, что, например, энергию аксиально-симметричного поля в шаре (зацепление отсутствует) можно сделать сколь угодно малой, выбрав подходящее преобразование (это, кажется, и сегодня аккуратно не доказано). Вопрос о топологии минимизирующего поля в общем случае — также нерешенная, насколько я знаю, задача (даже в простейшей двумерной модели).

<sup>2</sup> Связь этого предмета с аномалиями квантовой теории поля и многозначным действием Полякова в то время не была, конечно, известна; ее обнаружил С. П. Новиков лишь через 10 лет.

Другая точно поставленная ЯБ задача — о быстром стационарном кинематическом динамо.

Теория этих явлений не разработана, а численный эксперимент требует вычисления собственных чисел матриц, порядок которых много больше миллиона, и пока кажется практически неосуществимым.

ЯБ считал надежно установленным существование периодического по времени быстрого кинематического магнитного динамо. Насколько мне известно, эта теорема ЯБ современной математикой еще не «переварена».

В последнее десятилетие жизни ЯБ я имел счастье довольно много с ним работать. Чаще всего мне предоставлялась роль слушателя или читателя (обычный размер писем ЯБ — восемь страниц, по письму в неделю).

«Вы можете выбросить это письмо, не читая. Дело в том, что писание Вам для меня стало психотерапевтическим актом, способом проверить себя, уяснить что-то до конца. Я пишу — и вижу Ваш скептический взгляд («глаза майора Пронина»), и рука не поворачивается написать сомнительное... Много ли Вам пишут психи? Мне — очень часто.

Итак, то, что мы знаем относительно особенностей, это верно, но это — локально. Между тем есть некоторые глобальные свойства системы, которые...»

«Кажется, Дубровский писал Маше Троекуровой: «Сладкая привычка обращаться к Вам ежедневно, не ожидая ответа на письма, стала для меня законом» (в период, когда они общались через дупло).

Итак, насколько я знаю, заметка...»

Одним из последних совместных наших мероприятий было комментирование «Трудов» ЯБ. «Пишу, — позвонил мне ЯБ, — некрологическое сочинение. Грустно, конечно, но нужно, по-моему. Как сказал О. Уайльд, «у каждого есть ученики, но биографию непременно пишет Иуда». Пожалуйста, напишите о математике».

Перечитав тогда «Высшую математику для начинающих», я увидел, как много из того, что математики моего поколения (с трудом и преодолевая огромное сопротивление) пытаются внести в выхолощенное и омертвевшее преподавание нашей науки, уже содержалось в первом же издании учебника ЯБ.

Книга начиналась с эпатажного определения производной как отношения приращений «в предположении, что они достаточно малы».

Это кощунственное, с точки зрения ортодоксальной математики, определение «физически», конечно, совершенно оправдано, ибо приращения физической величины, меньшие, чем, скажем,  $10^{-100}$ , являются чистой фикцией — структура пространства и времени в таких масштабах может оказаться весьма далекой от математического континуума.

Но это простое соображение уничтожает столь значительную часть современных математических исследований, что упоминать о нем даже здесь опасно. Тогдашние цензоры математических книг, тополог Л. С. Понтрягин и механик Л. И. Седов, обрушили на ЯБ поток обвинений, которые ЯБ (с его несколько мальчишеским честолюбием) переживал более болезненно, чем они того заслуживали. Я думаю, что борьба с этими (непонятно, почему столь могущественными) цензорами и со сплоченной группой их малокомпетентных союзников за переиздание очевидно необходимой книги, борьба, которую ЯБ вел, как всегда, с полным напряжением сил и перипетии которой он переживал очень эмоционально, сократила ему жизнь.

Закончилась эта борьба полной победой ЯБ. Понтрягин в своем изложении анализа для школьников (издание 1980 г.) пишет: «Многие физики считают, что так называемое строгое определение производных и интегралов не нужно для хорошего понимания дифференциального и интегрального исчисления. Я разделяю их точку зрения».

Возвращение преподавания математики от схоластики формально-языковых вычислительных упражнений к содержательной математике идей и понятий Ньютона, Римана и Пуанкаре — шаг абсолютно необходимый. ЯБ был первым, кто нашел мужество открыто об этом сказать и вовремя это осуществить.

Время ЯБ всегда было расписано по минутам. Плутарх пишет, что Фемистокл назначал всем своим клиентам одно и то же время, чтобы каждый из них, увидев остальных и ожидая своей очереди, проникался ощущением значительности патрона. ЯБ, напротив, назначал каждому свое время, но зато не мог затянуть разговор ни на минуту. Привыкнув к унижающим человеческое достоинство манерам, обычным среди математиков, особенно по отношению к младшим<sup>3</sup>, я был приятно удивлен корректностью и своеобразной деликатностью ЯБ, явно противоречив-

<sup>3</sup> Я приписывал эти манеры влиянию на математиков Л. Д. Ландау, пока не узнал, что не имеющий с Ландау ничего общего академик — председатель ученого совета математиков, переврав фамилию оппонента во время защиты диссертации, оправдывался со словами: «Ну, ничего, не велика птица».



шей его естественному буйному темпераменту; «Ты, Зин, на грубость нарываешься», — было у него выражением крайнего гнева. ЯБ, хоть и называл себя учеником Ландау, следовал ему не во всем.

Готовя комментарии к трудам ЯБ, я заглянул в «Science Citation Index» и нашел, помнится, около 7 тыс. ссылок на его работы за 5 лет (второе, кажется, место среди наших ученых после Ландау). Если учесть, что «Index» приписывает все совместные работы первому по алфавиту автору и что латинское написание фамилии ЯБ начинается с Z, истинное число ссылок значительно вырастет. Не знаю, сколько ссылок на него сейчас, но ясно, что влияние ЯБ и на физику, и на математику остается совершенно исключительным.

Почему никак о Ваших нападках на меня. В Вашем письме перефразированы три вопроса

- 1) об обязательствах по поводу строки изложения,
- 2) об обязательствах по поводу изложения напечатанной строки эда,
- 3) о недобротках моих публикаций,

По первому вопросу, взвешивая мы с Вами и разоблачим. Я считаю формально строку обязательств и дурно, что в континент суде наше большая (и особенно поиски для охранительного поименно) работ она всегда может быть создана (при изменении важных, т.е. но для крайних результатов) с наименее крайних и своевременных. Если сложные средства грозят осуществлению этих исследований, эт строку требуют помощности адресуется даже там, где она пока обременительна!

## Об А. Н. Колмогорове

Мне всегда хотелось понять, как Андрей Николаевич переходил от одной темы к другой: занятия разными предметами прихотливо сменялись у него непредсказуемым, по-видимому, образом. Например, работы по малым знаменателям в классической механике никак не были подготовлены ничем предыдущим и появились в 1953–1954 годах совершенно неожиданно. Так же неожиданно появились в 1935 году и топологические работы Андрея Николаевича.

Для себя я построил некоторую теорию происхождения работ об инвариантных торах: она начиналась с занятий Андрея Николаевича турбулентностью. В известной статье Ландау 43-го года возникновение турбулентности «объяснялось» именно при помощи инвариантных торов — аттракторов в фазовом пространстве уравнения Навье–Стокса. Ламинарному течению, наблюдающемуся при малом числе Рейнольдса, соответствует устойчивое положение равновесия (точечный аттрактор). Сценарий Ландау перехода к турбулентности — это последовательность бифуркаций при увеличении числа Рейнольдса. Сначала возникает предельный цикл, затем аттрактор становится двумерным тором, при дальнейшем росте числа Рейнольдса размерность инвариантного тора растет. Может оказаться, замечал Андрей Николаевич при обсуждении сценария Ландау, что уже при конечном числе Рейнольдса произойдет переход к бесконечномерному тору и даже к сплошному спектру. С другой стороны, даже если размерность инвариантного тора остается конечной при фиксированном числе Рейнольдса, спектр условно периодического движения на достаточно многомерном торе содержит столь много частот, что он практически неотличим от сплошного. Вопрос о том, какой из этих двух случаев имеет место на самом деле, ставился Андреем Николаевичем не раз. В конце пятидесятых годов на доске объявлений механико-математического факультета МГУ была вывешена им программа семинара по теории динамических систем и гидродинамике (программа включала среди прочего проблему доказательства практической невозможности долгосрочного

динамического прогноза погоды вследствие сильной ее зависимости от высоких гармоник начальных условий)<sup>1</sup>. Над торами Ландау Андрей Николаевич несколько посмеивался: «Видимо, другие динамические системы не были ему (Ландау) известны».

Переход от торов Ландау к динамическим системам на торе был бы вполне естественным ходом мысли. В конце концов я почти поверил в свою теорию и (в 1984 году) спросил Андрея Николаевича, было ли так на самом деле. «Нет, — ответил Андрей Николаевич, — об этом я тогда совсем не думал. Главное было то, что в 1953 году появилась надежда. От этого я почувствовал какой-то необыкновенный подъем. О задачах небесной механики я думал давно, с детства, с Фламариона, а потом — читая Шарлье, Биркгофа, механику Уиттекера, работы Крылова и Боголюбова, Шази, Шмидта. Несколько раз пытался, но не получалось. А тут начало получаться».

<sup>1</sup> Вот полный текст программы (темы семинара):

1. Краевые задачи для гиперболических уравнений, решения которых всюду разрывно зависят от параметра (см., например: Соболев С. Л. ДАН, 1956, 109, 707).
2. Задачи классической механики, в которых собственные функции всюду разрывно зависят от параметра (обзор проблематики —, в докладе А. Н. Колмогорова на Амстердамском конгрессе 1954 г.).
3. Моногенные функции Бореля и квазианалитические функции Гончара (в надежде на применения к задачам типа 1 и 2).
4. Возникновение высокочастотных колебаний при стремлении коэффициентов при старших производных к нулю (работы Волосова и Лыковой для обыкновенных дифференциальных уравнений).
5. В математической теории уравнений в частных производных с малым параметром при старших производных до настоящего времени изучены явления типа пограничных слоев и внутренних слоев, сходящихся к поверхностям разрыва предельных решений или их производных при «исчезновении вязкости». В реальной турбулентности решения портятся всюду плотным образом. Математическое изучение этого явления предполагается провести хотя бы на модельных уравнениях (модель Бюргерса?).
6. Вопросы устойчивости ламинарных течений. Асимптотически исчезающая устойчивость (хотя бы на модельных уравнениях).
7. Обсуждение возможностей применения к реальным механическим и физическим задачам представлений метрической теории динамических систем. Вопросы устойчивости различных типов спектра. Грубые системы и грубые свойства (в этом последнем направлении для систем с несколькими степенями свободы почти ничего не известно!).
8. Рассмотрение (хотя бы на моделях) гипотезы, что в обстановке конца п. 5 в пределе динамическая система превращается в случайный процесс (гипотеза практической невозможности долгосрочного прогноза погоды).

Дело было так. Андрей Николаевич ввел в это время на механико-математическом факультете МГУ математический практикум и подбирал для него задачи. В числе задач он выбрал исследование движения тяжелой точки по симметричному относительно вертикальной оси тору. Это вполне интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы, и движение в ней происходит, как правило, по двумерным тора́м в фазовом пространстве. Эти торы условно периодически обматываются траекториями: угловые координаты на них можно выбрать так, что они будут при движении фазовой точки меняться равномерно.

В то время теория интегрируемых гамильтоновых систем не была, как сейчас, модной областью математики. Считалось, что это безнадежно устаревшая, отжившая и чисто формальная область аналитической механики. Заниматься подобной «неактуальной тематикой» считалось предосудительной для математика уступкой давлению внешних обстоятельств (предполагалось, что математики должны складывать простые числа, обобщать интегралы Лебега, исследовать непрерывные, но не дифференцируемые группы)<sup>2</sup>. Андрей Николаевич, посмеиваясь, говорил, что французы пишут «Небесная механика» с прописной буквы, а «прикладная» со строчной. И всегда с некоторым презрением относился ко всем видам «математического империализма» независимо от его источника (будь то Бурбаки или МИАН).

Итак, Андрей Николаевич заметил, что в «интегрируемых» задачах математического практикума надлежащим образом определенные фазы на торе меняются со временем равномерно. Он сразу же поставил себе вопрос: так ли это, если система на торе не интегрируема, а лишь имеет интегральный инвариант (сохраняет меру с положительной аналитической плотностью)? Этот вопрос он решил в заметке 1953 года о системах на торе — первой, где появляются малые знаменатели. В техническом отношении эта заметка не сложна (хотя в ней уже содержатся некоторые леммы, необходимые для фундаментальной работы 1954 года). Вывод Андрея Николаевича таков: почти всегда можно ввести равномерно меняющиеся со временем фазы, но иногда (при ненормально хорошо приближаемом рациональными числами отношении частот)

<sup>2</sup> Фреше говорил мне в 1965 году: «А, Колмогоров — это тот молодой человек, который построил суммируемую функцию с расходящимся почти всюду рядом Фурье?». Все последующие достижения Андрея Николаевича — в теории вероятностей, топологии, функциональном анализе, теории турбулентности, теории динамических систем — в глазах Фреше были менее ценны.

возможно перемешивание (образ маленького круга под действием фазового потока размазывается по всему тору).

Замечание о перемешивании, относящееся к патологическому (встречающемуся бесконечно редко) случаю, не кажется особенно важным. Но именно оно-то и стало источником знаменитой работы Андрея Николаевича о малых знаменателях, опубликованной в 1954 году, где доказано сохранение инвариантных торов при малом изменении функции Гамильтона.

Рассуждения Андрея Николаевича (упомянутые им в докладе на Международном математическом конгрессе в Амстердаме в 1954 году) состояли в следующем.

В интегрируемых системах движение по инвариантным торам всегда условно периодически (можно ввести равномерно вращающиеся со временем фазы). Следовательно, перемешивание в интегрируемых системах не встречается. Чтобы узнать, имеет ли открытое им явление механические приложения, Андрей Николаевич решил отыскать движения по торам в неинтегрируемых системах, где в принципе перемешивание могло бы наблюдаться.

Но как найти инвариантный тор в фазовом пространстве неинтегрируемой системы? Естественно начать с теории возмущений, рассмотрев систему, близкую к интегрируемой. Различные варианты теории возмущений многократно обсуждались в небесной механике, а потом — в ранней квантовой механике<sup>3</sup>.

Но все эти теории возмущений приводят к расходящимся рядам. Андрей Николаевич понял, что расходимость можно преодолеть, если вместо разложений по степеням малого параметра использовать метод Ньютона в функциональном пространстве (о котором он незадолго до того прочел в статье Л. В. Канторовича «Функциональный анализ и прикладная математика» в «Успехах математических наук»).

Таким образом, «метод ускоренной сходимости» Колмогорова был придуман вовсе не ради тех замечательных приложений в классических проблемах механики, к которым он приводит, а ради исследования возможности реализации специальной теоретико-множественной патологии в системах на двумерном торе (перемешивания).

<sup>3</sup> Особенно подробно — в книге Борна «Атомная механика», забавный перевод которой на русский язык был издан в тридцатые годы в Харькове: например, там участвуют «трехизмерительные разновидности» (dreidimensionale Mannigfaltigkeiten).

Поставленную им себе задачу о реализации перемешивания на слабо возмущенных инвариантных торах Андрей Николаевич при этом не решил, так как на найденных им торах его метод автоматически строит равномерно меняющиеся при движении фазовой точки угловые координаты. Вопрос о перемешивании, из которого выросла вся работа Андрея Николаевича, насколько я знаю, остается нерешенным и сегодня.

Значение этого технического вопроса по сравнению с полученными результатами ничтожно. Сейчас о нем никто уже и не вспоминает. Физики говорят (я слышал это от М. А. Леонтовича), что новая физика чаще всего начинается с уточнения последнего десятичного знака. Новая математика, как мы только что видели, тоже может рождаться при уточнении мелких технических деталей предшествующих работ. Уже из этого ясно, что планирование фундаментальных исследований — бюрократическая бессмыслица (и чаще всего обман).

\* \* \*

Хотя сам Андрей Николаевич считал основной причиной своей работы надежды, появившиеся в 1953 году, о Сталине он (следуя старому принципу говорить о покойниках только хорошее) всегда отзывался с благодарностью: «Во-первых, он подарил каждому академику по одеялу в тяжелый военный год, а во-вторых, простил мое рукоприкладство в Академии, сказавши „и у нас такое бывает”». Впрочем, и о Лысенко, попавшем в опалу, Андрей Николаевич старался говорить хорошее, утверждая, что тот искренне заблуждался по невежеству (пока Лысенко был у власти, отношение Андрея Николаевича к этому «борцу со случайностью в науке» было совсем другим).

Повторяя сказанное Ходасевичем о Горьком, можно сказать об Андрее Николаевиче, что он был одновременно и одним из самых упрямых, и одним из самых нестойких людей.

«Когда-нибудь я Вам все объясню», — говорил мне Андрей Николаевич, совершая какой-либо противоречащий своим принципам поступок. Давление на Андрея Николаевича оказывал, по-видимому, некий злой гений, влияние которого было огромным (роль передающего давление звена исполняли известные математики). Андрей Николаевич немного не дожил до того времени, когда об этих вещах стало можно говорить, и, как почти все пережившие тридцатые и сороковые годы люди его поколения, боялся «их» до последнего дня. Не надо забывать, что для

профессоров того времени не сообщить куда следует о крамольных речах студента или аспиранта нередко означало быть завтра же обвиненном в сочувствии крамольным идеям (в доносе этого же студента или аспиранта-провокатора).

\* \* \*

Андрей Николаевич говорил, что никогда не мог с полным напряжением интенсивно думать о математической проблеме более двух недель. И считал, что любое разовое открытие можно изложить на четырех страницах заметки в «Докладах», «потому что человеческий мозг не способен разом создать что-либо более сложное». Живой интерес к предмету своих занятий сохранялся у Андрея Николаевича, по его словам, только до тех пор, пока было неясно, в какую сторону вопрос решается («как будто идешь по острию бритвы»). Как только ситуация прояснялась, Андрей Николаевич старался как можно быстрее отделаться от писания доказательств и начинал искать, какому бы подмастерью отдать всю область. В такие моменты следовало держаться от него подальше.

В развитии каждой области науки можно различить три стадии. Первая — пионерская, это прорыв в новую область, яркое и обычно неожиданное открытие, часто опровергающее сложившиеся представления. Затем следует техническая стадия — длительная и трудоемкая. Теория обрастает деталями, становится труднодоступной и громоздкой, но зато охватывает все большее число приложений. Наконец, в третьей стадии появляется новый, более общий взгляд на проблему и на ее связи с другими, по-видимому, далекими от нее вопросами: делается возможным прорыв в новую область исследований.

Для математических работ Андрея Николаевича характерно то, что он явился пионером и первооткрывателем во многих областях, решая порой двухсотлетние проблемы. Технической работы по обобщению построенной теории Андрей Николаевич старался избегать (он говорил, между прочим, что на этой стадии особенно преуспевают евреи, скорее с восхищением, поскольку свое инстинктивное отвращение к этому виду деятельности Андрей Николаевич воспринимал как недостаток<sup>4</sup>). Зато на третьей стадии, где надо осмыслить полученные

<sup>4</sup> «По старости и лености, сделав какую-либо хорошую вещь, я в лучшем случае ее пишу немедленно, но обычно бросаю поиски усиления и продолжения» (из письма от 8.III.1958).



результаты и увидеть новые пути, на стадии создания фундаментальных обобщающих теорий Андрею Николаевичу принадлежат замечательные достижения.

\* \* \*

Пример неожиданного прорыва Андрея Николаевича в новую область — его топологические работы, опубликованные в четырех заметках в «Comptes Rendus» и доложенные на Московской топологической конференции 1935 года. В этих работах Андреем Николаевичем построена (одновременно с Дж. Александером и независимо от него) теория когомологий. После этого Андрей Николаевич топологией не занимался, но, когда появились работы Милнора о дифференцируемых структурах на сферах, они произвели на Андрея Николаевича сильнейшее впечатление. После доклада Милнора на съезде в Ленинграде в 1961 году Андрей Николаевич поручил мне, бывшему тогда аспирантом, разобрать доказательства и рассказать ему, в чем дело. Я пытался выполнить поручение, стал учиться у В. А. Рохлина, С. П. Новикова и Д. Б. Фукса (и даже был оппонентом у С. П. Новикова на защите кандидатской диссертации — о дифференцируемых структурах на произведениях сфер). Но попытки объяснить что-либо Андрею Николаевичу успехом не увенчались. «Мои работы по топологии, — сказал мне тогда Андрей Николаевич, — так и не были как следует поняты. Ведь я исходил из физических понятий — из гидродинамики и электромагнитной теории, а совсем не из комбинаторики. Группы когомологий, которые я тогда ввел, все усвоили и используют теперь. Но ведь в этих заметках было сделано большее — я построил не только группы, но и кольцо! Это кольцо гораздо важнее, и я думаю, что, если топологи освоят и его, можно получить много интересного».

По-видимому, все сведения о развитии топологии после 1935 года Андрей Николаевич почерпнул у П. С. Александрова и его учеников. Во всяком случае, приведенная выше оценка кольца когомологий Андреем Николаевичем замечательна: в ней содержится и проницательный анализ своей работы, и оправдавшийся прогноз значения когомологических операций. (Этот комментарий к приведенному высказыванию Андрея Николаевича принадлежит В. А. Рохлину, проявившему в этом случае необычную для него терпимость; я же все шестидесятые годы с наивной непримиримостью воинственно пытался рассказать сво-

ему учителю, что на самом деле произошло в топологии за тридцать предыдущих лет.)

\* \* \*

Но у Андрея Николаевича были на всё свои готовые точки зрения. Например, он говорил мне, что спектральные последовательности содержатся в казанской работе Павла Сергеевича Александрова. И что после шестидесяти лет заниматься математикой не следует (этот вывод, видимо, основывался на опыте общения с математиками предшествующих поколений). Так что мои попытки объяснить Андрею Николаевичу гомотопическую топологию окончились так же неудачно, как и обучить его кататься на велосипеде и поставить его на водные лыжи. Андрей Николаевич мечтал после шестидесяти лет пойти в бакенцики и задолго пытался подобрать себе подходящий участок на Волге. Но когда подошло время, бакенцики уже перешли с гребных лодок на ненавистные Андрею Николаевичу моторки, и проект пришлось оставить. Так Андрей Николаевич решил вернуться к профессии школьного учителя, с которой он когда-то начинал.

\* \* \*

Последняя математическая работа, о которой мне рассказывал Андрей Николаевич (вероятно, в 1964 году), имела «биологическое» происхождение. Речь шла о минимальном кубе, в котором можно уместить «мозг» или «компьютер» из  $N$  элементов («нейронов») фиксированного размера, каждый из которых соединен с не более чем  $k$  другими при помощи «проводок» фиксированной толщины. Число  $k$  фиксировано, а  $N$  стремится к бесконечности. Ясно, что очень простой «мозг» (вроде «червя» из  $N$  последовательно соединенных элементов) можно уместить в куб радиуса порядка  $\sqrt[3]{N}$ . Серое вещество мозга (тела нейронов) расположено по поверхности, а белое (связи) — внутри. Этот факт привел Андрея Николаевича к гипотезе, что минимальный радиус имеет порядок  $\sqrt{N}$ , причем никакой достаточно сложный мозг в куб меньшего радиуса уместить нельзя (словам «достаточно сложный» можно придать точный математический смысл).

В конце концов так и оказалось (в первоначальных оценках Андрея Николаевича были лишние логарифмы, окончательный результат без логарифмов — совместный с Барздином).

Конечно, Андрей Николаевич прекрасно понимал, что к устройству биологического мозга его теоремы имеют мало отношения, и поэтому в статье о мозге не упоминается. Но источником всей теории на самом деле были все же размышления о сером и белом веществе. Интересно отметить, что эта работа, быть может, вследствие слишком серьезного, математического изложения осталась малоизвестной даже специалистам. Когда я упомянул о ней в посвященной Андрею Николаевичу статье в «Physics Today» (октябрь 1989), на меня сразу же посыпались письма от американских инженеров, видимо, занимающихся миниатюризацией компьютеров, с просьбой указать точную ссылку на работу Андрея Николаевича.

\* \* \*

Недавно я побывал в горах под Марселем и снова обошел каланки — замечательную систему фьордов в полукилометровом отвесном обрыве приморских Альп. Это место мне указал Андрей Николаевич в 1965 году: пустынные горы в пяти километрах от Марселя, маркированная тропа, где стрелка указывает вниз, за обрыв. Оказывается, там есть уступ для ноги. Если поставить на него ногу, можно увидеть следующий уступ — и понемногу спуститься к морю. Так рассказывал Андрей Николаевич — а сейчас в этом месте построен университет Люмини.

Разговаривать с Андреем Николаевичем всегда было очень интересно, и я жалею, что не записывал его рассказов. К счастью, остались письма. Несколько отрывков, приведенных ниже, дают, мне кажется, довольно отчетливое представление об их авторе и его мироощущении.

*Москва, 28 марта 1965.*

«... Был очень рад получить Ваше письмо от 14 февраля по возвращении с Кавказа, куда я уехал 5 марта и оттуда вернулся 23-го. Ездили мы впятером (Дима Гордеев, Леня Бассалыго, Миша Козлов и Пер Мартин-Лёв — двадцатидвухлетний мой шведский стажер). В Бакуриани сначала шесть дней шел снег, что не мешало нам путешествовать кругом. Вдвоем с Пером мы, в частности, преодолели большой спуск в Цагвери по ущелью Черной речки. Дима же Гордеев упорно тренировался по восемь часов в сутки на слаломной горке. Потом приехал С. В. Фомин и привез солнечную погоду. В первый же солнечный день мы пошли на склоны местного хребтика Цхара-Цхара, и там за три часа на высоте около 2400 все мои мальчишки так обожглись (гуляя в

плавках и без оных), что две следующие ночи даже не спали как следует. В четвертый солнечный день мы прошли упомянутый хребтик (высотой в 2800) по верху, что оказалось своевременно, так как в следующий день горы покрылись облаками, из-под которых дул противный ветер. В Тбилиси я, Миша Козлов и Мартин-Лёв делали доклады, а все осматривали всякие достопримечательности и спаивались местными математиками. Потом еще уместились две целодневные экскурсии:

а) в Бетанию — недалеко от Тбилиси, где в лесу было возле остатков снега множество весенних цветов (обычных наших голубых подснежников, маленьких цикламенов, крокусов, ранних ирисов). Целью, впрочем, была церковь 12 в. с фресками;

б) в Кинцвисси — недалеко от Гори на склонах Триалетского хребта, где имеется действительно замечательная роспись начала 13 в., впечатление от которой, как от произведения большого и вполне индивидуального (хоть и безымянного) художника, сравнимо с впечатлением от Дионосиевых фресок в Феррапонтове. Конец пути к самому памятнику оказался несколько затруднителен, так что туда кроме нас попал только Г. С. Чогошвили, а остальные, насколько я мог понять, в течение четырех часов ожидания неплохо пировали в ближайшей доступной автомобилям деревне. Потом, впрочем, был еще торжественный ужин в интуристском ресторане в Гори рядом с домиком, где родился Сталин. Из Гори мы сразу и отбыли в Москву (наши лыжи были в Тбилиси вгружены в поезд в сопровождении молодого тбилисского математика, для того отряженного. Вероятно, после нашего отъезда наши компаньоны вместе с ним еще не раз посетили тот же ресторан).

Вам же кататься на лыжах полагается на пасхе (т.е. в течение двух недель с 18 апреля по 2 мая). По путеводителю по Савойе, или Дофине, Вы можете выбрать себе там лыжную станцию по вкусу, в это время желательно из самых высоких (1700–2000 м). Место в гостинице любого ранга (начиная с общежития с койками в два яруса) надо заказывать заранее. Прокатные лыжи Вас, вероятно, вполне удовлетворят, если Вы не собираетесь покупать их для импорта к нам...

Я не хочу злословить по поводу \*\*, но и не хочу защищать его от Вашего предположения на счет его способности считать интересными лишь области математики, которыми он сам интересуется, или хотя бы владеет. Но за себя я хочу несколько защититься. Я сейчас неизбежно очень занят тем, чтобы успеть сделать все то, что еще мне осталось сделать самому, а планы у меня довольно большие и разно-

образные. Поэтому я несколько скуп на усилия по изучению вещей, в которых не предполагаю проявлять свою собственную активность, а иногда даже на более легкие усилия, требующиеся, например, для того, чтобы с пониманием слушать обзорные доклады (или, скажем, Ваши объяснения). У моих молодых друзей здесь часто бывает непонимание неизбежных возрастных отличий, такое же как при желании научить меня непременно кататься на велосипеде или на водных лыжах.

Но склонности отрицать *объективный* интерес и значительность новых направлений, возникающей из такого самоограничения, я за собой не наблюдаю. Иногда я воздерживаюсь от суждения, иногда даже активно поддерживаю и рекомендую для изучения молодым вещи, которые по общему впечатлению кажутся мне значительными и перспективными, хоть и выходящими за пределы моего собственного репертуара. Если же я более активно и темпераментно защищаю значительность направлений, которые ценю в силу знания их структуры (иногда скрытой от пассивно читающих готовые работы) и перспективы, то это мне кажется понятным и законным. Таковы наши «малые знаменатели» и многое другое.

Передайте от меня особенный привет Лерё, его жене и детям. У меня с ним тоже складывались более непринужденные и личные отношения, чем с другими французскими математиками. Впрочем, так было со Шварцем и в другом роде с Фаваром, а из людей сравнительно незаметных, с А. Ренье (теория вероятностей и статистика с инженерными и физическими применениями). Я был бы рад получить материалы, которые помогли бы мне написать содержательный некролог о Фаваре. Математические его работы я достаточно знаю, но недостаточно его педагогическую и общественную деятельность и личную биографию. И то и другое достаточно интересно (включая активную помощь испанским эмигрантам и, вообще, самые неожиданные для математика виды деятельности)...

Заключительная фраза с поправками... (раскаиваюсь) казнюсь, что Вас (обижал) огорчал... мне очень нравится. Вторая поправка безусловно правильна, так как «обидеть» меня не так легко. Замена «раскаиваюсь» на «казнюсь», видимо, означает, что раскаиваться в чем-либо Вам не свойственно... Могила Урысона находится в местечке Бац около Круазика, кажется, еще жива мадемуазель Корню — старая дева, эту могилу оберегающая.»

Москва, 11 октября 65.

«... Только сейчас собрался отвечать на Ваше письмо от 29 августа из Шамони, так как в начале сентября был очень занят, а потом уезжал в Югославию (Белград, экскурсия в «старую Сербию» в поисках неких фресок 13 в., Загреб и экскурсия на берег Адриатического моря).

Я действительно довольно много наблюдал мнения и нравы самых различных кругов во Франции и других странах, но кое-что из того, что Вы пишете, мне было интересно. В положении молодого человека на равной ноге со студентами я был во Франции лишь в 1930–31 годах, а в 1958 хоть и прожил несколько дней в общежитии лыжников со спальными местами, расположенными в два яруса, воспринимался окружающими все же в виде профессора (каковым, конечно, и Вы являетесь, но пока на Вас это не написано).

Фреше я непременно напишу. Но пока все нахожусь в крайнем цейтноте. Я еще глубже впутался в школьные дела: в рядовой школе в Болшеве с одной сотрудницей мы пробуем преподавать начала дифференциального исчисления в девятом классе и там же вводить элементы теории множеств (в теме «геометрический смысл уравнений и неравенств»). Меня сделали председателем математической секции комиссии, которая реально будет вырабатывать программы и заказывать соответствующие учебники. Дело это довольно важное, не безнадежно кое-что в самом деле сделать.

Из 101-го выпускника школы-интерната лишь 44 пожелали идти на мех-мат и 32 приняты (около 70%, из седьмой школы (Кронрод) около 60%, из остальных много меньше). Зато в физико-техническом институте *всех* наших кандидатов приняли; видимо, наша подготовка там больше подходит (конкурс там был не меньше). На физическом факультете интернатцы имели еще несколько меньше успеха (около 60%) из-за крайнего формализма требований по математике «под Новоселова», а м. б. и недоброжелательства к нашему заведению.

Биографию Фавара я получил, еще не сделал из нее никакого употребления, но прошу передать благодарности и надеюсь, что кое-что о Фаваре у нас появится.

В Бретани есть много мест более привлекательных, чем Круазик. Поздней осенью там везде пусто, так что Вы можете отправиться странствовать без заказа заранее мест в гостиницах. Надеюсь, посетите в самом деле Бац и Круазик. Я жил там в «Отель де л'Оцеан»

на самом берегу моря. Но Вам доступны и всякие «Мезон де Женес», если они открыты не в сезон<sup>5</sup>.

Статью о сложности алгоритмов, о которой Вы пишете, я знаю. Это целое небольшое направление исследований, которые однако нуждаются в существенном усовершенствовании: машины Тьюринга здесь не подходящий аппарат. Можно дать разумное определение «минимальной возможности сложности», которое с точностью до ограниченного множителя единственно при широких естественных допущениях. Машины же Тьюринга при истинной сложности порядка  $T$  иногда дают  $T^2$ . Сейчас удалось придать ему и достаточную простоту...

... Всякое участие Ваше в писании учебников для массовой школы я бы приветствовал, но думаю, что авторский коллектив непременно должен быть связан с экспериментальным преподаванием именно в массовой школе. Для алгебры в 9–10 классах мой коллектив кроме меня включает Шерешевского, который сейчас преподает в интернате, но имеет довольно большой опыт и в обычной школе, и некую Суворову, которая уже написанные пробные параграфы испытывает в Болшеве.

При мне звонили из Парижа И. Г. Петровскому по поводу Вашего участия в Журнале, посвященном новой «Инвесигационной математике», который должен чем-то противопоставляться всем старым журналам. Мы объяснили, что о существовании «инвесигационной математики» в качестве новой науки пока не осведомлены, но знаем Мальгранжа и Титса как отличных математиков...»

\* \* \*

Журнал этот — *Inventiones Mathematicae*. Что же касается писания учебников, то я категорически отказался в этом принимать участие как из-за желания заниматься математикой, так и из-за серьезнейших

---

<sup>5</sup> Я съездил в Бац, неожиданно для себя самого севши однажды октябрьским вечером в отходивший с вокзала Монпарнас поезд. В Круазик поезд пришел в час ночи. Городок был вымерший, в «Отель де л'Океан» меня не пустил портье, не поверивший, что я один, а не представитель отряда гангстеров. Я заночевал, укрывшись от яркой луны и уже довольно холодного, пахнувшего йодом ветра под туей в саду, окружающем доты атлантического вала, частью превращенные в виллы (во всяком случае окружающие пустые виллы архитектурой напоминали сохранившиеся доты). Наутро пришел в Бац, нашел мадемуазель Корню в ее табачном киоске, окруженную многочисленными кошками. Могила Урысона у стены кладбища была заботливо убрана (П. С. Урысон утонул на глазах мадемуазель Корню в 1924 году).

разногласий с Андреем Николаевичем (который склонен был считать всех школьников столь же гениальными математиками, как он сам).

Я вспоминаю, как однажды (в середине пятидесятых годов) Андрей Николаевич, собрав у себя дома учеников (студентов, аспирантов) на Рождество, произнес целую речь о математических способностях. По его теории математические способности человека тем выше, чем на более ранней стадии общечеловеческого развития он остановился. «Самый гениальный наш математик, — говорил Андрей Николаевич, — остановился в возрасте четырех-пяти лет, когда дети любят отрывать ножки и крылышки насекомым». Себя Андрей Николаевич считал остановившимся на уровне тринадцати лет, когда мальчишки очень любознательны и интересуются всем на свете, но взрослые интересы их еще не отвлекают (уровень П. С. Александрова он оценивал, помнится, шестнадцатью или даже восемнадцатью годами).

Так или иначе, Андрей Николаевич всегда предполагал в собеседнике равный себе интеллект — не потому, вероятно, что он неправильно оценивал реальность («большинству студентов все равно, что говорится на лекциях, — они просто заучивают наизусть к экзамену формулировки нескольких теорем», — говорил он о студентах мех-мата МГУ), а потому, что он был так воспитан (и, вероятно, считал подобное доверие к слушателю полезным и возвышающим). Вероятно, именно поэтому замечательные лекции Андрея Николаевича были столь непонятными для большинства студентов (впрочем, и формально его лекции были крайне далеки от стандартной отупляющей диктовки, господствовавшей в преподавании математики уже тогда и так хорошо высмеянной Р. Фейнманом в «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман»).

«Действительно хорошо преподавать математику, — говорил Андрей Николаевич, — может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую, развивающуюся науку». В этом смысле его лекции при всех технических недостатках были замечательно интересны для тех, кто хотел понять идеи, а не проследить за знаками и индексами (среди его лекций, которые мне довелось слышать, были лекции о полях Галуа, динамических системах, формуле суммирования Эйлера, цепях Маркова, теории информации и т. д.).

Быть может, на подходе Андрея Николаевича к преподаванию сказалось и то вольное аспирантское существование, которое он впоследствии вспоминал как самое счастливое время. Аспиранту полагалось тогда сдать 14 экзаменов по 14 различным математическим наукам.



Но экзамен можно было заменить самостоятельным результатом в соответствующей области. Андрей Николаевич рассказывал, что он так и не сдал ни одного экзамена, написав вместо этого 14 статей на разные темы с новыми результатами. «Один из результатов, — добавил Андрей Николаевич, — оказался неверным, но я это понял уже после того, как экзамен был зачтен».

Сам Андрей Николаевич был замечательным деканом. Он говорил, что надо прощать талантливым людям их талантливость, и спас не одного из известных сейчас математиков от исключения из университета. Снимая буйного студента со стипендии, этот декан сам же тайком помогал ему пережить трудное время. Уровня, которого достиг тогда факультет, он более никогда не достигал и вряд ли когда достигнет.

«Кажется почти чудом, — писал А. Эйнштейн, вспоминая свои студенческие годы, — что современные методы обучения еще не совсем удушили святую любознательность, ибо это нежное растение требует, прежде всего, наряду со свободой, поощрения. Большая ошибка думать, что чувство долга и принуждение могут способствовать тому, чтобы находить радость в том, чтобы искать и узнавать. Здоровое хищное животное отказалось бы от еды, если бы ударами кнута его заставляли непрерывно есть мясо, особенно если принудительно предлагаемая пища не им выбрана».

От других известных мне профессоров Андрея Николаевича отличало полное уважение к личности студента, от которого он всегда ожидал услышать что-то новое и неожиданное.

Андрей Николаевич преподавать и читать лекции определенно любил независимо даже от явных результатов — он, в частности, считал большим несчастьем прекращение лектория для школьников (существовавшего при Московском математическом обществе до тех пор, пока декан О. Б. Лупанов не отстранил Общество от руководства Московской математической Олимпиадой и школьными кружками).

\* \* \*

Следующее письмо дает представление о педагогической нагрузке Андрея Николаевича (снятого только что с должности декана из-за связанных с венгерским восстанием волнений на факультете).

Кисловодск, 31-5-57.

«... Вы еще не ответили мне на счет кружка или семинара для первого курса. Без Вас я все же ничего открывать для 1-го курса не буду, так как моя программа и так состоит из

1) более активного, чем в прошлые годы, руководства нашим постоянным семинаром кафедры теории вероятностей,

2) регулярных собраний сотрудников и аспирантов стекловского института и кафедры по различным прикладным работам (мы же взяли с теперешнего пятого курса, кроме аспирантов, Айвазяна, Гладкова, Колчина и Леонова в младшие научные сотрудники под определенные прикладные темы),

3) курса «случайные процессы» — это обязательный курс для студентов четвертого года нашей специальности, я думаю, что Вам будет не вредно его слушать,

4) семинара по динамическим системам и случайным процессам для аспирантов Алексеева, Мешалкина, Ерохина, Розанова и для Вас (там будут и другие участники, но эти подготовлены уже с тем, чтобы работать достаточно интенсивно и систематически),

5) семинара с В. Тихомировым для 3-го и 4-го курса по избранным вопросам теории вероятностей и комбинаторике (?!), на который Вам не запрещается приходить, но который я хочу выдержать во вполне общедоступном стиле.

Тем не менее мое обещание еженедельно бывать на кружке или семинаре для первокурсников и приносить туда достаточно задач, а также уберечь Вас от возможного уклона в сторону приучения маленьких мальчиков к безответственной и косноязычной болтовне, как бывает (при всем их интересе) в кружках Т. В., я берусь, если вся затея состоится... Мне пишут, будто все московские студенты на июль мобилизуются в помощь московской милиции (?!) в связи с фестивалем, но м. б. это в такой форме некий злостный пасквиль?..»

\* \* \*

2 апреля 1958 г., *Toussuire (Savoie)*.

«... Последние два дня моя жизнь во Франции выглядит крайне не академично. Вчера была 24-часовая забастовка ж. д. и парижского метро и автобусов. Нам — пригородным жителям — были, однако, поданы в огромном количестве военные грузовики, перевозившие нас в Париж. Публика, впрочем, давала эквивалент стоимости билета в метро

перевозившим нас солдатикам, которые, в силу этого, были страшно веселы и любезны. На сегодняшнее утро бюро путешествий мне все же раздобыло билет сюда. Ввиду пасхальных вакаций и вчерашней забастовки поезд № 609, с которым я должен был отправляться, разросся так, что (называясь одним поездом!) стоял на трех путях, номера же вагонов были распределены по законам случая от 1 до 55. Я нашел свой № 17 лишь в минуту отправления своей секции, но благополучно занял свое сидячее нумерованное место, хотя проходы были полны нумерованными пассажирами. По некоторой специальной (не знаю, чем объясняющейся) любезности официанта я получил даже во вторую смену (всего их было четыре) отменно вкусный *grand déjeuner* в вагоне-ресторане. Поездка, продолжавшаяся восемь часов, была интересна: сначала равнинная сельская Франция с барками, которые тянут по каналам авто-тягачи, потом туннели и скалистые горы, Рона, необычайно красивое озеро Бурже и, наконец, наша долина с горной речкой и покрытыми снегом горами. Поезд шел в Италию и в конце мое купе состояло из одних итальянцев, крайне грязных и даже с запахом чеснока.

В *St Jean en Maurienne* я с большим скандалом заставил итальянцев разбаррикадировать дверь, заваленную чемоданами, успел выскочить и сразу нашел небольшое общество, ищущее автобус в *Toussuire*. Автобус нашелся, но так как нас было лишь шестеро, заменился (за ту же цену) автомобилем, который быстро вознес нас на высоту 1800 м.

*Toussuire* состоит из десятка домиков, в том числе 5–6 небольших гостиниц — по 10–15 комнат. В некоторых из них есть еще «дортуары». Комнаты оказались все заперты, и я до понедельника поместился в дортуаре. Взял на 10 дней лыжи на прокат и уже гулял кругом. Погода чудная, сейчас светит почти полная луна. Завтра возьму с собой хлеб, сыр, масло и бананы (в большом количестве) и уйду на весь день бродить по небольшим хребтикам на высоте 2200–2400. Сегодня же меня остановил с самыми дружественными разговорами коммунист (среди служащих, проводников и инструкторов лыжного дела их несколько человек), заставивший меня выпить две рюмки какого-то весьма крепкого снадобья. За пансион, включал дортуар и очень сытную кормежку, я плачу 1400 франков — т. е. немного более, чем в Париже за свою комнату с удобствами и ванной. С приезжей публикой еще не познакомился. Она состоит из 1) студенческого вида молодежи, 2) скромных интеллигентных семей с ребятами от 4 до 17 лет, которые все, конечно, страстные лыжники...

Теперь немного о Ваших нападках на меня...

...Я считаю формальную строгость *обязательной* и думаю, что в конечном счете после большой (и обычно *полезной* для окончательного понимания) работы она всегда может быть соединена (при изложении *важных, т.е.* по сути дела *простых* результатов) с полной простотой и естественностью. Единственное средство добиться осуществления этих идеалов, это строго требовать логической отчетливости даже там, где она пока обременительна.

...Я никогда не имел времени (или энергии) писать как следует. Разнообразие моих математических и нематематических занятий (если считать последние, вроде деканства, чем-то полезным) несколько извиняет такое положение дел, но я сам всегда хорошо понимаю, насколько я плохо и отрывочно все излагаю. Вот отсюда я привезу для публикации и по-французски и по-русски несколько образцовых педагогических писаний.

Посмотрите еще, впрочем (в отношении суммарного изложения без доказательств), мой амстердамский доклад...

15 апреля 1958, Париж (в моем «бюро» в Институте Пуанкаре).

...В Toussuire я пробыл ровно восемь суток (так как уехал на девятый день с тем же автобусом, с которым приехал). Погода была крайне капризная, каждый день по несколько раз шел снег, каждый день было солнце, а в промежутках ослепительно золотистые туманы. Из-за туманов и возможных после 30–40 см нового снега обвалов никуда особенно далеко уйти было нельзя. Только в последний день я обнаружил по лыжным следам утром, что компания человек в пять все же ушла по рассчитанному часам на шесть маршруту на высшую в окрестности точку (Pte d'Ouillon, 2436 м), откуда существует известный по путеводителям спуск по гребню на другую гору (Monte Cartier, 2250) и далее значительно ниже Toussuire (прямо же в Toussuire надо было бы лезть по скалам). По проложенному следу я проделал весь этот очень легкий, но довольно сложный (в том смысле, что, сбившись с дороги, попадаешь на скалы или лавиноопасные склоны) маршрут, большей частью под солнцем, но раза три в тумане и под крупными хлопьями снега (не вызывавшими, впрочем, никакого желания надевать одежду сверх трусов). Своих предшественников так и не догнал, в конце в соответствии с правилами они спустились к мосту через горную речку, я же по российской дикости значительно выше перебросил лыжи и перебрался по камням. Подал в Toussuire в 14.50, заказал себе пышный

прощальный завтрак с более дорогим марочным вином (обычно я беру стандартные 1/4 литра разливного красного вина), пил кофе, расплатился в гостинице, подарил каким-то мальчишкам остатки талончиков на Téléski, сдал лыжи и ровно в 16.30 сел в автобус.

В общем итоге от солнца у меня сошла вся кожа с лица, но довольно безболезненным образом, сам же я загорел в меру возможного за восемь дней (без облупливания).

Потом был еще два дня в гостях у Фаварда в Гренобле, где мы тоже ездили (на автомобиле) в горы, сидели в кафе и наблюдали, как на маленькой горке у кафе каталась на лыжах Фавардова десятилетняя дочка. Сам Гренобль, заваленные снегом глухие еловые леса в близлежащих горах, замок, который мы посещали, музей живописи в Гренобле были тоже достаточно интересны, а прием в семействе Фаварда действительно сердечным.

Сейчас уже прочел две лекции после пасхального перерыва, завтра делаю доклад на вероятностном семинаре, а сейчас иду на «математический чай», который бывает каждую неделю в среду в 16.45...»

\* \* \*

*Калькутта, 16 апреля 1962 года.*

«... Многочисленные слуги, работающие в саду профессора Магаланобиса, видят, что комната почетных гостей занята седым и загорелым человеком, не говорящим по-английски, который встает с восходом солнца и прогуливается в саду молча. К тому же перед моим приездом им было велено чистить пруд, чтобы я мог купаться по утрам (из чего ничего не вышло). Так что девочка лет десяти в ярком платке, увешанная бусами, довольно настойчиво желала получить ответ, что я индус, и мое «I am Russian» ее не убедило — м. б. она подумала, что это какая-то особая индийская народность.

Сейчас 3.<sup>h</sup>30. Еще темно. Так как к утру прохладно, то я выключил установку кондиционированного воздуха и открыл окна. Поют птицы. Буду вновь спать.

В 6.<sup>h</sup>30 придет красивый юноша босиком и в голубой рубашке и поставит в моей комнате (у постели, если бы я лежал) столик с чаем и фруктами. В 7.<sup>h</sup>00 придет американский студент, с которым мы пойдем купаться в бассейне в студенческом общежитии.

В 8.<sup>h</sup>00 будет уже настоящий утренний завтрак, куда придет Магаланобис и все живущие в доме гости. Так как мадам Магаланобис больна, то за столом хозяйничает английский геолог — Памела Робинсон.

Потом я пойду в наше консульство и выяснять в бюро путешествий детали способа возвращения.

В Бомбее я видел страшные контрасты великолепных отелей в центре и нищеты в поселках на окраинах. Калькутта традиционнее и беднее в среднем, но сейчас, видимо, благополучный период, и каких-либо голодающих я не нашел пока. Что же касается нищих, то неопытные иностранцы могут преувеличить их число. В музей скульптуры приходят босые люди с женами, а те с грудными детьми. Служители лишь наблюдают, чтобы семейства не рассаживались на полу завтракать — все это общество по внешнему виду европейцу естественно принять за нищих, но они рассматривают собранных здесь богов.»

\* \* \*

9 августа 69. Научно-исследовательское судно «Дм. Менделеев».

«...Вчера провел первую половину дня с Маурицио Пейшото (по-португальски X читается как Ш). Обсуждается вопрос о симпозиуме в Бразилии в августе 1971 года с участием Смейла, Вас, Синая. Имеется в виду даже не симпозиум, а нечто вроде летней школы на целый месяц в месте, которое, по словам Пейшото, еще привлекательнее, чем Рио. В Рио меня всюду водил Эрлен Викторович Ленский, который там на год и свободно болтает с коллегами и простым народом (что, как Вы знаете, труднее) по-португальски. Я приучал его купаться, не взирая на дождь здешней «зимой» (температура воды никогда не ниже 18°). Четыре дня в Рио были очень интересны, но суматошны, так что возвращение к размеренной корабельной жизни тоже доставляет удовольствие. Занимаюсь по преимуществу разоблачением случаев, когда приборы вместо турбулентности выдают спектр вибрации троса, на котором мы таскаем термоанемометры и т.п.

Мое участие в работах экспедиции отражено даже в стихах, сочиненных к празднику Нептуна при переходе через экватор:

Первый крестник — нету споров —  
 Академик Колмогоров  
 Задает ученым взбучку,  
 Тянут те прибор за ручку  
 И спускают всех чертей  
 Для закона двух третей...

Черти обошлись со мной сравнительно мягко, а так как я был облачен наподобие римской тоги в казенную простыню, только она и пострадала от сажи на машинном масле, которой они были измазаны.

Есть, впрочем, у нас и более культурные развлечения. К вечерам с произведениями Вивальди, Баха, Шумана печатаются даже на рота-принте программы.

Кроме Рио мы были в Рейкьявике и сделали большое путешествие на автобусах к гейзерам и водопадам (т.е. большим оно было по впечатлениям, а заняло один полный день). Потом непредвиденно (чтобы отправить в Москву на самолете больного) зашли в Конакри. Сейчас у нас месячный запас продовольствия, топливо, вообще, взято в Калининграде на весь рейс, а пресная вода получается из опреснителей. Но до возвращения заведомо будет еще один «заход» в Гибралтар, откуда, вероятно, и пойдет это письмо...»

\* \* \*

Последнее десятилетие жизни Андрея Николаевича было омрачено тяжелой болезнью. Сначала он стал жаловаться на зрение, и обычные сорокакилометровые лыжные маршруты вдоль Вори пришлось сократить до двадцатикилометровых вдоль Скалбы.

Но и во время последней нашей лыжной прогулки почти совсем ослепший Андрей Николаевич перепрыгивал на лыжах через заборы на лед Клязьмы. Позже, летом, Андрею Николаевичу стало трудно бороться с морскими волнами, но осенью он еще убежал за забор «Узкого» от строгого надзора Анны Дмитриевны и врачей купаться в пруду (и учил меня, где удобнее перелезть через забор, чтобы попасть в «Узкое» из Ясенева; впрочем, Андрей Николаевич никогда не был слишком добронравным и не без гордости рассказывал о своей драке с милицией на Ярославском вокзале). В последние годы жизнь Андрея Николаевича была очень тяжелой, иногда его буквально приходилось носить на руках. Анна Дмитриевна, медсестра Ася Александровна Буканова, ученики Андрея Николаевича и выпускники созданной им школы-интерната дежурили при нем круглосуточно в течение нескольких лет.

Порой Андрей Николаевич мог произнести лишь несколько слов в час, но все равно с ним было всегда интересно — помню, как за несколько месяцев до смерти Андрей Николаевич рассказывал, как удивительно медленно летели в войну трассирующие снаряды под Комаровкой,

как он жил, вернувшись по вызову Артуправления в 1942 году в Москву из Казани, на диване в здании президиума АН СССР в Нескучном саду.

Помню его рассказ о зимнем восхождении на Брокен в тридцатые годы: гордо спускающийся на лыжах в плавках Андрей Николаевич встречает двух молодых людей с фотоаппаратом. Они просят его остановиться и подойти. Вместо того, чтобы, как он ожидал, сфотографировать его, молодые люди просят *его* сфотографировать *их*.

\* \* \*

На механико-математическом факультете МГУ до недавних пор можно было видеть картину, где М. И. Калинин беседует с профессорами, преподавателями и аспирантами в старом здании МГУ на Моховой. Там легко узнать А. Н. Колмогорова, С. А. Яновскую, В. В. Голубева, В. Ф. Кагана, П. С. Александрова и др. Вот как рассказывал об этом событии Андрей Николаевич.

В то время дочка М. И. Калинина дружила с аспирантом-механиком, и Михаил Иванович приехал знакомиться с факультетом. Он произнес небольшую речь, а потом попросил всех высказаться о своих заботах. Каждый стал говорить о наблевшем: аспиранты о нехватке общежитий, особенно для семейных, кто-то о необходимости посылать выпускников в провинциальные университеты, а Павел Сергеевич Александров — о прохудившейся крыше в уборной. В заключительном слове всесоюзный староста сказал: «Ну, я вижу, у вас кто в лес, кто по дрова. Что касается аспирантов, то надо сначала устраиваться работать и заводить жилье, а уж потом жениться. А что касается уборной, так на то у вас есть нарком просвещения...»

\* \* \*

Еще один запомнившийся мне рассказ Андрея Николаевича — о Германе Вейле. По словам Андрея Николаевича, Вейль любил песни русских казаков. В комнате для музыки в его занимавшей целый этаж квартире в Гёттингене он садился вплотную к репродуктору, спиной к гостям, и, облокотившись на приемник, слушал... Была еще зала для пинг-понга, вообще чувствовался излишек средств по сравнению с уровнем обычного профессора — проистекал он от жены, относившейся к высшему музыкально-артистическому кругу, как-то связанной еще с Вагнером...



Из рассказов Андрея Николаевича об Адамаре:

Адамар был страстным собирателем папоротников. Когда он приехал в Москву, Андрей Николаевич с Павлом Сергеевичем Александровым повезли его кататься на лодке (кажется, по Образцовскому пруду на Клязьме. — В. А.). Вдруг Адамар что-то увидел на берегу и попросил срочно пристать. Он перешел на нос лодки и, когда она приблизилась к берегу, так волновался, стремясь на берег, что упал в воду. Оказалось, что там рос папоротник необычного вида, который он искал везде уже много лет. Адамар был совершенно счастлив. Но его нужно было срочно возить на прием к президенту (кажется, президентом тогда был Комаров. — В. А.) в президиум АН СССР.

Пришлось переодеть Адамара в костюм Павла Сергеевича. Но это было очень заметно (Адамар был гораздо выше). На приеме все спрашивали Адамара: «Господин профессор, что с Вами случилось? Вы не в своем костюме — уж не упали ли Вы в воду?» На что Адамар гордо отвечал: «Почему Вы думаете, что у профессора математики не может быть никаких других приключений?».

Последний раз Андрей Николаевич навестил Адамара, когда тому было, кажется, лет девяносто. Заговорили среди прочего о школьных олимпиадах — во Франции давно существует аналогичный олимпиаде *Concours Général*, в котором участвуют лучшие (по каждому предмету отдельно) выпускники средних школ всей Франции одновременно. Задачи отбираются из составленных лучшими учителями всей Франции — учителя посылают задачи в Париж, и по качеству этих задач министерство может судить о качестве своих учителей (что и нам не худо бы перенять). По результатам конкурса определяют первого математика среди выпускников этого года, второго, третьего... тысячного...

Адамар живо помнил *Concours Général*, в котором он участвовал. «Я оказался вторым, — сказал он, — а тот первый, он тоже сделался математиком. Но гораздо более слабым — он и всегда был слабее». И было видно, что свое «поражение» на *Concours Général* Адамар и сейчас воспринимает болезненно!

Для Андрея Николаевича математика всегда оставалась отчасти спортом. Но когда я на его юбилее (в докладе Московскому математическому обществу) сравнил Андрея Николаевича с альпинистом-первовосходителем, противопоставляя его И. М. Гельфанду, деятельность которого я сравнил с прокладкой шоссе, то обиделись оба. «... Что же, Вы не считаете меня способным создавать общие

теории», — сказал Андрей Николаевич. «Что же, Вы думаете, я не способен решать трудные задачи», — добавил И. М.

Сам Андрей Николаевич страстно любил музыку и готов был бесконечно слушать свои любимые пластинки, которых у него было множество и в Комаровке, и в Москве. Для меня всегда ставился квинтет Шумана, и это превращало в праздник даже те тяжелые дежурства, когда Андрей Николаевич почти не мог говорить.

Случались и комические происшествия.

На кухне Анны Дмитриевны в квартире Колмогоровых в профессорской зоне «Л» МГУ (термин «зона» сохранился с тех пор, как здание строили заключенные) хозяйничала в это время пожилая интеллигентная помощница Галина Ивановна.

Она возвращалась домой поздно вечером и не успевала купить себе еды. Поэтому она попросила Анну Дмитриевну устроить ей пропуск в (охраняемый милицией) университет, где можно было успеть купить что-нибудь на ужин. Посоветовавшись с руководством кафедры (Б. В. Г.), Анна Дмитриевна ответила решительным отказом: для человека с *такой* фамилией сделать ничего нельзя. Галина Ивановна просила меня помочь ей.

«Боже мой, — спросил я Галину Ивановну, — какая же у Вас фамилия?»

— «Маркс», — ответила она.

По-видимому, предполагалось, что получить с такой фамилией пропуск в МГУ столь же трудно, как и поступить в него учиться. (К счастью, вскоре удалось найти заведующего кафедрой с более широким взглядом на вещи.)

\* \* \*

Иногда болезнь как бы отступала, и Андрей Николаевич мог говорить дольше. Правда, понимать его своеобразную дикцию было нелегко и до болезни. Рассказывают, что во время празднования юбилея Андрея Николаевича И. М. Гельфанд упомянул о своем посещении Комаровки. Павел Сергеевич Александров немедленно подтвердил, что Израиль Моисеевич *действительно* бывал в Комаровке и даже спас кошку, запертую в печке, которую начали топить. Легенда (впрочем, вполне правдоподобная) утверждает, что Израиль Моисеевич прокомментировал это так: «Да, я действительно обнаружил кошку в печке, но к тому времени я слышал мяуканье уже полчаса, однако неправильно его истолковывал».

\* \* \*

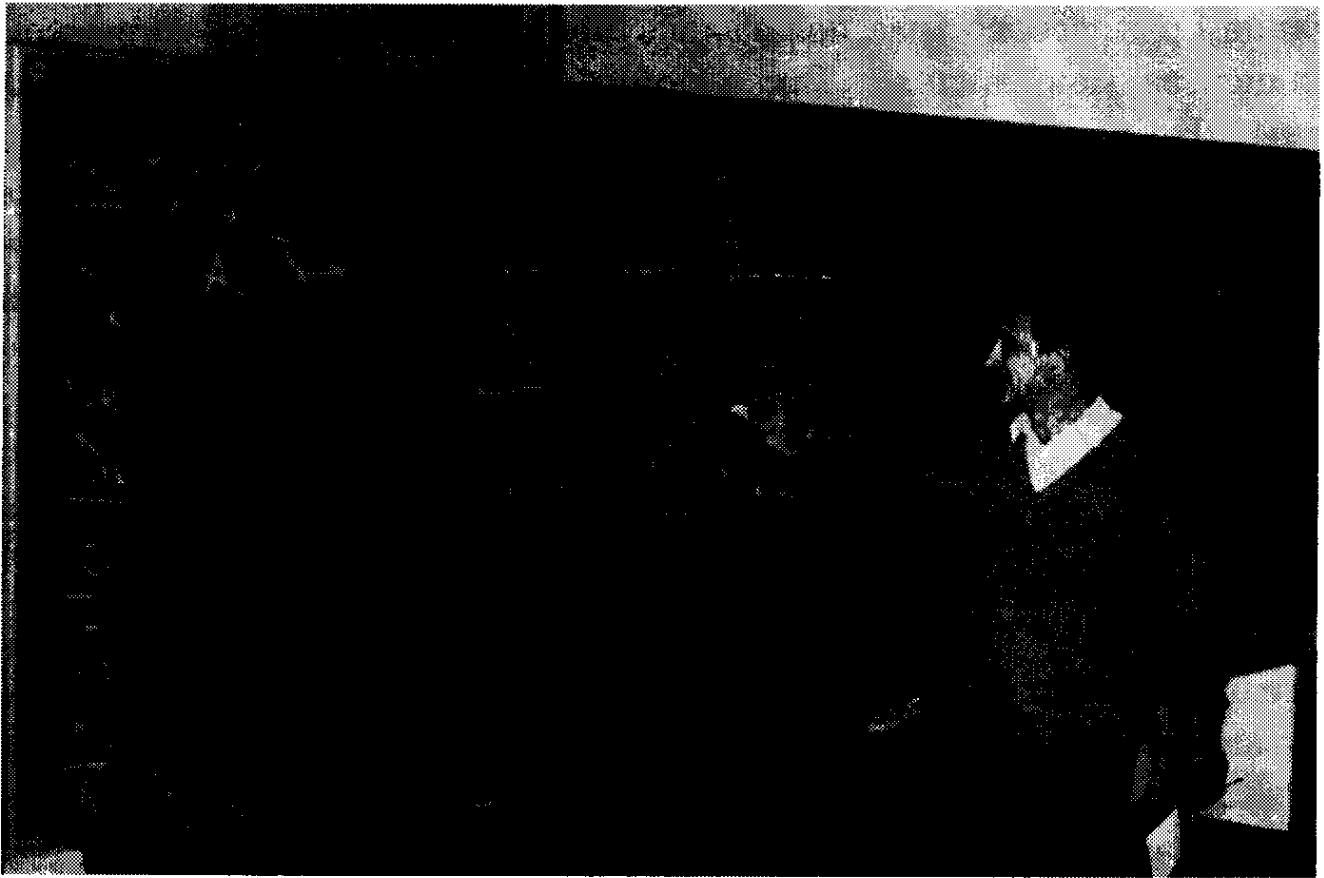
Более, чем своими математическими достижениями, Андрей Николаевич гордился достижениями спортивными. «В 1939 году, — рассказывал он, — уже будучи академиком-секретарем, я решил испытать, сколько смогу проплыть в ледяной воде Клязьмы, — и вернулся на лыжах в Комаровку со столь высокой температурой, что в больнице на улице Грановского (где полагалось лечиться академику-секретарю) опасались за мою жизнь. Так я понял, что мои возможности ограничены. Но вот уже семидесятилетним побежал я в начале зимы из университета купаться на Москву-реку, к Нескучному саду. Набережная так обледенела, что вылезти было невозможно, а рядом никого не было. Я искал место, чтобы вылезти, дольше, чем тогда на Клязьме, еле вылез — и не болел нисколько».

\* \* \*

С удовольствием вспоминал Андрей Николаевич свои юношеские путешествия по Северу, самое длинное — Вологда — Сухона — Вычегда — Печора — Шугор — Сосьва — Обь — Бийск (и далее босиком по Алтаю). В путешествии по Кулою и Пинеге ему удалось установить парус, не поддававшийся усилиям местных рыбаков, после чего Андрей Николаевич был ими признан за своего (проявилось это в том, что его стали материть наравне со своими).

Один из последних длинных разговоров с Андреем Николаевичем — о будущем человечества. Андрей Николаевич всегда с сомнением относился к перечню бывших редакторов на обложке «*Mathematische Annalen*».

«Как будет выглядеть обложка через 500 лет?» — спрашивал он Гильберта. Более того, он сомневался в возможности существования нашей культуры столь долгое время, прежде всего вследствие демографической катастрофы, предсказанной Мальтусом. Андрей Николаевич мечтал о новом устройстве общества, в котором богатство духовной жизни победит инстинкты. Как ни странны и наивны эти идеи, трудно всерьез с ними спорить: человечество, скорее, опоздало прислушаться к предупреждению мыслителей, и Андрей Николаевич считал своим долгом о нем напоминать в конце своей долгой и счастливой, несмотря ни на что, жизни.



## Для чего мы изучаем математику?

Что об этом думают сами математики

Для чего надо изучать математику? В 1267 году на этот вопрос уже ответил английский философ Роджер Бэкон: «Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества». Собственно, на этом можно было бы и закончить лекцию, но люди думают, что, может быть, что-то изменилось за семь веков...

Послушаем более современное свидетельство — один из создателей квантовой механики, Поль Дирак, утверждает, что при построении физической теории «следует не доверять всем физическим концепциям». А чему же доверять? «Доверять математической схеме, даже если она, на первый взгляд, не связана с физикой». Действительно, все чисто физические концепции начала века физикой отброшены, а математические модели, взятые физиками на вооружение, постепенно обретают физическое содержание. И в этом проявилась устойчивость математики.

Итак, математическое моделирование — продуктивный метод познания в естествознании. Мы подойдем к математическим моделям с другой стороны, рассматривая проблемы математического образования.

В нашем математическом образовании (и среднем, и высшем) мы идем в фарватере европейской системы, основанной на «бурбакизации» математики. Группа молодых французских математиков, выступавшая под псевдонимом Никола Бурбаки, начиная с 1939 года опубликовала несколько книг, в которых формально (т.е. с помощью аксиоматического метода) излагались основные разделы современной математики на основе теории множеств.

Формализация математики приводит и к определенной формализации ее преподавания. В этом и проявляются издержки «бурбакизации» математического образования. Характерный пример. Ученикам второго класса во французской школе задают вопрос:

— Сколько будет два плюс три?

Ответ:

— Так как сложение коммутативно, то будет три плюс два.

Замечательный ответ! Он совершенно правильный, но ученику и в голову не приходит сложить эти два числа, потому что при обучении упор делается на свойства операций.

В Европе уже осознали недостатки такого подхода к образованию, и начался откат от «бурбакизации».

В нашей стране в последние годы происходит американизация математического образования. В ее основе лежит принцип: учить тому, что нужно для практики. А если кто-то считает, что ему математика не нужна, то он может не изучать ее совсем. В старших классах американских колледжей курс математики факультативен: третья часть старшеклассников, например, не изучает алгебру. К чему это приводит, показывает следующий пример. В тесте для 14-летних американских школьников предлагалось оценить (не вычислить, а лишь оценить), что произойдет с числом 120, если от него взять 80%. И предлагалось три варианта ответа: увеличилось; осталось прежним; уменьшилось. Крестики напротив правильного ответа поставили примерно 30% опрошенных. Иными словами, школьники ставили крестики наудачу. Вывод: никто ничего не знает.

Вторая особенность американского подхода к преподаванию математики — его компьютеризация. Само по себе увлечение компьютерами не способствует развитию мышления. Вот еще пример из американского теста: в классе 26 учеников. С ними нужно провести экскурсию на автомобилях. В одной машине могут ехать один родитель и 4 школьника. Сколько родителей нужно попросить помочь? Типичный ответ: 65 родителей. Компьютер выдает:  $26 : 4 = 6,5$ . Ну а школьник уже знает, что если в решении должны быть целые числа, то с десятичной запятой надо что-то сделать, например, отбросить.

А вот пример из официального американского экзамена 1992 года для студентов:

Что из нижеследующего больше всего походит на соотношение между углом и градусом:

- а) время и час,
- б) молоко и кварта,
- в) площадь и квадратный дюйм (и т.д.).

Ответ: площадь и квадратный дюйм, так как градус — минимальная единица угла, а квадратный дюйм — площади, в то время как час делится еще и на минуты.

Составители этой задачи явно обучены по американской системе. Боюсь, что и мы придем к этому уровню<sup>1</sup>.

Можно только удивляться, что в США так много замечательных математиков и физиков (правда, многие из них иммигранты; лучшие студенты в американских университетах сегодня — китайцы).

Сейчас наше математическое образование медленно поворачивается от европейской системы к американской. Как всегда, мы опаздываем, отстаем от Европы лет на 30, и надо быть готовыми к тому, чтобы через 30 лет спасти ситуацию и выходить из этого тупика, в который нас приведет американизация образования с ее прагматичностью, факультативностью, повальной компьютеризацией.

Наше традиционное отечественное преподавание математики имело более высокий уровень и базировалось на культуре арифметических задач. Еще два десятка лет назад в семьях сохранялись старинные «купеческие» задачи. Теперь это утрачено. Алгебраизация последней реформы преподавания математики превращает школьников в автоматы. А именно арифметический подход демонстрирует содержательность математики, которой мы учим.

Рассмотрим, например, задачи:

1. Имеется 3 яблока, 1 взяли. Сколько осталось?
2. Сколько нужно сделать распилов, чтобы бревно распалось на 3 части?
3. У меня сестер на 3 больше, чем братьев. На сколько в нашей семье сестер больше, чем братьев?

С точки зрения арифметики это все разные задачи — у них разное содержание. Интеллектуальные усилия, нужные для решения этих задач, совершенно разные, хотя алгебраическая модель одна:  $3 - 1 = 2$ .

В математике прежде всего поражает удивительная универсальность ее моделей и их непостижимая эффективность в приложениях.

Вспомним В. В. Маяковского: «Человек, впервые сформулировавший, что «два и два четыре», — великий математик, если даже он получил эту истину из складывания двух окурков с двумя окурками. Все

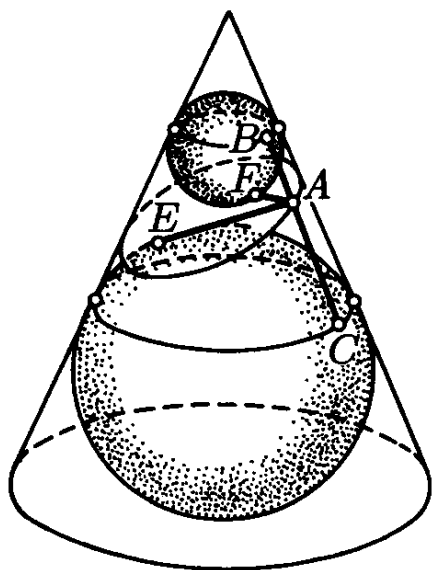
<sup>1</sup> Нью-йоркский профессор Джо Бирман объяснил мне, что для него как американца «правильное» решение этой задачи совершенно очевидно. «Дело в том, — сказал он, — что я точно представляю себе степень идиотизма составителей этих задач».

дальнейшие люди, хотя бы они складывали неизмеримо бóльшие вещи, например, паровоз с паровозом, — не математики».

Считать паровозы — это и есть американский путь математического образования. Это гибель. Пример с развитием физики показывает, что «паровозная» математика в начале нашего века оказалась хуже «окурочной»: прикладная математика не успевала за физикой, а в теоретической нашлось все, что необходимо было для дальнейшего развития физики. «Паровозная» математика не может успеть за практикой: пока мы учим считать на счетах, появляются компьютеры. Надо учить думать, а не тому, как нажимать на кнопки.

Правда, математическая модель не всегда дает немедленную практическую отдачу. Бывает, что она окажется полезной только через две тысячи лет.

Примером тому — конические сечения, они были открыты в Древней Греции и описаны Аполлонием Пергским (ок. 260 — ок. 170 гг. до н.э.) в 8-томном трактате. А понадобилась эта теория Иоганну



$$|FA| + |AE| = |BA| + |AC|$$

Рис. 1. Эллипс с фокусами  $F$  и  $E$  и сферы Данделена

Кеплеру в XVI веке, когда он выводил законы движения планет. Его учитель Тихо Браге в обсерватории «Ураниборг» в течение 20 лет скрупулезно измерял положения планет Солнечной системы. После смерти учителя Кеплер взялся за математическую обработку результатов этих наблюдений и обнаружил, что, например, траектория движения Марса — эллипс.

Эллипс — это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна. Тот факт, что сечение конуса плоскостью, достаточно сильно наклоненной к его оси, является эллипсом, — замечательная геометрическая теорема, к сожалению, не доказываемая в школе. Доказательство ее очень просто

(см. рис. 1). Вписанные в конус и касающиеся плоскости (в фокусах  $E$  и  $F$  эллипса) сферы, на рассмотрении которых основано доказательство, называются сферами Данделена.



Чтобы понять рассуждения Кеплера, нам потребуются некоторые простые факты из геометрии эллипса. Длина большой полуоси эллипса  $OK$  (рис. 2), обычно обозначаемая через  $a$ , равна длине гипотенузы  $EL$  треугольника с катетами  $b = |OL|$  (малая полуось) и  $c = |EO|$ . Отношение  $c/a$  характеризует форму эллипса и называется эксцентриситетом, так как пропорционально смещению фокусов от центра эллипса. Эксцентриситет обычно обозначается буквой  $e$ .

По теореме Пифагора отношение длин полуосей эллипса есть  $b/a = \sqrt{1 - e^2} \approx 1 - e^2/2$  при малых  $e$ .

Отсюда видно, что эллипс с малым эксцентриситетом практически неотличим от окружности. Например, если  $e = 0,1$ , то малая ось короче большой всего на  $1/200$ . Для эллипса с длиной большой оси 1 метр малая ось короче большой всего на полсантиметра, так что на глаз отличие такого эллипса от окружности вообще не заметно. Фокусы же смещены от центра на 5 см, что очень заметно.

Формула  $b/a = \sqrt{1 - e^2} \approx 1 - e^2/2$  (означающая, что больший катет вытянутого прямоугольного треугольника практически столь же длинен, как и гипотенуза, и дающая с очень хорошим приближением разность их длин) — один из самых замечательных общематематических фактов (к сожалению, в школе этому не учат).

Например, предположим, что вы возвращаетесь домой по синусоиде. Насколько ваш путь длиннее, чем если бы вы шли прямо (рис. 3)? Первое впечатление (что вдвое), конечно, преувеличивает длину. Все же кажется, что путь по синусоиде длиннее раза в полтора. На самом деле всего примерно на 20%. Причина в том, что большая часть синусоиды слабо наклонена к оси, поэтому соответствующие гипотенузы практически не длиннее катетов.

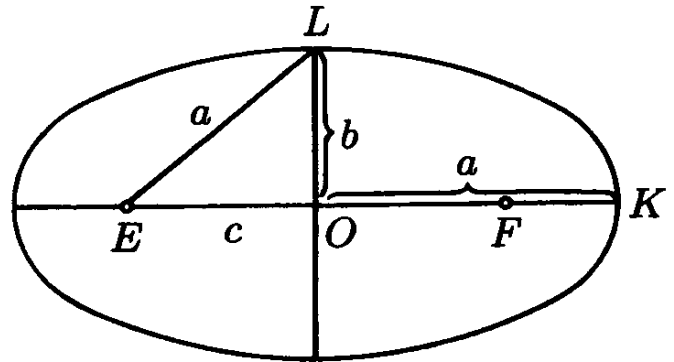


Рис. 2. Фокусы, полуоси и эксцентриситет эллипса

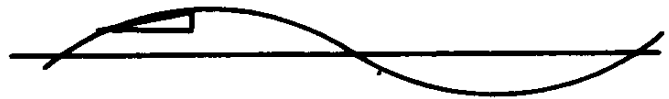


Рис. 3. Насколько синусоида длиннее прямой?

Вот еще одно применение той же формулы. Реактивные струи первых реактивных двигателей, установленные на крыльях самолета вблизи фюзеляжа, представляли опасность для хвостового оперения. Конструкторы, зная и чувствующая обсуждаемую формулу, повернули двигатели на небольшой угол  $\alpha$  (рис. 4).

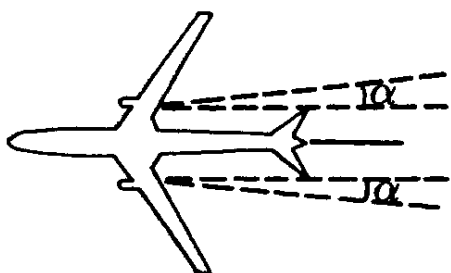


Рис. 4. Как спасти хвостовое оперение

Хвостовое оперение было спасено (отклонение струи пропорционально  $\alpha$ ), а результирующая сила тяги практически не изменилась (потеря  $\approx \alpha^2/2$ , где  $\alpha$  — угол в радианах; для угла в  $3^\circ$  теряется всего порядка  $1/800$  мощности).

Вернемся к Кеплеру. Сначала Кеплер думал, что орбита Марса — окружность. Однако Солнце оказалось не в центре, а сдвинутым примерно на  $1/10$  часть радиуса. Но Кеплер не остановился на этом (уже замечательном)

результате — потому что он знал теорию конических сечений. Кеплер знал, что эллипс с малым эксцентриситетом очень похож на окружность, и проверил, как ведет себя то небольшое отклонение орбиты от окружности, которое еще оставалось. Интересно, что сделать это можно было только благодаря исключительной точности наблюдений Тихо Браге, сделанных невооруженным глазом. В те времена астрономы не очень доверяли телескопам, и еще в конце XVII века приходилось доказывать, что телескопические наблюдения могут достигать столь же большой точности, как наблюдения невооруженным глазом.

Новая физика часто начинается с уточнения последней значащей цифры предыдущей теории — если бы Кеплер удовлетворился своей эксцентрической круговой орбитой или если бы наблюдения Тихо Браге были менее точны, развитие небесной механики (а возможно, и всей теоретической физики) могло бы задержаться — может быть, даже на века.

Орбита Марса оказалась слегка сплюснутой в направлении, перпендикулярном диаметру, на котором лежит Солнце, — примерно на полпроцента, т.е. на  $e^2/2$ . Так Кеплер пришел к мысли об эллиптических орбитах планет.

Если бы теория конических сечений не была заранее разработана математиками, то фундаментальные законы природы не были бы своевременно открыты, не возникла бы современная наука и технология, а

наша цивилизация оставалась бы на средневековом уровне — или, по меньшей мере, пути истории были бы совсем иными.

Кеплер открыл закон движения планет, но тот факт, что они движутся по эллипсам, доказал Исаак Ньютон в своей книге «Математические начала натуральной философии» (1687 г.), которая послужила основой всей современной теоретической физики. Он получил эллиптичность планетных траекторий как следствие закона всемирного тяготения.

Заметим, что до Ньютона этой проблемой занимался его современник Роберт Гук. Он изучал закон движения тела в поле тяготения, считая, что притяжение обратно пропорционально квадрату расстояния. Приблизительно проинтегрировав уравнение движения, Гук нарисовал орбиты и увидел, что они похожи на эллипсы. Назвать их эллипсами ему не позволила научная честность, а доказать эллиптичность он не мог. Поэтому Гук назвал траекторию эллиптоидом и предложил Ньютону доказать, что первый закон Кеплера (планеты движутся по эллипсам) следует из закона обратных квадратов. Ньютон, хорошо знавший древнюю теорию конических сечений, справился с этой задачей при помощи хитроумных элементарно-геометрических построений.

Впоследствии кривые второго порядка стали все чаще появляться в естественно-научных исследованиях. Почему эта модель оказалась столь плодотворной для приложений? Почему, в частности, модель сечения конуса описывает движения планет? Мистика. Загадка. Ответа на этот вопрос нет. Мы верим в силу рациональной науки. Ньютон видел в этом доказательство существования Бога: «Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и по власти могущественного и премудрого существа... Сей управляет всем не как душа мира, а как властитель Вселенной, и по господству своему должен именоваться Господь Бог Вседержитель».

Современные исследователи космоса, проектируя запуск искусственных спутников, тоже используют свойства конических сечений. Таким образом, база современной физики и научно-технической революции закладывалась и классическим произведением Апполония. Тогда как он, исследуя конические сечения, думал лишь о красоте данной математической модели.

Другой пример — история создания ЭВМ. Задолго до появления первых ЭВМ в математике были заготовлены два их основных математических компонента: математическая логика (алгебру логики

разработал Джордж Буль, 1815–1864) и принципиальная схема устройства вычислительной машины. Первую суммирующую машину сконструировал в 1641 году французский математик Блез Паскаль.

Третий пример — разработка волновой механики Э. Шрёдингером. К моменту, когда Шрёдингер обратился к колебательной задаче, уже был известен матричный вариант квантовой механики В. Гейзенберга. Встал вопрос, как получить из теории волн во всем пространстве дискретный, а не непрерывный спектр? Шрёдингеру помог известный немецкий математик Герман Вейль. Без его результатов по спектральной теории на неограниченном интервале мы бы никогда не узнали о знаменитом уравнении Шрёдингера. Опять та же история: нашелся математик, у которого уже была готова теория — граничные условия на бесконечности, — оставалось ее использовать.

Следующий пример — римановы поверхности. Их ввел в рассмотрение немецкий математик Бернхард Риман в середине прошлого века. Это поверхности, которые получаются в результате соответствующего разрезания и склеивания нескольких (или даже бесконечного числа) плоскостей комплексного переменного. Топологически такая поверхность может быть сферой, сферой с несколькими ручками и т.д. (рис. 5). Учение о римановых поверхностях разработано в теории функций комплексного переменного. Затем они неожиданно оказались полезными в совершенно других задачах. Например, на римановых поверхностях получили простую геометрическую трактовку эллиптические интегралы.

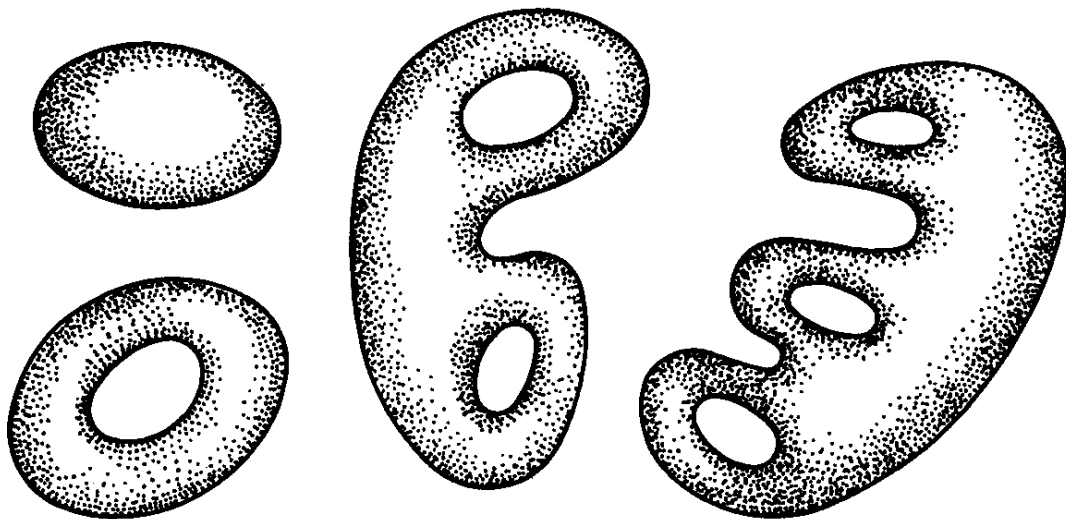


Рис. 5. Римановы поверхности

Рассмотрим, например, движение частицы по прямой в поле с потенциальной энергией  $U$ , определяемое уравнением Ньютона  $x'' = -dU/dx$ .

Предположим, что  $U$  — многочлен четвертой степени с двумя несимметричными потенциальными ямами (рис. 6). Движение частицы в каждой из ям периодически. В какой из ям период колебаний (при данном значении полной энергии  $E$ ) больше: в более глубокой или более мелкой? Из теории римановых поверхностей следует, что оба этих периода точно равны.

Закон сохранения энергии

$$v^2/2 + U(x) = E \quad (v = dx/dt)$$

определяет на «фазовой плоскости»  $(x, v)$  кривую, состоящую из двух компонент. Период дается формулой

$$T = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}$$

(ибо  $dt = dx/v = dx/\sqrt{2(E - U)}$ ).

Если  $U$  — многочлен 4-й степени, то этот интеграл эллиптический, он не берется в элементарных функциях. Причина — топологическая. Уравнение закона сохранения энергии определяет «кривую» на «плоскости» двух комплексных переменных  $(x, v)$  (эта плоскость имеет вещественную размерность 4). Эта «кривая» (пополненная парой бесконечно удаленных точек) и есть риманова поверхность нашей задачи. Топологически эта поверхность представляет собой тор (рис. 7). Этим и объясняется несводимость эллиптических интегралов к элементарным функциям (чтобы интегралы брались, риманова поверхность должна иметь топологию сферы).

Вещественные точки нашей римановой поверхности — это в точности две замкнутые траектории на вещественной фазовой плоскости  $(x, v)$ , соответствующие периодическим движениям частицы с фиксированной полной энергией  $E$  в обеих ямах и изображенные на рис. 6 внизу. На поверхности тора они расположены как два меридиана (рис. 7).

Равенство периодов колебаний в обеих ямах следует из того, что суммарный поток несжимаемой жидкости, текущей по поверхности тора, через оба края цилиндра, ограниченного на торе парой его меридианов, равен нулю.

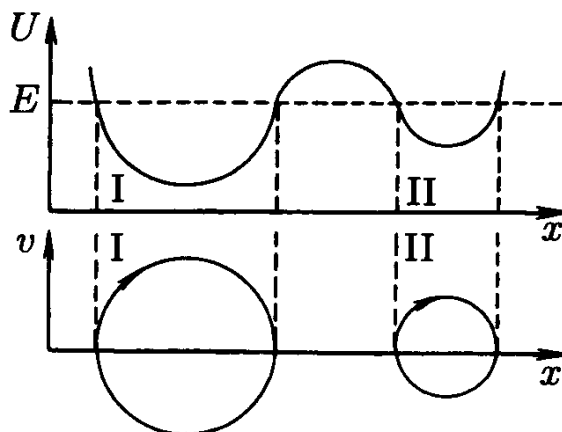


Рис. 6. Потенциальные ямы и фазовая плоскость

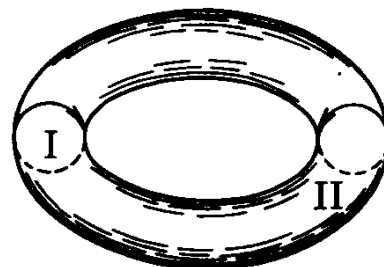


Рис. 7. Риманова поверхность эллиптических интегралов

Карл Густав Якоби доказал, что римановы поверхности «управляют» еще двумя задачами:

1) определение числа способов, которыми заданное число можно представить в виде суммы четырех квадратов

$$N = x^2 + y^2 + z^2 + u^2;$$

2) исследование колебаний маятника, которое приводит к решению дифференциального уравнения  $x'' = -\sin x$ .

В качестве пятого примера рассмотрим так называемый треугольник Бернулли–Эйлера:

				1					
				1	0				
			0	1	1				
		2	2	1	0				
	0	2	4	5	5				
	16	16	14	10	5	0			
	0	16	32	46	56	61	61		
272	272	256	224	178	122	61	0		
.....									

Он заполняется так. В нулевой строке пишется «1». Каждая нечетная строка (1-я, 3-я, ...) заполняется справа: в каждой позиции стоит сумма всех чисел предыдущей строки, стоящих правее данной позиции. Каждая четная строка заполняется аналогично, но слева.

Чудо, заключенное в этом треугольнике, открыто 100 лет назад. Ключ к нему дает «простая» (математики часто скрывают, что все обстоит очень просто) теорема:

$$\sec t + \operatorname{tg} t = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!}.$$

Коэффициенты  $k_n$  в этом равенстве стоят на «склонах» (боковых сторонах) треугольника Бернулли–Эйлера.

Отсюда по левому «склону» легко получить разложение в степенной ряд функции  $\operatorname{tg} x$  (вспомните, что она нечетная, и в разложении будут

только нечетные члены):

$$a_1 = \frac{k_1}{1!} = 1, \quad a_3 = \frac{k_3}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{k_5}{5!} = \frac{16}{5!} = \frac{2}{15}, \quad \dots,$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

Аналогично по правому «склону» получается разложение в ряд секанса.

Треугольник Бернулли–Эйлера доставляет топологическую классификацию вещественных многочленов

$$x^{n+1} + a_1x^n + \dots + a_{n+1},$$

все  $n$  критических значений которых вещественны и различны.

График такого многочлена имеет вид змеи, и я буду называть его змеей. Все возможные типы змей с  $n \leq 4$  указаны на рис. 8.

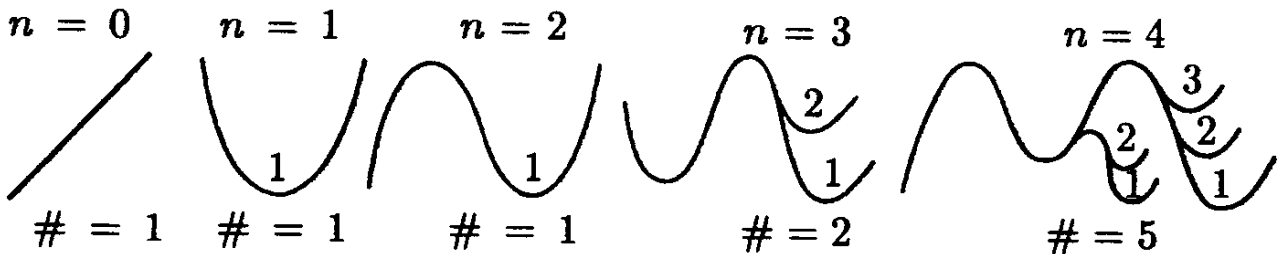


Рис. 8. Классификация змей

Мы относим две змеи к одному типу, если они переводятся друг в друга гладкими заменами независимых и зависимых переменных, сохраняющими ориентации (т.е. имеющими положительные производные).

Рассмотрим, например, змеи многочленов степени 4 ( $n = 3$ ). Три критические точки обязательно идут в порядке минимум — максимум — минимум. Топологический тип змеи определяется тем, будет ли последний минимум выше или ниже первого. Поэтому число типов змей с  $n = 3$  равно 2.

Для змей с  $n = 4$  второй максимум может быть ниже или выше первого. В первом случае второй минимум может занимать два положения (выше или ниже первого минимума, но всегда ниже обоих максимумов), а во втором — три. Итого пять типов.

Если у вас хватит терпения нарисовать все змеи с  $n = 5$ , то вы убедитесь, что их 16, а при  $n = 6$  — 61 (это тоже еще поддается рисованию). Появление в какой-нибудь классификации числа Эйлера 61 — обычно признак того, что рядом и остальные.

Будем теперь классифицировать змей по хвостам, т.е. по самым правым критическим точкам. Занумеруем все  $n$  критических значений (значения многочленов в точках локальных максимумов и минимумов) в порядке возрастания (т.е. снизу вверх) числами от 1 до  $n$ . Этот номер критической точки будем называть ее высотой.

Высоты хвостов змей указаны на рис. 8. Например, пять змей с  $n = 4$  распределяются по высотам хвостов так:

высота хвоста	1	2	3	4
число змей	2	2	1	0

Сумма  $2 + 2 + 1 + 0 = 5$ , естественно, равна полному числу змей. Сравнивая эти числа змей с разными высотами хвостов с числами треугольника Бернулли–Эйлера, видим, что они (с точностью до порядка) совпадают.

После того как этот — достаточно неожиданный — факт замечен (для чего обязательно нужна экспериментальная работа с рисованием змей), уже нетрудно доказать, что распределение змей по высотам хвостов удовлетворяет рекуррентному соотношению, определяющему треугольник Бернулли–Эйлера. Сама формула

$$K(t) = \sec t + \operatorname{tg} t, \quad \text{где} \quad K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!},$$

доказывается так.

Рассмотрим змею с  $n + 1$  критической точкой. Выберем самый высокий локальный максимум и потянем его вверх до бесконечности.

В результате змея распадется на две более короткие змеи, причем суммарное число критических точек уменьшится на 1. Аналогично можно потянуть до  $-\infty$  самый низкий локальный минимум. Отсюда получается рекуррентное соотношение

$$2k_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_n^i k_i k_{n-i}.$$

Здесь произведение  $k_i k_{n-i}$  пересчитывает всевозможные пары обрывков, множитель  $C_n^i$  учитывает различие взаимных расположений критических значений на обоих обрывках, а коэффициент 2 учитывает использование и максимума, и минимума.

В терминах функций  $K$  наше соотношение записывается в виде дифференциального уравнения

$$2 dK/dt = 1 + K^2,$$

откуда  $K = \sec t + \operatorname{tg} t$ , поскольку  $K(0) = k_0 = 1$ .

Последний пример. Рассмотрим модель изменения численности некоторой популяции животных (например, количество рыбы в пруду или



океане). В простейшем случае ситуация описывается моделью  $x' = kx$  ( $x$  — численность популяции,  $k$  — коэффициент пропорциональности). Решением этого дифференциального уравнения является экспонента.

Однако на практике с ростом  $x$  ухудшаются условия жизни популяции, и коэффициент  $k$  уменьшается. Например, при  $k = a - bx$  получаем так называемое логистическое уравнение. В случае  $a = b = 1$  его решения (рис. 9) ведут к стабильному уровню «населения»  $x = 1$ .

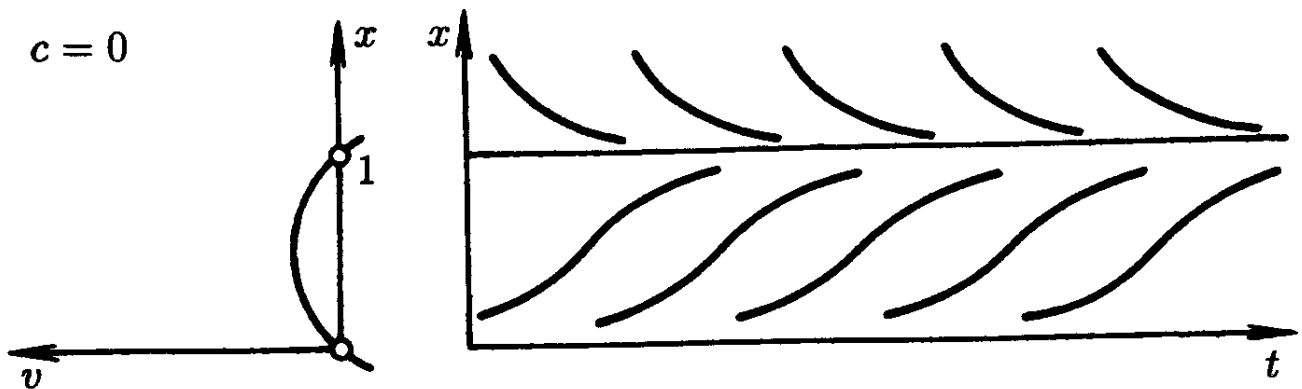


Рис. 9. Стабилизация населения

Если вдобавок ввести некоторую квоту  $c$  на отлов части популяции, то уравнение усложнится незначительно:  $x' = x - x^2 - c$ .

Это простейшая модель рыболовства. При уровне квоты  $c < 1/4$  снова устанавливается устойчивое равновесие (рис. 10), при  $c > 1/4$  получим быстрый процесс вымирания (рис. 11).

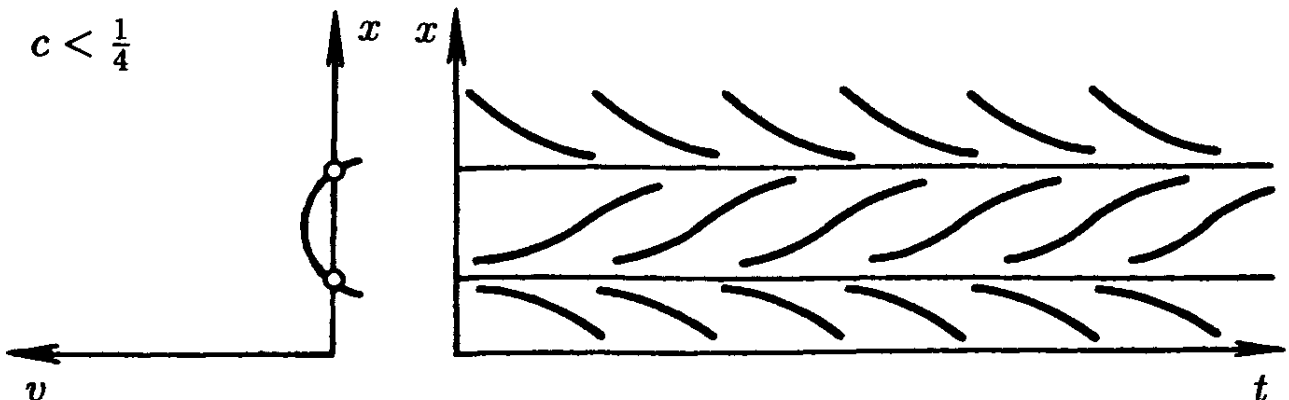


Рис. 10. Модель рыболовства

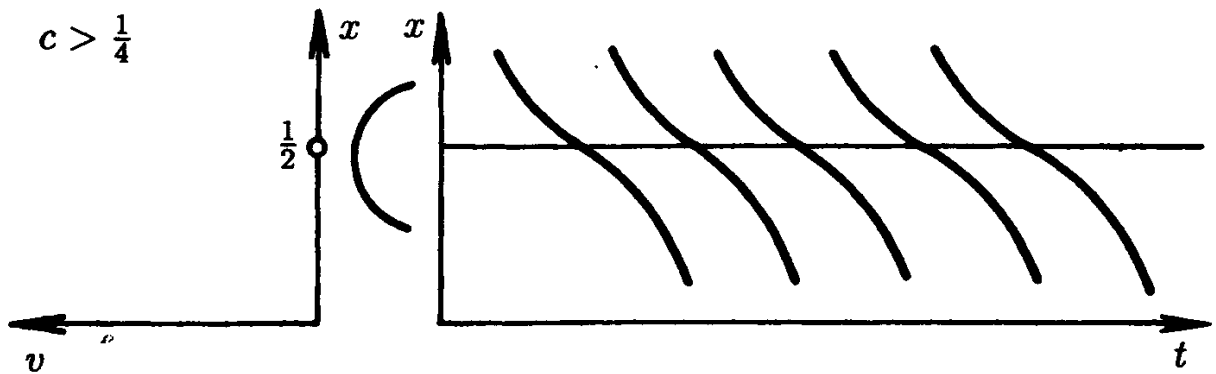


Рис. 11. Перелов

При  $c = 1/4$  решения уравнения приводят к установившемуся режиму на уровне  $1/2$  от исходной популяции (рис. 12). Однако этот режим неустойчив: малые случайные колебания ведут к катастрофе — уничтожению популяции.

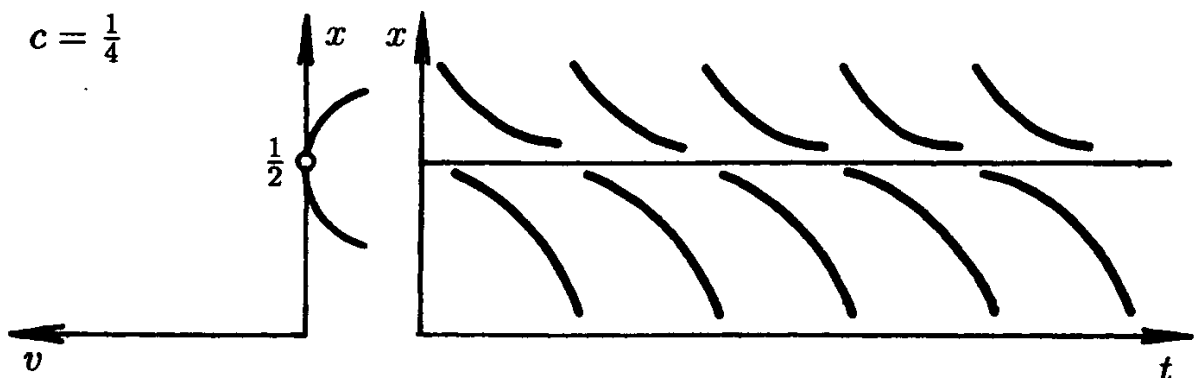


Рис. 12. Оптимальный план уничтожает популяцию

Как достичь оптимального вылова при сохранении популяции на некотором устойчивом уровне? Ответ: не назначать жесткого плана вылова, а вести его с учетом обратной связи, т.е. ввести квоту, пропорциональную фактически имеющимся ресурсам. В модели с обратной связью  $x' = x - x^2 - kx$  оптимальное значение коэффициента  $k = 1/2$ . При таком выборе  $k$  устанавливается средний многолетний вылов  $kx_0 = 1/4$  (рис. 13). Это такой же вылов, как при максимально жестком плане отлова.

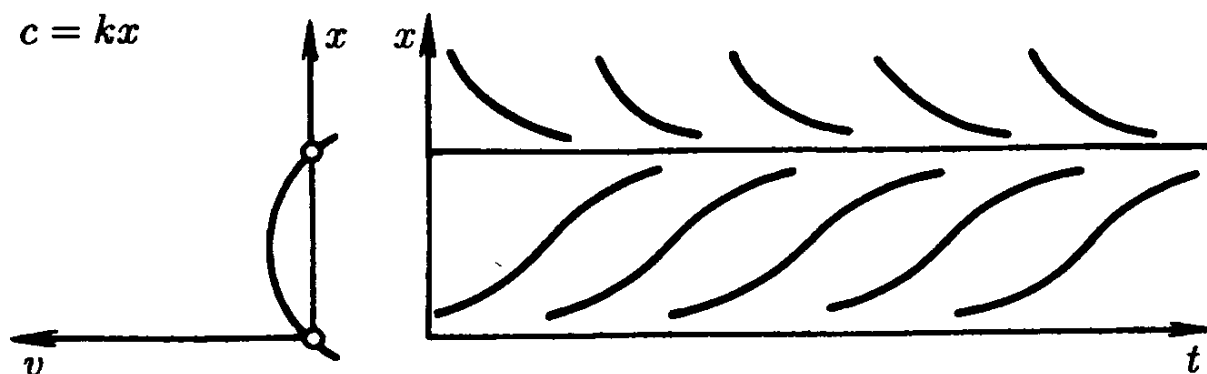


Рис. 13. Обратная связь стабилизирует систему

Большая производительность в этом случае невозможна. Но при жестком плане система теряет устойчивость и гарантированно самоуничтожается, а обратная связь стабилизирует ее, и небольшие изменения коэффициента  $k$  не ведут к катастрофе.

Было бы совсем неплохо, если бы лица, принимающие ответственные решения, были ознакомлены с подобными моделями и другими правилами выбора стратегических социальных решений.

Более простые математические соображения — тот факт, что законы природы описываются дифференциальными уравнениями, — позволяют понять некоторые кажущиеся парадоксальными явления в нашей жизни.

В течение нескольких десятилетий состояние нашей экономики вызвало тревогу специалистов: милитаризация, монополия и общая некомпетентность руководства привели к тому, что сделалась устойчиво отрицательной вторая производная (стали систематически замедляться темпы развития).

Не понимающего математику это не слишком пугало, так как первая производная все же была положительна (благосостояние росло). Но математики знают, что постоянно отрицательная производная (даже высокого порядка) в конце концов приведет к отрицательности первой производной, т.е. к падению производства и благосостояния общества, причем этот процесс ухудшения, когда он делается заметным, будет ускоряться. Вследствие инерционности системы мгновенно изменить положение в такое время нельзя уже никакими средствами, так как всякого рода изменения влияют лишь на знак старшей производной (для нашей перестройки — третьей или даже четвертой). Таким

образом, наблюдаемая экономическая деградация вызвана не столько неправильными новыми решениями, сколько давними ошибками, сделанными еще во время роста производства. К сожалению, эти элементарные математические факты очень трудно объяснить ограбленному народу, склонному приписывать все ухудшение реформам. Любые реформы, конечно, должны приводить к ухудшению, даже если они самые правильные.

Планы обычно составлялись так, чтобы оптимизировать продукцию на 20 лет вперед («на наш век хватит»). Математику ясно, что оптимальное планирование этого рода должно привести к полному уничтожению всех ресурсов к концу срока (иначе оставшиеся ресурсы можно было бы использовать, и, значит, план не был бы оптимальным). К счастью, планы эти «корректировались» и не исполнялись. Но все же основные тенденции выдерживались, и мы к началу перестройки, грубо говоря, съели все, что у нас было.

Попытки составить детальные «программы» экономической реформы по дням подобны попыткам планирования всей экономики и аналогичны попытке составить программу для водителя автомобиля, который должен доехать от Москвы до Санкт-Петербурга (на такой-то минуте поверни направо, на такой-то налево). Успех может быть достигнут только за счет обратной связи. Т.е. нужна не программа (траектория), а, говоря математическими терминами, векторное поле в пространстве состояний системы — механизм принятия решений в зависимости от реально достигнутого состояния, а не от календарной даты.

Кое-что из сказанного следует иметь в виду и при реформировании системы образования.

Наши примеры показывают, что «нет ничего практичнее хорошей теории». Нужно, чтобы работники образования не гнались за сиюминутной практической потребностью, а всегда видели перспективные цели общества.

## Выживет ли российская математика?

Катастрофа большевистского переворота парадоксальным образом привела к расцвету математики в России. Можно надеяться, что потрясения нашего времени после маленькой гражданской атомной войны или установления диктатуры нацистского или фундаменталистского типа породят такое же чудо. У нас еще хватает прекрасных студентов, а математические средние школы еще снабжают университеты блестящими выпускниками. Однако опасность полного исчерпания этих ресурсов весьма реальна, если помощь не придет вовремя.

Математики эмигрируют из России (и, в целом, из стран бывшего СССР) по двум основным причинам. Это катастрофическая экономическая ситуация и страх перед наступлением новой эры тоталитаризма. Экономическая ситуация ежедневно меняется от плохого к худшему. Весной 1992 года рыночная стоимость доллара достигала 125 рублей, к сентябрю она выросла до 350 рублей. Скорость роста инфляции, похоже, превышает экспоненциальную. Исчисленная в долларах или в покупательной способности зарплата профессора остается более или менее устойчивой и составляет от десяти до тридцати долларов в месяц. Студенческая стипендия меньше в пять-десять раз.

Стоимость жилья, еды, транспорта, другие необходимые затраты в СССР традиционно были очень низки, и это позволяло выжить. На месячную студенческую стипендию можно было, например, купить 200 буханок хлеба. В 1992 году цены (в долларах) стали подтягиваться к западным. Прошлым летом, по-моему, на месячную студенческую стипендию еще можно было купить 50 буханок хлеба. Однако покупательная способность зарплаты при нынешней величине инфляции (достигающей иногда 10% в день) постоянно падает.

Российское правительство более не имеет возможности поддерживать науку. Традиционно наука получала поддержку благодаря своим военным приложениям. Более трех четвертей советской экономики были (и продолжают оставаться) милитаризованными. Эта диспропорция разрушила страну.

Согласно официальной российской статистике средняя продолжительность жизни в нашей стране (шестьдесят один – шестьдесят два года) лет на десять меньше продолжительности жизни в западных странах (и на несколько лет меньше, чем в СССР двадцать лет назад). Средняя продолжительность жизни в некоторых городах равна тридцати пяти годам. Небольшое людоедское вычисление показывает, что при данной величине населения СССР снижение продолжительности жизни на десять лет уменьшает население так же, как и одновременная казнь восьмидесяти миллионов граждан. (Лемма: расстрел снижает продолжительность жизни в среднем вдвое.)

В нынешней экономической ситуации резкое снижение вложений в науку — естественное (хотя и чрезвычайно некомпетентное) поведение. Огромная утечка мозгов — непосредственный результат экономической разрухи в сочетании с возможностью выезда. Утечка мозгов вызывает беспокойство в равной мере российских администраторов науки и их западных коллег. Это одна из точек, где сходятся интересы КГБ и ЦРУ. Плохие отношения между нашими странами жизненно необходимы обеим этим организациям, и обе они достаточно сильны, чтобы возродить холодную войну. Восстановление практики выездных виз для российских ученых — ясная примета наступающих перемен. Мы и сейчас должны сдавать «заграничные» паспорта при возвращении из-за границы. Система не изменилась, она подобна водопроводному крану: он открыт и вода течет, но его можно в любой момент перекрыть.

Страх перед возвращением тоталитаризма нацистского типа — еще одна причина для эмиграции, вероятно, не уступающая по важности экономической разрухе. В течение семидесяти пяти лет нашей страной управляли тайные террористические группы. Их названия регулярно менялись, и я даже не знаю, как называется такая группа в настоящий момент (партия, комиссия, управление, комиссариат, комитет, министерство, политбюро, президиум, совет, ...). Во всяком случае, некомпетентность профессиональных убийц во всех прочих областях деятельности совершенно естественна.

В течение многих лет рассадником террора была Коммунистическая партия, но разрушенная экономика не выдержала двадцати миллионов воров. Продажные прислужники партии были разогнаны. Ее официальное правление закончилось. Однако собственность по-прежнему находится в тех же преступных руках, и всевластная номенклатура претерпела лишь незначительные персональные перемены.

Кабинет парткома на механико-математическом факультете МГУ был передан вновь созданной математической кафедре. Заведующий этой кафедрой не менял своего места: именно он несет личную ответственность (в течение, по-моему, последних двадцати лет) за отбор математиков, достойных разрешений от партии и КГБ для поездок за границу.

Университет избрал нового ректора. Предыдущий ректор был знаменит своим анти-эйнштейнианством. Новый — бывший до этого проректором — математик, претворявший идеи предыдущего в жизнь как в науке, так и в управлении университетом. Этот коммунист достиг поста университетского серого кардинала по комсомольским и партийным каналам. Он создал в университете большое количество «административных советов». Введенные им туда люди в конце концов «демократически» избрали его ректором. Он несет ответственность за создание системы «газовых камер» на вступительных экзаменах в университет. (Насколько мне известно, существование этой системы еще не признано университетскими властями и не подверглось осуждению ни одним российским официальным органом.) Он заменил старое поколение профессоров коммунистами, и он отвечает за деградацию научного уровня преподавательского состава факультета.

Процент сотрудников КГБ в советских университетах и институтах Академии наук, вероятно, такой же, как и в восточногерманских (один сексот на три-десять профессоров). Некоторые из членов партии и сотрудников КГБ — прекрасные люди и настоящие ученые. Кстати, коммунисты — в первых рядах эмигрантов: они лучше осведомлены о глубине экономической разрухи, и они активнее рядовых рабов.

Член-корреспондент Академии наук СССР Сифоров в течение многих лет возглавлял Институт проблем передачи информации. Его поддержка перспективных математических исследований неопределима. Достаточно упомянуть среди сотрудников его института имена Добрушина, Маргулиса и Концевича. В своих воспоминаниях, опубликованных недавно в Москве, Сифоров (среди прочих интересных тем) описывает свою работу сексотом КГБ (которую он вел под другим именем) в одном ленинградском исследовательском институте. В его обязанности входило доносить на своего учителя, адмирала академика А. И. Берга. Когда в конце концов Берга арестовали и отправили в лагерь, Сифоров поддерживал его семью и спас своего учителя от голода, передавая ему продукты в тюрьму. Когда Берга освободили (и он стал ведущей фигу-

рой в области морской радиосвязи и радарной технологии), он вернулся из ГУЛАГа в дом своего ученика. Ему было известно о роли Сифорова. Они остались близкими друзьями.

К добру ли, к худу ли, новая администрация состоит в основном из коммунистов и сотрудников КГБ (если только они не приехали из Свердловска). У них достаточно возможностей, которые они не используют, принести большой вред.

Недавно я получил стопку (около метра высотой) писем, книг и журналов, посланных мне из-за границы десять или двадцать лет тому назад. Эта опасная корреспонденция (например, биография Эйнштейна, написанная А. Пайсом, 1982) была аккуратно сохранена для меня в спецхране Московского университета. То, что по крайней мере один из общественных институтов работает столь же эффективно, как и в предыдущие семьдесят пять лет, позволяет смотреть в будущее с некоторым оптимизмом.

Я оставляю психиатрам и следователям изучение писаний наших математических Менгеле, требующих установления административной неполноправности «этнических инородцев» в России. За этим стоит идея о том, что иррациональная и таинственная русская душа (столь превосходящая все остальные, как знает любой читатель Достоевского) сможет тогда чудесным образом спасти Россию (а с ней и все человечество) от ужасов современной технологической цивилизации. Они правы, говоря, что они не требуют физического истребления инородцев, и что человек, не знающий русского, не в состоянии оценить невероятную схожесть их теорий с нацистской пропагандой 1920-х. Однако российские математики не могли не воспринять эти писания, что привело к росту панической эмиграции. Радиовещание «Памяти» на всю Европу не могло бы осуществиться в современных российских условиях без технической поддержки государства.

Современные бедствия по заслугам вознаградили мое поколение соотечественников: мы слишком долго поддерживали рабство и потратили свои жизни, служа заведомо преступному государству. На младших поколениях меньше вины, и трудно порицать их за нежелание служить нераскаявшимся преступникам.

Что можно сделать, чтобы помочь сохранению российской математической школы? (Ситуация в России знакома мне более всего, однако другие государства бывшего СССР испытывают те же проблемы; все фашистские правительства дискриминируют «этнических инород-



цев», что за пределами России в большинстве случаев означает русских.) Я приведу ниже несколько возможных направлений деятельности (не забывая про то, что изменение ситуации может обесмыслить их завтра же).

1. 15 сентября 1992 года начался третий семестр работы Математического Колледжа Независимого Московского университета. У истоков организации Колледжа стоит группа ученых (В. И. Арнольд, А. А. Бейлинсон, Р. Л. Добрушин, А. А. Кириллов, С. П. Новиков, А. Н. Рудаков, Я. Г. Синай, В. М. Тихомиров, Л. Д. Фаддеев, А. Г. Хованский и М. А. Шубин). Он работает в тесном контакте с Высшим Колледжем Математической Физики, основанным М. К. Поливановым и возглавляемым в настоящее время О. И. Завьяловым. Математический Колледж недавно избрал деканом А. Н. Рудакова.

В текущем академическом году по приглашению Научного Совета в Колледже преподают шесть профессоров (А. А. Кириллов, А. Н. Рудаков, В. М. Тихомиров, Э. Б. Винберг, А. Л. Городенцев и А. Б. Соинский), двадцать два преподавателя (среди которых В. А. Васильев, С. М. Гусейн-Заде, С. К. Ландо, Ю. М. Неретин, Б. Л. Фейгин и Д. В. Алексеевский) и пятнадцать ассистентов.

Программы курсов были составлены методическим советом (Арнольд, Кириллов и Рудаков). Сейчас в Колледже шестьдесят один студент. Они поступили учиться, успешно преодолев трудные вступительные экзамены. Сорок восемь человек из них одновременно учатся в Московском университете. Независимый университет в настоящее время проходит процедуру регистрации в соответствии с новым Российским Законом об образовании, вступившим в силу 30 июля 1992 года. Как следствие, в университете отсутствует военное обучение, которое студенты должны проходить в других местах. Математический Колледж арендует помещение Лицея «Вторая школа» неподалеку от Московского университета.

Потребности Колледжа в настоящее время обеспечиваются, если можно так выразиться, беззаветным энтузиазмом людей, с ним связанных. Профессора Макферсон, Хованский и Бейлинсон внесли \$2.000. Приблизительная оценка потребностей Колледжа составляет \$25.000 в год, хотя, возможно, эта цифра и преуменьшена раза в два.

Читатель может получить дополнительную информацию от Координационного Совета (Н. Н. Константинов, [nsknkonst@glas.apc.org](mailto:nsknkonst@glas.apc.org)) или от декана (А. Н. Рудаков, [rudakov@systud.msk.su](mailto:rudakov@systud.msk.su)).

2. C<sub>yr</sub>TUG (Cyrillic T<sub>E</sub>X Users Group, Группа пользователей кириллического T<sub>E</sub>X'a) зародилась в мае 1991 года. Теперь в ней около пятидесяти индивидуальных и двадцати коллективных членов, включая механико-математический факультет Московского университета, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе (Санкт-Петербург), Математический институт Сибирского отделения Академии наук в Новосибирске, издательства «Наука» и «Мир» (Москва). Группа организует лекции, семинары, рабочие встречи и публикует учебники и иные материалы в некоммерческих целях.

Представляется целесообразным помочь группе в публикации и распространении в России некоторых американских изданий (руководств по T<sub>E</sub>X'у и математических монографий). Чрезвычайно полезной оказалась бы передача подержанных компьютеров. Пользу могли бы принести финансовая поддержка и обмен экспертами (в области T<sub>E</sub>X'a и математики).

Дополнительную информацию можно получить у Президента C<sub>yr</sub>TUG'a И. В. Романовского (Санкт-Петербургский университет, [jvr@math.lgu.spb.su](mailto:jvr@math.lgu.spb.su)) или у Исполнительного директора И. Маховой ([irina@mir.msk.su](mailto:irina@mir.msk.su)), C<sub>yr</sub>TUG, 129820 Москва, 1-й Рижский пер. 2.

3. Недавний скачок цен (в 100 и более раз) на типографские услуги прервал давнюю традицию публикации русских переводов лучших математических книг издательствами «Мир» и «Наука». Вы можете помочь переводу своих (или чьих-либо еще) книг, оплатив покупку пятидесяти экземпляров переведенного издания по цене \$20 за экземпляр (очень дешево). Заинтересовавшихся прошу обращаться к А. С. Попову, издательство «Мир», 129820 Москва, 1-й Рижский пер. 2 ([asp@mir.msk.su](mailto:asp@mir.msk.su)).

Ведется также работа над проектом переиздания классических серий математических книг для старшеклассников (*Библиотека математического кружка, Популярные лекции по математике, Библиотечка физико-математической школы, Библиотечка «Квант»*). Эти серии способны оказать неоценимую помощь новым поколениям российских математиков — в них встречаются настоящие шедевры. Но для того, чтобы напечатать 10000 экземпляров книги объемом в 400 страниц, требуется \$10.000.

Для отбора книг, предназначенных к переизданию, в издательстве «Мир» создан особый редакционный совет. С конкретными предложениями можно обращаться к А. С. Попову по адресу, указанному выше.

4. Необходимо оказать прямую помощь математическим школам. Большую пользу могут принести подержанные компьютеры — российские школьники изучают «информатику» в бескомпьютерном варианте. Хорошо было бы также предоставить гранты (по \$500) учителям, чьи ученики демонстрируют наилучшие успехи на олимпиадах (до двадцати лучших учащихся ежегодно). Распределением грантов мог бы заняться упомянутый выше в п. 3 редакционный совет.

5. Приглашение математиков из бывшего СССР на временную работу на различные сроки помогло бы решению экономических проблем для тех из них, кто способен приехать. Не забудьте, однако, что стоимость билета на самолет из Москвы до, скажем, Парижа равна двухгодичной зарплате профессора. Особую важность приобретают приглашения для молодых математиков, чья зарплата в пять-десять раз меньше.

6. Хотелось бы упомянуть также организуемые в России «Обервольфакские» конференции в живописных местах от московских лесов до Санкт-Петербургского Эйлеровского института, от берегов Волги до побережья Байкала.

Стоимость жизни в России — измеряемая в долларах — по-прежнему невысока, и интересные математики и просто прекрасные люди встречаются повсюду. В современной ситуации, когда книги иностранных издательств не доходят даже до лучших библиотек (а за уже полученные книги мы не можем расплатиться), личное общение приобретает все большее значение. Молодое поколение российских математиков жаждет математических новостей. Никому не хочется эмигрировать, если дома осталась хоть малейшая надежда на улучшение.

7. Российская Академия наук не то уже продала, не то собирается продать издательство «Наука» издательской группе *Pleyade*, известной в России тем, что ей принадлежит журнал *Penthouse*.

В соответствии с этим решением права на перевод российских математических журналов на английский язык передаются новой (частной?) компании «Интерпериодика», созданной академическими аппаратчиками совместно с группой *Pleyade*.

Первым шагом в этом направлении было решение Президента Академии (летом 1992 года) о том, что все журналы принадлежат Президиуму Академии, а не редколлегиям и не исследовательским институтам,

создавшим эти журналы и считавшим себя их собственниками. В результате Президиум заключил соглашения об авторских правах на перевод с Американским математическим обществом (AMS) и другими западными научными издателями. Странное решение о передаче прав собственности Президиуму стало возможным благодаря несформированности российских законов о собственности.

Передача переводов от научных издательств коммерческим несомненно приведет к резкому снижению их качества.

Возможно менее очевидно западному читателю то обстоятельство, что вознаграждение авторам и редакторам переводов российских математических журналов является одним из заметных источников поддержки активных исследователей. Последние соглашения могут повернуть этот поток в карманы академических аппаратчиков, владеющих издательством «Интерпериодика».

Лондонскому математическому обществу (LMS) удалось отстоять свои права на издание английских переводов *Успехов математических наук* (в английском переводе *Russian Mathematical Surveys*). Издания, переводимые AMS (*Известия РАН, Математический сборник, Функциональный анализ и его приложения* и др.), находятся в большей опасности, так как продолжение контрактов не было заранее оговорено.

Вопрос сохранения научного уровня при переводе российских математических журналов на английский чрезвычайно важен. Спасение хотя бы лучших журналов от акул коммерческих издательств сослужило бы хорошую службу математикам бывшего СССР.

Помочь математикам бывшего СССР можно, посылая им книги, журналы, оттиски, препринты. Пересылку можно осуществлять через математические общества — независимые некоммерческие объединения математиков (в Москве, Санкт-Петербурге, Новосибирске, некоторых других крупных городах России и бывшего СССР).

Спасибо всем, кто пытается тем или иным путем помочь российской математике выжить.

## Выживет ли математика?

### Заметки о математическом конгрессе в Цюрихе

Раз в 4 года математики всего мира собираются на свои конгрессы и выясняют, кто чего стоит (подобно Олимпийским играм или «гамбургскому счету» борцов, описанному Куприным). В августе этого года местом проведения конгресса был Цюрих (в третий раз за историю конгрессов; в Цюрихе, между прочим, состоялся и самый первый конгресс, в 1897 году). Номеров математические конгрессы не имеют (по политическим причинам — не все конгрессы признаются всеми странами).

В предшествующие конгрессу годы специально выбранный Международный программный комитет (членство в котором до открытия конгресса держится в тайне) выбирает приглашенных докладчиков. В этом году программа конгресса состояла из шестнадцати пленарных (часовых) и 156 секционных (сорокапятиминутных) докладов. Эти последние происходили параллельно в семи аудиториях и были разделены на 19 секций (математическая логика, алгебра, теория чисел и т.д., до секций преподавания математики и ее истории). Ежедневно можно было выслушать 6 докладов. Быть приглашенным докладчиком на конгрессе считается большой честью, и эти приглашения (к сожалению?) сильно влияют на положение математика на очень напряженном сейчас мировом рынке рабочей силы. В этом году из 16 пленарных докладчиков трое были представителями российской математической школы (в Киото — четверо из 15). Среди 156 секционных докладчиков в Цюрихе я насчитал 14 воспитанников российской школы (в Киото — 19 из 139); в этих подсчетах я не обращал внимания на то, где кто сейчас работает. Падение нашего авторитета от 14% в Киото до 9% в Цюрихе (т.е. на треть за четыре года) я не берусь объяснить.

На конгрессе были объявлены имена получивших медали и премии Филдса: Ж. Бургэн (Франция и США), Е. Зельманов (Россия и США), Ж.-К. Иоккос (Франция), П.-Л. Лионс (Франция). Филдсовские медали присуждаются математикам моложе 40 лет. Их часто сравнивают с Нобелевскими премиями (которые по математике не присуждаются). Это

сравнение мало обосновано: Филдсовских медалей мало, и большинство самых выдающихся математиков мирового сообщества (не говоря уже о России) их не получало.

Присуждение сразу трех медалей представителям французской математической школы (при том, что все трое удостоены этой награды за искусство манипуляций с неравенствами) вряд ли поднимет международный престиж французской математики — в особенности если заметить, что это произошло в то время, когда президентом Международного математического союза (организации, назначающей Филдсовский комитет) являлся широко известный французский аналитик. Здесь мое мнение расходится с точкой зрения П. Картье. Прямую причинно-следственную связь между этими двумя обстоятельствами заподозрить трудно — подобная связь должна была бы означать совершенно невероятное моральное разложение руководства Союза. Но такое совпадение еще раз показывает, насколько неправомерно сравнение Филдсовских медалей с Нобелевскими премиями. Нобелевский комитет учитывает мнение гораздо более широкого круга специалистов, чем Филдсовский, и, как правило, он не дает никаких поводов для подозрений (пусть даже необоснованных), подобных упомянутому выше. Боюсь, что на конгрессе со мной этими подозрениями делилось слишком много участников из разных стран и разных специальностей.

В этом году реакция многих участников конгресса на имена медалистов была: «А кто это?». Впрочем, медаль для молодого человека, как говорил Плутарх, не плата, а залог будущих достижений, и нынешние лауреаты, надеюсь, еще порадуют нас таковыми.

Специально женская «Лекция Эмми Нётер» была прочитана на конгрессе академиком О. А. Ладыженской (Санкт-Петербург). Среди приглашенных докладчиков я насчитал 7 докладчиц. В том числе, что особенно почетно, пленарные доклады в день открытия конгресса (М. Ратнер «Взаимодействие эргодической теории, теории групп Ли и теории чисел») и в день закрытия (И. Даубечи «Волнушки и другие средства локализации в фазовом пространстве»).

На состоявшейся в Люцерне перед конгрессом Генеральной ассамблее Международного математического союза (своего рода ООН математиков) американская делегация внесла предложение «увеличить представительство женщин и улучшить баланс этнических групп» среди докладчиков конгрессов. Это предложение не было принято Ассамблеей как содержащее завуалированное оскорбление как женщин, так и эт-

нических групп («странно, что в нарушение своей обычной практики американцы на этот раз не упомянули сексуальные меньшинства», — заметил один из делегатов Ассамблеи).

Ассамблея приняла, однако, решение рассекретить имя председателя Программного комитета с момента его избрания (чтобы на него можно было оказывать давление). В будущем делегаты развивающихся стран хотели бы сделать гласной всю работу Программного комитета и его секций.

В Ассамблее страны, где еще нет сложившихся математических школ, представлены скорее политиками. Опасность принятия Ассамблеей решений, чреватых тяжелыми последствиями для мирового математического сообщества, совершенно реальна.

Каждая секция («панель») Программного комитета должна отобрать примерно десять лучших из примерно двадцати наиболее активно работающих в данной области математиков (еще не делавших докладов на предыдущих конгрессах). Разница между десятым (который будет избран) и одиннадцатым (который не будет) незначительна. Попытки сделать гласным обсуждение этой разницы приведут лишь к многократному увеличению роли ненаучных факторов (вроде представительства разных стран, полов, этносов и т.д.).

Немногочисленные докладчицы конгресса в Цюрихе заслужили свое избрание в равноправном соревновании с докладчиками без всяких скидок.

Специальное внимание Ассамблеи было уделено вопросу об образе математики в общественном мнении.

В начале нашего столетия в математике был провозглашен (в основном Гильбертом) самоубийственный демократический принцип, согласно которому каждая система аксиом имеет равное право быть исследованной, а ценность математического достижения определяется не его значением и полезностью, как в других науках, а исключительно его трудностью, как в альпинизме. Этот принцип, быстро приведший математику к разводу с физикой и к отрыву от всех других наук, превратил математиков в глазах нормальных людей в своего рода опасную касту жрецов умирающей религии, вроде друидов, паразитирующую на теле науки и техники (и вербующую своих адептов при помощи зомбирования в математических школах).

Странные вопросы, вроде проблемы Ферма или задач о суммах простых чисел, стали выдаваться за якобы центральные вопросы мате-

матики. «Зачем складывать простые числа?» — недоумевал великий физик Ландау. — «Простые числа созданы для того, чтобы их перемножать, а не складывать!»

К сожалению, сами математики много сделали для создания такого представления о своей науке, прежде всего создав миф о ее непостижимости для непосвященных. «В наш век, — сказал Г. Вейль, один из крупнейших математиков нашего времени, кстати, работавший в Цюрихе, — за душу каждой отдельной математической теории борются дьявол абстрактной алгебры и ангел геометрии» (*Invariants*, Duke Math. J., 1939, 5, с. 500).

В первой половине века дьявол побеждал. Был изобретен специальный «аксиоматически-бурбакистский» способ изложения математики, делающий ее недоступной. Представим себе, например, что речь идет о неизменности суммы при изменении порядка слагаемых. При желании сумму можно определить при помощи «правила сложения столбиком». Независимость ответа от порядка слагаемых можно формально вывести из одного этого правила, ничего не зная о содержательном смысле операции суммирования. Это формальное доказательство преступные бурбакизаторы и алгебраизаторы математики и предлагают учащимся.

Понятно, что, не зная содержательного смысла сложения (т.е. не занявшись вначале счетом яблок, или камушков, или, как говорил Маяковский, окурков либо паровозов), понять формальное доказательство невозможно — оно убедительно только для лиц со специально алгебраически извращенным умом и совершенно бесполезно как для преподавания, так и для всех приложений. Тяжелые последствия этих извращений для математического образования как в России, так и в других странах, широко известны. Появились целые поколения математиков, воспитанных в этом извращенном духе и не знающих математики никакого другого стиля (и, конечно, не знакомых ни с какими другими науками).

Правители большинства стран, подобно свинье под дубом, начали планомерную борьбу с математикой на уничтожение (мстия за унижения, перенесенные в школе). По американским данным, на это требуется 10–15 лет.

Логика их проста. Англия ничего не получает за изобретенный Ньютоном математический анализ, Германия — за придуманные Лейбницем обозначения, которыми пользуется весь мир, Франция — за создание Пуанкаре современной математики (топологии и теории ди-



намических систем, без которой немислима, например, радиотехника). Американское правительство, в соответствии с мнениями своих избирателей и налогоплательщиков, не станет субсидировать фундаментальные исследования (например, математику), если не будет доказано, что страны, где фундаментальные исследования субсидируются (Россия, Франция), живут лучше, чем те, где они практически не субсидируются.

Эгоистические соображения отдельных стран приводят к сворачиванию необходимых для человечества в целом фундаментальных исследований (в особенности математических), как только прекращается военное противостояние (*no star wars — no supercolliders, no mathematics*).

Возвращение современной математики в русло естественных наук, наблюдаемое во всем мире в последние десятилетия, все еще мало сказывается на образе математики и математиков, сложившемся у «человека с улицы». Сказанное относится одинаково и к «чистой», и к «прикладной» математике.

Замечу в связи с этим, что различие между чистой и прикладной математикой — не научное, а лишь социальное: «чистому» математику платят за занятия математикой, а «прикладному» — за решение определенной задачи. Если бы специалисту по теории чисел платили за решение проблемы Ферма, то теория чисел была бы прикладной областью (подобно теории полей Галуа и кривых над конечными полями, исследования которых субсидируются ЦРУ, КГБ и другими подобными организациями ради нужд криптографии).

Колумб в начале своего плавания был подобен прикладному математику (ему платили за решение определенной задачи — найти путь в Индию). Открытие Нового Света, однако, подобно деятельности чистого математика. Капитаны каботажного плавания приносили экономике Испании гораздо больше сиюминутного дохода, чем убыточные путешествия Колумба.

Современные приложения математики (включая «информатику» и все применения компьютеров) — использование богатств, накопленных «чистой» математикой предыдущих поколений. В отличие от географии в математике все еще возможны — и происходят ежегодно — открытия колумбовского масштаба.

Но объяснить непосвященным, в чем эти открытия состоят, действительно не просто. Вот как подошел к этой проблеме принстонский

математик Джон Конвей в своем пленарном докладе для трехтысячной аудитории, собравшейся в Цюрихском конгрессхаузе.

Докладчик вышел на освещенную сцену в шортах, сандалиях и штормовке. «Никто не знает, — сказал он, — как всего плотнее заполнить наше обычное трехмерное пространство одинаковыми шарами. Предполагается, что самое лучшее — уложить шары рядами и слоями, как я сейчас покажу». Тут докладчик вытащил из кармана штормовки что-то сильно смятое вроде носового платка. Оказалось, что это кусок пенопласта или чего-то в этом роде, который быстро распрямился и превратился в голубой шар размером с детскую голову. «Положим рядом еще несколько шаров», — сказал Конвей и вытащил с десяток смятых голубых шаров из того же кармана. Он уложил их плотными рядами на столе, так что образовалась как бы сетка из равносторонних треугольников. «Теперь, — сказал докладчик, — положим сверху второй слой шаров», — и полез в другой карман штормовки за красными шарами. Когда третий слой (из зеленых шаров, лежавших в третьем кармане штормовки) был положен на второй, все уже поняли, как устроено слоистое заполнение всего пространства.

«Теперь этот шар мне больше не нужен», — заявил Конвей и, сняв с верха своей пирамиды зеленый шар, бросил его в аудиторию (где он упал не то в двадцатом, не то в сороковом ряду). «Эти шары теперь тоже не нужны», — продолжил докладчик и стал бросать разноцветные шары во все концы зала. Когда последний шар был брошен (и пойман какой-то визжавшей от восторга слушательницей), Конвей заметил: «Ну, теперь и штормовка мне больше не нужна», — и, сняв штормовку, кинул ее на пол. Шорты так и остались на нем до конца доклада.

Экстравагантный доклад Конвея был все же одним из самых понятных на конгрессе. Дело в том, что постепенное превращение конгрессов в ярмарки репутаций привело к тому, что докладчики скорее стараются показать, насколько великими учеными они являются, чем чему-либо научить слушателей, а для этой цели подходят именно непонятные доклады (особенно это относится к секционным докладам). Лучшими, по моему мнению, докладами конгресса были: сделанный Клиффордом Таубсом (Гарвард, США) обзор геометрии четырехмерных многообразий (связанный с физикой калибровочных полей) и доклад Юрга Фрелиха (Цюрих) о его недавней теории дробного квантового эффекта Холла.

Топология трех и четырех измерений оказалась более сложной и чем маломерная топология кривых и поверхностей, и чем многомерная топология размерности 5 и выше. Например, только в размерности 4 существуют «фальшивые евклидовы пространства», топологически одинаковые с обычным четырехмерным пространством, но не допускающие единой гладкой координатной системы.

Все эти фальшивые четырехмерные пространства допускают, однако, замечательное описание в терминах динамических систем: они являются пространствами орбит некоторых гладких векторных полей (без положений равновесия) в обычном евклидовом пятимерном пространстве. До сих пор, насколько мне известно, никто не выписал подобное векторное поле в явном виде. Могут ли его компоненты быть элементарными функциями? многочленами?

Три интересных доклада были посвящены теории зеркальной симметрии — недавно открытой физиками поразительной связи между (на вид совершенно не связанными друг с другом) математическими теориями (относящимися к алгебраической геометрии, теории особенностей, топологии и комбинаторике выпуклых многогранников). Многие положения этой теории остаются пока гипотезами (подтвержденными обширнейшим экспериментальным материалом и совпадениями очень многозначных чисел, возникающих в разных теориях). Все же в докладах М. Концевича «Алгебра зеркальной симметрии», А. Гивенталю «Геометрия зеркальной симметрии» и Д. Моррисона «Зеркальная симметрия и конформная теория поля» можно было увидеть достаточно стройную картину будущей теории.

В докладе Фелмера (Бонн) о финансовой математике приятно было услышать о «Русских опционах», введенных Ширяевым и Шеппом, — до сих пор я слышал только о европейских и американских опционах.

На меня произвело большое впечатление краткое описание работ лауреата премии Неванлинны А. Видгерсона, сделанное на открытии конгресса Ю. Матияевичем (Санкт-Петербург). Речь идет о новых идеях в теории сложности решений математических задач и о применении вероятностных идей в теории доказательств. В строгой математической логике наконец появилась возможность пользоваться доказательствами, верными не наверняка, а лишь с ошеломляюще малой вероятностью ошибки (десять в минус пятисотой степени, например). Каждый знает, что решения некоторых задач легко проверить, но очень трудно найти. Такова, например, задача о разложении целого числа на множители.

Если множитель известен, то проверить делимость можно довольно быстро (даже если число двухсотзначное, а множитель стозначный). Найти же этот множитель очень трудно — приходится перебирать возможные множители, а это требует огромного (растущего экспоненциально с числом знаков заданного числа) времени. Экспоненциально сложные задачи практически недоступны компьютерам и будут оставаться недоступными им при любом усовершенствовании. Это можно использовать для передачи секретных сообщений по открытым каналам связи.

Однако трудность всех подобных задач остается недоказанной гипотезой (хотя составлен список из тысяч задач, эквивалентных по своей трудности, каждая из которых является кандидатом на титул задачи, не допускающей простого решения). Новое продвижение состоит в построении обширной теории, основанной на (недоказанной) гипотезе о существовании трудных задач. Особенно интересно исследование рандомизированных (включающих случайные пробы) алгоритмов и исследование возможности их дерандомизации (замена случайного элемента псевдослучайным датчиком случайных чисел). Доказано, в частности, что сколь угодно сложное доказательство можно довольно быстро сделать легко проверяемым.

Деятельность, основанная на недоказанной гипотезе (из которой выводятся порой парадоксальные следствия), напоминает мне работу Лобачевского, который построил стройную систему своей геометрии, не испугавшись недоказанности положенной в ее основу гипотезы. Теперь мы знаем, что существуют две геометрии, в одной гипотеза Лобачевского выполнена, а в другой — нет. Они описывают просто геометрию разных поверхностей.

Возможность двух математик, в одной из которых экспоненциально трудные задачи (для решения которых нужен перебор) с легко проверяемыми ответами есть, а в другой — нет, сомнительна. Но, во всяком случае, на конгрессе в Цюрихе различным аспектам теории сложности детерминированных, рандомизированных и дерандомизированных алгоритмов было посвящено много интересных докладов (в секции информатики).

Большинство докладов на конгрессе носило, однако, выраженный ритуальный характер. Докладчики явно не рассчитывали, что слушатели что-либо понимают. Порой они даже смело формулировали явно ошибочные теоремы перед почтительно молчавшей трехтысячной аудиторией. Ритуальный стиль математического доклада стал до того

обычным, что большинство председательствующих в конце докладов даже не интересовались, есть ли вопросы. А когда старомодные профессора, вроде Ю. Мозера (директора главного математического центра Швейцарии — Института математики Высшей технической школы в Цюрихе), все же предлагали слушателям задавать вопросы, почти никто все равно не решался на это (видимо, опасаясь показать степень своего непонимания).

В отличие, например, от религиозных ритуалов, обзорные доклады были платными: те, кто не был участником конгресса, должны были заплатить за эти доклады, как за посещение концерта или спектакля, значительные суммы.

Приятно отметить, что доклады представителей российской математической школы выделялись, как правило, в лучшую сторону своей большей понятностью. Наши традиции требуют уделять в обзорных докладах основное внимание не техническим деталям, а новым идеям и ярким примерам. Некоторую опасность представляет только заметное перемещение интересов многих наших молодых исследователей (особенно работающих на Западе) с традиционных у нас тем на модные сейчас в США направления. Такое изменение тематики (несомненно, связанное с тяжелыми условиями поиска работы в американских университетах, похваляющихся друг перед другом, каких знаменитых математиков из России они отвергли) всегда отбрасывает назад. Лучшие в мире специалисты в своей области оставляют ее и вступают в гонку за лидером в толпе наступающих друг другу на пятки соперников. Быть может, этим объясняется и явное снижение веса наших математиков в числе докладчиков конгрессов за последние годы.

Приятно также обилие молодых участников конгресса из России и стран СНГ, вплоть до аспирантов. Их поездки сделались возможными благодаря щедрой помощи швейцарского Организационного комитета конгресса и Фонда Сороса.

Швейцарские математики приложили все усилия, чтобы сделать пребывание членов конгресса в Швейцарии приятным: организовали большие экскурсии по всей Швейцарии (Люцерн, Интерлакен, Берн и т.д.), в горы (на Риги Кульм над озером Четырех кантонов), к водопаду на Рейне (сравнимому с Ниагарой), концерты классической и народной музыки. Большое впечатление на меня произвела находящаяся в Цюрихе маленькая и малоизвестная коллекция картин Бюрле (Рембрандт и Франс Гальс; Эль Греко и Гойя, Капалетто и Тьеполо,

Грез и Энгр, Коро и Курбе, Сезанн, Ван Гог, Матисс, Писсарро и т.д. вплоть до Пикассо).

После утомительного конгресса я провел еще день в доме своего старого друга А. Хэфлигера вблизи Женевы. Мы поднялись от высоты полутора километров до трех в горах вблизи долины Роны, примерно на полпути между Юнгфрау и Маттерхорном, и я мог поплавать в ледниковом озере. На обратном пути я набрал в лесу грибов, щавеля, черники и земляники и угостил своих хозяев самодельным обедом из этих даров природы (в съедобности которых они, впрочем, отчасти сомневались), а на следующее утро вернулся в Москву.

## Интервью с Владимиром Арнольдом

*Проводил S. H. Lui*

*Utilius scandalum nasci permittitur quam veritas relinquatur.*

*Правду следует говорить, даже рискуя вызвать этим скандал.*

V послание папы Григория IX, понтификат 1227–1241

**Lui:** Расскажите, пожалуйста, о своем первоначальном образовании. Интересовались ли Вы математикой в детстве?

**Арнольд:** Русская математическая традиция восходит к старинным купеческим задачам. Дети в совсем юном возрасте решают такие задачи, еще не имея представления о числах. Эти задачи очень нравятся детям пяти-шести лет, которые могут их решить, в отличие от многих университетских выпускников, испорченных натаскиванием. Вот типичный пример подобной задачи:

*Ложка вина из бочки вина переливается в чашку чая. Затем ложка (неоднородной!) смеси из чашки переливается обратно в бочку. Теперь иная жидкость (вино) находится в чашке и иная жидкость (чай) — в бочке. Чего больше: чая в вине или вина в чае?*

Детям постарше, уже немного знакомым с числами, нравится следующая задача.

*Маша и Миша хотят купить книжку. Маше нужно на семь копеек больше, чем у нее есть, а Мише — на одну копейку больше. Они решили купить книжку вместе, но обнаружили, что и общих денег им не хватает. Сколько стоит книжка?*

(Нужно иметь в виду, что книги в России очень дешевы.)

Во многих российских семьях существует традиция давать детям сотни подобных задач. В такой семье рос и я. Первый настоящий математический опыт я приобрел в школе, когда наш учитель И. В. Морозкин предложил классу следующую задачу:

*Две старушки вышли на рассвете и каждая шла с постоянной скоростью. Одна шла из А в В, другая — из В в А. Они встретились в*

полдень и, не прекращая движения, дошли одна в В в 4 часа вечера, а другая — в А в 9 часов вечера. Во сколько в тот день встало солнце?

Я обдумывал эту задачу весь день, и решение (основанное на том, что ныне модно называть скейлингом, размерностным анализом или теорией торических многообразий — кому что больше нравится) снизошло на меня, как откровение. Испытанный мною тогда (1949) восторг открытия был в точности тем же, который я испытал при решении гораздо более серьезных проблем, будь то открытие связи между алгебраической геометрией вещественных плоских кривых и четырехмерной топологией (1970) или связи между особенностями каустик и волновых фронтов и простыми алгебрами Ли и группами Кокстера (1972). Именно жажда испытывать столь замечательное чувство вновь и вновь и является основным побудительным мотивом моих математических занятий по сей день.

**Луи:** Как проходило Ваше обучение в Московском государственном университете? Не могли бы Вы немного рассказать о профессорах (Петровском, Колмогорове, Понтрягине, Рохлине, ...)?

**Арнольд:** Атмосфера на мехмате (механико-математическом факультете МГУ) в пятидесятые годы — время моего студенчества — подробно описана в книге «*Golden Years of Moscow Mathematics*», S. Zdravkovska and P. L. Duren, eds., изданной совместно Американским математическим обществом и Лондонским математическим обществом (1993). Там собрано большое число воспоминаний, в том числе мои — о моем учителе А. Н. Колмогорове<sup>1</sup>.

Плеяда великих математиков, собранных на одном факультете, представляла собой явление совершенно исключительное, и мне не приходилось встречать ничего подобного более нигде. Колмогоров, Гельфанд, Петровский, Понтрягин, П. Новиков, Марков, Гельфонд, Люстерник, Хинчин и П. С. Александров учили таких студентов, как Манин, Синай, С. Новиков, В. М. Алексеев, Аносов, А. А. Кириллов и я сам.

И все эти математики были столь непохожи друг на друга! Лекции Колмогорова было совершенно невозможно понимать, но они были насыщены идеями, и это в полной мере вознаграждало слушателей. Помню, как он объяснял свою теорию размеров минимального куба, в

<sup>1</sup> На русском языке эти воспоминания опубликованы в книге «*Колмогоров в воспоминаниях*», под ред. А. Н. Ширяева, М., Наука, 1993, а также в настоящем сборнике, с. 653–677. — Прим. ред.



который можно вложить граф с  $N$  вершинами (шарами фиксированного радиуса), каждый из которых соединен не более чем с  $K$  другими вершинами проводами заданной толщины. Он доказывал, что при очень большом  $N$  (и фиксированном  $K$ ) сторона куба растет как  $\sqrt{N}$ , следующим образом: серое вещество (тела нейронов) располагается на поверхности человеческого мозга, тогда как белое вещество (связи) заполняет его внутренность. Так как мозг заполняет черепную коробку наиболее экономичным образом, достаточно сложный мозг из  $N$  нейронов можно вложить только в куб со стороной порядка  $\sqrt{N}$  (тогда как линейные размеры простейшего мозга, например, мозга червя, имеют порядок  $\sqrt[3]{N}$ ).

Размышления Колмогорова над тем, что сейчас называется КАМ-теорией гамильтоновых систем, явились побочным продуктом обязательных упражнений, которые он вел у второкурсников. Одна из предлагавшихся им задач требовала исследования некоторой нетривиальной вполне интегрируемой системы (типа движения тяжелой частицы по поверхности горизонтального тора вращения). А никаких компьютеров тогда не было! Он заметил, что движение во всех таких системах оказывается квазипериодическим, и попробовал обнаружить примеры более сложного («перемешивающего», или, в современных терминах, «хаотического») движения в случае неинтегрируемых возмущенных систем.

Его попытки оказались безуспешными. Проблема, послужившая отправной точкой его исследований, по-прежнему остается нерешенной — никому еще не удалось обнаружить примера инвариантного тора, несущего перемешивающее движение в общей возмущенной системе. Однако побочные результаты этого исследования оказались гораздо важнее исходной технической задачи о перемешивании. Среди них — открытие выживающих нерезонансных торов, метод «ускоренной сходимости» и связанные с ним теоремы о неявной функции в функциональных пространствах, доказательство устойчивости для многих гамильтоновых систем (включая, скажем, гироскопы и планетные системы) и доказательство существования магнитных поверхностей в геометрии Токамака, используемых при удержании плазмы для управляемых термоядерных реакций.

Большая важность следствий по сравнению с исходной задачей — обычное явление. Колумб ставил перед собой цель найти новый путь

в Индию. Открытие Нового Света — лишь побочный результат его деятельности.

Когда я был студентом мехмата, Понтрягин был уже очень слаб. Но он был, вероятно, самым блестящим из наших лекторов. Он только что оставил топологию, занявшись теорией управления, и его личность тоже претерпела значительные изменения. Позднее он объяснил причины, побудившие его заняться прикладной математикой, а также свои антисемитские взгляды, в своей автобиографии, опубликованной в «Успехах математических наук». Когда он представил свою статью к печати, представитель КГБ заявил, что ее нельзя публиковать в таком виде — слишком прямо там все было высказано. Я бы предпочел, чтобы был напечатан именно исходный текст — опубликованный вариант чересчур приглажен. Некоторые считают антисемитизм Понтрягина проявлением его страха перед тем, что в нем есть еврейская кровь и что этот факт может быть обнаружен.

Однако Понтрягин далеко не всегда был таким! Во время войны его лучший студент В. А. Рохлин был ранен и попал в немецкий лагерь для военнопленных. Позднее Рохлин был освобожден армией союзников, вернулся в СССР и продолжал служить в армии, которая еще воевала. Как-то он вел пленного немецкого офицера к своему командиру и встретил пьяного офицера НКВД, который захотел немедленно застрелить пленного. Рохлин отказался подчиниться. К счастью, командир Рохлина в тот момент спас его, переведя его немедленно в другую часть. Однако в конце концов, как и все, освобожденные союзниками, Рохлин был отправлен в лагерь (на севере России).

Спустя несколько месяцев освобожденный солагерник Рохлина добрался до Москвы и сообщил Понтрягину, что тот еще жив, но умирает от голода в лагере. Понтрягин, при поддержке Колмогорова, Александра и других, написал письмо Берии, требуя немедленного освобождения талантливейшего молодого математика. Берия подписал приказ об освобождении Рохлина, тому выдали автомат, и он продолжал служить охранником в своем же лагере. Понтрягин вместе с остальными написал второе письмо Берии, и Рохлин получил, наконец, возможность вернуться в Москву.

Рохлин, вернувшийся из лагеря, не имел права на московскую прописку. Понтрягин, который был полностью слепым, имел право нанять личного секретаря в Стекловке. У него достало храбрости пригласить на эту должность Рохлина, который впоследствии стал одним из веду-

щих советских специалистов по топологии и динамическим системам. Рохлин оказал значительное влияние на следующее поколение математиков (среди них С. Новиков, Синай, Аносов и я сам). Впоследствии Рохлин создал мощную математическую школу в Ленинграде. Упомяну его блестящих учеников Вершика, Громова, Элиашберга, Виро, Шустина, Тураева и Харламова. Я встретился с Рохлиным в шестидесятые годы на его семинаре. Он приезжал в Москву из-за сотого километра, где его прописка позволяла ему жить.

Рохлин был евреем и выжил в немецком лагере для военнопленных только благодаря тому, что назвался мусульманином. Действительно, он родился в Баку. Помогать Рохлину и писать Берии было для Понтрягина смертельно опасно. Понтрягин продолжал высоко ценить Рохлина и став активным антисемитом. Мои личные взаимоотношения с Понтрягиным были довольно хорошими. Он приглашал меня к себе домой и на свой семинар, проявлял неподдельный интерес к моей работе, в первую очередь в теории особенностей. Частично это объяснялось нашим общим интересом к дифференциальной топологии; теории управления и теории игр. Главной причиной, однако, было желание Понтрягина высказаться против меня на международном уровне. Он был тогда представителем СССР в Международном математическом союзе и активно препятствовал выдвигению советских диссидентов. (Я попал в черный список, так как в числе девяносто девяти математиков подписал письмо протеста против заключения в психиатрическую больницу абсолютно здорового математика. Это был стандартный способ избавления от диссидентов.) ММС всегда был политизирован, и Понтрягину удалось добиться своего. В своих воспоминаниях он пишет, что некоторые из функционеров ММС разделяли его людоедские взгляды. Я надеюсь, что нам удастся узнать их имена. Кстати, забавно, что сейчас я занимаю его пост, представляя Россию в ММС.

Петровский, бывший тогда ректором Университета, обычно встречался с Рохлиным в лифте перед семинаром. Мне кажется, ему было опасно показываться в компании с Рохлиным. В то время Петровский уже не занимался математикой, однако он всегда приносил пользу математическому сообществу, поддерживая настоящих математиков в тяжелой борьбе с Коммунистической партией.

Его математические вкусы были весьма классическими, в их основе лежала скорее итальянская школа алгебраической геометрии, а не теоретико-множественные понятия. Сэр Майкл Атья сказал мне

как-то, что он всегда наслаждался тем, как Петровский пользовался алгебраической геометрией в своих работах по УрЧП. Атья, Ботт и Гординг впоследствии переписали одну из этих работ, посвященную лакунам гиперболических уравнений, в современной терминологии в двух длинных статьях в «Acta Mathematica». Там содержится далеко идущее обобщение хорошо известного факта о невозможности звукового общения в четномерных пространствах (например, в «плоском» мире), тогда как в нашем обычном трехмерном мире мы легко говорим друг с другом. Интересно, что в этой статье Петровский доказал, что классы когомологий дополнения к алгебраическому многообразию имеют рациональных представителей, — результат, обычно приписываемый Гротендику.

Работы Петровского (1933 и 1938) по вещественной алгебраической геометрии (связанные с 16-й проблемой Гильберта об овалах плоских алгебраических кривых) положили начало важной новой ветви современной математики — топологии вещественных алгебраических многообразий. Результаты этой теории (например, оценка сверху чисел Бетти через степень уравнения) играют важную роль в различных областях, включая теорию сложности. Они использовались, например, Хованским в его теории малочленов, Смейлом в его изучении «вещественной проблемы P-NP», и т.д. На Западе эти результаты обычно приписываются Тому и Милнору (1965), хотя работы Петровского и его ученицы Олейник, опубликованные в сороковые годы, содержат лучшие оценки (кстати, Том и Милнор их цитировали). Такое положение, однако, стандартно — в нынешнем мире охотников за рабочими местами слишком легко опускать ссылки на фундаментальные российские труды.

Петровский никогда не был членом партии. Большинство коммунистов этого не знали. Он был очень влиятелен, что частично объяснялось его связями со своими бывшими учениками, занявшими высокие посты в советской иерархии. Петровского сделали членом Президиума Верховного Совета — «коллективного президента» СССР. Он умер перед дверью здания ЦК КПСС в Москве от сердечного приступа после долгой борьбы на заседании, посвященном финансированию фундаментальной науки. Последние его слова были: «Я победил».

После его смерти партия и КГБ в течение двадцати лет разрушали созданный им математический центр на мехмате. Они прекратили

брать на работу талантливых людей, и к настоящему времени почти справились со своей задачей.

Луи: Не могли бы Вы рассказать о своей философии обучения студентов и научного руководства аспирантами? Сколько их у Вас в России и Франции?

Арнольд: Около сорока человек защитило кандидатскую диссертацию под моим руководством. Точное число я не могу назвать по нескольким причинам. В период «застоя» мне не разрешали руководить иностранными аспирантами в Московском университете, так как я не был членом партии. Они все равно учились у меня, а официальным руководителем становился кто-либо из доброжелательно настроенных членов партии. Он и получал зарплату за это. Кое-кто из аспирантов имел другого научного руководителя, но писал диссертацию по теме, обсуждавшейся на моем семинаре, и был фактически моим учеником. Упомяну С. М. Гусейн-Заде, Ю. С. Ильяшенко и А. И. Нейштадта. В настоящий момент я руковожу в Московском университете двумя студентами и тремя аспирантами, и у меня четыре аспиранта в Париже. Еще два или три начнут занятия в январе.

Я многому научился у своих учеников, особенно у студентов. Я никогда не даю им темы для диссертаций. Это все равно что невесту назначать. Я просто рассказываю им, что известно, а что неизвестно.

В моем московском семинаре, который работает и в мое отсутствие, участвует около тридцати математиков, в основном моих учеников, хотя всегда приходят и другие. Семинар существует уже около тридцати лет, и в разные годы в его работе участвовали Я. Синай, В. Алексеев, С. Новиков, М. Концевич, А. Гончаров, Д. Б. Фукс, Г. Тюрина, А. Тюрин, ...

Жизнь в Москве настолько трудна, что большинство студентов должны зарабатывать себе на жизнь независимо от своей научной работы. Некоторые заводят свое дело. Уровень преступности, однако, настолько высок, что, начиная свое дело, рискуешь быть убитым. Несколько недель назад один из моих московских аспирантов, только что закончивший работу над диссертацией, но не успевший ее защитить, пропал. Неизвестно, жив ли он сейчас.

Луи: Есть ли у Вас свои математические кумиры?

Арнольд: Я хотел бы упомянуть Барроу, Ньютона (очень, однако, неприятная личность — см. мою книгу *«Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук»*, М., Наука, 1989), Римана, Пуанкаре, Минковского, Вейля, Кол-

могорова, Уитни, Тома, Смейла и Милнора. Половину выученной мной математики я знаю из книги Ф. Клейна «Лекции о развитии математики в 19-м столетии». Многие я узнал также от таких математиков, как Гельфанд, Рохлин, С. Новиков, Д. Фукс, Делинь, и от своих собственных учеников — Хованского, Нехорошева, Варченко, Закалюкина, Васильева, Гивенталя, Горюнова, О. Щербака, Чеканова и Казаряна.

Я чрезвычайно обязан Тому, семинар которого по особенностям в IHES (Institut des Hautes Études Scientifiques), завсегдааем которого я был в 1965 году, сильно изменил мой математический мир. Я всегда наслаждался тем, как Том рассуждал о математике, используя при этом предложения, совершенно лишённые строгого логического смысла. Хотя сам я так и не смог до конца освободиться от пут логики, я был навсегда отравлен мечтой о безответственных математических рассуждениях, лишённых точного смысла.

Его ученики приписывают ему следующий принцип: «Для доказательства теоремы всегда найдётся какой-нибудь дурак».

Лекции Милнора в Ленинграде в 1961 году о дифференцируемых структурах на сфере произвели столь глубокое впечатление на моего научного руководителя Колмогорова, что он предложил мне включить их в аспирантский учебный план. Это заставило меня выучить дифференциальную топологию у Новикова, Фукса и Рохлина, и год спустя я был оппонентом на защите диссертации Новикова о дифференцируемых структурах на произведениях сфер.

Смейл был одним из первых иностранных математиков, с которым я познакомился (во время его приезда в Москву в 1961 году). Его влияние на работы советских математиков по динамическим системам и на меня лично было огромным.

**Луи:** Замечаете ли Вы какую-либо разницу в том, как представители различных культур занимаются математикой?

**Арнольд:** Многие годы я не знал, что такая разница существует. Однако она есть. Несколько лет назад я принимал участие в заседании Международного научного фонда (ISF) в Вашингтоне. Эта учрежденная Соросом организация распределяет гранты между российскими учеными. Один из американцев предложил поддержать российского математика, который, по словам американца, работает «в хорошем американском стиле». Я был озадачен и попросил объяснений. «Ну», — ответил американец, — «он много путешествует, докладывает свои последние результаты на всех наших конференциях, и все эксперты в этой

области знают его лично». По-моему же, ISF следовало бы поддерживать тех, кто работает в хорошем русском стиле, т.е. сидит дома и напряженно работает, доказывая фундаментальные теоремы, которые навсегда останутся краеугольными камнями математического здания!

Зарплаты в России были (и остаются) столь незначительными, что если человек занимается математикой, то это означает, что математика и является его конечной целью, а не средством заработать деньги на жизнь. До сих пор можно добиться высокой репутации на Западе, просто переписывая (или осовременивая) классические результаты и идеи российских математиков, не нашедшие пути на Запад.

Российское отношение к знаниям, науке и математике объясняется старыми традициями российской интеллигенции. Такого слова не существует в других языках — ни в какой другой стране нет подобной касты людей (учащихся, врачей, художников, учителей и т.д.), находящих вознаграждение в том, что они могут дать обществу, а не в личной или финансовой прибыли.

Недавно мой друг Вершик получал американскую визу в Париже. «Какую зарплату Вы получаете в Санкт-Петербурге?» — спросил его чиновник в консульстве. Услышав честный ответ, чиновник спросил: «И Вы хотите убедить нас в том, что собираетесь вернуться в Санкт-Петербург на такую зарплату?» Вершик ответил: «Ну конечно, ведь деньги еще не все!» Пораженный чиновник выдал ему визу немедленно.

Я подавал заявку на визу неделей раньше, и мне предложили прийти через три недели. Причина — мои документы должны были проверить в Вашингтоне, потому что я «осёл». Я потребовал объяснений. Мне ответили: «Каждый вид преступлений получает у нас свое имя: собака, кошка, тигр, верблюд и т.д.». Мне показали список — под именем «осёл» фигурировали российские ученые.

Еще одна характерная черта российской математики — отношение к своей науке как к единому живому организму. На Западе допустимо быть специалистом в математике по модулю 5, не имея представления о математике по модулю 7. Широта познаний считается на Западе столь же недопустимой, сколь в России неприемлема узость.

Французская математическая школа сохраняла блеск в течение нескольких столетий вплоть до глубоких работ Лерэ, А. Картана, Серра, Тома и Серфа. Бурбакисты утверждали, что все великие математики, следуя словам Дирихле, заменяли слепые вычисления ясными идеями. В русском переводе манифеста Бурбаки эти слова звучали так: «все

ясные идеи были заменены слепыми вычислениями». Редактором русского перевода был Колмогоров. Его французский был безупречен. Шокированный столь грубой ошибкой в переводе, я спросил Колмогорова, почему это произошло, и вот что он ответил: «Мне не пришло в голову, что в переводе что-то не так, потому что переводчик гораздо лучше отразил стиль Бурбаки, чем они сами». К сожалению, Пуанкаре не оставил после себя школы.

Типичный пример французской ограниченности — недавняя дискуссия в Академии наук. Громов много лет был ее иностранным членом, но недавно он принял французское гражданство и не мог далее оставаться иностранным членом Академии. Его надо было переводить в статус обычного члена Академии. Французские математики, однако, возражали, заявив, что «эти места предназначены для настоящих французов!». По-моему, уровень «настоящих» французских кандидатов не мог и сравниться с уровнем Громова — одного из ведущих математиков мира. Но — он до сих пор не член Академии.

Преподавать во Франции очень трудно из-за формализованной бурбакистской подготовки студентов. Например, на письменном экзамене по динамическим системам для студентов четвертого курса университета Париж-Дофин одна из задач состояла в нахождении предела решения для системы уравнений Гамильтона на фазовой плоскости, выходящего из заданной точки, при стремлении времени к бесконечности. Я собирался выбрать исходную точку на сепаратрисе седла, и пределом была бы седловая точка.

В результате арифметической ошибки, допущенной мной при подготовке экзаменационной задачи, фазовая кривая (линия уровня энергии, содержащая исходную точку) оказалась не сепаратрисой, а замкнутым овалом. Студенты обнаружили это и сделали вывод, что через некоторый конечный период времени  $T$  решение возвращается в исходную точку. Опираясь на теорему единственности, они смогли заключить, что для любого целого числа  $n$  значение решения в момент времени  $nT$  совпадает с исходной точкой. Дальнейшее рассуждение было следующим: так как предел при бесконечном времени совпадает с пределом для любой подпоследовательности значений времени, уходящей в бесконечность, то искомый предел совпадает с начальной точкой! К такому решению *независимо* пришли несколько *хороших* студентов, сидевших в разных концах экзаменационного зала. Это *логически безупречное* заключение, его можно получить и с помощью компьютера. Очевидно,



что его авторы не понимают *ничего*. Страшно представить себе, какой силы давление оказали бурбакисты на (очевидно, неглупых) студентов, чтобы превратить их в формальные машины! Подобное формализованное обучение совершенно бесполезно при решении любой практической задачи, и может даже оказаться опасным, привести к новым Чернобылям. К сожалению, чума формальных заключений распространяется по многим странам, и будущее зараженной ею математики представляется весьма унылым.

Соединенные Штаты подстерегает другая опасность. Ни один из российских профессоров не способен правильно решить следующую задачу, предлагавшуюся на GRE (Graduate Record Examination), официальном вступительном экзамене для аспирантов: найти пару, наиболее подходящую на пару (угол, градус), среди пар: (время, час), (площадь, квадратный дюйм) и (молоко, кварта). А всякий американец тут же правильно решает ее. Официальное объяснение правильного ответа — (площадь, квадратный дюйм) — следующее: один градус — это минимальная мера угла, один квадратный дюйм — минимальная мера площади, а час делится на минуты, и в кварте две пинты. Я всегда удивлялся, как многим американцам все-таки удается преодолевать такие трудности и становиться замечательными математиками. Один нью-йоркский физик, правильно решивший эту задачу, сказал мне, что он просто точно представляет себе степень тупости составителей теста.

Х. Уитни рассказывал мне, что задача (предлагаемая 14-летним американским школьником) о том, больше, меньше или равно 120% от числа 80 самому этому числу, была правильно решена в национальном тесте 30% учащихся. Организаторы тестирования полагали, что 30% учеников знают проценты. Уитни, однако, объяснил мне, что число понимающих проценты пренебрежимо мало по сравнению с величиной выборки. При трех возможных ответах статистическое предсказание случайного выбора правильного ответа дает 33% с возможной погрешностью  $\pm 5\%$ .

Даже Национальная Академия наук США недавно пришла к решению о необходимости обогатить научное обучение. Поставлена цель исключить из программы слишком трудные для американских детей, необязательные научные факты, заменив их действительно *фундаментальными, базисными*. Вот пример такого фундаментального утверждения: у всех объектов есть свойства, и у всех организмов есть природа! (См. «Nature» 372, № 5606, 8 декабря 1994.) Школьники далеко

пойдут с такими знаниями! Два года назад я прочитал в «USA Today» список действительно необходимых знаний для американских детей, составленный их родителями для каждого возрастного уровня. Например, к десяти годам они должны знать о существовании двух фазовых состояний воды, а к пятнадцати — что у Луны есть фазы, и что она обращается вокруг Земли. В России школьников до сих пор учат тому, что у воды три состояния, однако новая американизированная культура несомненно победит в ближайшем будущем. В то же время у свободной американской системы обучения есть очевидные преимущества: школьник может пройти вместо алгебры, скажем, курс истории джаза.

За несколько месяцев до своей смерти Уитни, все еще активно работавший в IAS (Institute for Advanced Study), Принстон, рассказал о своем математическом образовании. Он обучался игре на скрипке в Йейле, и через два года обучения его послали в один из лучших европейских музыкальных центров. К сожалению, я забыл, что это был за город, но это точно было неподалеку от Альп — Уитни увлекался альпинизмом. В этом центре студент должен был сдать экзамен по специальности, отличной от его собственной. Уитни расспросил своих товарищей, какой из предметов считается наиболее престижным. Ему ответили — квантовая механика. После первой лекции по квантовой механике Уитни подошел к (очень знаменитому — Паули? Шрёдингеру? Зоммерфельду?) лектору и сказал: «Уважаемый профессор, по-моему, с Вашими лекциями что-то не в порядке. Я лучший студент Йейля, но в Вашей лекции я не понял ни единого слова». Профессор, узнав, что Уитни занимается музыкой, ответил чрезвычайно вежливо: «Вам нужно познакомиться с основами — анализом и линейной алгеброй». «Хорошо», — сказал Уитни, — «надеюсь, эти предметы не столь новы, как Ваш, и по ним уже написаны учебники». Лектор назвал несколько подходящих учебников. (Я был бы весьма признателен, если бы кто-нибудь из знающих эту историю сообщил мне название города, имя лектора и названия книг.) «Три недели спустя», — продолжал Уитни, — «я уже понимал его лекции. А к концу семестра сменил музыку на математику».

Колмогоров тоже начинал не с математики — он занимался историей. Свою первую статью, написанную в семнадцать лет, он докладывал на семинаре Бахрушина в Московском университете. Колмогоров пришел к некоторому выводу, анализируя средневековые налоговые записи в Новгороде. После доклада Колмогоров спросил Бахрушина, согласен

ли он с выводами. «Молодой человек», — сказал профессор, — «в истории каждый вывод требует по меньшей мере пяти доказательств». На следующий день Колмогоров сменил историю на математику. Статью нашли в его архиве уже после смерти, опубликовали, и историки ее приняли.

Луи: Не хотите ли Вы прокомментировать соотношение между чистой и прикладной математикой?

Арнольд: Согласно Луи Пастеру, прикладной науки не существует — есть только *приложения* науки. И чистые математики, и физики-теоретики считают прикладных математиков слабыми учеными, не способными внести серьезный научный вклад, более заинтересованными в деньгах, чем в математике. Я не думаю, что эта характеристика применима ко *всему* сообществу прикладных математиков. См. §1 «Апология прикладной математики» моей статьи «*Топологические проблемы теории распространения волн*» в «Успехах математических наук», 1996, 51, № 1. Это — мой доклад на открытии Международного конгресса индустриальной и прикладной математики в июле 1995 года в Гамбурге. Мне кажется, что разница между чистой и прикладной математикой скорее социальная, чем научная. Чистому математику платят за доказательство теорем, прикладному — за решение поставленных задач.

Когда Колумб отправлялся в плавание, он был подобен прикладному математику, ему платили за решение конкретной задачи: поиск нового пути в Индию. Его открытие Нового Света аналогично работе чистого математика. Я не думаю, что открытия Галилея (которые он тут же стал эксплуатировать в американском стиле) менее важны, чем труды философа Паскаля. Настоящую опасность представляет не прикладная мафия сама по себе, а раскол между чистой математикой и естественными науками, порожденный (я бы сказал, преступной) формализацией математики и математического обучения. Аксиоматико-дедуктивный стиль Гильберта–Бурбаки изложения математики, доминировавший в первой половине нашего века, сейчас, к счастью, уступает место объединяющим тенденциям геометрической математики в стиле Пуанкаре, сочетающей глубокое проникновение в суть вещей с приложениями к реальному миру.

Кстати, я прочитал в недавно вышедшей американской книге, что геометрия — это искусство не делать ошибок в длинных вычислениях. По-моему, это серьезная недооценка геометрии.

---

В нашем мозгу два полушария: одно отвечает за умножение многочленов и языки, другое — за ориентацию фигур в пространстве и все, нужное в реальной жизни. Математика становится геометрией, если используются оба полушария. См., например, «Геометрию формул» А. Г. Хованского в «Soviet Scient. Reviews C, Math. Phys. Reviews» 4 (1984).

## От суперпозиций до теории КАМ

А. Н. Колмогоров доказал свою теорему о сохранении инвариантных торов при малом аналитическом возмущении вполне интегрируемой гамильтоновой системы в 1954 году. Позже он рассказывал, что подумывал об этой задаче в течение десятилетий, начиная с детского чтения «Астрономии» Фламариона, но что успех пришел только после наступления со смертью Сталина в 1953 году новой эпохи в русской жизни. Надежды, которые породила эта смерть, оказали на Колмогорова глубокое влияние, и период 1953–1963 был одним из самых продуктивных в его жизни.

Исходной точкой работы 1954 года об инвариантных торах был математический практикум для второкурсников мех-мата, введенный Колмогоровым в обязательную программу в то время, когда компьютеры были практически недоступными в России. В качестве одной из задач практикума он выбрал исследование интегрируемых динамических систем (геодезических на поверхностях вращения, движения тяжелой частицы по горизонтально лежащему тору и т.п.). К его удивлению, во всех этих интегрируемых системах наблюдалось условно периодическое движение вдоль инвариантных торов в фазовом пространстве.

Пытаясь понять это явление, Колмогоров исследовал его абстрактный вариант: динамическую систему на торе, заданную полем дивергенции нуль по отношению к какому-либо элементу объема. В заметке 1953 года в ДАН Колмогоров доказал, что такое векторное поле «общего положения» (удовлетворяющее некоторым почти всегда выполненным диофантовым условиям на средние частоты) эквивалентно стандартному (трансляционно-инвариантному) полю на торе<sup>1</sup>. Такое поле определяет квазипериодическое («условно периодическое», как говорил Колмогоров, использующий старомодную терминологию) движение. Система эргодична (не имеет нетривиальных измеримых инвариантных множеств), но не перемешивает частицы фазового пространства (тора), которые поток поля переносит с сохранением их формы.

<sup>1</sup> Эта теорема Колмогорова имеет естественное многомерное обобщение в теории полиинтегрируемых систем (Алгебра и анализ, 1992, 4, № 6).

Однако при некоторых «исключительных» средних частотах обращения по тору Колмогоров обнаружил не квазипериодические, а перемешивающие движения, даже в случае аналитических полей. Это перемешивание объясняется неравномерностью движения вдоль орбит, заполняющих тор квазипериодическим образом, как параллельные прямые.

Немедленно возник вопрос, имеют ли такие исключительные перемешивающие системы на торах реальное значение при изучении гамильтоновых динамических систем.

В интегрируемых системах движение вдоль торов квазипериодично. Поэтому, чтобы найти реальные приложения построенной абстрактной теории векторных полей на торе, нужно было найти инвариантные торы в неинтегрируемых системах.

Простейший способ найти их — попытаться применить какой-либо вариант теории возмущений интегрируемых систем. Именно этим путем пошел Колмогоров и именно так он пришел к теореме 1954 года о сохранении инвариантных торов.

Исходная цель при этом отнюдь не была достигнута. Движение вдоль возмущенных инвариантных торов, найденных Колмогоровым, квазипериодично. Существуют ли инвариантные торы, несущие перемешивающие вдоль них потоки, в фазовом пространстве типичной гамильтоновой системы, близкой к интегрируемой, до сих пор неизвестно. Колмогоров предполагал, что они существуют, так что эффект, обнаруженный в его заметке 1953 года, наблюдается в гамильтоновых системах общего положения, близких к интегрируемым.

Интересно отметить, что «частичный» успех работы 1954 года (результат которой сейчас известен как КАМ-теорема<sup>2</sup>) гораздо более важен, чем технический вопрос о перемешивании, на который Колмогоров безуспешно пытался ответить. Достижение Колмогорова подобно достижению Колумба, попытка которого найти западный путь в Индию закончилась неудачей.

Несколько лет спустя Колмогоров прочел курс лекций по теории динамических систем на мех-мате МГУ. Я был тогда студентом и слышал его изложение работ 1953 и 1954 годов. Как это всегда бывало с лекци-

---

<sup>2</sup> В американской литературе шестидесятых годов можно найти статьи с доказательствами «аналитического варианта теоремы Мозера» (который, конечно, есть исходная теорема Колмогорова). Ю. Мозер никогда не поддерживал эти попытки приписать ему авторство теоремы Колмогорова.

ями Колмогорова, формальных доказательств в курсе не было, но все идеи были отчетливо изложены, и у меня не было сомнений, что имеющиеся в виду доказательства правильны. Таких сомнений у меня нет и сейчас (хотя Колмогоров так и не записал свои доказательства). Текст заметки в ДАН 1954 года позволяет, по-моему, восстановить недостающие детали доказательств. Колмогоров считал, что жизнь коротка, и что ему лучше посвятить оставшееся ему время на открытие новых результатов.

Я поступил студентом на мех-мат МГУ в 1954 (вероятно, до смерти Сталина в 1953 г. или после вторжения в Чехословакию в 1968 г. это было бы для меня невозможно, так как моя мать была еврейкой, а дед был расстрелян в 1938 году по заведомо ложному обвинению в шпионаже в пользу Англии, Германии, Греции и Японии<sup>3</sup>).

В 1955–1956 гг. я занимался по наущению Колмогорова 13-й проблемой Гильберта о возможности представления любой непрерывной функции трех вещественных переменных в виде конечной суперпозиции непрерывных функций двух переменных. Колмогоров только что свел эту задачу к следующему вопросу:

*Можно ли вложить универсальное дерево в евклидово пространство так, чтобы любая непрерывная функция на нем представлялась в виде суммы непрерывных функций, каждая из которых зависит лишь от одной из координат?*

Мне удалось построить такое вложение универсального дерева в трехмерное евклидово пространство. Из этого результата следует положительность ответа на вопрос Гильберта: требуемая суперпозиция существует. Колмогоров сказал мне, что я решил 13-ю проблему Гильберта<sup>4</sup>, и что теперь следующую проблему я должен выбирать сам.

Работа над проблемой Гильберта была моей первой серьезной математической работой. Я все еще был студентом-младшекурсником, совершенно невежественным почти во всей остальной математике. Поэтому я решил продолжить занятия представлением функций в виде

---

<sup>3</sup> Семье сперва сообщили, что он приговорен к 10 годам лагерей без права переписки. Позже КГБ дважды сообщал нам различные ложные сведения о причине, месте и времени его смерти. Наконец, уже в 1990-е годы нам выдали справку о реабилитации, ознакомив с документами, включающими приговор «тройки» к расстрелу и сведения о его немедленном приведении в исполнение.

<sup>4</sup> Сейчас я думаю, что вопрос о представлении алгебраических функций трех переменных суперпозициями алгебраических функций двух переменных был бы более разумным, чем собственная формулировка Гильберта.

сумм слагаемых, зависящих лишь от одной из координат. Естественно было посмотреть, что произойдет, если множество, на котором заданы функции, которые мы хотим представить в виде суммы функций от координат, не является деревом.

Простейшая кривая, не являющаяся деревом, есть окружность. Поэтому я попытался представить в виде суммы функций от координат функцию на замкнутой плоской кривой.

Эта задача немедленно привела меня к динамической системе, заданной на кривой.

Я начал с простейших (выпуклых) гладких замкнутых кривых, вроде эллипса. Такая кривая пересекается прямыми, параллельными координатным осям, в двух (изредка совпадающих) точках. Инволюция  $A$ , переставляющая обе точки пересечения с каждой из прямых  $x = \text{const}$ , и инволюция  $B$ , переставляющая обе точки пересечения с каждой из прямых  $y = \text{const}$ , определяют сохраняющий ориентацию диффеоморфизм  $T = AB : S^1 \rightarrow S^1$  кривой в себя.

Разрешимость задачи о представлении функции  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  в виде  $a(x) + b(y)$  зависит от свойств динамической системы  $T : S^1 \rightarrow S^1$ . Например, если  $P$  — периодическая точка ( $T^n P = P$ ), то для представимости необходимо, чтобы разлагаемая функция  $f$  удовлетворяла соотношению

$$f(P) + f(TP) + \dots + f(T^{n-1}P) = f(Q) + f(TQ) + \dots + f(T^{n-1}Q),$$

где  $Q = AP$ . Если же динамическая система  $T$  не имеет периодических точек, то легко построить формальное представление  $f = a + b$ , произвольно выбрав значение  $a$  в одной точке. (Знание суммы  $f$  и одного из слагаемых  $a$  или  $b$  в каждой последующей точке ломаной  $P, Q, TP, TQ, T^2P, T^2Q, \dots$  позволяет найти второе слагаемое.) Вопрос о непрерывности и гладкости построенных функций  $a$  и  $b$ , однако, далеко не так прост.

Динамическая система  $T$ , заданная на окружности, имеет число вращения, определенное Пуанкаре. Оно может быть рациональным или иррациональным. В рациональном («резонансном») случае отображение  $T$  имеет, как правило, притягивающие и отталкивающие периодические точки. При иррациональном числе вращения отображение  $T$  приводится гомеоморфной заменой координаты на окружности к повороту на несоизмеримый с  $2\pi$  угол (по теореме Пуанкаре и Данжуа).



Я попытался доказать, что эта гомеоморфная замена переменной является диффеоморфизмом (для типичных чисел вращения, удовлетворяющих обычным диофантовым условиям, тем же, что в теореме Колмогорова об инвариантных торах).

Я рассмотрел аналитический случай и предположил, что отображение аналитически близко к повороту. Так обстоит дело, например, в случае, когда исходная плоская кривая близка к эллипсу. Метод Колмогорова применим к этой задаче теории возмущений и позволяет доказать гладкость гомеоморфизма Данжуа.

Удивительным оказалось то, что моя попытка стать независимым от учителя и решить свою собственную задачу, избегая задачи, поставленные другими, привела меня к проблеме, столь близкой к другой области деятельности Колмогорова. Таинственные взаимосвязи между на вид никак не связанными областями математики и сейчас остаются для меня загадочными. Открытие таких взаимосвязей — одно из самых больших наслаждений, доставляемых математикой, и мне повезло испытать его несколько раз в разных ее областях. Между прочим, задача о представлении функций на кривой суммой функций от координат снова появилась в теории особенностей, где ее решение (С. М. Воронин, Ж. Дюфур, 1981) оказывается различным в бесконечно-гладком и в аналитическом случаях.

Доказав гладкость гомеоморфизма Данжуа для типичных малых возмущений поворота, я стал искать, занимался ли кто-нибудь этими вопросами в промежутке между работой Данжуа 1932 года и моей работой 1958 года. В числе прочих я отыскал статьи К. Л. Зигеля о линеаризации голоморфных отображений в окрестности неподвижных точек. Точнее говоря, я сначала сам придумал эту задачу (в качестве упрощенной модели задачи об отображениях окружности) и решил ее методом Колмогорова. Потом уже я обнаружил работу Зигеля, получившего тот же результат другим методом<sup>5</sup> около 1940 года.

«Мы в хорошей компании!» — сказал мне Колмогоров, когда я рассказал ему о своих библиографических изысканиях. Насколько я понимаю, ни работы Зигеля, ни работы Литльвуда об экспоненциальной медленности нарастания возмущений не были ему известны.

Я пытался доказать еще несколько своих гипотез об аналитических диффеоморфизмах окружности. Первая гипотеза состояла в том,

<sup>5</sup> После ряда недавних работ Элиассона, Трубовица и других стала ясна близость метода Зигеля к диаграммным методам квантово-полевой теории возмущений.

что гомеоморфизм Данжуа (сопрягающий аналитическое отображение с поворотом) является гладким (аналитическим) при выполнении обычных диофантовых условий на число вращения.

Гладкость гомеоморфизма Данжуа означает существование гладкой инвариантной меры для исходного диффеоморфизма. Я построил примеры аналитических диффеоморфизмов, для которых инвариантная мера сингулярна (не абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега). Числа вращения этих диффеоморфизмов необычно хорошо приближаются рациональными числами. Такие необычные числа образуют множество меры нуль.

Доказать гипотезу о гладкости инвариантной меры без предположения о близости отображения к повороту удалось лишь (более двадцати лет спустя) М. Эрману.

Вторая гипотеза касается естественной границы комплексной окрестности вещественной окружности, в которую гомеоморфизм Данжуа продолжается голоморфно. Такая окрестность не может содержать периодических точек исходного голоморфного отображения. Гипотеза состояла в том, что (скажем, для отображений вида  $x \mapsto x + a + b \sin x$ ,  $|b| < 1$ ) периодические точки имеются в окрестности любой точки границы области голоморфности отображения Данжуа (и на самой границе).

Аналогичные гипотезы были недавно доказаны Иокоссом и Пересом-Марко для частного случая рациональных отображений. При этом были построены и контрпримеры к исходной гипотезе, но только для исключительных чисел вращения (образующих множество меры нуль). Вопрос, верна ли исходная гипотеза для не рациональных отображений, подобных указанному выше, остается, насколько мне известно, открытым.

В 1958–1959 годах я обсуждал эти работы об отображениях окружности на себя со многими математиками. И. М. Гельфанд объяснил мне связь отображений окружности со своими с М. Л. Цейтлиным исследованиями сердечных аритмий. С. Л. Соболев и его ученики Н. Н. Вахания и Р. А. Александрян указали мне на близость этих задач к некоторым вопросам спектральной теории дифференциальных операторов, возникшим в связи с работами Соболева о колебаниях жидкости во вращающихся ракетах. Эти работы Соболева, выполненные в 1943 году, были только что рассекречены (они опубликованы в 1960 году). Проф. Гольденвейзер объяснил мне связь задачи Дирихле для волнового

уравнения, ради которой я начал исследование отображений окружности на себя, с изучением устойчивости тонких оболочек гиперболической кривизны. Резонансы соответствуют в этой задаче специальной неустойчивости оболочек, вспучивающихся вдоль многоугольников, составленных из асимптотических линий поверхности оболочки, попарно соединенных в находящихся на краю этой поверхности вершинах.

Все эти приложения обсуждались в моей дипломной работе, защищенной на кафедре теории функций и функционального анализа механики МГУ в апреле 1959 года.

Эта работа была в том же году отправлена в журнал Известия АН СССР, серия математическая. Колмогоров, однако, посоветовал мне выбросить из работы два параграфа: один о биении сердца, а другой о влиянии малого шума на инвариантную меру.

«Теория биения сердца — интересное приложение, — сказал он, — но это не одна из тех классических проблем, над которыми следует работать математику». «Лучше бы Вы, — добавил он, — занялись приложением этих идей к небесной механике, к движению твердого тела и к таким классическим задачам, как проблема устойчивости Солнечной системы».

В параграфе о влиянии малого шума на инвариантную меру речь шла об асимптотиках решений уравнения Фоккера–Планка (и его дискретных аналогов) при стремлении коэффициента диффузии к нулю, а времени к бесконечности. Сегодня эти асимптотики включаются в общую схему теории Морса–Виттена (где, впрочем, случай дискретного времени, кажется, до сих пор не рассмотрен). Колмогоров, естественно, не одобрил мое кустарное вторжение в по праву принадлежащую ему классическую область теории случайных процессов.

Это был единственный случай вмешательства Колмогорова в мои занятия. Хотя он и был моим научным руководителем, Андрей Николаевич после работы над проблемой Гильберта предоставил мне полную свободу заниматься чем угодно. Он даже сказал мне, что считал бы вредными для меня любые свои советы, в особенности в том, что касается выбора направления дальнейших исследований. Впрочем, позже А. Н. посоветовал мне включить в аспирантский план работы Милнора о дифференцируемых структурах на сферах, что было чрезвычайно полезным (и привело меня к учебе у С. П. Новикова, Д. Б. Фукса и В. А. Рохлина).

Итак, я сократил дипломную работу, и в сокращенном виде она через два года появилась (в Известиях АН, 1961). Поскольку английский перевод вышел в 1965 году, на эту работу обычно ссылаются как на «Arnold 1965». Исключенный параграф о биении сердца был позже частично опубликован в Собрании сочинений И. М. Гельфанда (т. 3). К этому времени большая часть из его содержания была переоткрыта канадским физиологом Л. Глассом (который использовал математические теоремы из «Arnold 1965»).

Однажды Колмогоров пригласил сделать доклад на своем семинаре 1958–1959 гг. по теории динамических систем на мех-мате МГУ двух знаменитых физиков, своего старого друга и сотрудника М. А. Леонтовича<sup>6</sup> и Л. А. Арцимовича из Института атомной энергии. Они рассказали о математических задачах теории удержания частиц в реакторах для управляемого термоядерного синтеза.

Одна из проблем состояла в доказательстве существования так называемых магнитных поверхностей в системах торической геометрии типа Токамак. Магнитные поверхности — это поверхности, заполненные магнитными линиями. Пример такой поверхности был указан в двадцатые годы И. Е. Таммом<sup>7</sup> в его учебнике по теории электричества.

Из теоремы Колмогорова следует сохранение большинства вложенных друг в друга магнитных поверхностей в системах с «широм» (где число вращения меняется при переходе с одного тора на другой).

Сохранение магнитных поверхностей было более или менее прямым следствием теоремы Колмогорова, но для физиков вся современная теория динамических систем была в то время новой, неожиданной и казалась им неправдоподобной. В учебнике Ландау и Лифшица было написано, что всякая гамильтонова система либо вполне интегрируема, либо эргодична на каждом многообразии уровня известных интегралов. Инвариантные торы (в интегрируемых системах) упоминались, правда, во «Введении в атомную механику» Борна. Они назывались в русском переводе 1934 года «трехизмерительными разновидностями».

---

<sup>6</sup> Интересно отметить, что в их совместной работе о траекториях броуновского движения Колмогорову принадлежит физическая, а Леонтовичу — математическая часть.

<sup>7</sup> Арцимович, Леонтович и Тамм принадлежали к числу наиболее активных физиков-теоретиков русского атомного проекта. Леонтович и Тамм были близкими друзьями моего отца и помогли нашей семье пережить трудные годы после его смерти (мне было тогда одиннадцать лет).

Вторая проблема, поставленная Леонтовичем и Арцимовичем, состояла в изучении поведения адиабатических инвариантов, например, в ловушках с магнитными зеркалами. В этой теории заряженная частица быстро движется по спирали вокруг магнитной линии (под действием силы Лоренца). Ларморовский радиус — расстояние до магнитной линии — мал, и адиабатическое приближение предсказывает, что он будет оставаться малым даже и после многих отражений от магнитных зеркал.

Типичный пример здесь — движение заряженной частицы в магнитном поле Земли между двумя магнитными полюсами. Колебания при движении ларморовского центра вдоль силовой линии с отражением вблизи полюсов наблюдаются в виде полярных сияний.

В задачах об удержании частиц в ловушке нужно знать, что произойдет после многих миллионов отражений. На этот вопрос адиабатическое приближение не дает ответа — требуются новые методы.

Я начал работать над этим вопросом, не забывая и о приложениях к небесной механике. Читая «Новые методы небесной механики» Пуанкаре и обсуждая прочитанное с В. М. Алексеевым, я понял, что для применения метода Колмогорова к проблеме устойчивости планетных систем нужно преодолеть несколько трудностей. Некоторые из них присутствуют уже в проблеме об адиабатических инвариантах.

Главная трудность была названа Борном «собственным вырождением»: некоторые из частот возмущенного квазипериодического движения исчезают вместе с возмущением. Эта трудность имеется уже в проблеме вечной адиабатической инвариантности системы с медленно периодически меняющимся параметром, где отношение медленной частоты изменения параметра к быстрой частоте основного движения является малым параметром задачи.

В небесной механике основным малым параметром является отношение масс планет к массе Солнца. Оно составляет порядка  $10^{-3}$ . Кеплеровы эллипсы неподвижны в пространстве, если не учитывать взаимного притяжения планет. При учёте взаимного притяжения планет эллипсы начинают медленно двигаться. Угловые скорости их медленного вращения малы вместе с возмущением. Поэтому в следующем после кеплерова квазипериодическом приближении к движению планет присутствуют как быстрые (кеплеровы), так и медленные («вековые») частоты, малые вместе с возмущением.

Другой особенностью планетной задачи является так называемое предельное вырождение. Эксцентриситеты и взаимные наклоны орбит планет малы. Предельный случай нулевых эксцентриситетов и наклонов соответствует вырождению движения первого приближения, описанного выше. Этот вид вырождения аналогичен вырождению семейства вложенных торических магнитных поверхностей, сжимающихся к лежащей внутри их всех центральной окружности.

Простейшей математической моделью, где присутствует этот вид вырождения, является сформулированная Биркгофом задача об устойчивости неподвижной точки сохраняющего площади отображения плоскости в себя. Я решил начать с этой задачи.

Решение этой проблемы Биркгофа было закончено в 1960 году и появилось в ДАН СССР в 1961 г. (137, № 2, 255–257). Этот результат не так уж сильно отличается от первоначальной теоремы Колмогорова 1954 г., но он доставляет решение старой классической задачи, являясь в то же время необходимым шагом для исследования проблемы планетных движений.

После этого я обратился к собственному вырождению. Сначала, в качестве модельной задачи, я рассмотрел случай негамильтоновой системы, в которой отношение частот пропорционально параметру возмущения (ДАН, 1961, 138, № 1, 13–15).

Этот случай уже не укладывается в стандартные рамки теории возмущений и метода Колмогорова, так как решение не разлагается в ряд Тейлора по параметру возмущения.

Теперь можно было применить развитую технику в задаче об адиабатических инвариантах. Когда я сделал это, Колмогоров предложил мне отдать статью о вечной адиабатической инвариантности в ЖЭТФ, главный физический журнал СССР.

Через несколько недель М. А. Леонтович, бывший, кажется, заместителем редактора ЖЭТФ, пригласил меня к себе домой (он жил около Института атомной энергии), чтобы обсудить статью. Накормив меня, как обычно, гречневой кашей и называя меня, как обычно, Димкой (коим я для М. А. и оставался до самой его смерти), Михаил Александрович сообщил мне, что работа не может быть опубликована в ЖЭТФ по следующим причинам:

1. В работе содержатся недопустимые в ЖЭТФ слова «теорема», «доказательство».

2. В работе утверждается, что «из  $A$  вытекает  $B$ », в то время как каждый физик знает примеры, показывающие, что  $A$  из  $B$  не вытекает.

3. В работе упоминаются непонятные термины «мера Лебега», «инвариантные торы», «диофантовы условия».

Поэтому Михаил Александрович предложил мне переписать статью.

Сегодня я понимаю, насколько он был прав, защищая физический журнал от бурбакистского математического жаргона.

Например, утверждая «из  $A$  вытекает  $B$ », автор, действительно, обязан явно указать, верно ли обратное, иначе любой неиспорченный математическим жаргоном читатель воспримет утверждение как « $A$  эквивалентно  $B$ ».

Сегодня каждый физик, изучающий гамильтонов хаос или употребляющий КАМ-теорию в проблемах удержания плазмы или теории ускорителей, свободно использует и меру Лебега, и инвариантные торы, и диофантовы условия. Но в 1961 году одна из первых статей по теории, ныне называемой КАМ, была, как видим, отвергнута ведущим физическим журналом за употребление этих терминов (а также слов «теорема» и «доказательство»).

В результате я забрал статью из ЖЭТФ, и она появилась только годом позже (ДАН СССР, 1962, 142, № 4, 758–761). Первая длинная работа по теории КАМ («Малые знаменатели I», где в 1959 г. впервые был подробно описан метод Колмогорова) также была первоначально отвергнута редакцией Известий АН СССР, но в конце концов вышла из печати в январе 1961 г.

Математические связи России с Западом начали восстанавливаться после смерти Сталина, благодаря хрущевской «оттепели». Колмогоров был изолирован от западных коллег около 15 лет (1938–1953), но в начале шестидесятых годов в Москве начали появляться иностранные математики.

Первым моим серьезным математическим контактом с иностранным математиком была встреча со Смейлом, посетившим Москву осенью 1961 года. В числе других интересных вещей, которые Смейл рассказал мне *на крыше* высотного здания МГУ (скорее чем *на ступенях*, как он пишет в своих воспоминаниях), было сообщение о том, что Ю. Мозер начал работать над проблемой инвариантных торов. Через несколько месяцев появилась замечательная работа Мозера в Proc. Nat. Acad. of Sc., в которой он скомбинировал метод Колмогорова со

сглаживанием Нэша, применяя эти идеи к задаче об изометрическом вложении риманова многообразия в евклидово пространство.

Этот мощный метод позволил ему позже доказать теорему типа Колмогорова для возмущающих функций конечной гладкости. К своему стыду я должен сознаться, что так и не прочел доказательств Мозера, а ограничился тем, что самостоятельно применил его идеи. Из-за этого одна странная техническая ошибка всех доказательств Мозера (отсутствовавшая в моей версии его теории) оставалась незамеченной около 30 лет, пока ее не обнаружил М. Севрюк.

Результаты Мозера были удивительными. Колмогоров предполагал, что для сохранения инвариантных торov недостаточна даже бесконечная гладкость возмущения. «Достижение Мозера, — сказал он мне, — меняет всю нашу философию.»

На Международном математическом конгрессе в Стокгольме (в августе 1962 г.) я впервые встретил Ю. Мозера. Он был приглашенным докладчиком и рассказывал о своем решении проблемы Биркгофа об устойчивости неподвижных точек сохраняющих площадь отображений плоскости на себя.

Вместо требования аналитичности в моей работе 1961 года Мозер требовал существования всего лишь 333-х производных (за последующие 30 лет порядок нужных производных сократился до третьего). Еще более удивительной для меня была замена условия нерезонансности Биркгофа требованием отсутствия всего лишь конечного числа «сильных» резонансов (порядка, меньшего пяти). Рациональные числа со знаменателями, бóльшими четырех, ведут себя в этой задаче как иррациональные. В работе 1961 г. я прозевал это обстоятельство, хотя мое доказательство (в аналитическом случае) дословно проходило не только в отсутствие резонансов, но и при слабых резонансах (порядка, превышающего четыре).

Вместо того, чтобы думать о природе вещей, я старался в этой работе решить «спортивную» задачу, сформулированную Биркгофом. В формулировке Биркгофа все резонансы запрещены. Загипнотизированный этим обстоятельством, я не заметил, что мое доказательство доставляет больше, чем решение задачи Биркгофа. Это был хороший урок — никогда не следует поддаваться гипнотическому влиянию авторитетов.

Путешествие на Стокгольмский конгресс 1962 г. было моим первым заграничным путешествием. Мой доклад был посвящен проблеме



устойчивости планетных систем, но «панель» (комитет, выбирающий докладчиков) и Программный комитет не сочли планетные системы достойными приглашенного доклада на Математическом конгрессе.

К счастью, в те времена краткие сообщения неприглашенных докладчиков заслушивались на специальных сессиях 15-минутных докладов, так что доклад я все равно прочел.

Организационные комитеты Международных математических конгрессов приложили много усилий для изничтожения неприглашенных докладов. Вопрос о том, хорошо ли это, вызывает споры. Лучшим (и самым для меня важным) докладом из всех, какие я слышал на Математических конгрессах, был доклад Ф. Хирцебруха на Московском конгрессе 1966 года о работах Брискорна о связи теории особенностей со сферами Милнора. Хирцебрух не был приглашенным докладчиком. Я думаю, что вред от малоинтересных неприглашенных докладов меньше, чем потеря от отклонения важных и интересных докладов. Галуа вряд ли пригласили бы на Конгресс. В 1992 г. В. Васильева не пускали на заседания I Европейского математического конгресса в Париже, хотя о его работах рассказывалось в докладах четырех приглашенных докладчиков.

Моя статья о проблеме устойчивости планетных систем была опубликована в 1962 г. (ДАН, 145, № 3, 487–490). Эта работа технически очень сложна. Она зависит от леммы о диофантовых приближениях в сложной ситуации с несколькими малыми параметрами (что является следствием как собственного, так и предельного вырождения в этой задаче). Подробное доказательство опубликовано в Успехах математических наук, 1963, 18, № 6 («Малые знаменатели III»). Оно является комбинацией идей работ об адиабатических инвариантах и о проблеме устойчивости Биркгофа.

Шестидесятилетие Колмогорова праздновалось в Актовом зале Московского университета в апреле 1963 года. Я прочел доклад о его работах об инвариантных торах, показав, как вывести из них устойчивость быстрого вращения тяжелого несимметричного твердого тела. Эта работа «Малые знаменатели II», опубликованная в Успехах математических наук (1963, 18, № 5), содержит первое подробное доказательство теоремы Колмогорова 1954 года о сохранении инвариантных торов при малом аналитическом возмущении вполне интегрируемой гамильтоновой системы (*метод* Колмогорова был подробно опубликован

уже в 1961 г. в моей работе 1959 года «Малые знаменатели I» об отображениях окружности).

Главное из моих собственных достижений в теории возмущений неинтегрируемых гамильтоновых систем было опубликовано в ДАН, 1964 (156, № 1, 9–12). Эта работа описывает универсальный механизм неустойчивости гамильтоновых систем со многими степенями свободы, который позже физики назвали «диффузией Арнольда». Эта «диффузия» противоречила интуиции Колмогорова, который думал, что устойчивость может сохраняться и в многомерных системах общего положения, несмотря на то, что устойчивость в этих случаях не обеспечивается существованием инвариантных торов.

В системах с маломерным фазовым пространством инвариантные торы запирают заключенные между ними области и тем самым обеспечивают устойчивость (например, в проблеме Биркгофа). В статье 1964 г. я построил пример неустойчивости в ситуации, когда колмогоровские торы сохраняются. Я предполагал тогда (и предполагаю сейчас), что описанный в этой работе механизм «диффузии» действует в системах общего положения, так что типичным оказывается существование траекторий, соединяющих окрестность любого инвариантного  $n$ -мерного тора близкой к интегрируемой гамильтоновой системы с окрестностью любого другого такого тора на той же гиперповерхности уровня энергии (если размерность этой гиперповерхности  $2n - 1 \geq 5$ , т.е. если  $n > 2$ ). Однако это не доказано.

Я не думаю, чтобы можно было говорить о какой-либо КАМ-теореме. Колмогоров правильно доказал свою теорему в 1954 г., что ясно видно из его заметки в ДАН. Вероятно, правильнее было бы говорить о КАМ-теории, состоящей из многих теорем. Я постарался описать выше вклад каждого из трех авторов.

Предисловие ко второму изданию книги  
«Лекции по уравнениям с частными производными»

Теория уравнений с частными производными считалась в середине этого века вершиной математики — как вследствие трудности и значения решаемых ею задач, так и потому, что она сформировалась позже большинства математических дисциплин.

Сегодня многие склонны пренебрежительно рассматривать эту замечательную область математики как старомодное искусство жонглирования неравенствами или как полигон для приложений функционального анализа. Соответствующий курс даже исключен из обязательной программы ряда университетов (например, в Париже). Более того, такие замечательные учебники, как классический трехтомник Гурса, были выкинуты библиотекой университета Париж-7 за ненадобность (и только благодаря моему вмешательству удалось спасти их, наряду с курсами лекций Клейна, Пикара, Эрмита, Дарбу, Жордана, ...).

Причина вырождения важной общематематической теории в бесконечный поток работ «Об одном свойстве одного решения одной краевой задачи для одного уравнения» состоит, вероятно, в попытке создать единую всеобъемлющую сверхабстрактную «теорию всего».

Основным источником уравнений с частными производными являются модели сплошных сред математической и теоретической физики. Попытки распространить замечательные достижения математической физики на сходные с ее моделями лишь формально системы приводят к сложным и труднообозримым теориям, подобно тому, как попытки распространить геометрию поверхностей второго порядка и алгебру квадратичных форм на объекты более высоких степеней быстро заводят в дебри алгебраической геометрии с ее обескураживающей иерархией сложных вырождений и вычислимыми лишь принципиально ответами.

В теории уравнений с частными производными положение еще хуже: трудности коммутативной алгебраической геометрии соединяются здесь с некоммутативной дифференциальной алгеброй совершенно неразделимым образом, и вдобавок возникающие вопросы топологии и анализа глубоко нетривиальны.

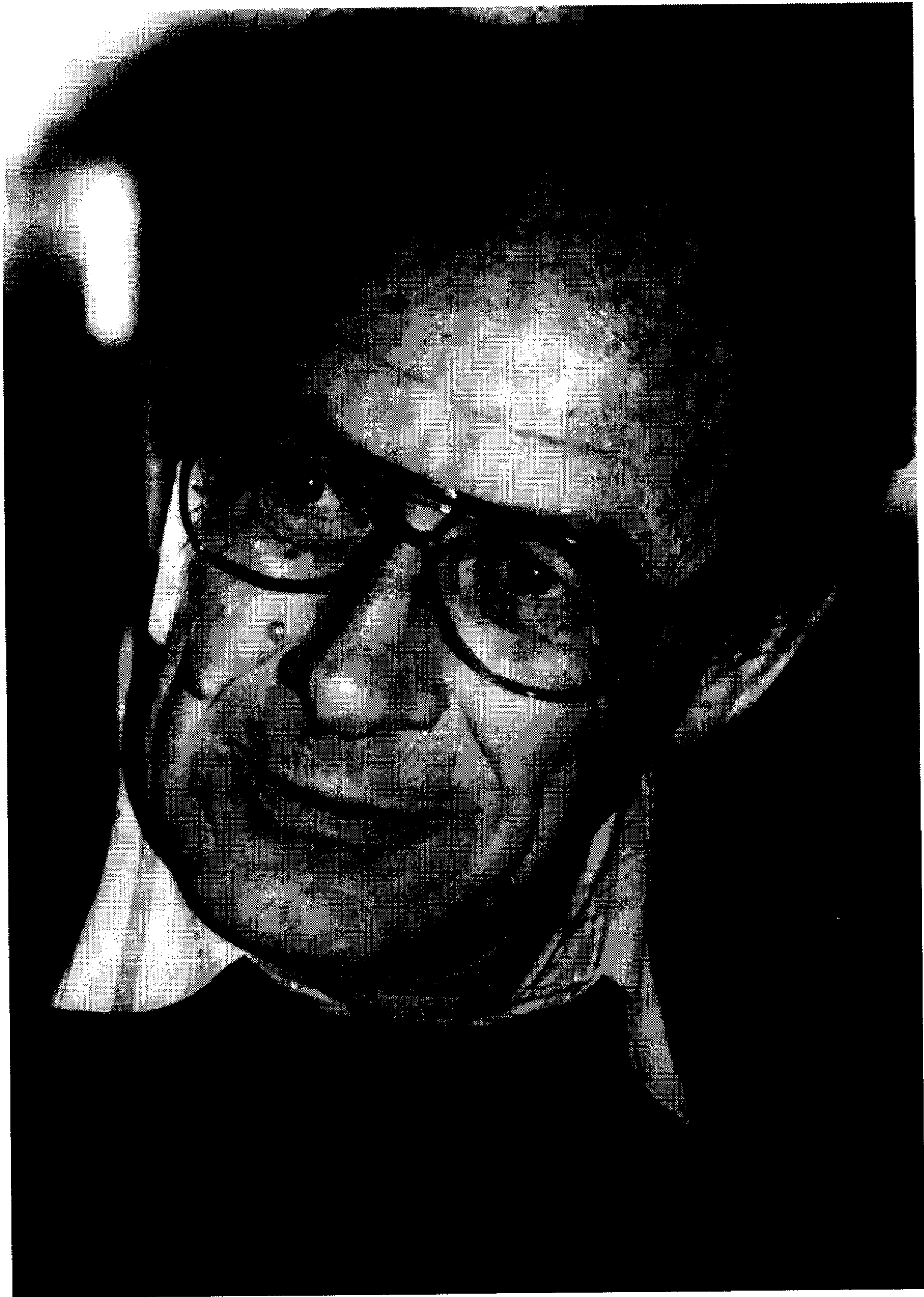
В то же время общефизические принципы и такие общие понятия, как энергия, вариационный принцип, принцип Гюйгенса, лагранжиан, преобразование Лежандра, гамильтониан, собственные числа и собственные функции, двойственность волна-частица, дисперсионные соотношения, фундаментальные решения, прекрасно работают в многочисленных важнейших задачах математической физики. Их исследование стимулировало развитие больших отделов математики, таких, как теория рядов и интегралов Фурье, функциональный анализ, алгебраическая геометрия, симплектическая и контактная топология, теория асимптотик интегралов, микролокальный анализ, теория индекса (псевдо)дифференциальных операторов и т.д.

Знакомство с этими фундаментальными математическими идеями является, на мой взгляд, абсолютно необходимым для каждого работающего математика. Их исключение из университетского преподавания математики, совершившееся или совершающееся во многих западных университетах под влиянием схоластов-аксиоматизаторов (не знакомых ни с какими приложениями и не желающих знать ничего, кроме «абстрактной чепухи» алгебраистов), представляется мне крайне опасным последствием бурбакизации и математики, и ее преподавания. Стремление уничтожить ненужную схоластическую псевдонауку является естественной и законной реакцией общества (в том числе научного) на безответственную и самоубийственную агрессивность «сверхчистых» математиков, воспитанных в духе Харди и Бурбаки.

Автор этого очень короткого курса лекций старался познакомить с калейдоскопом фундаментальных идей математики и физики студентов-математиков с минимальными познаниями (линейная алгебра и основы анализа, включая обыкновенные дифференциальные уравнения). Вместо обычного в математических книгах принципа наибольшей общности автор старался придерживаться принципа минимальной общности, согласно которому каждая идея должна быть вначале ясно понята в простейшей ситуации, и только затем развитый метод может переноситься на более сложные случаи.

Хотя доказательство общего факта обычно бывает проще, чем доказательство его многочисленных частных случаев, содержание математической теории для обучающегося не больше, чем набор хорошо и до конца понятых им примеров. Поэтому именно примеры и идеи, а не общие теоремы и аксиомы, составляют основу этой книги. Экзаменационные задачи в конце курса составляют существенную его часть.

Особое внимание было уделено взаимодействию предмета с другими областями математики: геометрией многообразий, симплектической и контактной геометрией, комплексным анализом, вариационным исчислением, топологией. Автор рассчитывал на любознательного студента, но надеется, что даже профессиональные математики других специальностей смогут познакомиться по этой книжке с основными и потому простыми идеями математической физики и теории уравнений с частными производными.



## Об эпитафье к «Евгению Онегину»

Французский эпитафья к «Евгению Онегину» таков:

Pétri de vanité, il avait encore plus de cette espèce d'orgueil qui fait avouer avec la même indifférence les bonnes comme les mauvaises actions, suite d'un sentiment de supériorité, peut être imaginaire.

*Tiré d'une lettre particulière.*

То есть:

Проникнутый тщеславием, он обладал в еще большей степени тем особенным видом гордости, который заставляет признавать с одинаковым безразличием как свои хорошие, так и дурные поступки, из чувства превосходства, быть может мнимого.

*Из частного письма.*

Обычно считается, что это «частное письмо» — мистификация Пушкина, который сам сочинил текст эпитафья.

Перечитывая недавно «Опасные связи» Шодерло де Лакло, я наткнулся на следующую фразу (в письме L президентши де Турвель виконту де Вальмону):

Je n'ai pas la vanité qu'on reproche à mon sexe; j'ai encore moins cette fausse modestie qui n'est qu'un raffinement de l'orgueil...

То есть:

Я не обладаю тщеславием, в котором упрекают мой пол; еще в меньшей степени я обладаю той ложной скромностью, которая является всего лишь утонченной гордостью...

Сходство с пушкинским эпитафьем меня поразило. Я подумал, что Пушкин заменил «я не обладаю» на «он обладал», приспособивая скорее

к себе, чем к Онегину, фразу из романа, «в котором отразился век, и современный человек изображен довольно верно, с его безнравственным умом, кипящим в действии пустом», быть может неосознанно.

Склонный к мистификации, он мог не в меньшей степени стремиться скрыть заимствование из романа, о котором он в другом месте сказал: «мать дочери велит на эту книгу плюнуть» — из чувства осторожности, быть может оправданного. «Скромный автор», как называл себя Пушкин, позволял себе перевести лишь половину «славного стиха» или мистифицировать читателя понятными лишь посвященным намеками («я слышал, дам хотя заставить...» и т.д.). Кто-нибудь из друзей или современников Пушкина мог знать источник эпиграфа.

Пушкинские «заимствования» (Фауст, Анджело, письмо Татьяны — на Западе и всего Онегина считают переделкой байронова Дон Жуана) никогда не бывают точными переводами. Текст эпиграфа напоминает текст письма президентши де Турвель не в меньшей степени, чем «Роман в письмах» Пушкина, очевидно вдохновленный «Опасными связями» (хотя и не только ими).

Будучи по профессии не литературоведом (и еще в меньшей степени пушкинистом), а математиком, я вынужден в своей работе постоянно опираться не на доказательства, а на ощущения, догадки и гипотезы, переходя от одного факта к другому при помощи того особенного вида озарения, который заставляет усматривать общие черты в явлениях, быть может, кажущихся вовсе не связанными между собой постороннему.

Правильная догадка сопровождается ощущением полной ненужности дальнейших доказательств, ощущением почти болезненным, которое не забывается, но которое трудно передать другим.

Я пытался выше заставить читателя пережить ощущение уже виденного, подобное тому, которое я испытал при чтении письма L из «Опасных связей».



# Комментарии

редактора и издателя



## Иллюстрации

Все иллюстративные материалы (фотографии, рисунки, дипломы, письма) представлены автором из личного архива. К сожалению, не во всех случаях удалось точно установить дату и место фотографии, а также имя фотографа.

- с. II: Ехсмо. Sr. Don Vladimir Igorevich Arnold — Doctor Honoris Causa — Universidad Complutense, Madrid, 1994 (фото «Crismakolor Fotografia»)
- с. X: Монодромия и слой Милнора (Воронеж, 1979)
- с. XLII: Дискуссия в лесу, апрель 1983 (фото С. М. Ягужинского)
- с. 2: 1959
- с. 18: 1960 (фото А. Н. Колмогорова)
- с. 24: На ступенях МГУ с Я. Г. Синаем, 1963 (фото J. Moser'a)
- с. 30: В Париже, 1965 (фото G. Bloncourt'a)
- с. 38: Диплом лауреата Ленинской премии
- с. 46: В походе с Я. Г. Синаем и А. Л. Крыловым, 1964
- с. 54: Париж, 1965 (фото G. Bloncourt'a)
- с. 68: МГУ, 1969
- с. 102: Перед заседанием Оргкомитета Международного конгресса математиков (Москва, 1966) в кабинете ректора МГУ с А. А. Кирилловым и И. Г. Петровским. На обороте фотографии надпись:  
*На память об Иване Георгиевиче Петровском  
Владимиру Игоревичу Арнольду*  
*О. Петровская  
9 апреля 1973 г.*
- с. 128: По реке Мезе с сыном, 1969
- с. 138: «Алтайские горы», 1969
- с. 174: После лекции школьникам в Крыму (1971)
- с. 188: Краевые особенности (Воронеж, 1979)
- с. 288: Диплом Почетного члена Лондонского математического общества

- с. 334: Непрочитанная лекция
- с. 350: В лесу с С. П. Новиковым, 1983 (фото С. М. Ягужинского)
- с. 364: На лыжах, 1986 (фото Ю. С. Ильяшенко)
- с. 390: На юбилее И. М. Гельфанда в МГУ, сентябрь 1983 (фото В. В. Минахина)
- с. 424: 80-е годы
- с. 430: Ясенево, 1987 (фото С. Здравковской)
- с. 454: В гостях, 1986
- с. 470: У портрета Дирака в Лондонском Королевском обществе, 1988
- с. 500: На даче с женой, 1990
- с. 504: Спор с С. П. Новиковым на юбилее И. М. Гельфанда, сентябрь 1983 (фото В. В. Минахина)
- с. 552: Вручение дипломов и почетных медалей иностранных членов Парижской Академии наук А. Д. Сахарову и В. И. Арнольду руководителем делегации Парижской Академии наук А. Guinier'ом в посольстве Франции в Москве, 1986 (фото Б. Кауфмана)
- с. 576: В Независимом Московском Университете, 1995
- с. 626: 1983 (фото В. В. Минахина)
- с. 628: Запись слов А. Н. Колмогорова сделана В. М. Тихомировым. Он вспоминает:

*Отправляясь поздравить В. И. Арнольда с его пятидесятилетием, я спросил у А. Н. Колмогорова, не хочет ли он что-нибудь сказать своему ученику. Андрей Николаевич сразу же стал диктовать. Слова давались ему с трудом: уже несколько лет ужасный недуг — болезнь Паркинсона — сковывал его речь. Но разум его оставался ясным.*

*Послание учителя ученику замечательным образом характеризует обоих: Владимира Игоревича, личность и творчество которого получили столь восторженную и проникательную оценку, и самого Андрея Николаевича, стоявшего на пороге смерти (через четыре месяца его не стало), но сохранившего запас душевной щедрости и способности восхищаться.*

*Это было последнее выступление Андрея Николаевича в его жизни. Но оно не воспринимается как прощание. Это — благословение.*

... Когда в тот же день я передал Владимиру Игоревичу этот текст, он был очень расстроган, но не преминул восстановить справедливость: знатоком голосов птиц был не сам Владимир Игоревич, а его отец — Игорь Владимирович Арнольд, учившийся в аспирантуре МГУ вместе с Андреем Николаевичем.

- с. 644: Из письма Я. Б. Зельдовича от 29.05.1983
- с. 652: Из письма А. Н. Колмогорова от 02.04.1958
- с. 678: Таинственные математические триады. Лекция в Независимом Московском Университете 21.05.1997 (фото А. Х. Шеня)
- с. 744: Беркли, 1996 (фото И. С. Захаревича)
- с. 748: Надвратная церковь Ферапонтова монастыря. Рисунок В. И. Арнольда, 1968
- с. 769: Кириллово-Белозерский монастырь. Рисунок В. И. Арнольда, 1968

## Список работ

Список работ В. И. Арнольда (с. XIII–XXXVIII) содержит как научные работы по математике, так и статьи публицистического характера о математике. Работы по математике представлены в Списке, как нам кажется, полностью. Статьи о математике разысканы, по-видимому, пока не все.

В Список работ включены только наиболее доступные публикации каждой работы (статьи). В тех случаях, когда издание на русском языке отсутствует или труднодоступно, приведена публикация на английском (или ином иностранном) языке.

# Избранное

Все статьи, включенные в эту книгу, подобраны самим автором. Работы, ранее опубликованные на русском языке, заново отредактированы; в отдельных случаях исправлены существенные опечатки. Работы, ранее опубликованные на иностранных языках, представлены автором для настоящего издания на русском языке.

Все статьи разделены на две части: в первую вошли математические работы; во вторую часть включены воспоминания об А. Н. Колмогорове и Я. Б. Зельдовиче, публицистические статьи на актуальные для развития математики темы, а также первая публикация Владимира Игоревича в необычной для него области — литературоведении.

## 1

### О функциях трех переменных

Опубликована в ДАН СССР, 1957, 114(4), 679–681. Представлена академиком А. Н. Колмогоровым 10.04.1957.

## 2

### Некоторые вопросы приближения и представления функций

Опубликована на русском языке в кн: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Edinburgh, 14–21 August 1958). — New York: Cambridge University Press, 1960, 339–348.

## 3

### Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае

Опубликована в ДАН СССР, 1961, 137(2), 255–257. Представлена академиком А. Н. Колмогоровым 09.12.1960.

## 4

О рождении условно периодического движения  
из семейства периодических движений

Опубликована в ДАН СССР, 1961, 138(1), 13–15. Представлена академиком  
А. Н. Колмогоровым 09.12.1960.

## 5

О поведении адиабатического инварианта  
при медленном периодическом изменении функции Гамильтона

Опубликована в ДАН СССР, 1962, 142(4), 758–761. Представлена академиком  
А. Н. Колмогоровым 06.10.1961.

## 6

О классической теории возмущений  
и проблеме устойчивости планетных систем

Опубликована в ДАН СССР, 1962, 145(3), 487–490. Представлена академиком  
И. Г. Петровским 01.03.1962.

## 7

Равномерное распределение точек на сфере  
и некоторые эргодические свойства решений линейных  
обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области  
(совм. с А. Л. Крыловым)

Опубликована в ДАН СССР, 1963, 148(1), 9–12. Представлена академиком  
А. Н. Колмогоровым 23.06.1962.

## 8

Об одной теореме Лиувилля, касающейся  
интегрируемых проблем динамики

Опубликована в Сиб. матем. журн., 1963, 4(2), 471–474.

9

О неустойчивости динамических систем  
со многими степенями свободы

Опубликована в ДАН СССР, 1964, 156(1), 9–12. Представлена академиком А. Н. Колмогоровым 14.02.1964.

10

Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения  
для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы

Опубликована в ДАН СССР, 1965, 161(1), 9–12. Представлена академиком А. Н. Колмогоровым 07.10.1964.

11

О римановой кривизне групп диффеоморфизмов

Опубликована на французском языке: Sur la courbure de Riemann des groupes de difféomorphismes. C. R. Acad. Sci. Paris, 1965, 260(22), 5668–5671. Представлена J. Leraу.

12

Об одном топологическом свойстве  
глобально канонических отображений классической механики

Опубликована на французском языке: Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. C. R. Acad. Sci. Paris, 1965, 261(19), 3719–3722. Представлена J. Leraу.

13

О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости

Опубликована в Прикл. матем. и механ., 1966, 30(1), 183–185.

14

Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости

Опубликована в Изв. вузов, сер. математика (изд-во Казанск. ун-та), 1966, 5, 3–5.



## 15

**Проблема устойчивости и эргодические свойства  
классических динамических систем**

Опубликована в кн.: Труды Международного конгресса математиков (Москва-1966). — М.: Мир, 1968, 387–392. В работе изложено содержание получасового доклада на Международном конгрессе математиков, проходившем в Москве в 1966 г.

## 16

**О характеристическом классе, входящем в условия квантования**

Опубликована в Функц. анал. и его прилож., 1967, 1(1), 1–14. При этом рисунки 1 и 2 были переставлены, а доказательство леммы 4.1.3 в п. 4.1 было набрано петитом. Ошибочное расположение рисунков сохранилось и в переводе статьи на английский язык в Funct. Anal. Appl., 1967, 1(1), 1–13. По этому поводу в реферате настоящей работы в Zentralblatt für Math. und ihre Grenzgeb., 1969, 175(1), S. 203 (референт E. Pitcher) отмечено:

*Рисунки 1 и 2 в русском оригинале и, следовательно, в переводе переставлены.*

## 17

**О косах алгебраических функций  
и когомологиях ласточкиных хвостов**

Опубликована в Усп. матем. наук, 1968, 23(4), 247–248.

## 18

**Замечания об особенностях конечной коразмерности  
в комплексных динамических системах**

Опубликована в Функц. анал. и его прилож., 1969, 3(1), 1–6.

## 19

**Кольцо когомологий группы крашенных кос**

Опубликована в Матем. замет., 1969, 5(2), 227–231.

20

Гамильтоновость уравнений Эйлера  
динамики твердого тела и идеальной жидкости

Опубликована в Усп. матем. наук, 1969, 24(3), 225–226.

21

Об одномерных когомологиях алгебры Ли бездивергентных  
векторных полей и о числах вращения динамических систем

Опубликована в Функц. анализ. и его прилож., 1969, 3(4), 77–78.

22

О классах когомологий алгебраических функций,  
сохраняющихся при преобразованиях Чирнгаузена

Опубликована в Функц. анализ. и его прилож., 1970, 4(1), 84–85.

23

О матрицах, зависящих от параметров

Опубликована в Усп. матем. наук, 1971, 26(2), 101–114. Содержит посвящение:

*Ивану Георгиевичу Петровскому, к его семидесятилетию.*

Этому юбилею был посвящен и весь выпуск Усп. матем. наук, 1971, 26(2).

В настоящей публикации «Добавление при корректуре» превращено в п. 5.7 «Характеристические полиномы деформаций матриц» (название пункта дано редактором).

24

О расположении овалов вещественных плоских алгебраических  
кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий  
и арифметике целочисленных квадратичных форм

Опубликована в Функц. анализ. и его прилож., 1971, 5(3), 1–9.

25

Моды и квазимоды

Опубликована в Функц. анализ. и его прилож., 1972, 6(2), 12–20.

## 26

**Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей**

Опубликована в Прикл. матем. и механ., 1972, **36**(2), 255–262.

## 27

**Критические точки функций и классификация каустик**

Опубликована в Усп. матем. наук, 1974, **29**(3), 243–244. Доклад был сделан на заседаниях Семинара им. И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики 19.09.1973 и 26.09.1973.

## 28

**Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения**

Опубликована в кн.: Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 21 мая – 3 июня 1973 г.). — Ереван: АН Арм. ССР, 1974, 229–256. «Добавление от 6 июня 1985 г.» опубликовано на английском языке в *Selecta Math. Sov.*, 1986, **5**(4), p. 344. Ссылки [3]–[5] в литературе в настоящем издании добавлены редактором.

## 29

**Критические точки гладких функций и их нормальные формы: общий обзор**

Опубликована на английском языке: *Critical points of smooth functions. Proceedings of the Vancouver International Congress of Mathematicians, 1974, V. 1.* — Montreal: *Canad. Math. Congress*, 1975, 19–39. На русском языке опубликована как первая глава «Общий обзор» (с. 3–20) статьи «Критические точки гладких функций и их нормальные формы» в Усп. матем. наук, 1975, **30**(5), 3–65.

## 30

**Спектральная последовательность для приведения функций к нормальной форме**

Опубликована в Функци. анал. и его прилож., 1975, **9**(3), 81–82.

## 31

**Бифуркации инвариантных многообразий дифференциальных уравнений и нормальные формы окрестностей эллиптических кривых**

Опубликована в Функц. анал. и его прилож., 1976, 10(4), 1–12.

## 32

**Эволюция волновых фронтов и эквивариантная лемма Морса**

Опубликована на английском языке: Wave front evolution and equivariant Morse lemma. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1976, 29(6), 557–582 [correction: 1977, 30(6), 823]. Выпуск *Comm. Pure Appl. Math.*, 1976, 29(6) был посвящен К. Л. Зигелю в связи с его восьмидесятилетием.

## 33

**Предисловие к книге «Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений»**

Книга опубликована в 1978 г. в изд-ве «Наука» (Москва).

## 34

**Несколько замечаний об антидинамо-теореме**

Опубликована в Вестн. МГУ, сер. 1, матем., механ., 1982, 6, 50–57.

## 35

**Некоторые нелинейные задачи**

Опубликована на английском языке: On some nonlinear problems. In: Crafoord Prize in Mathematics, 1982. Crafoord Lectures. — Stockholm: The Royal Swedish Academy of Sciences, 1982, 1–7.

Фонд Крафоордов был учрежден в 1980 г. как пожертвование Анны-Греты и Хольгера Крафоордов Королевской Шведской Академии наук. Целью Фонда является поддержка фундаментальных научных исследований в Швеции и других странах в форме ежегодной премии выдающимся ученым, а также исследовательских грантов научным работникам и учреждениям. Лауреату *Крафоордской премии* вручаются чек на сумму более миллиона шведских крон, золотая медаль и диплом. Церемония вручения проходит в Королевской Шведской Академии наук в *Крафоордский день* в начале осени. Лауреат премии выступает с публичной *Крафоордской лекцией*.

Первый раз Крафоордская премия была присуждена в 1982 г. одновременно В. И. Арнольду (СССР) и Л. Ниренбергу (США) за их выдающийся вклад в

теорию нелинейных дифференциальных уравнений. Тогдашнее советское правительство запретило Владимиру Игоревичу выезд в Швецию на церемонию вручения премии. Поэтому король Швеции Карл XVI Густав вручил 29.09.1982 Крафоордскую премию и медаль только Л. Ниренбергу, который в тот же день прочел свою Крафоордскую лекцию. Текст лекции Л. Ниренберга был опубликован в выпущенной Шведской Академией наук специальной брошюре «Crafoord Prize in Mathematics, 1982» вместе с текстом лекции В. И. Арнольда, которая так и не была прочитана. Крафоордская лекция Луиса Ниренберга начиналась следующими словами:

*Для меня является высокой честью получить Крафоордскую премию от Королевской Шведской Академии наук. И для меня вдвойне почетно разделить эту награду с Владимиром Игоревичем Арнольдом — я в наивысшей степени восхищаюсь его работами и им лично. Тот факт, что советское правительство запретило ему приехать в Швецию для получения награды, не имеет оправдания в глазах всех ученых.*

Король Швеции вручил эту премию В. И. Арнольду лишь в 1994 г.

## 36

**Рост магнитного поля в трехмерном стационарном потоке несжимаемой жидкости**

(совм. с Е. И. Коркиной)

Опубликована в Вестн. МГУ, сер. 1, матем., механ., 1983, 3, 43–46.

## 37

**Исчезающие перегибы**

Опубликована в Функц. анал. и его прилож., 1984, 18(2), 51–52.

## 38

**Обратимые системы**

Опубликована на английском языке: Reversible systems. In: Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, V. 3. Editor: R. Z. Sagdeev. — Chur: Harwood Acad. Publishers, 1984, 1161–1174. На русском языке опубликована в кн.: Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике, ч. 2. Редакторы: А. С. Давыдов, В. М. Черноусенко. — Киев: Наукова думка, 1985, 15–21. В работе изложено содержание доклада на заседаниях II Международной рабочей группы по нелинейным и турбулентным процессам в физике (Киев, 1983).

## 39

## Первые шаги симплектической топологии

Опубликована в Усп. матем. наук, 1986, 41(6), 3–18. В работе изложено содержание пленарного доклада, прочитанного 27.05.1986 на «Александровских чтениях» (совместном заседании Московского математического общества и Общественного топологического семинара им. П. С. Александрова «топологический кружок») и посвященного 90-летию со дня рождения П. С. Александрова. Этому юбилею был посвящен и весь выпуск Усп. матем. наук, 1986, 41(6).

## 40

Контактная структура, релаксационные колебания  
и особые точки неявных дифференциальных уравнений

Опубликована в кн.: Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987, 3–8. В работе изложено содержание доклада на Совещании по геометрической топологии (Львов, 30.09–30.10.1984).

## 41

## О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями

Опубликована в Матем. замет., 1988, 44(1), 3–18.

## 42

## Замечания о квазикристаллической симметрии

Опубликована на английском языке: Remarks on quasicrystallic symmetries. Physica D, 1988, 33(1–3), 21–25. На русском языке опубликована (с незначительными добавлениями) как Дополнение Б к кн.: Ф. Клейн. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. — М.: Наука, 1989, 291–300. В настоящем издании представлен наиболее полный вариант.

Тематический выпуск Physica D, 1988, 33(1–3) под общим названием «Progress in Chaotic Dynamics» (Editors: H. Flaschka, B. Chirikov) посвящен шестидесятилетию J. Ford'a.

## 43

## О некоторых задачах симплектической топологии

Опубликована на английском языке: On some problems in symplectic topology. In: Topology and Geometry. Rohlin Seminar (Lecture Notes in Math., V. 1346). Editor: O. Ya. Viro. — Berlin: Springer, 1988, 1–5 со следующим комментарием:

*Эта статья была написана в феврале 1985 г. К настоящему времени (октябрь 1985 г.) некоторые из задач уже решены (в положительном смысле) В. В. Козловым (Усп. матем. наук, 1985) и В. Л. Гинзбургом (в печати).*

Том 1346 серии Lecture Notes in Math. посвящен памяти В. А. Рохлина. Собранные в этом томе статьи отражают тематику топологического семинара в Ленинграде, который Рохлин организовал в начале 60-х гг. и которым он руководил вплоть до своей смерти в 1984 г.

44

**Разветвленное накрытие  $CP^2 \rightarrow S^4$ , гиперболичность  
и проективная топология**

Опубликована в Сиб. матем. журн., 1988, 29(5), 36–47. Содержит посвящение:

*С. Л. Соболеву к восьмидесятилетию.*

Этому юбилею был посвящен и весь выпуск Сиб. матем. журн., 1988, 29(5).

45

**Предисловие к русскому переводу книги Дж. Бруса и П. Джиблина  
«Кривые и особенности»**

Русский перевод книги: J. W. Bruce, P. G. Giblin. Curves and Singularities. A Geometrical Introduction to Singularity Theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 1984 опубликован в 1988 г. в изд-ве «Мир» (Москва). Пер. с английского И. Г. Щербак под ред. В. И. Арнольда.

46

**Пространства функций с умеренными особенностями**

Опубликована в Функц. анализ и его прилож., 1989, 23(3), 1–10.

47

**Некоторые нерешенные задачи теории дифференциальных уравнений  
и математической физики**

Опубликована в Усп. матем. наук, 1989, 44(4), 191–192. Указанные задачи были предложены и обсуждались на Второй международной конференции выпускников механико-математического факультета МГУ по теме «Дифференциальные уравнения и их приложения». В статье в Усп. матем. наук, 1989,

44(4), 191–202, кроме задач В. И. Арнольда (с. 191–192), приведены задачи М. И. Вишика, Ю. С. Ильяшенко, А. С. Калашникова, В. А. Кондратьева, С. Н. Кружкова, Е. М. Ландиса, В. М. Миллионщикова, О. А. Олейник, А. Ф. Филиппова и М. А. Шубина.

## 48

*A*-градуированные алгебры и непрерывные дроби

Опубликована на английском языке: *A*-graded algebras and continued fractions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1989, 42(7), 993–1000.

## 49

## Введение к книге «Особенности каустик и волновых фронтов»

Книга опубликована на английском языке: *Singularities of Caustics and Wave Fronts (Math. and its Appl., V. 62)*. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1990. На русском языке книга издана в 1996 г. изд-вом ФАЗИС (Москва) с исправлениями и дополнениями.

## 50

## Динамика сложности пересечений

Опубликована на английском языке: *Dynamics of complexity of intersections*. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, Nova Série*, 1990, 21(1), 1–10. Содержит посвящение:

*С. Смейлу к его 60-летию.*

## 51

## Предисловие к третьему изданию книги «Теория катастроф»

Третье издание книги опубликовано в 1990 г. в изд-ве «Наука» (Москва).

## 52

## Числа Спрингера и пространства морсификаций

Опубликована на английском языке: *Springer numbers and morsification spaces*. *J. Algebraic Geom.*, 1992, 1(2), 197–214.



53

**О топологических свойствах лагранжевых проекций  
в симплектической геометрии каустик**

Опубликована на французском языке: Sur les propriétés topologiques des projections lagrangiennes en géométrie symplectique des caustiques. Preprint n° 9320, 14.06.1993, CEREMADE, Univ. Paris-Dauphine. Содержит благодарности:

*Автор благодарит Институт Ньютона (Кембридж, Великобритания) и Университет Париж-Дофин за гостеприимство и поддержку, а также мадемуазель Изабель Пэзан за помощь в работе над сложной рукописью.*

Впоследствии эта работа опубликована под тем же названием в Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, 1995, 8(1), 109–119.

54

**О некоторых задачах теории динамических систем**

Опубликована на французском языке: Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 1994, 4(2), 209–225. Содержит посвящение:

*Посвящается Ж. Лерэ, моему профессору в Сорбонне в 1965 г.*

55

**Математические задачи в классической физике**

Опубликована на английском языке: Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics (Appl. Math. Series, V. 100). Editors: F. John, J. E. Marsden, L. Sirovich. — New York: Springer, 1994, 1–20.

56

**О задачах, разрешимых и неразрешимых  
аналитически и геометрически**

Опубликована на французском языке: Problèmes résolubles et problèmes irrésolubles analytiques et géométriques. In: Passion des Formes. Dynamique Qualitative Sémiophysique et Intelligibilité. Dédié à R. Thom. — Fontenay-St Cloud: ENS Éditions, 1994, 411–417. Опубликовано на том же языке под тем же названием в кн.: Formes et Dynamique, Renaissance d'un Paradigme. Hommage à René Thom. — Paris: Eshel, 1995.

## 57

Замечания о собственных числах и векторах эрмитовых матриц, фазе Берри, адиабатических связностях и квантовом эффекте Холла

Опубликована на английском языке: Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect. *Selecta Math., New Ser.*, 1995, 1(1), 1–19. Представляет собой расширенный вариант лекции, прочитанной 25.03.1994 на конференции по вещественной алгебраической геометрии в Институте Анри Пуанкаре в Париже.

## 58

Замечания об экстагических точках плоских кривых

Опубликована на английском языке: Remarks on the extactic points of plane curves. In: *The Gelfand Mathematical Seminars, 1993–1995*. Editors: I. M. Gelfand, J. Lepowski, M. Smirnov. — Boston: Birkhäuser, 1996, 11–22.

## 59

Топологическая классификация вещественных тригонометрических многочленов и многогранник циклических змей

Опубликована на английском языке: Topological classification of real trigonometric polynomials and cyclic serpents polyhedron. In: *Arnold–Gelfand Seminar*. — Boston: Birkhäuser, 1996.

## 60

Несколько слов об Андрее Николаевиче Колмогорове

Опубликована в *Усп. матем. наук*, 1988, 43(6), 37. Этот выпуск журнала был посвящен памяти А. Н. Колмогорова.

## 61

Математический тривиум

Опубликована в *Усп. матем. наук*, 1991, 46(1), 225–232.

## 62

## ЯБ и математика

Опубликована в научно-популярном журнале «Природа», 1992, 2, 105–108. Этот выпуск журнала содержит подборку статей под общим названием «Мастер», посвященную памяти Я. Б. Зельдовича. Расширенный вариант этой статьи под тем же названием опубликован в кн.: Знакомый незнакомый Зельдович в воспоминаниях друзей, коллег, учеников. Редакторы: С. С. Герштейн, Р. А. Сюняев. — М.: Наука, 1993, 212–219.

## 63

## Об А. Н. Колмогорове

Опубликована в кн.: Колмогоров в воспоминаниях. Редактор: А. Н. Ширяев. — М.: Наука, 1993, 144–172.

## 64

Для чего мы изучаем математику?  
Что об этом думают сами математики

Опубликована в научно-популярном журнале для школьников «Квант», 1993, 1/2, 5–15. Содержит изложение лекции, прочитанной 16.04.1992 в Республиканском институте повышения квалификации работников образования (Москва). Запись лекции предоставил журналу доцент Ю. Фоминых (Пермь).

## 65

## Выживет ли российская математика?

Опубликована на английском языке: Will Russian mathematics survive? Notices Amer. Math. Soc., 1993, 40(2), 104–107. Этот номер журнала содержит подборку статей, посвященных положению математической науки в странах бывшего СССР.

## 66

## Выживет ли математика?

## Заметки о математическом конгрессе в Цюрихе

Опубликована в научно-популярной газете «Эврика» (еженедельное приложение к «Новой ежедневной газете»), 1994, № 14(20), 7 сентября. Расширенный вариант статьи опубликован на английском языке: Will mathematics survive? Report on the Zürich congress. Math. Intelligencer, 1995, 17(3), 6–10. Настоящий вариант работы является наиболее полным.

Публикация в Math. Intelligencer сопровождается фотографией автора со следующей подписью:

*Владимир Набоков утверждал, что правильный способ представить Толстого — это просто сказать «Анна Каренина». Аналогично, можно сразу отличить В. И. Арнольда, упомянув ABC, ADE, KAM, торы Лиувилля, 13-ю и 16-ю проблемы Гильберта, ... Затем есть «странная двойственность» треугольников Лобачевского, которая, возможно, была первым (1974 г.) проявлением того, что ныне называется зеркальной симметрией. Последние новости о нем — плоские кривые и волновые фронты — см. в 21-м томе «Advances in Soviet Mathematics» (American Mathematical Society, 1994) и в 5-м томе «University Lecture Series» (там же).*

67

### Интервью с Владимиром Арнольдом

Интервью опубликовано на английском языке: An interview with Vladimir Arnold by S. H. Lui (Hong Kong University of Science and Technology). Hong Kong Mathematics Society Newsletter, 1996, 2, 2–8. Опубликовано на том же языке под тем же названием в Notices Amer. Math. Soc., 1997, 44(4), 432–438.

Публикацию открывает следующая справка:

*В. И. Арнольд — главный научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН в Москве и профессор Центра математических исследований теории принятия решений (CEREMADE) университета Париж-Дофин. Защитил кандидатскую диссертацию в Московском государственном университете в 1961 году и докторскую в 1963 году. Внес фундаментальный вклад в теорию динамических систем, теорию особенностей, теорию устойчивости, топологию, алгебраическую геометрию, магнитную гидродинамику, дифференциальные уравнения в частных производных и другие разделы математики. По широте охвата математики и физики с ним могут сравниться лишь очень немногие. Лауреат многочисленных премий, включая Ленинскую премию, премии Крафоорда и Харви.*

*Настоящее интервью проводилось S. H. Lui 11 ноября 1995 года. Читателя могут заинтересовать следующие статьи: 1) S. Zdravkouska. Беседа с Владимиром Игоревичем Арнольдом. Mathematical Intelligencer 9, № 4 (1987); 2) Математический прививум. Успехи математических наук 46, № 1 (1991); 3) Выживет ли российская математика? Notices of the AMS 40, № 2 (1993); 4) Почему именно математика? Quantum (1994); 5) Выживет*

*ли математика? Впечатления о Цюрихском конгрессе. Mathematical Intelligencer 17, № 3 (1995).*

(Вторая, третья и пятая статьи из этого списка публикуются также и в нашей книге под номерами 61, 65 и 66 соответственно.)

В настоящее издание интервью автор внес мелкие уточнения, а также дал следующий комментарий к истории перевода из иностранных в «обычные» члены Французской Академии наук М. Громова в связи с принятием им французского гражданства:

*3 февраля 1997 г. Громова после нескольких лет колебаний в конце концов избрали в Академию.*

*Мне, как иностранному члену Академии, стыдно было узнать, что спустя столетие после дела Дрейфуса на заседании «Тайного Комитета» Французской Академии наук, посвященном выборам, выслушивалась пропаганда нацистского толка о различии между математиками — «гражданами Франции» и «истинными французами».*

*Публичное обсуждение этнического происхождения кандидата как одного из доводов за или против избрания совершенно невозможно (пока?) ни на каких сессиях Российской Академии наук. Даже в худшие времена коммунистического правления никогда не случалось ничего подобного, и даже Понтрягину приходилось подыскивать «научные» доводы.*

68

### От суперпозиций до теории КАМ

Написана в конце 1996 г. и публикуется впервые.

69

### Предисловие ко второму изданию книги «Лекции по теории уравнений с частными производными»

Написано в конце мая 1997 г. и публикуется впервые. (Второе издание книги «Лекции по теории уравнений с частными производными» выйдет в свет в изд-ве ФАЗИС (Москва) во втором полугодии 1997 г.)

70

### Об эпиграфе к «Евгению Онегину»

Опубликована в Изв. РАН. Сер. языка и лит-ры, 1997, 56(2), 63.

## От издателя

Идея этой книги возникла у ее издателя — В. Б. Филиппова. Довод о том, что такая книга нужна не столько автору, и даже не столько его ученикам и коллегам, но гораздо более широкому кругу математиков разных возрастов и просто культурным людям (особенно россиянам в эти дни, когда наука и вообще культура практически забыта явными и неявными властителями, опьяненными свободой доступа к общенародным богатствам), помог убедить Владимира Игоревича в необходимости настоящего издания. Он составил список своих основных работ, распределил их по темам, дал сводку результатов, выбрал работы, включенные в эту книгу.

Редакционную подготовку материалов выполнил Михаил Борисович Севрюк. Помощь в подготовке книги к изданию оказали С. С. Анисов, И. А. Богаевский, Ю. М. Бурман, А. А. Глуцок, С. В. Дужин, М. Э. Казарян, С. К. Ландо, О. М. Мясниченко, А. И. Нейштадт, В. Д. Седых, С. В. Чмутов. Работу по компьютерной верстке издания провел А. Н. Якивчик. Корректуру оригинал-макета выполнила Ф. И. Кизнер. Библиографию проверила Е. О. Махнёва. Организацией работ по подготовке к изданию и вопросами общего оформления книги занимался В. Б. Филиппов.

Издательство ФАЗИС будет признательно всем, кто своими предложениями, замечаниями, советами окажет содействие подготовке следующего издания этой книги

