Физико·Математическое Наследие

В. Н. Катасонов

МЕТАФИЗИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА XVII века

ФМН
Математика
История и философия математики
URSS

Физико-математическое наследие: математика
(история и философия математики)

В. Н. Катасонов

МЕТАФИЗИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА XVII ВЕКА

Ответственный редактор
доктор философских наук
А. П. Огурцов

Издание второе

URSS
МОСКВА

ББК 22.1г 22.1ф 72.3 87.1

Катасонов Владимир Николаевич

Метафизическая математика XVII века / Отв. ред. А. П. Огурцов.
Изд. 2-е. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. — 144 с.
(Физико-математическое наследие: математика (история
и философия математики).)

Настоящая монография посвящена теме взаимодействия философской и математической мысли и представляет собой первую в отечественной литературе попытку написать философскую историю математики XVII столетия. В книге на примере анализа истории возникновения в XVII веке новых математических дисциплин показывается тесная связь эпистемологических представлений, направляющих развитие математики, с философскими и мировоззренческими устремлениями новоевропейского человека. Рассматривается аналитическая геометрия Декарта, дифференциальное исчисление Лейбница, проективная геометрия, бесконечные ряды Ньютона, а также теория вероятностей.

Книга рекомендуется философам, математикам, историкам науки, культурологам, всем заинтересованным читателям.

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук С. С. Демидов;
канд. филос. наук В. П. Визгин

Издательство «Книжный дом "ЛИБРОКОМ"».
117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.
Формат 60×90/16. Печ. л. 9. Зак. № 4294.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-01771-8

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете:
http://URSS.ru
Тел./факс (многоканальный):
+ 7 (499) 724-25-45
URSS

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

ВВЕДЕНИЕ

История появления и развития новых математических дисциплин в XVI–XVII столетиях представляет собой в высшей степени поучительный пример для человека, философствующего над историей науки. Теоретический разум оказывается здесь в удивительной близости к разуму, так сказать, догматическому, к разуму, задающему нормы и идеалы. Дискуссии вокруг новых математических методов в XVII–XVIII вв. настолько насыщены метафизической проблематикой, настолько актуальны для философов-профессионалов, что обсуждение, казалось бы, внутриматематических проблем естественно поднимается до уровня большого философского диалога. Математика вдруг открывается не как некая "чистая" наука, которой нет дела до остального мира, нет дела до истории с ее трагическими мировоззренческими коллизиями, а как наука в глубокой степени "ангажированная", непосредственно вовлеченная в эти коллизии, наука, совершающая в этих коллизиях свой выбор, свое самоопределение. Это самоопределение математики есть, конечно, самоопределение человека, для которого наука всегда есть не только орган открытия истины, но и один из способов утверждения ее. Ибо и сама истина есть не только то, что есть, но всегда и то, что должно быть. Новая культурная эпоха, начинающаяся с XVI–XVII вв., новый человек, выходящий на авансцену европейской истории в это время, находят свое определенное отражение и в глубоких теоретических трансформациях, связанных со становлением новой математики. Трансформации эти касаются самих оснований науки, понимания природы числа, пространства, норм доказательства. Трансформации эти настолько серьезны, что справедливо заслуживают названия революционных. Не нужно, однако, понимать "революционность" в том смысле, что при этом отбрасывается все старое. Математика XVII в. в этом отношении достаточно консервативна, и труды Евклида и Аполлония являются для нее такой же "высокой классикой", как и для античности. Тем не менее, то новое, что создается в это время – методы алгебраического и инфинитезимального исчислений, техника вычислений с бесконечными рядами, проективная геометрия, теория вероятностей – существенно связаны с отказом от традиционных античных норм в понимании математического знания.

Несмотря на довольно полный охват новых дисциплин, утверждающихся в новоевропейской математике с XVII–XVIII вв., автор ясно осознает, что выбор конкретных сюжетов и героев этой истории отражает, конечно, его субъективные пристрастия. Так, например, недостаточное внимание уделено теме бесконечных рядов, не обсуждается специально

роль Ньютона в истории изобретения дифференциального и интегрального исчисления. В некотором смысле главным героем этой книги является Г.В. Лейбниц. Гениальный ученый и философ, которого даже трудно сравнить с кем-либо в истории мировой культуры, сумел в своем творческом подвиге "объять необъятное": соединить глубину своих изысканий о принципах человеческого бытия и познания с поражающей энциклопедической широтой применения этих принципов в различных науках. Можно не соглашаться с Лейбницем во многих принципиальных положениях, можно критиковать его за хаотичность и незаконченность грандиозных начинаний, однако, нельзя отрицать одного: именно через мысль и дело Лейбница прошел тот таинственный, зачинающий новую культурную эпоху духовный импульс, творческой энергией которого во многом мы живем еще и по сегодняшний день. К математике это относится в особом смысле. Лейбниц не просто был одним из создателей (наряду с Ньютоном) дифференциального и интегрального исчислений, пионером применения техники бесконечных рядов, одним из первых ученых, попытавшихся всерьез построить формальные языки для разных научных дисциплин, человеком, глубоко понимавшим важность и перспективность новых математических областей – проективной геометрии и теории вероятностей. В Лейбнице поразительно это настойчивое, глубинное стремление к синтезу знания, в частности, к осознанию философского значения новых математических методов и конструкций. Именно ему принадлежит то выражение, из которого родилось название этой книги. Во фрагменте "Элементы разума" Лейбниц пишет: "Когда же возродилась настоящая наука и вновь обрело силу искусство красноречия (что является заслугой главным образом прошлого века), судьба даровала нашему веку прежде всего то, что после столь долгих лет забвения вновь воссиял светоч математики, как я его называю. Ведь были открыты и развиты Архимедовы способы исчерпывания через неделимые и бесконечные, что можно было бы назвать *метафизикой геометров* и что, если я не ошибаюсь, было неизвестно большинству древних, за исключением Архимеда (подчеркнуто мной – *В.К.*)"[1]. "Метафизика геометров"! У математики может быть своя метафизика! Не только естествознание, науки, познающие материальную природу, но, оказывается, и математика, имеющая дело, казалось бы, с само собой разумеющимися для всех людей предметами – число, пространство, – оказывается, и эта чисто теоретическая наука связана с некоторыми метафизическими принципами.

Лейбниц был глубоко убежден в метафизической обусловленности научного знания. В том же фрагменте он пишет: "Во всяком случае, в конечном анализе становится понятным, что физика не может обойтись без метафизических принципов. Ибо хотя она и может и должна сводиться к механике, в чем мы вполне *можем согласиться с корпускулярными* философами, однако в самых первых законах механики помимо геометрии и чисел есть нечто метафизическое в том, что касается причины и

[1] *Лейбниц Г.В.* Соч.: В 4 т. М., 1984. Т. 3. С. 452.

следствия, энергии и сопротивления, изменения и времени, сходства и детерминированности, что дает возможность перехода от математических предметов к реальным субстанциям. Последнее можно заметить в пользу тех, кто в похвальном рвении благочестия не без основания опасается, что если будет позволено все в природе объяснять через материю и движение, то будут элиминированы нетелесные субстанции... Кроме того, и в самой геометрии, да и в символическом математическом исчислении исходя из метафизических понятий о подобном и детерминированном можно удивительно быстро открыть то, что геометры, опираясь только на понятие целого и части или равного и соответствующего, с трудом находят, продвигаясь множеством окольных путей"[2].

Историко-философский анализ генезиса в XVII в. новых математических дисциплин подтверждает, как стараемся мы показать в этой книге, это принципиальное убеждение великого ученого. Фундаментальную конститутивную и эвристическую роль при построении новых математических областей играли как раз принципы, выдвинутые Лейбницем в качестве архитектонических начал человеческого знания: принцип непрерывности, принцип достаточного основания, и особая вариация принципа непрерывности, названная нами принципом законопостоянства. Мы прослеживаем их определяющее влияние и в дифференциальном исчислении, и в проективной геометрии, и в теории рядов, и в вероятностных построениях. Математика или является произвольной формальной конструкцией, надстроенной над базисом своих аксиом, "висящих в воздухе", – что характерно, именно, для современного самосознания математики, – или более или менее сознательно стремится обосновать свои аксиомы с помощью глобальных метафизических принципов, – и именно это было характерно для более органичного гносеологического "тонуса" науки в XVII столетии.

Через обосновывающие архитектонические принципы, имеющие универсальную значимость, математика оказывается связанной со сферой практического разума, со сферой самоопределения человеческой свободы. Тем самым тип математики оказывается в определенной степени детерминированным фундаментальными мировоззренческими характеристиками данной культуры, ее определяющими постулатами о том, "что есть", и "что должно быть". Все происходит так, как будто универсальные метафизические принципы – и имеющие в них свое начало математические аксиомы, – представляют собой лишь рассудочные "проекции" целостных идейных комплексов, природа которых оказывается уже сверхтеоретической. Ситуация, обнаруживаемая исследователем, очень напоминает ту, которую описывал другой, уже отечественный сторонник целостного понимания познания: "Цельное знание по определению своему не может иметь исключительно теоретического характера: оно должно отвечать всем потребностям человеческого духа, должно удовлетворять в своей сфере всем высшим стремлениям человека. Отделить теоретический или познавательный элемент от элемента нравственного или практического и от элемента

[2] Там же. С. 453–454.

художественного или эстетического можно было бы только в тех случаях, если бы дух человеческий разделялся на несколько самостоятельных существ, из которых одно было бы только волей, другое – только разумом, третье – только чувством. Но так как этого нет и быть не может, так как всегда и необходимо предмет нашего познания есть вместе с тем предмет нашей воли и чувства, то чисто теоретическое отвлеченно-научное знание всегда было и будет праздною выдумкой, субъективным призраком"[3].

Следует, однако, с самого начала оговориться по поводу сакраментального вопроса – считаем ли мы развитие математики полностью детерминированным философским развитием, претендуем ли мы "выводить математику из философии"? Ответ определенно отрицательный. Наше повествование движется одновременно в трех пластах исторической реальности: историко-математическом, историко-философском, историко-культурном. Пласты эти связаны сложными взаимозависимостями (так, что даже и название "исторические пласты", предполагающее образ трех пространственно разделенных сущностей, не слишком удачно). Но каждому из них свойственен специфический способ существования, особенный способ исторической преемственности. Задача, которую мы прежде всего решаем в данном исследовании, двойственна. В плане *диахронии* – это показ принципиального отличия фундаментальных математических конструкций Нового времени от традиционной математики античности. Причем, отличие это не есть отличие более ранней стадии развития от более поздней, не отличие юности от зрелости, не отличие *степени*, а отличие, существенно обусловленное различными философскими (и мировоззренческими) точками зрения на математику. В плане *синхронии* наша задача есть показ этого многозначительного соответствия основных эвристических принципов и аксиом новой математики и философских и мировоззренческих представлений XVII в. Так, например, принцип непрерывности, являющийся *главнейшим конструктивным принципом* дифференциального исчисления (у Лейбница) и проективной геометрии (у Дезарга), является одновременно фундаментальным принципом *лейбницевской метафизики*. Сам по себе принцип непрерывности не дает математики как таковой, не позволяет "вывести ее из метафизики". Однако, именно роль этого принципа в конкретной сфере математического знания характеризует *тип* этой математики. Нашей основной задачей является не дедукция математических положений из тех или иных философем, а *герменевтическое уяснение* связи между конкретными математическими конструкциями и целым историко-культурного контекста эпохи. Вскрытие связи между новыми математическими теориями, понятиями и философскими построениями служит лишь *инструментом* – хотя и самым тонким, – этого уяснения. Философия только до определенной степени является объяснением научных построений изучаемой эпохи. С исторической точки зрения она сама является лишь

[3] *Соловьев В.С.* Философские начала цельного знания. // Соч.: В 2-х т. М., 1988. Т. 2. С. 229.

интеллектуальным свидетельством своего времени, требующим интерпретации... Рассмотрение истории математики соотносительно с историей философии позволяет лишь более артикулированно, в более широком познавательном контексте, в связи с фундаментальными традициями в истории мысли уяснить роль и значение математических конструкций. Но это *уяснение* не может никогда претендовать на окончательное *объяснение*. Математика, в силу особенностей собственной природы, не просто лишь обладает некоторой относительной самостоятельностью по отношению к философии. Ей удается порой с большей выразительностью воплотить фундаментальные интенции культуры, чем отдельным философским системам (в таком отношении находятся, например, дифференциальное исчисление и системы Декарта, Локка, Канта[4]). Это убеждение является основанием нашей попытки ответить на вопрос: можно ли даже в такой абстрактной науке, как математика, увидеть отражение фундаментальнейших актов самоопределения человека в конкретные исторические эпохи?

Автор сердечно благодарит всех, кто советом, критикой или просто моральной поддержкой помог в работе над данным исследованием. Прежде всего, это сотрудники сектора "Закономерности исторического развития науки" Института философии РАН – П.П. Гайденко, Л.А. Маркова, Вик.П. Визгин, А.В. Ахутин, Т.Б. Романовская, Ю.А. Шичалин, а также сотрудники Института истории естествознания и техники: Ф.А. Медведева, чья широкая эрудиция и доброжелательность помогли автору сориентироваться в безбрежном море историко-научной литературы, С.С. Демидова, И.В. Лупандина.

[4]Тем самым, строго говоря, слова *метафизическая математика* в названии книги должны пониматься в отмеченном здесь ограниченном смысле.

Глава I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДЕКАРТА: АЛГЕБРА И ТЕХНИКА

§ 1. ГЕОМЕТРИЯ В АНТИЧНОСТИ И ГЕОМЕТРИЯ У ДЕКАРТА

В этой главе мы стремимся выявить характерные черты того философского и мировоззренческого горизонта, который сопутствует рождению аналитической геометрии Декарта. В плане чистой истории математики изобретение Декарта не было "потрясением основ". Весь XVI век математика Западной Европы переживает бурный процесс алгебраизации. Истоки же этого движения нужно искать еще раньше, в позднем средневековье. С XII в., когда в Европе начинают переводить на латынь сочинения Евклида, Птолемея, Аль-Хорезми, вместе с переводами с арабского в западноевропейскую культуру транслируется и особый образ математики, сыгравший формирующую, направляющую роль. Из математики исламской культуры приходит подчеркнутое пристрастие к *алгоритмическим методам*, к знанию, сформулированному в виде правил и рецептов[1]. Этот факт тем более интересен, что сама арабская математика была наследницей древнегреческой, а в последней алгоритмические методы отнюдь не имели такого большого значения (даже, скорее, наоборот – об этом ниже). Математика греческой античности, которую осваивает западное средневековье, уже получила в арабской культуре особую алгебраическую "прививку". Итальянский математик XIII в. Фибоначчи, получивший образование под руководством арабских учителей, уверенно использует при решении геометрических задач сложные алгебраические соотношения. Его современник Иордан Немориус прямо начинает заменять числа буквами и решать задачи "в общем виде". Однако не случайно ученики последнего не обратили достаточного внимания на эти идеи своего учителя. Сама по себе мысль решать задачи "в общем виде", независимо от особенностей исходных данных, должна была еще созреть. Особая "алгебраическая идеология" получила обоснование уже только в XVII в. – у Декарта (а потом и у Лейбница). Обоснование этой идеологии

[1] Известный историк математики К. Бойер пишет: "Арабы вообще любили ясную и добротную аргументацию от посылок к заключениям, так же как и систематическую организацию – момент, в котором ни Диофант (древнегреческий математик III в. – *В.К.*), ни индусы особенно не отличались. Индусы были сильны в ассоциации и аналогии, в эстетическом и связанном с воображением чутье (flair), в то время как арабы были более практически мыслящие и приземленные в своем подходе к математике" (*Boyer C.* A History of Mathematics. N.Y.-L. 1968. P. 252).

требовало уже – шире, чем просто математической, – философской аргументации.

Вышедшая в 1637 г., в качестве приложения к "Рассуждению о методе", "Геометрия" Декарта начинается словами: "Все задачи геометрии можно легко привести к таким терминам, что для их построения нужно будет затем знать лишь длину некоторых прямых линий"[2]. Действительно, "Геометрия" Декарта занимается исключительно *задачами*. Что это значит? Еще от математики античности идет разделение положений геометрии на задачи и теоремы. Несмотря на то, что это деление на два класса проводилось математиками древности по-разному, смысл его, тем не менее, понятен. Задачи – это *построения*, опирающиеся на постулаты, которые гарантируют возможность некоторых простейших построений. Теоремы – это положения, доказываемые обычно с помощью других теорем и аксиом. Теоремы апеллируют больше к *умозрению*, задачи существенно связаны с постулируемой возможностью некоторых конструктивных *действий* в геометрическом пространстве. Декарт, демонстрируя в своей книге мощь нового метода аналитической геометрии, существенно переакцентирует само понимание геометрии – и в смысле метода, и в смысле предмета. Причины этой трансформации – и простирающиеся вплоть до нашего времени следствия ее, – связаны с глубокими изменениями философского и общекультурного горизонта, внутри которого только и существует математика любой эпохи, с новыми ценностными ориентирами, характерными для науки XVII в.

Чтобы лучше понять смысл декартового переворота в математике, нам нужно вспомнить, как осознается в античности познавательный статус геометрии. Пифагорейски-платоновская традиция понимает геометрию как науку двойственную, обязанную своим существованием двум принципам: интеллекту и воображению. Интеллект есть способность чистого понимания, не требующая никакого чувственного образа (νόησις). Воображение – способность более низкого гносеологического статуса, связанная с чувственно воспринимаемым миром. Воображение важно в геометрии не само по себе, оно оказывается "предверием" интеллекта, как пишет в своих ≪Комментариях на первую книгу "Элементов" Евклида≫ Прокл[3]. Хотя в геометрии, используется низшая часть интеллекта (διάνοια), тем не менее, занимаясь геометрией, человеческий ум должен восходить от познания, связанного с чувственностью мира образов к познанию высших идеальных начал – "царства идей", в соответствии с онтологией Платона служащих прообразами всего сущего в мире материальном[4]. Прокл пишет, что геометр должен превратить изучение своей науки "из самоцели в дело собственного пробуждения, перехода от воображения к чистому разуму, абстрагируясь в этом действии от протяженности и деятельности пассивного интеллекта, через что

---

[2] *Декарт Р.* Геометрия. М.; Л., 1938. С. 11. Изд. 2. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010.

[3] *Proclus de Lycie.* Les commentaires sur le premiere livre des éléments d'Euclide. P., 1948. P. 46.

[4] *Платон.* Государство, VII.

он увидит все вещи, *лишенными* размеров и неделимыми, а именно, круг, его диаметр, многоугольники в круге, все вещи во всех и каждую отдельно"[5]. *Увидеть* вещи "лишенными размеров", "все вещи во всех и каждую отдельно" и значит, что речь идет не о чувственном созерцании, а о созерцании "умном" (θεωρία). С этой же двойственностью геометрии связано и разделение ее положений на теоремы и задачи. "...Теоремы, – пишет Прокл, – превосходят задачи достоинством. Вся геометрия, поскольку она связана со многими ремеслами, кажется оперирующей на манер задач; однако продвигаясь на манер теорем, она поднимается от задач к теоремам, от вещей второстепенных к первичным, от вещей, которые относятся скорее к ремеслам, к вещам, которые относятся к науке, в той степени, в которой эта наука имеет черты первой науки"[6]. Теоремы оказываются выше своим достоинством, так как говорят о вечных истинах, в отличие от задач, связанных с миром эмпирии[7]. Геометрия платоновской традиции настаивает на целостном, *интуитивном* характере постижения геометрических истин. Хотя треугольник и сложен их отрезков прямых, его свойства не дедуцируются из свойств прямой, как таковой[8]. Интуиция треугольника так же неделима, как неделимы слоги в известном рассуждении Платона из "Теэтета"[9]. Здание геометрической науки не поддается *чисто* логическому конструированию – "общего к частному", – ее фундаментальные положения не складываются из частей, а требуют интуитивного постижения, "теорийного" созерцания. Этот акцент на интуиции, на созерцании отнюдь не означает, что геометрические теоремы не нуждаются в доказательстве. Однако роль доказательства – второстепенна. Математик не конструирует теоретического факта, не из-обретает его, а обретает. Возможны различные доказательства одного и того же математического положения. Важны не они, а сам теоретический факт, предлагаемый созерцанию. "Божественный ум" видит истину этого факта непосредственно. Доказательства суть лишь необходимые для погруженного в чувственное, в становление человеческого ума "тропинки" к вечной истине, сами по себе случайные.

С этим же подчеркиванием интуитивного, созерцательного характера геометрии связано и внимание к *эстетическим* характеристикам геометрических объектов. "Все теоремы, – пишет Прокл, – познание которых не открывает доступ к большему числу других, и которые не доставляют собой некоторого чувства элегантности и приятности, также оказываются

---

[5] Proclus... P. 47.

[6] Proclus... P. 211.

[7] Прокл сообщает, что по вопросу о роли теорем и задач в геометрии существовали и разногласия. Так, Менехм и его ученики настаивали, что все положения геометрии суть задачи (Proclus... p. 69–70). Мы излагаем здесь взгляды именно пифагорейско-платоновской традиции.

[8] За это несоблюдение *логического принципа* "от общего к частному" – от свойств прямых к свойствам треугольников – при построении геометрии в XVII в. Евклида критикует А. Арно в своей "Логике". Он дает любопытный неудачный (и поучительный) пример "строго логического" построения геометрии в духе учения о методе Декарта. См. *Arnauld A.* Nouveaux éléments de géometrie... Paris, 1667.

[9] *Платон.* Теэтет, 205 с.

вне области фундаментальных теорем"[10]. Наука, согласно мышлению греков, имеет не только "начала", но и цель. Так, "Начала" Евклида разворачивают последовательность геометрических положений не с целью произвести их как можно больше, а с целью обеспечить построение (в XIII книге) теории правильных многогранников – геометрической основы платоновской космологии. Платон в "Тимее" так говорит о правильных многогранниках: "...мы никому не уступили бы в том, что нет видимых тел более прекрасных, чем эти, и притом каждое из них прекрасно в своем роде..."[11].

Итак, отметим еще раз: греческая геометрия, развивавшаяся в русле платоновско-пифагорейской традиции, делала особый акцент на созерцательном характере геометрических методов, подчеркивала важность целостного постижения геометрических образов, небезразлично относилась и к эстетическому аспекту геометрии[12].

Вернемся в XVII век. Сущностью декартовской новации в геометрии являлась ее *алгебраизация*. Как действует метод Декарта в геометрии? Задача формализуется, т.е. ее величины выражаются буквами, последние связываются воедино некоторым уравнением, из которого и нужно найти неизвестную величину. Далее, это уравнение преобразуется стандартными методами, сводится к фиксированным простейшим формам и решается (с помощью геометрического построения). Главным, что обеспечивает эффективность, оказывается именно применение алгебры. Алгебра, как таковая была известна в Европе еще задолго до Декарта. И применение ее в геометрии, как мы уже отмечали, не являлось открытием Декарта. Новым, что принесла с собой картезианская "Геометрия", было принци-

---

[10] Proclus..., p. 65.

[11] *Платон.* Тимей, 53 с. Аристотель держится тех же взглядов: "... заблуждаются те, кто утверждает, что математика ничего не говорит о прекрасном или благом. На самом же деле она говорит прежде всего о нем и выявляет его. Ведь если она не называет его по имени, а выявляет его свойства и соотношения, то это не значит, что она не говорит о нем. А важнейшие виды прекрасного – это слаженность, соразмерность и определенность, математика больше всего и выявляет именно их" *(Аристотель.* Метафизика, 1078а – 34–40).

[12] Чуткий исследователь истории математики П. Бутру следующим образом характеризует обсуждаемую традицию: "Греки искали и культивировали в математике то, что просто, что прекрасно, то, что гармонично" *(Boutroux P.* L'ideal scientifique des mathématiciens. P.U.F., 1955. P. 45).

Об отличии античного понимания теории от современного хорошо пишет Х.-Г. Гадамер: "Современная теория есть конструктивное средство, позволяющее нам обобщать опыт и создающее возможность овладения этим опытом. Как говорит сам язык, мы "строим" теории. Этим уже подразумевается, что одна теория отменяет другую и что каждая изначально претендует лишь на относительную значимость, именно: до тех пор, пока не будет найдено нечто лучшее. Античная "теория" не была в этом смысле средством; она сама была целью, высшей ступенью человеческого бытия... "Теорийа" в античном смысле есть нечто совершенно иное (чем в современном смысле – *В.К.*). Здесь не просто созерцается существующий порядок как таковой, но "теорийа" означает, сверх того, участие созерцателя в самом целостном порядке бытия" (*Гадамер Х.-Г.* Истина и метод. Основы философской герменевтики. М., 1988. С. 525–526).

пиальное, систематическое *сведение* геометрических задач к алгебраическим. Речь шла не о новых удачных приемах решения задач, а об изменении самой точки зрения на геометрию. Понять эту трансформацию можно лишь обратившись к декартовскому *философскому* учению о методе.

Действительно, существует удивительная непрерывность в переходе от чисто философских построений "Рассуждений о методе" к геометрическим конструкциям в "Геометрии". Еще ярче эта непрерывность[13] выступает в "Правилах для руководства ума" – более ранней, незаконченной работе. Вспомним эти рассуждения Декарта. Философ начинает с соображения, что в основании всех наук лежит одна и та же тождественная себе человеческая мудрость, относящаяся к разным наукам, как солнце к различным освещаемым предметам[14]. Для познания, следовательно, было бы гораздо полезнее, чем искать "многознания", в науках, обратиться к исследованию законов самой этой мудрости. На этом пути Декарт формулирует основные положения своего метода. Принимать за истинное должно только ясное и достоверное. Для опознания этого достоверного служит способность интуиции. Некоторые истины, сами по себе сразу не очевидные, могут быть связаны цепочкой умозаключений с исходными, самоочевидными, для чего и служит вторая основная способность – способность дедукции. Однако в разысканиях истины, настаивает Декарт, не должно радоваться любому, случайно открытому верному положению. Двигаться к истине должно *методически;* только это гарантирует нам фундаментальность получаемых результатов и их полноту. "Под методом же, – пишет Декарт, – я разумею точные и *простые* правила, строгое соблюдение которых всегда препятствует принятию ложного за истинное и, *без излишней траты умственных сил,* но постепенно и непрерывно увеличивая знания, способствует тому, что ум достигает истинного познания *всего, что ему доступно*"[15] (подчеркнуто мной – *В.К.*). Сформулируем специально эти характерные черты декартовского метода: достоверность, простота, механичность, продуктивность, полнота. Метод, однажды найденный, уже не требует для своей *эксплуатации* особых интеллектуальных усилий. Пользование им в науке, сводит последнюю к своеобразной "механической работе", безличность которой, как неукоснительное невозмутимое следование предписанным правилам, служит гарантом правильности получаемых результатов и, следовательно, их истинности. В "Правилах" метод Декарта распадается на множество предписаний различной степени общности. В "Рассуждениях о методе" эти предписания сведены к четырем основным[16]. Но для нас сейчас важнее другое. Поскольку правила метода

---

[13]Свидетельствующая, конечно же, о математических истоках декартовских размышлений (о чем он, не раз, *пишет* и сам). См. на эту тему также интересную книгу: *Allard J.-L.* Le mathématisme de Descartes. Ottawa, 1963.

[14]*Декарт Р.* Избр. произв. М. 1950. С. 80 и далее.

[15]Там же. С. 89.

[16]Там же. С. 272.

выводятся из рассмотрения "структуры" самого человеческого разумения вообще, безотносительно к какой-нибудь конкретной науке, то они *имеют трансцендентальный* характер. Другими словами, эти правила характеризуют познание с его априорной стороны, с точки зрения его формы и играют роль в любых науках. Так, уже арифметика и геометрия древних, пишет Декарт, "являются ни чем иным, как самопроизвольными плодами, возникшими из врожденных начал этого метода..."[17]. Именно это, отчасти уже утраченное "искусство человеческой мудрости", пытались воскресить, по мнению Декарта, и его современники под именем алгебры. "...Таким образом, – пишет Декарт, – должна существовать некая общая наука, объясняющая все относящееся к порядку и мере, не входя в исследование никаких частных предметов, и эта наука должна называться не иностранным (т.е. арабским "ал-джебр", – *В.К.*), но старым, уже вошедшим в употребление именем всеобщей математики..."[18].

Идея "Всеобщей математики" (mathesis universalis) была в высшей степени популярной в XVI–XVII вв. Идея эта восходит еще к тому образу математики, под которым она культивировалась в древних цивилизациях Египта, Вавилона, Индии. Здесь математическое знание выступает, в основном, не как совокупность теорем, а как набор определенных *алгоритмов*, позволяющих решить те или иные задачи. В арабской средневековой математике это понимание начинает обретать вид некоторого исчисления, прообраза нашей алгебры. Знаменитый арабский математик IX в. Аль-Хорезми дает описание шести различных алгоритмов, которые в своей совокупности исчерпывают задачу решения квадратного уравнения. Полученные методы он использует для решения конкретных геометрических задач (другими словами "применяет алгебру к геометрии"). Персидский математик и великий поэт XI–XII вв. Омар Хайям систематизирует алгоритмы нахождения корней кубического уравнения. И, что важно для нашей темы, задолго до аналитической геометрии Декарта Хайям утверждает: "Если кто думает, что алгебра есть просто некий трюк для получения неизвестных, то это напрасно. Не следует придавать значения тому факту, что алгебра и геометрия по видимости различны. Алгебраические факты есть факты геометрические, которые доказаны"[19].

Арабской алгебраической технике был присущ недостаток, которого она так и не сумела преодолеть: за отсутствием должной символики алгебраические уравнения записывались словесно. Однако общая идея алгоритма постепенно проясняется. Из этого алгоритмического понимания математики естественно вырастает идея об *универсальном алгоритме* – правиле, приеме, которые бы позволили чисто механически, "без излишней траты умственных сил" решить любые проблемы. "Естественно", говорим мы, но только при одном условии. Предпосылкой этого перехода является общая *прагматическая* ориентация в понимании сущности знания. Знание, как совокупность приемов и методов для

---

[17]Там же. С. 90.

[18]Там же. С. 93.

[19]Цит. по: *Boyer C.* A History of Mathematics. N.Y.–London, 1968. P. 265.

достижения тех или иных целей[20]. Именно этой предпосылкой и не обладала греческая цивилизация, с ее неизбывным превознесением созерцательной жизни. Но интересно, что, начиная с позднего западноевропейского средневековья, положение постепенно меняется. Мы уже говорили во вступлении о математиках XIII в. (Фибоначчи, Иордан Неморариус), эффективно применявших для решения разнообразных задач арабскую алгебраическую технику. Но XIII в. является свидетелем гораздо более серьезной новации: францисканский миссионер Раймонд Луллий создает свое знаменитое "Великое искусство", как одну из первых попыток "автоматизации" процесса логических рассуждений (напечатано было Ars magna только в 1480 г.). Весь XVI в. проходит под знаком настойчивых поисков удобной алгебраической символики, которая позволила бы создать некое "исчисление" для решения задач (К. Рудольф, М. Штифель, Р. Бомбелли, П. Рамус, С. Стевин, Ф. Виет и др.). В 80-х гг. XVI в. Дж. Бруно яростно защищает свой платонизированный вариант луллизма в Сорбонне. В XVII в. идея mathesis universalis привлекает не только Декарта, но и Лейбница, который всерьез начинает строить формальный язык своей "всеобщей характеристики". Эта мощная традиция (в европейской культуре восходящая, вероятно, еще к идее "Органона" у Аристотеля) доходит и до XX в., обновляясь (и радикализируясь в проблемах, связанных с компьютеризацией, "искусственным интеллектом", логицистским обоснованием математики.

Как реализуется идея "универсальной математики" у Декарта? Как сблизить между собой, единообразно выразить в терминах формального языка качественно различные реальности, реализовать ту программу, которую намечает Декарт: "... к области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера, и совершенно несущественно, будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое, в чем отыскивается эта мера..."[21]. Мы не намереваемся здесь обсуждать общую программу математизации науки у Декарта. Нас этот вопрос интересует сейчас только в его частном (но, одновременно, и решающем) пункте: как, уже внутри математики, сблизить геометрию и арифметику, построить "геометрическое исчисление". Античность строго различала арифметику и геометрию, традиционно приписывая первой более высокий гносеологический статус[22].

Декарт решает этот вопрос с *операциональной* точки зрения. Число и отрезок, конечно, различны по своей природе, но по операциям, которые над ними можно производить, они сходны. Отрезки можно складывать и

---

[20] Но встает вопрос — а каковы цели? Разве ответ на него не должен входить в знание? В том-то и состоит особенность рассматриваемой установки, что этот вопрос как бы оттесняется на второй план (или ответ на него принимается недостаточно критически — цели ставятся более или менее непосредственно). Чисто психологически эта установка характеризуется "захваченностью" вопросом "как" (сделать)?, а не "зачем"?

[21] *Декарт Р.* Избр. произв. ... С. 93.

[22] Опять, исходя из уже рассмотренных соображений: геометрия "отягчена" воображением, ближе к чувственной реальности, арифметика более интеллектуальна.

вычитать, как и числа. Но можно определить для отрезков и умножение, и деление (и извлечение корня) и свойства этих операций будут подобны свойствам операций над числами[23]. С этого и начинается "Геометрия"[24]. Эти операции для отрезков были известны, конечно, еще грекам. И их подобие операциям над числами было для всех очевидно. Но никто не решался на этом основании отождествлять арифметику и геометрию, слишком сильны были еще запреты античной традиции. Декарт делает решительный шаг: он объединяет арифметику и геометрию в общую науку, на основании операционального сходства их предметов. Эта более общая наука, занимающаяся уже не числом, и не протяженностью, а *свойствами операций* над ними, и называется алгеброй. Алгебра в этом смысле выступает как *абстрактная алгебра*, как наука, систематически изучающая не некие реальности, а отдельные выделенные свойства этих реальностей, безотносительно к целостности последних. Этот особый угол зрения на математические объекты отнюдь не естественен сам по себе, и для античных математиков был бы в нашей степени надуманным и бесполезным[25]. Чисто гносеологически он состоит в перемещении внимания с объекта познания на его субъект, в тотальности деятельностной установки которого стираются различия в манипулируемых объектах. Для выработки этой установки требовалось духовное усилие целой культурной эпохи, простирающейся от позднего средневековья до XVII в. Алгебраизация математики есть лишь внутриматематическое *выражение* этой более широкой философской (и, шире, мировоззренческой) тенденции[26].

---

[23] Иногда говорят, что Декарт "арифметизировал" геометрию. Мы думаем, что это неверно. Если Валлис, Ньютон и др., используя приближенные вычисления, все настойчивее выдвигали идею числовой природы непрерывной величины, то Декарт везде в "Геометрии" дает решения в виде построений: он оперирует с геометрической величиной не арифметически, а только геометрически (упорядочивая это оперирование в алгебраическом исчислении). Декартовское "преодоление" требования однородности алгебраических выражений, — что являлось гарантом возможности их геометрического построения, — опять только мнимое. Декарт показывает, что эту однородность умножением и делением на единицу можно всегда восстановить. И это свидетельствует о том, что он имеет в виду всегда геометрические построения. Задача арифметизации геометрии была неотрывна от задачи "геометризации арифметики" — построения арифметической теории непрерывной величины. Решение же последней задачи было отложено до конца XIX в. Два столетия математики оперировали с непрерывной величиной "как будто зная", что есть *действительное число*. Метод шел впереди понимания.

[24] *Декарт Р.* Геометрия... С. 11–12.

[25] Это различие геометрии древних и аналитической геометрии прекрасно было сформулировано О. Контом. См.: *Конт О.* Курс положительной философии. Т. 1. СПб., 1900. С. 157–159.

[26] А. Койре в очерке, посвященном математике Возрождения, отмечает: "Алгебра Ренессанса в очень малое время удивительно обогатила алгебраическое знание. Параллельно она выработала очень компактные и достаточно удобные обозначения... Но она была неспособна подняться до абстрактного понятия *алгебраической операции* и сделать последнюю центром своих размышлений" (Histoire générale des sciences. T. II. La science moderne. P.U.F., 1958. P. 50). До абстрактного понятия операции поднялся только Декарт.

Именно в таком духе применяет алгебру в своей "Геометрии" Декарт. Характер геометрического знания при этом, по сравнению с античным, существенно трансформируется. Декарт занимается, собственно, построением отрезков, длины которых удовлетворяют некоторым алгебраическим уравнениям. "Геометрия" чуть ли не большей частью своей посвящена технике оперирования с алгебраическими уравнениями и построению их корней[27]. Античность тоже решает задачи (строит с помощью циркуля и линейки), но античная геометрия немыслима без созерцания, причем, как мы подчеркивали, рассматривает познавательный статус теорем даже выше, чем задач. Античность созерцает, Декарт же *вычисляет*. Геометрическая интуиция оказывается как бы совсем ненужной: интуитивное, целостное – тем более, эстетически значимое – созерцание кривой многогранника уже отнюдь не обязательно. Декарт совершает своеобразную интеллектуализацию геометрии: геометрия как бы элиминирует свою составляющую, связанную с воображением. Но интеллектуализация эта носит внешний характер: целостный, собственно "геометрический" образ фигуры разрушается; остаются только вычисления и отрезки. Эти отрезки, заметим кстати, характеризуют не сами геометрические фигуры, а их отношения к чему-то внешнему (к системе кординат)[28]. Декартовскую интеллектуализацию геометрии хочется назвать операционалистской интеллектуализацией, рассудочной схематизацией геометрии.

---

[27] Известный историк математики К. Бойер отмечает тот парадокс, что "метод Декарта есть метод координатной геометрии, но его цель мы отнесли бы в настоящее время скорее к теории уравнений, чем к аналитической геометрии" (*Boyer C.* History of Analytic Geometry. N.-Y., 1956. P. 101).

[28] Конечно, дальнейшее развитие аналитической геометрии далеко превзошло тот ее несовершенный образ, который был начертан Декартом. Теория инвариантов как бы и была возвратом от координат и вычислений к "самой кривой". Да и в XVII в. мы имеем пример другого подхода к аналитической геометрии, более близкого к нашему сегодняшнему пониманию последней. Ферма в своей знаменитой работе "Ad locos planos et solidos isagoge" (написана около 1636 г., напечатана же только в 1679 г., уже после смерти автора) занимается уже не просто нахождением некоторых отрезков, связанных со взаимным расположением кривой и оси координат, а прямо исследует задачу соответствия между алгебраическими уравнениями и кривыми. Однако здесь важны два обстоятельства. Во-первых, работа Ферма была опубликована слишком поздно, и подход Декарта примерно на 100 лет определил направление работы в аналитической геометрии. Во-вторых, некоторая исходная "сектантская" прямолинейность декартовского геометрического метода лучше позволяет разглядеть его общефилософские предпосылки, не столь очевидные в более синтетическом, более гибком подходе Пьера Ферма.

§ 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ КАК ТЕХНИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ

Однако, как бы мы не критиковали декартовский метод, он оказывается эффективным орудием для решения обширного класса задач. Ту радикальную реформу всей математики, которая связана с алгебраизацией геометрии в "Геометрии" Декарта, известный историк математики Г. Цейтен сравнивает с "переходом индустрии от ремесленного к фабричному производству"[29]. С помощью "исчисления господина Декарта"[30], человек отнюдь не обладающий особыми математическими способностями может решать задачи, которые в рамках традиционных методов античной геометрии были доступны лишь профессионалам высокого уровня. Решение задачи требует лишь аккуратной ее формализации – перевода на язык символов, и далее чисто механической работы, связанной с преобразованием алгебраических выражений. Алгебра выступает почти универсальным посредником при решении геометрических (как и арифметических) задач. Сама по себе алгебра есть лишь наука операций, производимых над отрезками[31]: каждому алгебраическому выражению соответствует некоторая последовательность действий над геометрическими (или арифметическими) величинами. В этом отношении алгебра есть не что иное (нечто большее), как *техника* геометрических операций. И именно поэтому мы приходим к необходимости рассмотреть алгебру на фоне более общих вопросов, касающихся, природы техники.

Природа и сущность техники понимается разными авторами поразному. Мы выберем для сравнения интерпретацию К. Ясперса, представляющуюся нам достаточно трезвой[32]. При сравнении определений техники как техники материальной и алгебраической, как она возникает и функционирует на заре нового времени, обнаруживаются удивительные соответствия: 1) Ясперс определяет технику, прежде всего, как *средство*. "Техника возникает, когда для достижения цели вводятся промежуточные средства"[33]. Именно так, как уже отмечалось нами, и выступает алгебра у Декарта – как эффективное средство решения задача. 2) "Техника покоится на деятельности рассудка"[34]. Именно такую деятельность предполагает и алгебраическая техника. Как раз это и требовалось от нее создателем философского метода: "без излишней траты умственных сил", механически следуя простым правилам некоторого исчисления, иметь возможность решать разнообразные задачи. Алгебраическая техника не требует ни особых усилий воображения, ни,

---

[29] *Цейтен Г.* История математики в XVI и XVII веках. М.; Л., 1933. С. 211.

[30] Название небольшого учебника по алгебре, приписываемого Декарту. См.: Исчисление господина Декарта (Введение в геометрию) // *Декарт Р.* Геометрия. М.; Л., 1938. С. 117–137.

[31] Во времена Декарта.

[32] *Ясперс К.* Современная техника // Новая технократическая волна на западе. М., 1986. С. 119–146.

[33] Там же. С. 122.

[34] Там же.

тем более, "интеллектуального созерцания". 3) Техника связана с властью, техническое знание есть *сила*. "Техника – это умение, методы которого являются внешними по отношению к цели. Это умение – способность делать и обладать, а не созидать и предоставлять расти"[35]. Действительно, применение алгебры в геометрии выступает, как нечто *внешнее* по отношению к самой "материи" этой науки. Алгебраический "механизм" режет (континуум), комбинирует, считает, но своего элемента, своего "простого" – отрезка, как непрерывной величины, как действительного числа – он не знает (да и не хочет знать). Особенно это наглядно видно у Декарта: после преобразования уравнений они решаются чисто *геометрически*, с помощью пересечения кривых. Другими словами, мы от начала и до конца остаемся в рамках инструменталистски понимаемой геометрии: существовать, – значит, быть построенным. Никаких новых теоретических "прозрений" не происходит. С другой стороны, знание приема, знание формулы есть власть, есть сила: не только над числами и отрезками, но сила и в социальном смысле. Как сила достаточно *отчужденная* от личности – формулу можно украсть, идею украсть труднее, – она может стать предметом соперничества. Математические турниры XVI в. (например, А. Фиор – Н. Тарталья, в связи с уравнением третьей степени), сохранение новооткрытых формул в тайне (!), яростные споры о приоритете (например, Н. Тарталья – Д. Кардано) только одной своей стороной связаны со столь непомерным тщеславием "человека Возрождения". Другая сторона – характер самого знания. 4) Техника перестраивает и создает новый мир. "Создание орудий труда подчинено идее некоторого единства, а именно единства, в рамках постоянно расширяющегося при своей замкнутости преобразования человеком окружающей его среды"[36]. И эта черта функционирования техники находит себе параллель в "Геометрии" Декарта. Алгебраический метод эффективен отнюдь не для всех геометрических кривых[37]. Каков же вывод? Слаб ли сам метод? Нет, отвечает Декарт, те кривые, которые не "поддаются" этому методу *"не могут быть допущены в геометрии"*[38]. Алгебраическая техника навязывает границы самой геометрии. Общая тенденция технической цивилизации, проявляющаяся в приспособлении окружающей среды (и даже человека) к способу функционирования машины, – прокладка автомобильных и железных дорог, экспансия формальных языков во все сферы культуры, формализация искусства, приспособление человека к ритму работы машины и т.д. – находит полную аналогию и в декартовской "революции в геометрии". Понятным, рациональным, научным становится только то, что доступно обработке с помощью априорного метода. Все иное выталкивается за границы науки, объявляется иррациональным, а то и бессмысленным, а то и – при некотором

[35] Там же. С. 123.

[36] Там же.

[37] По современной терминологии только для алгебраических. Остальные кривые (вслед за Лейбницем) мы называем трансцендентными.

[38] См. начало книги второй: "Какие кривые линии могут быть допущены в геометрии?" (*Декарт Р.* Геометрия... С. 29 и далее).

навыке – ...несуществующим[9]. 5) С механическим, отчужденным характером деятельности человека, воплощенной в технике, связаны и возникающие на почве технизации серьезные проблемы. "Там, где методы, допускающие практическое усвоение и входящие в самую сущность технической деятельности, превращаются в самоудовлетворяющуюся рутину, это усвоение способствует уже не обогащению жизни.., а ее обеднению"[40]. То же можно повторить и в отношении алгебраизации в "Геометрии". Решение задач, сведенное к механическому вычислению, обессмысливает геометрию, как таковую. Чисто алгебраические вычисления требуют лишь определенного типа внимания, как бы не нуждаются уже в "целом человеке". Лишенная творческого усилия, эта деятельность сама по себе утомительна, скучна и антигуманна по своей сути. Человек здесь воистину оказывается лишь *придатком* – придатком машины алгебраического метода. Кроме того, многие решения, получаемые с помощью декартовского метода, были слишком громоздки, уступая в изяществе и простоте традиционным методам "синтетической" геометрии греков. Чем следовало пожертвовать – красотой геометрических построений или всеобщностью универсального метода? Мнения разделялись. Ньютон, например, виртуозно владея алгебраическим методом в геометрии, так и не принял декартовского подхода целиком. Ньютон говорил, что "алгебра – это анализ сапожников в математике"[41]. Камнем преткновения служил все тот же пункт, на котором столь настаивала наука древних – роль созерцания в геометрии.

Этот бросающийся в глаза параллелизм между характеристиками техники материальной и алгеброй не случаен. Алгебра, как мы уже подчеркивали, исходно есть наука операций, техника манипулирования с числами и геометрическими величинами. Будучи по сути своей техникой, она порождала (и порождает) все основные проблемы, сопутствующие технике. Эти проблемы начинались уже с элементарной автоматизации в математике – с введения "арабской" десятичной, позиционной формы записи чисел. Римская система записи чисел, как и древнегреческая (буквенная) – громоздки и неудобны. Но это – для нас. Европейцы древности и средневековья прекрасно обходились именно этими формами записи. Любопытно, что спор между "абацистами" и "алгоритмистами" – сторонниками вычислений на абаке и вычислений с помощью десяти арабских цифр продолжается почти семь столетий (вплоть до XVII в. включительно). Причиной этого были как внешние факторы – отсутствие бумаги, – так и более глубокие, идеологические моменты[42].

---

[39] Конечно, дальнейшее развитие математики, создание дифференциального и интегрального исчислений, раздвинуло те узкие рамки координатной геометрии, которые ей предписывал Декарт. Однако нас здесь интересует *тенденция*, которая имеет общий характер.

[40] *Ясперс К.* Указ. соч. С. 124.

[41] Цитата по ст. Юшкевича А.П. О "Всеобщей арифметике" И. Ньютона // *Ньютон И.* Всеобщая арифметика. М., 1948. С. 368.

[42] Прежде всего профессионалы-вычислители – "абацисты" – не желали терять монополии в этом прибыльном деле и использовали все возможности для компрометации нового метода вычислений. Но главной, более основательной причиной была

В культуре любые нововведения оцениваются и воспринимаются не только по их чисто прагматическим характеристикам – удобство, эффективность, – но и по их общей символической значимости в рамках целостного культурного горизонта. Примат прагматических ценностей должен сначала сам стать принципом культуры, чтобы быть решающим аргументом за изменение существующих традиций. Без этого самое удобное и эффективное нововведение может быть отвергнуто. Оно может оказаться ... *слишком* удобным.

Смысл сближения алгебры и техники можно понять также из следующего сопоставления. Высшей, *предельной* задачей техники является создание универсального механизма – универсального робота. В настоящее время, время мощного технологического взрыва, тотальной автоматизации на основе современных компьютерных средств регулятивный характер этой идеи проявляется все более очевидно. Интересно, что и на заре новоевропейской цивилизации в XV–XVI веках идеи гомункулуса, "голема", человекообразного автомата были очень популярны (и имели следствием даже попытки их технического воплощения). С другой стороны, *"идеальной" целью алгебры – и одновременно*, как мы уже отмечали, ее истоком – служит идея универсального алгоритма. Пышно разросшееся "древо" абстрактной алгебры выделило уже из себя к XX в. специальную дисциплину – математическую логику. На базе последней создаются различные искусственные языки, позволяющие в той или иной степени "формализовать" некоторые человеческие действия, т.е. представить их как совокупность операций, доступных машинному моделированию. Эти две идеи – идея машины, автомата и идея алгоритма, – продолженные до своего логического предела, взятые в своей полноте, "пересекаются". Этим пересечением служит идея искусственно созданного существа, по своим физическим возможностям превосходящего, а по интеллектуальным, *как минимум* равного человеку. Причем, универсальный алгоритм представлял бы собой, как бы "душу" этого существа.

идеологическая. Арабская система счисления была простым и мощным орудием вычислений, доступным человеку самых средних способностей. Эта система счисления выступала как некая "машина" для вычислений, в эффективности которой церковная культура усматривала опасность для традиционной системы ценностей. С точки зрения этой традиционной системы эффективное нововведение может оказаться "соблазнительным", смещая интерес человека с главного – духовных проблем, связанных со спасением души, – на второстепенное (и даже, греховное), на автономное самоутверждение человека в этом мире. Арабская система счисления, с этой точки зрения, представляла собой как бы новую Вавилонскую башню (или средство для построения таковой). Тот факт, что алгоритм пришел из нехристианской культуры, с Востока, в общем мутном потоке алхимического и магического знания, усугублял отрицательное к нему отношение (подробности освоения Европой арабской системы счисления см., например, в кн.: *Ifrah G.* Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention. P., 1985. P. 281–309.

§ 3. СПОР О СМЫСЛЕ ГЕОМЕТРИИ

Но обратимся опять к XVII веку. Мы уже отмечали, что среди тех, кто не принимал программу алгебраизации геометрии в той форме, как ее сформулировал Декарт, был и Ньютон. В своей "Всеобщей арифметике" он несколько раз обращается к критике узловых положений декартовского геометрического метода. Спор идет не о возможности или оправданности применения алгебры в геометрии. Ньютон не отрицает, что с помощью алгебры *некоторые* геометрические задачи допускают эффективное решение, и дает в своем труде множество примеров виртуозного владения алгебраическим методом. Спор идет о *смысле* этого приема, о гносеологическом статусе геометрии как таковой. Чтобы понять аргументацию Ньютона, нужно вспомнить о том разделении геометрических задач на три класса, которое установилось еще с древности. Греческие математики делили задачи на плоские, телесные и линейные. Первые должны использовать при решении только прямую и круг, при решении вторых дозволено пользоваться кроме того и коническими сечениями – эллипс, парабола, гипербола (название "телесные задачи" и связано, вероятно, с тем, что эти кривые получались как сечения тела – конуса – плоскостью); линейные же задачи включают в себя использование всех других кривых (в частности и механического происхождения, такие как конхоида, квадратриса и т.д.). Причем, решение задачи считалось легальным, только если оно выполнено средствами соответствующего рода. Решение, например, плоской задачи с помощью кривых второго порядка не могло быть удовлетворительным: оно понималось как неадекватное предмету самой задачи, как не вскрывающее истинных оснований проблемы, как случайное.

Декарт же в своей геометрии дает новую классификацию кривых, по порядку соответствующих им уравнений. Кривые порядка $(2n - 1)$ и $2n$ попадают в один род[43]. Декарт, как и греки, требует, чтобы задача решалась не с помощью любой кривой, а с помощью простейшей. "Нужно также заметить, – пишет он, – что под наиболее простыми кривыми не следует понимать только те, которые проще всего описать, или те, которые дают наиболее легкое построение или доказательство предложенной задачи, но в особенности те, которые принадлежат к простейшему роду (роду, в смысле определения Декарта – *В.К.*), позволяющему определить искомую величину"[44]. В частности, в один род попадают круг и конические сечения – эллипс, гипербола, парабола. Другими словами, по Декарту, задачи, решаемые с помощью круга и прямой – т.е. плоские задачи, – законно могут быть разрешены и с помощью конических сечений. Это вопиющее противоречие с традицией античной геометрии и подвигает Ньютона на возражения. "Я одобряю, – пишет Ньютон, – что при рассмотрении линий и исследовании их свойств их разделяют на роды, согласно

[43] Причиной этой классификации было ошибочное мнение Декарта, что для любого n, все задачи, связанные с уравнением порядка 2n, можно свести к задачам порядка $(2n - 1)$.

[44] *Декарт Р.* Геометрия... С. 74.

измерениям определяющих их уравнений. Однако геометрической кривая является не в силу уравнения, но благодаря ее описанию. Круг является геометрической линией не потому, что может быть выражен уравнением, но потому, что описание его является постулатом. Выбор наших линий для построения задач определяется не простотой уравнения, но легкостью описаний линий. В самом деле, уравнение параболы проще, чем уравнение круга[45], а между тем круг предпочитают параболе, ибо построение его проще. Если рассматривать круг и конические сечения с точки зрения измерений их уравнений, то они относятся к одному порядку; однако при построении задач круг к ним не причисляют, но в силу простоты его описания низводят к низшему порядку, именно к тому же, к которому принадлежит прямая линия"[46].

Декарт при определении простого и сложного построения идет от своего метода, от рациональной конструкции. Но так как метод есть геометрическое выражение законов всеобщей человеческой "мудрости" лежащей в основании всех наук, то простое, в смысле метода, есть оптимальное, истинное. Простое решение, в смысле простоты геометрического построения задачи есть для Декарта лишь "эпифеномен", дурная привычка принимать случайное за основное, за истинное. И эту привычку должно преодолеть. В этом смысле мы и отмечали выше, что метод Декарта, внедрение алгебры есть не просто новый технический прием. Он есть новая культура, есть *культивирование* новых ценностей, в частности нового критерия простоты и сложности. Он есть создание нового мира, *в борьбе со старым*, традиционным, утверждающего новые ценности. Именно от лица этого "старого мира", старого порядка ценностей – впрочем не просто "естественного", а освященного двухтысячелетней математической традицией, – и выступает Ньютон. Подчеркнем еще раз: спор идет не о применении алгебры к геометрии, а о смысле самой геометрии. Приведем другую, пусть длинную, но красноречивую цитату из "Всеобщей арифметики": "Уравнения суть выражения арифметических вычислений, и они, собственно говоря, не имеют места в геометрии... Умножения, деления и тому подобные вычисления введены были в геометрию недавно и при этом неосторожно и в противоречии с основной целью этой науки. Всякий, кто рассмотрит построения задач при помощи прямой и круга, найденные первыми геометрами, легко увидит, что геометрия была изобретена для того, чтобы мы, проводя линии, могли с удобством избегать утомительных вычислений. Поэтому не следует смешивать эти две науки. Древние столь тщательно отличали их друг от друга, что никогда не вводили в геометрию арифметические термины. Современные ученые, смешивая обе науки, утратили простоту, в которой состоит все изящество геометрии. Арифметически проще то, что определяется при помощи более простых уравнений, геометрически же проще

---

[45] Уравнение параболы, в простейшем виде, есть $y = px^2$, а круга $x^2 + y^2 = r^2$. В первом уравнении только одна переменная во второй степени, во втором – обе.

[46] *Ньютон И.* Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе. М., 1948. С. 296.

то, что определяется при помощи более простого проведения линий; и в геометрии следует считать лучшим то, что наиболее просто с геометрической точки зрения"[47].

Две различные точки зрения на геометрию. Парадоксальным образом Ньютон, защищающий геометрию древних, в некотором смысле дальше от платоновской традиции, чем Декарт. Ньютоновский пафос геометрических построений противоречит платоновской программе "восхождения" от образов чувственных к интеллектуальным. Простота геометрического построения оправдывает, по Ньютону, использование в геометрии кривых механического происхождения[48] – то, против чего настойчиво выступал Платон[49]. Декарт с его алгебраической кривой как воплощением *точных конечных отношений*, с акцентом на алгебраическом методе, как бы "интеллектуализирующем" геометрию, как будто ближе Платону. Но мы уже отметили выше: декартовская "интеллектуализация" геометрии есть интеллектуализация внешняя, операционалистская. Платон говорил о движении мысли к интеллектуальному созерцанию "идей", а не о механическом, формально-алгебраическом "обсчете" элементов кривой. В этом смысле Ньютон, с его геометрическим "эмпиризмом", апеллирующим к непосредственному *созерцанию*, к "изяществу геометрии" оказывается странным образом ближе к платоновско-пифагорейской традиции, чем Декарт. Ньютоновский подход оставляет место для "прозрений", для нахождения оригинальных и неожиданных решений. Декартовский панметодизм заранее объявляет подобные решения случайными и недостойными имени науки. Решение должно быть не просто найдено, а найдено лучшим путем. Внутри системы Декарта последнее требование означает, как мы знаем, не требование простоты, *изящества или легкости*, а *предписание неукоснительного следования* правилам метода. Эти правила выражают саму природу мысли и гарантируют, по Декарту, наилучшее возможное решение.

Философский метод Декарта, воплощенный в алгебраической технике, превращает геометрию в чисто *синтетическую* науку[50]. Синтетическую в том смысле, что после выделения элементов знания построение науки идет как механическое складывание – сложного из простого. Всякая предложенная задача должна или быть разложена в совокупность элементарных или же не быть допущенной в геометрии вообще. Метод представляет собой способ *экстенсивного движения знания*[51]. Движение

[47] Там же.

[48] Ньютон предпочитает решение уравнений 3 и 4 степени с помощью конхоиды – *кривой механического происхождения – как геометрически более простое*, декартовскому решению, с помощью конических сечений.

[49] См. мою статью: Катасонов В.Н. О "платонизме" Галилея // Исследования по истории физики и механики, 1986. М., 1986. С. 38–48.

[50] Термин П. Бутру. См. *Boutroux P.* L'ideal scientifique... P. 104.

[51] *Эта тенденция в математике, набирающая силу к концу XVII в. не была единственной. В конце XIX в. внутри математики она, собственно, исчерпала доверие к себе, и философы, попытавшиеся дать логицистское обоснование математики (Фреге, Рассел), столкнулись с сильной оппозицией самих математиков (Пуанкаре, Борель, Кронекер и др.).*

"к началам", анализ самих элементов знания не может быть осуществлен этим методом. В качестве элементов здесь выступают некоторые положенные как возможные геометрические *действия* (постулаты). Обсуждение смысла этой возможности выносится за пределы самой науки: эта геометрия не изучает пространства и движения в нем, а изучает связь возможности одних действий с возможностью других. Наука тем самым становится, с одной стороны, условной – она идет от возможного к возможному, – а с другой, выявляет свой в высшей степени *прагматический* характер. Ее не интересует – что есть? Ее основная цель – понять: как можно сделать?

Эта прагматическая направленность декартовской аналитической геометрии, ее глубокая родовая связь с техникой, решительным образом противопоставляет ее античной традиции. Ньютон, в этом смысле, несмотря на полемику с Декартом, говорит о том же: в геометрии главное – *построения*. Декарт претендует дать своеобразный "канон" этих построений, Ньютон же предпочитает сохранить "свободу рук", но ориентируются при этом также на прагматику геометрии. Античное понимание геометрии переакцентируется: созерцание отодвигается на второй план. На первый выходит ее "низшая" часть, "связанная с ремеслами" (вспомним Прокла!), геометрия построений. И это было не случайно. Новая геометрия была неотделима от новой культуры, новой становящейся формации, нового человека. И "Новый орган" Ф. Бэкона, и экспериментальный метод Г. Галилея, и социальная "инженерия" Т. Кампанеллы, – все свидетельствовало о рождении нового человека, активного, деятельного, *перестраивающего* мир[52]. Монах-иезуит Б. Грасиан, – слишком увлеченный мирскими целями, чтобы не столкнуться в конце концов, с орденскими властями, – прекрасно выразил этот дух активизма в своем "Карманном оракуле" (1653), своеобразной "алгебре поведения" нового человека. В афоризме 202 он пишет: "Деяния – сущность жизни, речения ее прикрасы..., одни люди – мудры, другие – деятельны"[53]. Однако всякая деятельность предполагает некую цель, некий образец. В этом пункте, как и во все времена, решающим оказывался тот идеальный образ человека, цели и деятельность которого предлагались в качестве парадигмы. Именно этот идеальный образ подсказывал, что значит "заниматься наукой", в частности "заниматься геометрией", что значит "понимать", что значит вообще "мыслить".

Декарт дал свой образ "нормативного человека". Декартовский философ, погружающийся в "бездну" сомнения, довольно быстро нащупывает в этой "бездне" дно, точку опоры, и на ней, как на фундаменте, начинает строить свою универсальную науку. Движение научного знания после этого уже исключительно экстенсивное – сложное складывается

---

[52] Здесь невозможно не вспомнить Т. Гоббса: "Знание есть только путь к силе. Теоремы (которые и в геометрии являются путем исследования) служат только решению проблем. И всякое умозрение в конечном счете имеет целью какое-нибудь действие или практический успех" (*Гоббс Т.* Основы философии. Соч.: В 2-х т. Т. 1. М., 1989. С. 77).

[53] *Грасиан Б.* Карманный оракул. Критикон. М., 1984. С. 46.

из известных простых элементов – и в принципе может быть механизировано. "Жизнь", конечно, сопротивлялась этой программе знания: "не работали" некоторые алгоритмы, да и сами элементы знания отнюдь не были так бесспорно понятны, как требовала этого сама же декартовская программа. Нужно было или отказаться от предвзятых эпистемологических схем, или ... перестраивать саму действительность, подгоняя ее под выбранную заранее модель (мы видели, как это делал Декарт в геометрии). Примеров последнего пышное древо механицистских конструкций XVII–XVIII вв. дает немало. "Дух деятельности" сплошь и рядом оттеснял "дух мудрости". Это стремление прекрасно выражено у Гёте в заключительной части "Фауста". Фауст раздражен бесплодной и бессмысленной, по его мнению, картиной чередования приливов и отливов моря. Должно упорядочить все это случайное – по мнению Фауста! – "коловращение" стихий, обуздать их – построить плотину. На ироническое замечание Мефистофеля, что Фауст ищет славы, последний отвечает:

Не в славе суть. Мои желанья –
Власть, собственность, преобладанье.
Мое стремленье – дело, труд[54].

Пафос дела, труда, власти нес свою славу в самом себе. Техника же как бы служила главным символом, воплощением этого пафоса. "Фаустовский" дух деятельности становился всепронизывающим. Он проникал даже в теоретические дисциплины, перестраивал их, ориентировал их развитие в новом направлении.

[54] *Гёте И.В.* Фауст (Пер. Б. Пастернака). М., 1955. С. 495.

Глава II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ЛЕЙБНИЦА

§ 1. МЕТОД ИДЕАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ПРАГМАТИЧЕСКАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ НА ИСЧИСЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

В знаменитой, основополагающей для дифференциального исчисления, работе 1684 г. "Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления" Лейбниц обосновывает свои рассуждения и с помощью касательных, и с помощью дифференциалов. Рассуждения с помощью касательных наглядны и очевидны: в точках экстремума – максимума или минимума – касательная горизонтальна. Если мы умеем проводить касательные к кривым, – а это и было камнем преткновения! – то мы можем находить точки экстремума. Эти соображения были давно известны и общеприняты (напр., П. Ферма, И. Барроу и др.). Однако у Лейбница эти соображения – лишь иллюстрация его нового метода – собственно дифференциального исчисления. Этот новый метод вызвал много недоумений и критики (Б. Ньювентиит, М. Ролль, Ф. Лагир и др.). Главное, было непонятно, что такое дифференциал функции. Дифференциал независимой переменной был просто произвольным конечным количеством[1]. Дифференциал же зависящий от x переменной вводился двояко. Первый способ – с помощью касательной. На языке современных обозначений

$$dv = dx \cdot \operatorname{tg}\alpha, \tag{1}$$

где α – есть тангенс угла наклона касательной к оси. Но мы уже отметили – задача проведения касательной сама была сложной проблемой. Тем важнее оказывалась роль второго, формального способа введения дифференциала, как результата применения правил некоторого исчисления. В список этих правил входили способы нахождения дифференциала алгебраических сумм, произведения, частного функций. Эти правила, – которые, однако, Лейбниц в своей статье не доказывал, – заставляли думать, что дифференциалы суть бесконечно малые величины. В первом же определении, через касательную, дифференциалы были произвольными *конечными* величинами. Что же надо было понимать под дифферен-

[1] Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница (составил и перевел А.П. Юшкевич) // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3. Вып. 1 (23). С. 166.

циалом? Не помогало, а скорей запутывало следующее "объяснение", приведенное в работе: "Доказательство всего этого (нахождение экстремумов и касательных с помощью дифференциалов – *В.К.*) будет легким для знакомого со всеми этими вещами, если он только примет во внимание то недостаточно оцененное обстоятельство, что dx, dy, dv, dw, dz можно считать соответственно пропорциональными разностям или мгновенным приращениям или уменьшениям x, y, v, w, z"[2]. Понять, что такое "мгновенное приращение" было не проще, чем что такое бесконечно малая величина. С другой стороны, Лейбниц неоднократно давал разъяснения, подчеркивавшие необязательность рассматривать дифференциалы введенного им алгоритма, как бесконечно малые. Так, в 1701 г. он пишет в Journal de Trevaux: "Дело в том, что вместо бесконечного или бесконечно малого берутся настолько большие и настолько малые величины, *насколько это нужно, чтобы ошибка* (l'erreur) оказалась менее данной ошибки (l'erreur donnée), и таким образом, отличие от стиля Архимеда состоит лишь в выражениях, которые в нашем методе являются более прямыми и более пригодны для искусства изобретения"[3]. Здесь Лейбниц хочет представить свой метод по существу совпадающим с "методом исчерпывания" древних, не использующим актуально бесконечного. Всю свою жизнь Лейбниц пытался дать новому исчислению обоснование, независимое от "метафизики бесконечно малых". Однако это ему не удавалось. Мы обсуждаем ниже те философские предпосылки, которые оправдывали формулу (1), названную Лейбницем в одной из своих статей "законом дифференциального исчисления"[4]. В этом обсуждении выявится также и та общая перспектива, в которой рассматривал Лейбниц математическое знание. Анализ математических представлений Лейбница подтверждает ту черту его научной деятельности, которая уже не раз подчеркивалась исследователями: столь разносторонее научное наследие великого немецкого ученого оказывается в удивительной органической связи с фундаментальными принципами его философии.

Несмотря на характерную двойственность высказываний Лейбница, более внимательный анализ математических работ, проведенный историками математики, делает несомненным тот факт, что Лейбниц строит дифференциальное исчисление, используя понятие актуально бесконечно малой величины. Так, известный американский историк математики К. Бойер справедливо замечает, что, хотя в вышеупомянутой работе 1648 г. в формуле (1) dx (и, следовательно, dv) и определяются как конечные величины, тем не менее все определение основывается на понятии бесконечно малой величины[5]. В формулу (1) входит угол между касательной и осью. Касательная же определяется Лейбницем, как "прямая, соединяющая две точки кривой, расстояние между которыми бес-

---

[2] Там же. С. 169.

[3] *Mémoire de M.G.W. Leibniz touchaut son sentiment sur le calcul différential // Leibniz G.W.* Mathematische Schriften. B.–Halle, 1849–63. Bd. 5. S. 350.

[4] *Leibniz G.W.* Matematische Schriften... S. 287.

[5] *Boyer C.B.* The Concept of the Calculus. N.-Y., 1939. P. 210.

конечно мало", т.е. актуально бесконечно малая неявно присутствует в этом определении. Попытка Лейбница уйти от актуальной бесконечности есть лишь petitio principii.

Из более поздних работ важно отметить также очень добротную статью голландского историка математики Г. Боса о дифференциальном исчислении Лейбница[6]. Бос также подчеркивает тот момент, что во всех своих опубликованных математических работах, за исключением работы 1684 г., Лейбниц понимает дифференциал как бесконечно малую величину[7]. В историческом плане этот факт отнюдь не случаен. Постараемся осознать это. Дело в том, что для математиков XVII в. еще не существовало понятия величины в нашем сегодняшнем смысле. Непрерывно меняющаяся величина – это обычно геометрический отрезок (площадь, объем). Эта величина еще не "арифметизирована", как в сегодняшнем анализе. Она не выражается полностью через действительные числа (нет еще общего понятия действительного числа). Для того чтобы поставить каждой точке в соответствие действительное число, нужно выбрать некоторый выделенный отрезок – единицу измерения. Однако, этот выбор ничем не обусловлен, произволен. И математика XVII в. еще сопротивляется этой тенденции (хотя и довольно ясно сознает ее!) полностью – свести геометрические соотношения к числовым. "Недостаточность оснований" для выбора единицы длины как бы подсказывала – эта тенденция неестественна, противоречит самой природе вещей. В математике XVII в. еще сильны запреты античной математики: геометрия и арифметика – различные науки. Первая никак не сводима к второй. Хотя бы потому, что существуют несоизмеримые отрезки, а XVII век еще не знает понятия иррационального числа. Поэтому для математиков времен Лейбница непрерывная величина всегда сохраняет свой геометрический характер. Лейбниц приходит к своим дифференциальным конструкциям, исходя из опыта работы с дискретными последовательностями чисел. От рассмотрения величин, принимающих дискретное множество возрастающих (или убывающих) значений он переходит к величинам, непрерывно возрастающим. Если через x обозначить саму величину, а через dx ее приращение, то в случае дискретных последовательностей dx – конечно, и каждой последовательности значений $\{x_i\}$ можно поставить в соответствие последовательность ее конечных приращений $(dx_i = x_{i+1} - x_i)$. Если же величина возрастает непрерывно, то последовательность приращений есть последовательность бесконечно малых чисел. Для XVII в. это было и понятно, и непонятно одновременно. Непонятно по тем же причинам, что и для нас – что есть бесконечно малое число? Как можно мыслить нечто, которое одновременно есть и ничто, нуль? Понятно, во всяком случае более убедительно, чем для нас, потому что непрерывная величина мыслилась геометрически, она есть, например, непрерывно ме-

---

[6] *Bos H.J.H.* Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus // Archive for History of exact sciences, ed. by C. Truesdell. V. 14. Berlin. Heidelberg, N.-Y., 1974.

[7] Ibidem. P. 13. Исключительное положение статьи 1684 г. Бос считает случайным моментом. Мы придерживаемся здесь иного мнения. Об этом будет сказано ниже.

няющийся отрезок, – *непрерывная последовательность отрезков.* Один же отрезок отличается от другого, "следующего" в ряду рассматриваемой непрерывной последовательности, только на *точку,* имеющую, естественно "длину" нуль.

Бесконечно малое число и в XVII в., и вообще с генетической точки зрения, есть арифметический образ геометрической точки. Проблема бесконечно малого аналогична проблеме точки, проблеме ее отношения к целому пространства. Со времени Зенона Элейского антиномичность этого отношения была уже общеизвестна. Поэтому бесконечно малые дифференциалы Лейбница встретили довольно дружный хор недоумевающих и порицающих голосов. Упомянутая работа Боса хороша именно тем, что рассматривает построения Лейбница так, как они были задуманы их автором, не гримируя их под современный анализ, в котором понятию бесконечно малой величины "отказано в гражданстве"[8]. Бос пишет в предисловии к своей статье: "Этот очерк принимает бесконечно малые и бесконечно большие величины в качестве подлинных математических сущностей. Сделать иначе значило бы отойти слишком далеко от лейбницевского исчисления. Принимая эти величины, очерк принимает также и все противоречия, которые в течение XVIII в. все сильнее ощущались как препятствия и которые были устранены в XIX в., благодаря полному изгнанию бесконечно малых величин из анализа"[9]. Лейбниц ясно представлял все противоречия, связанные с использованием бесконечно малых величин. Оправдание их введения в математику не могло быть найдено в рамках старого, классического, связанного с античностью идеала математического знания. Для оправдания бесконечно малых нужны были новые философские представления о природе математики.

Какие же оправдания выдвигает Лейбниц в пользу построения математической дисциплины на основе такого противоречивого понятия как бесконечно малая величина? Мы уже отметили, что проблема бесконечно малой величины непосредственно связана с проблемой точки, как "элемента" пространства. Для Лейбница эта проблема была неотделима от вопроса об "элементе бытия" вообще, от вопроса о "неделимом истинном единстве", к которому приводит анализ (в общелогическом смысле слова). Ответом на последний вопрос является, собственно, вся система "Монадологии". Для нас сейчас важен один фрагмент из работы 1695 г., примыкающей к кругу идей "Монадологии". Вот этот фрагмент: "Таким образом, точки физические неделимы только по видимости; математические точки – точки в строгом смысле, но они только модальности; только точки метафизические, или точки – субстанции (а их образуют формы или души), суть точки в строгом смысле, и притом реальные; и без них не было бы ничего реального, так как без настоящих единиц не может быть и множества"[10]. Лейбниц описывает в начале этой работы, как он со вре-

[8] Я не затрагиваю здесь вопроса о так называемом нестандартном анализе.

[9] *Bos H.J.H.* Op. cit. P. 12.

[10] *Лейбниц Г.В.* Новая система природы и общения между субстанциями, а также о связи, существующей между душою и телом // Лейбниц Г.В. Соч.: В 4-х т. Т. 1. М., 1982. С. 276–277.

мен своей юности поставил себе задачу: найти принцип истинного единства и воплощение этого принципа – истинный элемент. Атом, как элемент бытия, как неделимая материальная частица, был отвергнут Лейбницем. Атом неделим "только по видимости": протяженная материальная частица, как бы ни была она мала, имеет части, мы можем мыслить эти части, следовательно, атом не является неделимым элементом. Принцип истинного единства может, по Лейбницу, быть только идеальным – душа, форма. Воплощением этого принципа является индивидуальное живое существо – монада. Именно монады выступают как истинные бытийственные элементы, "метафизические точки", из которых сложено все сущее.

Для нас в цитированном фрагменте интересна в особенности характеристика математических точек. Математические точки суть точки в строгом смысле, говорит Лейбниц. Т.е. понятие математической точки действительно предполагает некий "элемент" пространства, не имеющий частей. Именно в таком качестве используются точки в геометрии. Именно так определяет Евклид точку в своих "Началах". Однако, как точка соотносится с целым непрерывного пространства, которому она принадлежит, как можно *выделить* точку в континууме – непонятно. Точки остаются только модальностями. Можно или чисто аксиоматически потребовать: в любом куске пространства можно взять хотя бы одну точку. Или дать более наглядную процедуру выделения точки, рассматривая, например, последовательность вложенных друг в друга шаров со стремящимися к нулю радиусами. Точка выступает в последнем случае, как некое предельное понятие, как "самый малый" элемент пространства. Точка представляет собой, строго говоря, не данность, а некоторую предельную (для воображения!) идею. В приведенной цитате важно подчеркнуть тот факт, что Лейбниц отказывает математическим точкам в реальности. Реальны физические элементы, но они не истинные элементы, не суть точки. Реальны метафизические точки, истинные элементы сущего – монады. Математические точки не обладают никакой реальностью вне представляющего их сознания (монады), они суть лишь некоторые идеальные (как предельные) понятия, идеальные (как существующие только в сознании) элементы.

Такими же идеальными понятиями оказываются и бесконечно малые величины у Лейбница, поскольку они представляют собой арифметический аналог геометрической точки. В письме к французскому математику П. Вариньону от 2 февраля 1702 г. Лейбниц, оправдывая свои дифференциалы, писал: "...если кто-нибудь не допускает бесконечных и бесконечно малых линий в строго метафизическом смысле и в качестве действительных вещей, тот может надежно пользоваться ими как идеальными понятиями, сокращающими рассуждения и сходными с так называемыми в обыкновенном анализе мнимыми корнями (вроде, например, $\sqrt{-2}$), которые несмотря на то, что их называют мнимыми, не перестают от этого быть полезными и даже необходимыми для аналитического выражения действительных величин"[11]. Лейбниц ясно осознавал определенную общность методологических проблем, связанных с обоснованием диф-

[11] Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница. С. 192.

ференциала, и проблем, касающихся комплексных чисел. Начиная с XVI–XVII вв., введение новых, "идеальных элементов" становится характерной чертой новоевропейской математики. Общим для всех этих новых объектов было то, что они не только не допускали непосредственной интерпретации на уровне чувственно данного мира, но и были лишены той наглядности, той "очевидности", которая свойственна объектам традиционной арифметики и геометрии – целым числам, точкам, прямым и т.д. Новые объекты "идеальны", представляют собой своеобразные "абстракции" (как бы второго рода), но оказываются удивительно эффективными средствами познания (как внутри, так внематематического). Таковы и комплексные числа, и иррациональные (а, строго говоря, и отрицательные числа), и бесконено удаленные точки проективной геометрии, и "идеальные числа" Куммера и др. Немецкий математик Г. Вейль, один из самых проницательных ученых нашего времени, писал о методе идеальных элементов: "...в математике постоянно производится расширение первоначально заданной области операций при помощи присоединения идеальных элементов, причем делается это для того, чтобы сообщить всеобщую применимость некоторым простым законам" [12]. Это расширение первоначально заданного множества объектов с целью обеспечения выполнимости некоторых операций (чтобы вычесть любые числа, нужно ввести отрицательные величины в качестве чисел; чтобы всегда существовал корень из числа, нужно ввести иррациональные и комплексные числа; чтобы любые две прямые плоскости пересекались – вводятся бесконечно удаленные точки и т.д.) позволяет вскрыть новые более общие соотношения и закономерности, которые "изнутри" исходной области совсем не очевидны. Метод идеальных элементов как бы выявляет скрытые параметры изучаемой реальности и тем самым дает более глубокое ее понимание.

Однако назвать какие-то математические понятия идеальными – не значит объяснить их эффективность и, тем более, не значит гарантировать законность их применения. И как философ, и как математик Лейбниц должен был как-то объяснить "непостижимую эффективность" бесконечно малых. С чисто математической точки зрения Лейбниц пытался интерпретировать дифференциальное исчисление как лишь модификацию "метода исчерпывания", применявшегося уже в геометрии античности (см. вышеприведенную цитату из Journal de Trevaux, на с. 27). Этот метод не использует актуально бесконечно малых величин. Согласно лейбницевской интерпретации вместо дифференциалов можно представлять в уравнение произвольные конечные величины, и чем они меньше будут отличаться от некоторых предельных, тем точнее будет получаемое равенство. Однако противники дифференциального исчисления стали тогда утверждать, что исчисление дает лишь приближенные результаты. Это губило саму идею дифференциального исчисления как метода научного познания. Приходилось искать иные оправдания.

[12] *Вейль Г.* О философии математики. М.-Л., 1934. С. 40. Изд. 3. М.: КомКнига/URSS, 2010. Крупнейший математик нашего века Д. Гильберт называет обсуждаемый метод "гениальным методом идеальных элементов" (См.: *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.; Л., 1948. С. 355).

Конечно, всегда оставалось чисто прагматическое объяснение: новый метод *позволял успешно решать задачи*. Лейбниц, пишет К. Бойер, "чувствовал, что исчисление в качестве modus operandi несло с собой и свое доказательство"[13]. По нашему мнению, это было и так, и не так. "Знать" и "уметь" различаются в математике так же, как и в других областях жизни. Дело в том, что дифференциальное исчисление Лейбница, эффективно решая некоторые старые задачи, *все-таки более эффектно* проявляло себя в постановке и решении новых. Эти решения нередко представлялись бесконечным рядом (например, квадратура круга Лейбница, нахождение длины цепной линии и др.), т.е. чем-то совершенно немыслимым для классической математики античности. Та несоизмеримость теорий, которую так ярко демонстрировал Т. Кун в истории физики, аналогичным образом выступает и в математике. В каком смысле можно говорить, что новые методы в математике XVII в. решали задачи? Само решение выступало как новый объект – бесконечный ряд. Решение одновременно представляло собой и некоторое новое определение. На место одного неизвестного – чему равна площадь круга? – ставилось другое – бесконечный ряд. Выигрыш был, правда, в том, что была развита эффективная техника работы с бесконечными рядами. Но *умение* не удовлетворяло полностью жажду *знания*. Ответ на вопрос *как?* для бесконечного ряда (как с ним оперировать) не решал вопроса о *что?* этого ряда – вопроса о законности введения этого нового математического объекта. И корень этого вопроса, как и для бесконечно малых, – актуальная бесконечность.

В XVI–XVII в. тенденция прагматического оправдания эффективности математики в высшей степени популярна. Вдохновляясь мечтой францисканского миссионера XIII в. Р. Луллия о "великом искусстве", которое могло бы автоматизировать процесс мышления, многие мыслители заняты поисками удобной знаковой системы, универсального алгоритма, позволившего бы "без излишней траты умственных сил"[14], решить все возможные проблемы. Само создание алгебры в XVI–XVII вв. представляется даже как бы лишь побочным продуктом этой титанической "супер-идеи". В XVII в. эта идея не имеет еще того выхолощенно-формалистического вида, какой она нередко принимает в наше время[15]. Математики и философы XVII в. не

---

[13] *Boyer C.* Op. cit. P. 209.

[14] Выражение Декарта, в связи с идеей mathesis universalis. См. первую главу.

[15] П. Бутру, чуткий историк математики, прекрасно выразил математический идеал "формалистов": "...математика перестает быть объективной наукой и понятия, которые она изучает, *не имеют больше ценности сами по себе*. Отныне должно видеть в алгебре или в геометрическом доказательстве только удачный метод. Математические свойства ни истинны, ни ложны, ни красивы, ни интересны; они лишь только соответствуют определениям и аксиомам, гипотезам, из которых они получаются. Впрочем, эти гипотезы конвенциональны и, даже если они шокируют здравый смысл, они не становятся от этого менее законны, чем если бы они не влекли никаких логических противоречий. Что же до их уместности, то она оценивается по двум критериям: полезность и удобство для науки, которая на них основывается. Модифицируя определения и аксиомы, мы могли бы построить бесконечно много различных наук; совершенно естественно, что среди этих наук мы выберем ту, которая наиболее соответствует привычкам нашего духа и нашим целям" (*Boutroux P.* Op. cit. P. 152).

рассматривают математику, как чисто формальную науку, для них важно *понять ее укорененность в самом бытии*. Декарт ищет обоснования идеи универсального алгоритма на путях трансцендентализма: декартовский метод (и должная выразить его "универсальная математика") укоренен в самой структуре разума. Примерно по тем же путям движется и Лейбниц (сделавший, однако, несравненно больше для реализации идеи mathesis universalis). В одном из многочисленных набросков, посвященных разработке "универсальной характеристики", Лейбниц пишет: "И хотя давно уже некоторые выдающиеся мужи выдвинули идею некоторого универсального языка, или универсальной характеристики, посредством которой прекрасно упорядочиваются понятия и все вещи, ... никто, однако, не попытался создать язык, или характеристику, в которой одновременно содержалось бы искусство открытия и искусство суждения, т.е. знаки или характеры которой представляли бы собой то же, что арифметические знаки представляют в отношении чисел, а алгебраические – в отношении абстрактно взятых величин. А ведь Бог, даруя человеческому роду эти две науки, по-видимому, желал нам напомнить, что в нашем разуме скрывается тайна значительно более важная, и эти две науки – только тени ее"[16]. Лейбниц был очень воодушевлен идеей "универсальной характеристики", считал ее вполне осуществимой[17]. Анализ бесконечно малых должен был составлять существенную часть этой науки, а именно часть, входящую в "науку о бесконечности" вообще. Тем самым, изначально Лейбниц строит свой анализ бесконечно малых, как часть универсального формального алгоритма, строит его как исчисление (calculus). Именно это внимание к знаку, к формальной стороне нового метода позволило Лейбницу сформулировать ряд важных положений математического анализа. Это и знаменитая формула Лейбница для дифференцирования произведения, и удачно выбранные им обозначения для дифференциала (дожившие до сегодняшнего дня). Именно с этой точки зрения обсуждает Лейбниц в переписке с И. Бернулли формальное употребление знаков интеграла и дифференциала[18], когда $\int = d^{-1}$ и возможны следующие равенства:

$$\frac{d^3y}{d^2x} = d^3y \cdot d^{-2}x = d^3y\int^2 x$$

---

[16] *Лейбниц Г.В.* Соч.: В 4-х... Т. 3. С. 412–413.

[17] В той же работе, из которой приведена последняя цитата, Лейбниц пишет: "Я думаю, что несколько специально подобранных людей смогли бы завершить дело (построение всей системы естествознания! – *В.К.*) в пределах пяти лет; а учения более близкие к жизни, т.е. доктрину моральную и метафизическую, полученную посредством неопровержимого исчисления, они смогли бы представить в течение двух лет" (*Лейбниц Г.В.* Там же. С. 416). Лейбниц не только мечтал о подобной "шигалевщине", но и предпринимал некоторые практические шаги для ее реализации в области историософии и политологии. См.: *Voisé W.* Mathematique politique et l'histoire raisonné de Leibniz dans son "Specimen demonstrationum politicarum" // Leibniz, Aspects de l'homme et de l'oeuvre. Paris, 1968. P. 61–68.

[18] См.: *Boyer C.* Op. cit. P. 211.

Однако ни голый успех в решении некоторых задач, ни надежды на построение универсального алгоритма, "универсальной характеристики" (надежды, которые ведь тоже нужно было еще оправдать) не давали ответов на прямые вопросы: что такое бесконечно малый дифференциал? чем гарантирована законность его использования? Из фрагментов рукописного архива Лейбница, опубликованных уже только в XIX в., мы знаем, что он настойчиво пытался обосновать свои инфинитезимальные построения в математике с помощью конечных величин. Воодушевлены были эти попытки уверенностью Лейбница в справедливости некоторых уже не узкоматематических, а общефилософских положений, игравших фундаментальную роль для всей его научной деятельности. К рассмотрению этих философем мы сейчас и перейдем.

§ 2. ПРИНЦИП ЗАКОНОПОСТОЯНСТВА

Ситуация в математике была для Лейбница полностью аналогичной ситуации в механике. Работа "Анагогический опыт исследования причин" начинается тезисом, что "познание законов природы приводит нас в конечном итоге к более высоким принципам порядка и совершенства, которые указывают на то, что вселенная является результатом универсальной разумной силы"[19]. *Природу, как считал Лейбниц, можно в той* или иной степени, в меру нашей изобретательности объяснить из законов механики. Однако принципы самой механики не могут уже быть объяснены в рамках механики. Нужно прибегнуть к конечным причинам, особым "архитектоническим принципам", указывающим на мудрость Творца. Лейбниц иллюстрирует архитектонический принцип следующим примером. Предположим, "природа должна была бы построить некоторый треугольник"[20], при условии, что известен только его периметр. Если бы природа руководствовалась только "геометрической необходимостью", т.е. только физическими законами, то задача была бы неопределенной, не было бы построено никакого треугольника. Архитектоническая же необходимость требует, чтобы произвольный треугольник – при отсутствии дополнительной детерминации – был бы обязательно равносторонним. Природа у Лейбница распадается на "два царства, которые взаимопроникают, не сливаясь и не мешая друг другу: царство силы, где все можно объяснить *механически*, с помощью действующих причин, если мы достаточно глубоко в них проникаем, и царство мудрости, где все можно объяснить *архитектонически*, с помощью так сказать, конечных причин, если мы познаем их достаточно хорошо"[21]. Такой конечной причиной, архитектоническим принципом выступает, например, принцип наибольшего совершенства: основные законы природы не произвольны, а являются выражением некоторого оптимального решения. Таков и знаменитый принцип непрерывности Лейбница: "когда случаи (или данные) непрерывно приближаются друг к

[19] *Лейбниц Г.В.* Соч.: В 4-х т. М., 1984. Т. 3. С. 127.
[20] Там же. С. 136.
[21] Там же. С. 130.

другу так, что, наконец, один переходит в другой, то необходимо чтобы и в соответственных следствиях или выводах (или искомых), происходило то же самое"[22]. Последний принцип, по мысли Лейбница, выражает то единообразие творения, которое служит прекрасным свидетельством совершенства Творца. Причем, как подчеркивается в конце работы "Анагогический опыт исследования причин", эти архитектонические принципы познания являются не только выводом из научного опыта, но и плодотворными принципами новых открытий. Сознательное ориентирование естествознания на метафизику было устойчивой чертой Лейбница-ученого. Для наших целей здесь будет полезно рассмотреть один важный момент из переписки Лейбница с королевой Пруссии Софией-Шарлоттой.

В письме от 8 мая 1704 г. Лейбниц формулирует положение, которое считает "главнейшим принципом природы": "Принцип этот состоит в том, что *свойства вещей всегда и повсюду являются такими же, каковы они сейчас и здесь*. Иными словами, природа единообразна в том, что касается сути вещей, хотя и допускает разницу степеней большего и меньшего, а также степеней совершенства"[23]. Этот принцип, сформулированный Лейбницем в пору своей философской зрелости, действительно оказывается для него фундаментальным: в различных областях знания построения философа так или иначе соотносятся с этим принципом. Здесь же в переписке с Софией-Шарлоттой принцип применяется к метафизике. Лейбниц доказывает с помощью него, что любая монада неуничтожима не только как идеальное существо, но и как некое "животное", т.е. как соединение души и тела. Животному свойственно *восприятие*, которое требует наличия материальных органов, т.е. тела. Субстанция, монада, духовное начало живого, по Лейбницу, неуничтожимо. Однако, согласно принципу, что все должно происходить всегда так, как "сейчас и здесь", мы умозаключаем (вместе с Лейбницем), что и после смерти субстанция должна обладать восприятием и, следовательно, некоторым телом. "В этом кроется одна из величайших тайн природы, – пишет Лейбниц, – ибо всякая природная органическая машина (такая, какую можно видеть у животных) со всеми ее тайниками и закоулками неразрушима и всегда располагает *запасным оборонительным рубежом* против какого бы то ни было натиска и насилия" (подчеркнуто мной – *В.К.*)[24]. Живое существо сохраняет свою структуру во всех своих "свертываниях и развертываниях" неизменным. В противном случае переходы к новым состояниям были бы связаны со скачком, что нарушило бы, по Лейбницу, то единообразие, которое составляет содержание рассматриваемого принципа.

Довольно естественно, что эти соображения заставляют Лейбница в эмбриологии склоняться в сторону учения о преформизме. Тонкие опыты Мальпиги и Сваммердама позволили обнаружить уже на ранней стадии развития зародыша наличие различных органов. "В самом яйце, – писал

---

[22] Там же. Т. 1. С. 203–204.
[23] Там же. Т. 3. С. 389.
[24] Там же. С. 383.

Мальпиги, – мы имеем животное уже почти сформировавшимся"[25]. Открытие Левенгуком в 1677 г. сперматозоида, хотя и заменило теорию "овизма" на теорию "анимакулизма" (присутствие готового маленького живого существа не в яйцеклетке, а в сперматозоиде), но оставило преформизм, как таковой, нетронутым. Именно на эти научные данные ссылался Лейбниц для подтверждения своей метафизики. "Опыты весьма искусных наблюдателей, в особенности таких, как господа Сваммердам и Левенгук, склоняют нас к мысли, что то, что мы именуем зарождением нового животного, есть всего лишь преобразование, разворачиваемое благодаря росту уже образованного животного, и, следовательно, одушевленное и организованное семя столь же извечно, как мир"[26]. С этой точки зрения в мире не существует, собственно, ни рождений, ни смерти, а есть лишь последовательность сворачиваний и разворачиваний целостного живого существа, как бы чисто геометрическая "игра" масштабов. Как мы знаем, все всегда и повсюду остается, как "сейчас и здесь"...

По существу, с помощью этого же принципа, – будем называть его *принципом законопостоянства*, – Лейбниц обосновывает в письме к Софии-Шарлотте и предустановленную гармонию. Соответствие между последовательностью состояний души – перцепциями и апперцепциями, – и поведением тел согласно физическим законам недопустимо, по Лейбницу, объяснять окказионалистскими схемами. "Обыкновенно тела оказывают действие друг на друга по вполне понятным законам механики, и вдруг оказывается, что стоит душе захотеть чего-то, как Божество тотчас вмешается в естественное поведение вещей и нарушит его! Как вам это понравится?"[27]. Соответствие между миром материального и духовного обуславливается у Лейбница также установлением Творца. "Однако, – пишет Лейбниц, – эта причина действует лишь однажды и навсегда..." [28]. "Часы мира" лишь однажды создаются и заводятся. Безупречность их хода, полное соответствие движений одной части движениям другой гарантируется бесконечным мастерством Часовщика. Бог, мыслимый как часовщик, как совершенный мастер, есть теологическое выражение принципа законопостоянства у Лейбница. И обратно, принцип законопостоянства является самым ярким свидетельством Лейбницевского деизма. Законы даются миру раз и навсегда. Их стабильность есть как свидетельство совершенства Творца, так и гарантия их познаваемости. Полезно вспомнить, что позиция Лейбница настойчиво оспаривалась Кларком в знаменитой переписке. Мир, существующий автономно по незыблемым, пусть даже и совершенным законам, противоречил, по мнению Кларка, самому понятию Провидения. "...Этим, – писал Кларк, – Бога делают лишь творцом, а правителем – только по названию"[29]. Однако, отвечал Лейбниц, "истинное провидение Бога требует совершенного предвидения;

---

[25] Цит. по: *Westfall R.S.* The construction of modern science. N.-Y. 1971. P. 99.

[26] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 3. С. 383.

[27] Там же. С. 392.

[28] Там же. С. 393.

[29] Там же. Т. 1. С. 440.

более того, оно требует также, чтобы он не только все предвидел, но и обеспечил все заранее определенными вспомогательными средствами, иначе ему не хватало бы либо мудрости, чтобы предвидеть событие, либо могущества, чтобы встретить его подготовленным"[30]. Бог Лейбница связан законом достаточного основания. Разумное основание оказывается тем, что определяет волю. Возобновляя в новой исторической ситуации старый схоластический спор между волюнтаризмом и интеллектуализмом, между Бонавентурой и Фомой, Лейбниц решительно становился на сторону последнего[31].

Принцип законопостоянства, выдвигаемый Лейбницем, играет столь большую роль в его научном наследии, – в том числе и в математике, – столь сознательно и настойчиво подчеркивается, что может считаться, собственно, одним из главных принципов новоевропейского рационализма, как некоего общего умонастроения, одним из основателей которого справедливо считается великий немецкий философ. Мы уже подчеркивали, что, по мысли Лейбница, этот принцип играет огромную эвристическую роль в построении наук. В одном из писем к Софии-Шарлотте Лейбниц, говоря об этом принципе, пишет: "...будем объяснять вещи, о которых мы имеем лишь смутное представление, исходя из тех вещей, которые нам хорошо известны..."[32]. Это продолжение на сферу неизвестного свойств известного, выражение нового и непонятного в терминах известного действительно играет огромную роль в генезисе науки последних четырех столетий. Метод "идеальных элементов", обсуждавшийся выше, является как бы только приложением этого эвристического принципа законопостоянства. Действительно, в методе "идеальных элементов" мы вводим новые, "идеальные" объекты для того, чтобы обеспечить универсальную выполнимость некоторых операций, некоторых законов (например, чтобы из любого действительного числа – включая и отрицательные числа, – извлечь квадратный корень, мы вводим комплексные числа). Мы строим новую область объектов и "лесами" при этом строительстве служат те законы исходной области, которые мы желаем сохранить. Мы получаем более широкую область объектов, однако "рассматриваем" ее с точки зрения старых законов. Закон остается тем же, и его инвариантность служит конструктивным принципом.

---

[30] Там же. С. 436.

[31] В переписке с П. Бейлем Лейбниц объяснял: "Что же касается свободной воли, то я придерживаюсь мнения томистов и других философов, которые полагают, что все предопределено, и не вижу причин усомниться в этом. Однако это не препятствует нам обладать свободой, избавленной не только от принуждения, но и от необходимости: в этом отношении с нами происходит то же, что с самим Богом, который тоже всегда детерминирован в своих действиях, ибо не может избегать обязанности выбирать лучшее. Но если бы он не имел выбора, если бы то, что он совершает, было единственно возможным, он оказался бы подвластным необходимости. Чем выше совершенство, тем более оно детерминировано привязанностью к добру и в то же время более свободно. Ибо в этом случае имеется возможность и тем более обширного познания, и тем более укрепленной в границах совершенного разума воли" (*Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 3. С. 364).

[32] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 3. С. 392.

Интересно отметить, что и знаменитый принцип непрерывности Лейбница также, по существу, является следствием принципа законопостоянства. Принцип непрерывности гласит: если условия непрерывно переходят одно в другое, то также непрерывно должны переходить друг в друга и следствия. Другими словами, закон перехода элементов друг в друга в "сфере" следствий такой же, как и в "сфере" условий. Все происходит всегда, как "теперь и здесь". В этом смысле "сфера" следствий может *представлять* "сферу" условий (и наоборот)[33]. Особую роль играл принцип законопостоянства при введении в науку такого "темного" объекта, как актуальная бесконечность. Кассирер в своей книге о Лейбнице, касаясь вопроса о бесконечности, также подчеркивает обсуждаемый нами момент: "Бесконечное следует здесь повсюду, как выражение того, что определенная законосообразность познания должна считаться действенной поверх любой области приложения в данном; оно является также позитивной гарантией распространения силы и значения чистой мысли на область, где отказывают созерцание и чувственность, и подчинения этой области своему собственному закону"[34]. Здесь огромное значение имели математические конструкции Лейбница, к которым мы теперь непосредственно и переходим.

Руководствуясь именно этим принципом законопостоянства, подходит Лейбниц и к задаче о проведении касательной. Кривая, к которой проводится касательная, должна, прежде всего, быть понята специальным образом как комбинация "того же", "известного", "тождественного", т.е. *прямых*: "...природа, управляемая высшей мудростью, которая повсюду проявляет свой общий замысел, должна подчинять кривые линии правилам, применяемым для прямых и плоскостей, которые касаются этих кривых, как если бы эти кривые были из них составлены, что, однако, если говорить строго, совсем не так"[35]. Маркиз Г.-Ф. Лопиталь, ученик и соратник Лейбница в деле пропаганды дифференциального исчисления, в своей книге "Анализ бесконечно малых" (1696) – первом полном курсе дифференциального исчисления – прямо вводит "требование или допущение: требуется, чтобы можно было рассматривать кривую линию как совокупность бесконечного множества бесконечно малых прямых линий, или же (что то же самое) как многоугольник с бесконечным числом бесконечно малых сторон..."[36]. Провести касательную, по Лейбницу, значит "провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало, или же провести продолженную сторону бесконечного многоугольника, который для нас равнозначен кривой. А такое бесконечно малое расстояние можно всегда выразить с помощью какого-либо известного дифференциала..."[37]. Дифференциал здесь, как

---

[33] См. об этом подробнее ниже, параграф "Принцип непрерывности".

[34] *Cassirer E.* Leibniz' Systeme in seinen wissenschaftlichen Grundlagen. Marburg, 1902. S. 81.

[35] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 3. С. 135.

[36] *Лопиталь Г.Ф.* Анализ бесконечно малых. М.-Л., 1935. С. 63–64.

[37] Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница. С. 170.

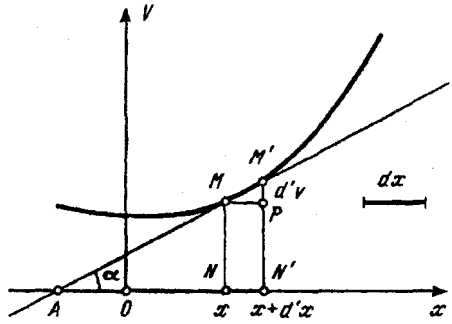

Рис. 1

видим, бесконечно малая величина. Но, возвращаясь к нашему исходному вопросу, – почему в этой же статье 1684 г. (откуда взята последняя цитата) Лейбниц определяет дифференциалы и как конечные величины? И что значит, что эти дифференциалы "пропорциональны разностям или мгновенным приращениям" исходных величин?[38]. Разности и мгновенные приращения – бесконечно малы[39]; как конечная величина – дифференциал – может быть пропорциональна бесконечно малой? Постараемся восстановить логику этого умозаключения. Дифференциал (конечный) dv определяется из соотношения (см. рис. 1):

$$\frac{dv}{dx} = \frac{NM}{AN} \tag{2}$$

Но вся конструкция опирается на предпосылку: "элемент кривой" представляет из себя бесконечно малый отрезок прямой *MM'*, продолжением которого и является касательная. Проекций этого бесконечно малого отрезка на оси координат суть бесконечно малые приращения – d'x и d'v (мы пишем d со штрихом, чтобы отличить бесконечно малый дифференциал от конечного, определенного формулой (2)). Обычно рассматриваются два подобных треугольника AMN и MM'P[40]. Из их подобия получаем:

$$\frac{NM}{AN} = \frac{PM'}{MP} = \frac{d'v}{d'x} \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), имеем:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d'v}{d'x} \tag{4}$$

---

[38] *Лейбниц Г.* Избранные отрывки из математических сочинений... С. 169.

[39] Под разностями понимаются бесконечно малые, на которые отличаются "последовательные" значения непрерывно возрастающей величины (см.: *Bos H.J.M.* Op. cit. P. 13). То же означают и мгновенные приращения.

[40] См., напр.: *Лопиталь Г.Ф.де.* Анализ бесконечно малых... С. 78.

Итак, строго говоря, не сами бесконечно малые разности ("мгновенные приращения") d'v и d'x пропорциональны конечным приращениям dv и dx – "коэффициент пропорциональности" между ними равен бесконечности! – а отношения этих приращений равны. И предпосылкой этого утверждения служит соотношение (3), выражающее подобие конечного и бесконечно малого ("характеристического") треугольника. Однако "бесконечно малый треугольник" есть не некая оче-видная данность, а скорее символ, обозначающий реальность, *постулируемую* в качестве "атомарной" в данной теории. С этой точки зрения говорить о "бесконечно малом треугольнике" и его подобии конечному треугольнику некорректно. Равенство (3) есть не констатация геометрического факта, а *требование.* Смысл этого требования: бесконечно малый треугольник *должен* быть подобен конечному треугольнику, образованному касательной. В соотношении (3), фундаментальном для дифференциального исчисления, мы видим постулирование свойств самого пространства, свойств элементарных "бесконечно малых прямых", из которых сложена, согласно предпосылке, кривая.

Это постулирование свойств геометрического "микромира" осуществляется через сравнение со свойствами "макрообъекта" – конечного треугольника (образованного касательной). Эти треугольники, бесконечно малый и конечный, разнящиеся не просто размерами, а разделенные непостижимым "трансцезусом", переводящим конечный геометрический объект в бесконечно малый, должны иметь одинаковое соотношение сторон. Другими словами, их форма должна быть тождественной.

В этом построении нетрудно увидеть математическое выражение "главнейшего принципа природы" Лейбница, того, что мы назвали принципом законопостоянства: "свойства вещей всегда и повсюду являются *такими же, каковы они сейчас и здесь*". Причем, под "свойствами" понимается не нечто чувственно данное (данное воображению), а то, что может быть мыслимо и тогда, когда чувства бессильны: отношение сторон, форма треугольника. Эта форма прямоугольного треугольника рассматривается Лейбницем, как инвариантная не только для конечных треугольников, но и для бесконечно малого. В этом смысле становится безразличным, рассматривать ли дифференциалы, определяемые соотношением (2), т.е. конечные величины, или дифференциалы, определяемые алгоритмом дифференцирования, т.е. бесконечно малые величины, – все они оказываются "пропорциональными" друг другу. Как для преформистов, внутри зародыша уже находятся в "свернутом" состоянии все части будущего организма, развитие которого есть лишь "разворачивание" уже готовых сформированных органов, так и для лейбницевского понимания кривой – ее поведение в окрестности точки, в частности, расположение касательной, полностью определяется "зародышем" этой кривой – характеристическим бесконечно малым треугольником.

Итак, новая математика XVII в., в частности, дифференциальное исчисление в той форме, как оно вводится Лейбницем, представляет собой не просто новые методы решения задач, а прежде всего *новые аксиомы,* которые обосновывают эти методы. Эти аксиомы имеют, так ска-

зать, "онтологический" характер: они дают новое, неприемлемое для античности и средневековья, понимание структуры континуума. Эта удивительная метаморфоза в понимании самих оснований науки была обусловлена не столько чисто прагматической эффективностью новых методов, не столько новыми открытиями – эти открытия еще сами требовали обоснования через оправдание новой аксиоматики, – сколько изменением философского горизонта, в котором только и существует математика в любой период истории. Новые аксиомы выражают не то, что кому-то когда-то удалось увидеть, открыть, обнаружить. Они менее всего эмпиричны. Они выражают определенное *долженствование:* кривая *должна* представляться, как бесконечноугольная ломаная с бесконечно малыми сторонами, бесконечномалый характеристический треугольник *должен* быть подобен конечному треугольнику, образованному касательной. Оправдания этого долженствования лежат уже вне самой математики. Они связаны с более общими философскими принципами, с общемировоззренческими тенденциями данного времени. К. Бойер, характеризуя в целом гносеологическую установку создателя дифференциального исчисления, писал: "...Лейбниц прибегал к помощи идей предельных форм, предполагаемых метафизическим идеализмом. Даже в случае, если величины, – такие как дифференциалы – участвующие в соотношении, становились неопределенными (inassignable – имеется в виду – актуально бесконечно малыми, т.е. и бесконечно малыми, и в то же время, ненулевыми – *В.К.*), он чувствовал, тем не менее, что предельные формы оставались. Точка, считал он, не есть то, часть чего есть нуль, но то, протяженность чего есть нуль... Характеристический треугольник был для Лейбница треугольником, в котором форма треугольника оставалась и после того, как была элиминирована его величина..."[41]. Все эти спекулятивные положения о структуре точки и бесконечно малых треугольниках в принципе недоступны голой эмпирии (понимая под эмпирией и чисто математическое просчитывание какой-то конкретной задачи). Чтобы "увидеть" бесконечно малое, нужен был микроскоп с бесконечным увеличением: нужна была метафизика. Мы видели сколь естественно основная предпосылка лейбницевских инфинитезимальных построений – подобие "характеристического треугольника" конечному треугольнику, образованному касательной, подкасательной и ординатой, – связана с архитектоническим принципом законопостоянства. Лейбниц прекрасно сознавал "метафизический" характер построенной им науки: "...судьба даровала нашему веку прежде всего то, что после столь долгих лет забвения вновь воссиял светоч математики, как я его называю. Ведь были открыты и развиты Архимедовы способы исчерпывания через неделимые и бесконечные, что можно было бы назвать *метафизикой геометров,* и что, если я не ошибаюсь, было неизвестно большинству древних, за исключением Архимеда"[42] (подчеркнуто мной. – *В.К.*). Здесь хочется

---

[41] *Boyer C.B.* Concepts of the Calculus... P. 218.

[42] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 3. С. 452. Во введении мы уже приводили эту важную цитату.

сделать добавление к словам Лейбница. Древним не просто "были неизвестны" новые инфинитезимальные методы, а они, в некотором смысле, "не хотели их знать": математики античности в своем большинстве *сознательно* отказывались развивать математику в направлении бесконечно малых[43]. Они ясно осознавали, что введение бесконечно малых связано с некоторыми допущениями, которые чисто математически – не обоснованы, произвольны (например, что круг есть бесконечноугольник с бесконечно малыми сторонами). Точнее, те нормы строгости, та *философия математики,* которая была господствующей в тысячелетней культуре античной математики, не давала права на подобное понимание[44].

Новое время преодолевает эти запреты. Актуально бесконечное становится термином науки. Оперирование с ним требует введения новых аксиом. Сами же эти аксиомы оправдываются отнюдь *не* наглядностью, – подчеркнем это еще раз, – формулируемых положений, а новым мировоззренческим контекстом, в который вписывается математика. "Порядок требует, – пишет Лейбниц, чтобы с кривыми линиями и поверхностями обращались так же, как если бы они были составлены из прямых линий и плоскостей"[45]. Новых аксиом требует новый порядок мироздания. А в последний входит не только сфера сущего, но и сфера должного. Не случайно принцип законопостоянства участвует не только в объяснении преформизма и монадологии, но и в оправдании лейбницевской теологических построений. Тем самым и математика в своих основаниях оказывается обусловлена сферой должного, сферой самоопределения человеческой свободы[46]. В этой сфере человек полагает свои представления о целях, ценностях и идеале жизни вообще и познания, в частности. В этой удивительной и таинственной области человеческого духа формулируются те архитектонические принципы, которые определяют направления роста данной культуры, ее координаты, ее "неподвижные звезды". Именно через причастность этой сфере долженство-

[43] Известный историк математики Г.Г. Цейтен писал: "...если греки отказались от использования бесконечно малых, то не благодаря непониманию их, а вполне сознательно, под влиянием чисто логических соображений" (см.: *Цейтен Г.Г.* История математики в древности и в средние века. М.-Л., 1932. С. 58. Изд. 3. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010).

[44] Аналогичным образом (на примере Галилея) характеризует П.П. Гайденко процесс генезиса новой математики в XVII в.: "Допущение предельного перехода многоугольника с как угодно большим, но конечным числом сторон в фигуру другого рода – круг – позволяет Галилею ввести в оборот понятие актуальной бесконечности, вместе с которым в научное построение проникают парадоксы – и на этих-то парадоксах, которые прежде в математику пытались не впускать, как раз и работает та новая ветвь математики, которая во время Галилея носит название "математики неделимых", а впоследствии получает название "исчисления бесконечно-малых" (*Гайденко П.П.* Эволюция понятия науки (XVII–XVIII вв.). М., 1987. С. 76 Изд. 2. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010).

[45] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 3. С. 131.

[46] "Математика не является окаменелой и приносящей с собой окаменение схемой, как это часто думают профаны, – писал Г. Вейль, – нет, здесь мы находимся как раз в том узловом пересечении необходимости и свободы, которое составляет сущность самого человека" (*Вейль Г.* О философии математики... С. 26).

вание, выраженное в математических аксиомах, приобретает помимо голого правдоподобия еще и своеобразную оправданность, благодаря согласованности с универсальными законами бытия. Наука, "культивируя" ту или иную систему аксиом, делает ее постепенно общепринятой и "естественной".

Однако, свобода чревата произволом. Интересно, что и в математике XVII в. мы встречаемся с этим произволом, с этой неразумностью свободы. Конечно, математика того времени еще не желает понимать себя, как чисто формальную науку, произвольно избирающую свои аксиомы. Напротив, как стремились мы показать, исчисление Лейбница существенно (и сознательно) использовало общефилософские архитектонические принципы. Однако, поскольку предметом исследования служил столь "темный" объект, как актуальная бесконечность, то оценить степень адекватности новых аксиом своему предмету было в высшей степени сложно. В этих аксиомах как бы перевешивало долженствование над бытием, метод над пониманием. Это нередко приводило к двусмысленностям и апориям. В упомянутой статье Боса можно найти прекрасные примеры, иллюстрирующие этот тезис. Прежде всего двусмысленным было само понятие дифференциала dx. Дифференциал должен был удовлетворять, собственно, только двум требованиям: быть бесконечно малой величиной по сравнению с величиной x и иметь ту же размерность, как и сама величина x. Однако вместе с dx этому же условию удовлетворяют тогда и $2dx$, и $0{,}5\,dx$, и вообще $n \cdot dx$ (где n – положительное число). Более того, этому же условию удовлетворяют и $\frac{(dx)^2}{a}$, и $\sqrt{a \cdot dx}$ (где a – константа и имеет ту же размерность, что и x), причем первая величина бесконечно мала по сравнению с dx, а вторая – бесконечно большая по сравнению с dx. dx должно было быть, вообще говоря, наименьшим приращением непрерывно возрастающей величины x. Но в том и состояла сложность, что такого наименьшего приращения не существует. Что же должно было понимать под dx? Как отмечает Бос, эта несостоятельность не была замечена пионерами дифференциального исчисления[47].

Однако и в XVII в. существовали другие точки зрения на актуально бесконечное. Б. Паскаль по праву считается одним из основателей дифференциального исчисления. Именно гению Паскаля обязан был Лейбниц идеей отбрасывания бесконечно малых более высоких порядков. Но Паскаль отказался от перспектив, открывавшихся благодаря исчислению бесконечно малых. Оно отнюдь не было для него источником гносеологического оптимизма. Глубокий мировоззренческий кризис, пережитый Паскалем, сказывался и на понимании математики. Две бесконечности – бесконечность бесконечно большого и бесконечность бесконечно малого, между которыми расположен человек и в материальном и в интеллектуальном смысле повергают Паскаля в глубокий религиозный трепет. "Кто рассмотрит себя таким образом, – пишет он в "Мыслях", – тот испугается за самого себя, и, увидя себя опирающимся лишь на комочек плоти, данный ему приро-

[47] *Bos H.J.H.* Op. cit. P. 24–25.

дой, и висящим между двумя безднами бесконечности и ничто, он будет потрясен видением этих чудес, и я думаю, что, сменив свое любопытство на восхищение, он будет более расположен в молчании созерцать эти чудеса, чем самонадеянно исследовать их"[48]. Путь Паскаля – путь религиозного смирения: актуальная бесконечность, опознаваемая человеком, являет ему бесконечность божественной мощи и премудрости, непостижимую человеческим разумом. Познание на его высших уровнях недоступно активистской установке на дерзкое разоблачение божественных тайн. Оно дается лишь как смиренно взыскуемый дар, как откровение...

Эпистемологические установки Лейбница были прямо противоположны. Вдохновляясь титаническими проектами Луллия, Бруно, Декарта и других сторонников mathesis universalis, Лейбниц твердо верил в то, что человек, сотворенный по "образу божию", способен самостоятельно открыть все тайны мироздания, в том числе касающиеся и бесконечности. Гарантией этого служило Лейбницу то удивительное единство космоса материального и духовного, которое проявлялось в подчинении их общим архитектоническим принципам. Роль одного из них – принципа законопостоянства – мы уже обсудили. Перейдем теперь к обсуждению другого.

§ 3. ПРИНЦИП НЕПРЕРЫВНОСТИ

Лейбниц хотя и называл бесконечно малые "идеальными понятиями", "удобными фикциями", однако отнюдь не считал, что *наука о бесконечности* как-либо унижается этими определениями. Подтверждением инфинитезимальных методов дифференциального исчисления служил также и *принцип непрерывности*, фундаментальный эвристический принцип философии Лейбница[49]. Мы приводили уже выше его формулировки. В этом разделе будут приведены еще и другие, более полные. Но прежде хотелось бы разобрать один пример из геометрии, иллюстрирующий принцип непрерывности в работе. Этот пример предлагается самим Лейбницем для демонстрации того, что бесконечно малые величины естественно возникают уже в самой обыкновенной алгебре[50]. Пусть дана следующая конфигурация, составленная из прямых линий: EA и XY перпендикулярны AX, угол XCY не равен 45°.

---

[48] *Pascal B.* Oeuvres complètes. Editions du Seuil. Paris, 1963. P. 526.

[49] Молодой П.А. Флоренский в черновиках своей работы "Идея прерывности, как элемент миросозерцания" ставит вопрос об источнике популярности идеи непрерывности в XIX в. и дает следующий ответ: "Нет никакого сомнения, что таким первоисточником является открытие анализа бесконечных, и, говоря определеннее, мы можем утверждать, что Лейбниц как математик и философ ввел в общественное сознание идею непрерывности..." (*Флоренский П.А.* Введение к диссертации "Идея прерывности как элемент миросозерцания" // Историко-математические исследования. Вып. 30. М., 1986. С. 160).

[50] Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница... С. 195.

Обозначим AX = x, AC = c, EA = e, XY = y. В силу подобия треугольников EAC и CXY имеем:

$$\frac{x-c}{y} = \frac{c}{e} \qquad (4)$$

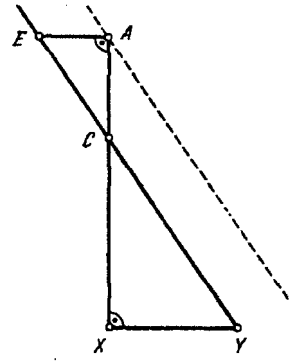

Рис. 2

Теперь пусть прямая EY движется параллельно самой себе вправо, до совпадения точки E с A. Соотношение (4) все время сохраняется. "Возьмем теперь случай, – пишет Лейбниц, – когда прямая EY попадет таким образом в самую точку A; очевидно, что точки C и E также попадут в A, что прямые AC и AE или *c* и *e* исчезнут и что из пропорции или уравнения $\frac{x-c}{y} = \frac{c}{e}$ получится $\frac{x}{y} = \frac{c}{e}$. Следовательно, в этом случае $x-c=x$, если предположить, что этот случай подходит под общее правило. Тем не менее, *c* и *e* не будут вовсе нулями в абсолютном смысле, ибо между ними сохраняется отношение *CX* к XY"[51]. *c* и *e* не могут быть нулями "в абсолютном смысле", согласно Лейбницу, по следующей причине: если они нули, то, т.к. 0 : 0 = 1, тогда из пропорции $x : y = c : e$ мы получаем $x = y$. Последнее же неверно, т.к. предположено, что угол *XCY* не равен половине прямого... "Следовательно, – пишет Лейбниц, – в этом алгебраическом вычислении *c* и *e* принимаются за нули лишь в сравнительном смысле, по отношению к *x* и *y*, но, тем не менее, *c* и *e* находятся в отношении друг с другом и их принимают за бесконечно малые, точно так же, как те элементы, которые наше исчисление разностей (дифференциальное исчисление – *В.К.*) находит в ординатах кривых, т.е. их принимают за мгновенные приращения или уменьшения"[52]. Этот пример достаточно демонтрирует логику Лейбница. Важны не столько довольно спорные умозаключения (0 :0 = 1; *c* в числителе дроби слева в (4) кладется нулем, а в числителе правой дроби остается), сколько главная тенденция: отношение бесконечно малых можно определить *по непрерывности*, т.е. интерпретировав эти бесконечно малые, как предельные случаи конечных величин. Причем, скрытой предпосылкой является то, что и для предельных величин можно написать соотношения, как для конечных. "...c и e не будут вовсе нулями в абсолютном смысле, ибо между ними сохраняется отношение CX к XY", – пишет Лейбниц. Однако, почему вообще можно говорить об *отношении* c и e? Разве мы заранее знаем, что такое бесконечно малые и как производить с ними действия? Соотношение x : y = c : e есть скрытое определение (правой части через левую), в

[51] Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница... С. 195.
[52] Там же.

духе разобранного выше принципа законопостоянства[53]. Но постулируемое соотношение здесь уже не просто догматически полагается, а "получается" предельным переходом. Предельный бесконечно малый треугольник в точке А получается "стягиванием" в точку конечного треугольника EAC, и соотношения, справедливые для конечного треугольника – его подобие треугольнику CXY – переносятся и на бесконечно малый[54]. Это перенесение есть логический скачок, оправдание которого – принцип непрерывности. Долженствование, с которым связано постулирование, не становится от этого меньше. Оно становится лишь правдоподобнее.

Лейбниц много раз формулировал принцип непрерывности. Мы приведем здесь его формулировку из статьи специально посвященной этому вопросу. "...Когда случаи (или данные) непрерывно приближаются друг к другу так, что наконец один переходит в другой, то необходимо, чтобы и в соответственных следствиях или выводах (или в искомых) происходило то же самое"[55]. Другими словами, если связь между "данными" и "следствиями" выражена в виде функции, то эта функция должна быть непрерывной. Однако, принцип непрерывности имеет значение и в более широкой области, где трудно заранее говорить о наличии функциональных зависимостей. В чем *смысл* этого принципа? Лейбниц сам разъясняет это в одном письме к Вариньону следующим образом: "По моему убеждению, в силу оснований метафизики все в универсуме связано таким образом, что *настоящее таит в себе в зародыше будущее* и всякое настоящее состояние естественным образом объяснимо только с помощью другого состояния, ему непосредственно предшествовавшего. Отрицать это – значит, допускать в мире существование пустых промежутков, hiatus'ов, отвергающих великий принцип достаточного основания и заставляющих нас при объяснении явлений прибегать к чудесам или к чистой случайности"[56]. Тем самым, в плане *последовательности* этот принцип, опирающийся на принцип достаточного основания, оказывается выражением определенного детерминизма. Причем, детерминизма пол-

---

[53] Как и соотношение $0 : 0 = 1$.

[54] Именно против подобного приема направляет свое негодование Д. Беркли в знаменитом "Аналитике". Критикуя логику получения соотношений для касательной из соотношений для секущей, путем непрерывного перехода секущей в касательную, Беркли пишет: "...В-четвертых, способ нахождения секущих или их выражения, каким бы общим он не был, не может с точки зрения здравого смысла распространяться за пределы нахождения именно всех секущих; и поскольку он необходимо предполагает наличие подобных треугольников, то в тех случаях, когда подобных треугольников нет (*а именно, один из них становится бесконечномалым – В.К.*), его применение нельзя даже предполагать... В-восьмых, хотя в данном случае при помощи несовместимых допущений можно получить истину, тем не менее такая истина не доказана; подобный метод не соответствует правилам логики и правильного мышления; каким бы полезным он ни был, его необходимо считать только предположением, ловким приемом, хитростью, скорее уловкой, но не научным доказательством". (*Беркли Д.* Соч., М., 1978. С. 416–417).

[55] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 1. С. 203–204.

[56] Там же. С. 211–212.

ного, исключающего какие-либо случайности и чудеса (они таковы лишь по видимости). Но сфера применимости принципа непрерывности шире: "...этот закон создает совершенную непрерывность в плане последовательности, он создает нечто подобное и в плане одновременности, что дает нам заполненную реальность и позволяет относить пустые пространства к области вымысла"[57].

Принцип непрерывности выступает, как тотальное отрицание пустот, вакуума, "зияний" в бытии и тем самым является своеобразной переформулировкой Парменидовского "бытие есть, а небытия нет". С принципом непрерывности постоянно связана тенденция к *акосмизму*, как разложению любых качественных определенностей в единый однородный субстрат. Ведь качественные различия всегда представляют собой некий "скачок" бытия, разрыв непрерывности, который должен быть преодолен в процессе познания. Кассирер в своей книге о Лейбнице следующим образом отмечает этот момент: "Принцип непрерывности требует общим образом чтобы нечто, с определенной точки зрения являющееся исключением, с другой, более глубокой, точки зрения опять подчинялось бы общему правилу. Эта более глубокая по своим понятиям точка зрения не дана, вообще говоря, непосредственно, но должна впервые быть добыта в прогрессе познания"[58]. Например, исходно понятия движения и покоя различны. Наука, формулируя, новое понятие мгновенной скорости, – *делает оба эти понятия частными случаями более общего*. Качественное различие при этом "растворяется" в чисто количественной разности. Но зато становится возможной математическая кинематика.

Лейбниц постоянно настаивал на универсальной значимости принципа непрерывности. О его роли в дифференциальном исчислении мы скажем ниже. В геометрии Лейбниц приводит в качестве иллюстрации принципа непрерывности инвариантность некоторых свойств конических сечений, которые непрерывно переводятся друг в друга так называемыми проективными преобразованиями. "Если мы видим лишь внешние контуры парабол, эллипсов и гипербол, то мы можем подумать, что между этими кривыми существует значительное отличие. А между тем мы знаем, что они внутренне связаны, так что невозможно найти между двумя из них какое-либо промежуточное пространство, которое позволило бы нам более неуловимым образом перейти от одного к другому", – пишет Лейбниц[59]. Так, например параболу можно рассматривать как эллипс с одним фокусом "в бесконечности": фиксировав один фокус эллипса, мы оттягиваем другой "на бесконечность", при этом растягиваемые эллипсы "непрерывно" переходят в параболу. И, что самое главное, сохраняется соответствие свойств: свойства параболы можно интерпретировать, как свойства эллипса с одним бесконечно удаленным фокусом[60]. Т.е.,

---

[57] Там же.

[58] *Cassirer E.* Op. cit. S. 176.

[59] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 1. С. 212. Подробнее об этом см. главу III.

[60] Например, если поместить в один фокус эллипса источник света, то его лучи, отразившись от эллипса по закону равенства угла падения и угла отражения, собе-

в соответствии с принципом непрерывности, непрерывное изменение объекта дает непрерывное изменение свойств. Эти давно известные в геометрии факты были для Лейбница конкретным подтверждением принципа непрерывности.

В физике применение принципа непрерывности позволяет Лейбницу исправить ошибочные формулировки закона удара, данные Декартом и Мальбраншем. Так, по Декарту, если два равных тела движутся навстречу друг другу с равными скоростями, то после удара (абсолютно упругого) они будут двигаться с теми же скоростями, но в обратных направлениях. С этим согласны и мы, и Лейбниц. Но другое положение Декарта гласит: если одно тело больше другого и они двигаются навстречу с одинаковыми скоростями, то после удара большее тело сохраняет и величину, и направление скорости, а меньшее, сохранив величину скорости, меняет ее направление. Лейбниц возражал на это, аргументируя "от непрерывности". Превышение величины (можно считать, массы, хотя это понятие и неизвестно еще физике XVII в. – *В.К.*) одного тела над другим можно непрерывно уменьшать вплоть до нуля, при этом в "следствиях", т.е. в характере движения после удара, произойдет, по правилу Декарта, скачкообразное изменение: сначала большее тело сохраняет свое движение, а при равенстве тел вдруг резко меняет его на противоположное. Что парадоксально, не соответствует принципу непрерывности, и неверно. Аналогично, Лейбниц пишет: "...покой может рассматриваться как бесконечно малая скорость или как бесконечно большая медленность. Поэтому все то, что оказывается истинным по отношению к скорости и к медленности вообще, должно оказываться соответственным образом истинным и по отношению к покою... Если этого сделать не удается, то это является вернейшим признаком того, что правила дурно формулированы и противоречат друг другу"[61]. Принцип непрерывности прямо используется здесь как направляющий исследование эвристической принцип.

Еще значительней направляющая роль принципа непрерывности выступает в теоретико-биологических взглядах Лейбница. "По-моему, – пишет Лейбниц, – есть веские основания полагать, что все различные роды существ, совокупность которых образует универсум, в мыслях четко знающего их сущностные градации Бога, до такой степени подчинены одной и той же формуле, что ее единство нарушилось бы, если бы мы смогли между двумя ее последовательными решениями найти какие-то промежуточные; это было бы свидетельством беспорядка и несовершенства"[62].

Принцип непрерывности у Лейбница требует непрерывного перехода от человека к животному, от животного к растению, от растения к минералам (!). Традиционное обособление этих родов обусловливается, по Лейбницу, лишь недостатком наших знаний. Принцип непрерывности

рутся в другом фокусе. Если же поместить источник света в фокус параболы, то лучи после отражения от параболы пойдут параллельным пучком "на бесконечность", т.е. "точно" в бесконечно удаленный фокус.

[61] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 1. С. 205.

[62] Там же. С. 213.

ориентирует на поиск новых промежуточных форм, которые должны вписаться в целое подчиненной априорному принципу универсальной шкалы существ. "... Нет ничего чудовищного, например, в существовании зоофитов, или, как называет их Буддеус, "растений-животных"; напротив это совершенно согласуется с порядком природы"[63]. Принцип непрерывности запрещает скачки, "пустоты" в бытии. Руководствуясь этим эвристическим принципом, Лейбниц, как бы стремится "заткнуть" все возможные "дыры", "зияния" в мироздании...

Лейбниц претендовал выводить науку из богословия. "Ведь Бог является последней основой вещей, и поэтому познание Бога является не менее научным принципом, чем его сущность и воля являются принципами вещей"[64]. Бог Лейбница, однако, как мы уже отмечали, оказывается в своей деятельности связанным необходимыми принципами (например, таким как принцип непрерывности). В отличие от Декарта, считавшего, что равенство "дважды два четыре" имеет своим основанием божественную волю, так что, если бы Бог захотел, он бы мог сделать, чтобы дважды два равнялось пяти, – Лейбниц основывает эти истины не на воле Бога, а на "природе вещей", во всей ее глубине открытой божественной мудрости.

Интересно привести здесь отрывок из опубликованного в 1915 г. *И.И. Ягодинским одного до тех пор не изданного сочинения Лейбница* под названием "Исповедь философа". Сочинение представляет из себя как бы набросок "Теодицеи". В нем ведут между собой диалог наставник-теолог и слушатель-философ. "ФИЛОСОФ... Кому, скажи ради Бога, мы считаем нужным приписать, как не божественной воле, что трижды три девять. Не примем ли мы, что диагональ в квадрате несоизмерима со стороной в силу решения Бога? ТЕОЛОГ. Не думаю, если мы благоразумны: ведь иначе нельзя было бы понять ни состоящего из девяти, ни состоящего из трех, ни квадрата, ни стороны, ни диагонали; ведь тогда они будут названия без вещей, как если бы, например, кто-нибудь сказал "Блитири" или "Вицлипуцли". ФИЛОСОФ. Значит эти теоремы должны быть приписаны природе вещей, то есть идее, состоящей из девяти, или квадрата, или божественному разуму, в котором пребывают идеи вещей от вечности. Иначе сказать, Бог сделал это не по желанию, но по разуму, понимал, осуществляя"[65].

Поскольку мир идей, хотя и существует в божественном разуме, однако, по существу, не зависит от божественной воли, "объективен", то гносеологическая перспектива в философии Лейбница оказывается, так сказать, более благоприятной, чем у Декарта. Декартовское познание все "под законом", все обусловлено божественной волей. По Лейбницу в этом случае познаются "лишь названия без вещей". Истинное познание есть познание самих *идей* вещей и их отношений. Это познание едино, по

---

[63] Там же.

[64] Там же. С. 209.

[65] *Ягодинский И.И.* Неизданное сочинение Лейбница "Исповедь философа". Казань, 1915. С. 19.

Лейбницу, и для человека, и для Бога[66]. *Оно ускорено в природе* самих вещей и природе разума вообще. Человек в этом плане оказывается соизмерим с Творцом мира. Открывая в своем разуме архитектонические принципы, по которым построен мир, человек получает тем самым эвристические принципы, по которым он должен строить свою науку. Именно в эту логику вписывается и принцип непрерывности. Почему так важна для Лейбница непрерывность? Почему ей дается предпочтение перед разрывностью, дискретностью? Потому, что разрыв либо иррационален, полностью непонятен, либо опять сводится (скрывает в себе) к чему-то законо-мерному и, в этом смысле, постоянному, непрерывному. Но иррациональное не может быть допущено, с точки зрения Истины: что может быть непонятно, неясно, в самой Истине? Поэтому разрывное есть всегда еще нечто непроясненное, неистинное, поверхностное, скрывающее за видимостью своей гетерогенности самотождественность непрерывности. В Истине не может быть зияний. А именно с точки зрения Истины и должна строиться, по Лейбницу, человеческая наука... Подчиненность божественной воли универсальным разумным закономерностям выступает как гарантия объективной значимости науки. Почему же божественная воля подчинена этим законам? Вспомним опять фразу из письма к Бейлю: "Чем выше совершенство, тем более оно *детерминировано* привязанностью к добру и в то же время более свободно (подчеркнуто мной – *В.К.*)"[67]. Подобное понимание совершенства, Идеала, как высшего типа соотношения воли и разума является для Лейбница характеристическим. Подчиненность божественной воли особой *моральной необходимости* выступает как центральный пункт и лейбницевской полемики с Кларком. "Моральная необходимость также мало мешает свободе, – пишет Лейбниц в пятом письме к Кларку, – ибо если мудрец, и прежде всего Бог (высочайший мудрец), выбирает наилучшее, то он от этого не становится менее свободен; наоборот, самая совершенная свобода скорее состоит именно в том, чтобы ничего не мешало действовать наилучшим образом"[68]. Но мы знаем, это "наилучшее", "добро" Бог выбирает, по Лейбницу, в соответствии с "порядком вещей", в соответствии с универсально значимой, незыблемой, и в этом смысле как бы, не зависящей от Бога ценностной иерархией.

Итак, два момента, оправдывающие фундаментальную значимость принципа непрерывности:

1) некая априорная шкала ценностей, непосредственно познаваемая человеческим разумом, в рамках которой непрерывное стоит выше разрывного, дискретного;

2) и принцип подчиненности божественной воли этой ценностной иерархии.

---

[66] Ср. знаменитое место у Галилея, где он приравнивает человеческое познание божественному в отношении "интенсивности", т.е. в смысле достоверности доказанных положений, *осознания их необходимости* (*Галилей Г.* Диалог о двух главнейших системах мира. М.,-Л., 1948. С. 89).

[67] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 3. С. 364.

[68] Там же. Т. 1. С. 467.

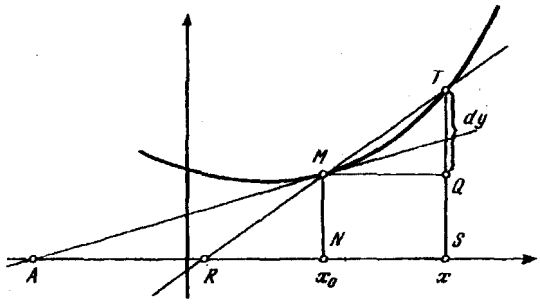

Рис. 3

В силу этой подчиненности познание у Лейбница в высшей степени, так сказать, секуляризировано: разум познает лишь свои идеи, упорядоченные в соответствии с автономно значимыми аксиологическими установками. Никакое откровение невозможно – да и не нужно! – в этой системе. Любые "Блитири" или "Вицлипуцли" исключены. Но тем настойчивей встает вопрос об оправданности той ценностной иерархии, которая определяет структуру всего мироздания...

То фундаментальное для дифференциального исчисления соотношение, которое в работе 1684 года считалось само собой разумеющимся, – а именно (см. выше рис. 1)

$$\frac{NM}{AN} = \frac{d^1 v}{d^1 x} \qquad (2)$$

(выражающее факт подобия бесконечномалого треугольника MPM′ конечному треугольнику ANM) Лейбниц пытался обосновать и с помощью принципа непрерывности. Здесь особенно важен рукописный отрывок Cum prodiisset, напечатанный Герхардом в 1846 г.[69]. В этом фрагменте дается доказательство правил дифференцирования (которые в статье 1684 г. приводились без доказательства). Необходимое при этом соотношение (2) объясняется следующим образом.

Можно рассмотреть приращения x и y: $dx = x - x_0$, $dy = f(x) - f(x_0)$ (что соответствует на рис. 3 секущей MT). Тогда, выбрав произвольный отрезок за $(d)x$[70], мы определяем $(d)y$ из соотношения:

$$\frac{(d)y}{(d)x} = \frac{dy}{dx} \qquad (5)$$

Здесь правая часть определена сначала только для $dx \neq 0$. Но левую мож-

[69] См.: Historia et Origo Calculi differentialis, a G.W. Leibnitio conscripta. Herausg. von Dr. C.I. Gerhardt, Hannover, *1846. S. 39–50.*

Фрагмент представляет собой черновик ответа голландскому математику Б. Ньювентиту, одному из первых критиков лейбницевского исчисления.

[70] Таковы обозначения самого Лейбница. См.: Historia et Origo... P. 45.

но определить и для dx = 0. А именно, положим для dx = 0:

$$\frac{(d)y}{(d)x} = \frac{NM}{AM} \qquad (6)$$

Если потребовать сохранения (5) и для dx = 0, то тогда получается то, что нужно: dy : dx равно, в случае dx = 0, тангенсу угла наклона касательной AM к оси (т.е. (2)). Что здесь нового по сравнению с догматическим полаганием подобия бесконечномалого треугольника (при dx = 0) и конечного AMN? dy : dx приравнивается здесь отношению конечных отрезков (d)y : (d)x. А последнее можно уже "по непрерывности" распространить и на случай dx = 0. Ведь (d)y : (d)x равно тангенсу угла наклона секущей TM. Секущая же при приближении точки T к M стремится совпасть с касательной AM. Поэтому и тангенс угла наклона секущей ((d)y : (d)x) стремится совпасть с тангенсом угла наклона касательной (NM : AN). Другими словами, тангенс угла наклона секущей рассматривается как непрерывная функция (включая и случай, когда секущая превращается в касательную). А так как отношение конечных дифференциалов dy : dx всегда совпадает с (d)y : (d)x для случаев когда dx ≠ 0, то dy : dx определяют "по-непрерывности", как равное (d)y : (d)x, и для случая dx = 0, когда dx (и dy) "исчезает", становится "фикцией"[71]. Узловой предпосылкой здесь служит то, что касательная получается *непрерывным переходом* из секущей. Значит – по принципу *непрерывности! – и свойства секущей* непрерывно переходят в свойства касательной. И тангенс угла наклона секущей, и отношение дифференциалов (dx : dx). Но если тангенс угла наклона можно всегда[72] представить как отношение конечных величин, то в отношении dy : dx мы естественно мыслим dx ≠ 0. Однако, принцип непрерывного изменения свойств, – т.е. *принцип непрерывности*, – позволяет определить dy : dx и в "немыслимом" случае, когда и dx, и dy равны нулю, позволяет "заткнуть зияние" этой величины, доопределив ее по непрерывности[73].

---

[71] Термины Лейбница.

[72] Имеется ввиду, конечно, что в рассматриваемом примере секущие и касательные не могут быть вертикальными.

[73] Разбираемый пример очень похож, на самом деле, на другой, из "обычной" алгебры (см. с. 45, рис. 2). Роль исчезавшего там треугольника EAC играет у нас дифференциальный треугольник TMQ. Как там, при исчезновении треугольника EAC его подобие конечному треугольнику CXY сохранялось, так и в настоящем случае: при подтягивании точки T к M (т.е. при стремлении dx к нулю) дифференциальный треугольник TMQ стягивается в точку M, однако, его подобие конечному (но изменяющемуся) треугольнику RMN все время сохраняется. Треугольник же RMN стремится – в естественном смысле слова – к треугольнику AMN, когда dx стремится к нулю. Поэтому, по непрерывности отношение dy : dx будет стремиться к предельному для отношения NM : RN значению, а, именно, к отношению NM : AN. Идея и там, и здесь одна и та же: определить предельное отношение исчезающих величин через их сравнение с отношением конечных величин и применение принципа непрерывности.

Лейбниц ясно отдавал себе отчет в условности строимого им исчисления, точнее в обусловленности его общефилософскими архитектоническими принципами. "Впрочем, – пишет Лейбниц, – хотя строго говоря, и неверно, что покой есть род движения или что равенство есть род неравенства, равно как неверно и то, что круг есть род правильного многоугольника, но, тем не менее, можно сказать, что покой, равенство и круг заканчивают движения, неравенства и правильные многоугольники, которые переходят в них, исчезая в непрерывном изменении. И хотя эти концы исключены, т.е. не принадлежат, строго говоря, к ограничиваемым ими многообразиям, они все же имеют свойства последних, как если бы они к ним принадлежали; так, на языке бесконечных или бесконечно малых величин говорят, например, что круг есть правильный многоугольник с бесконечным числом сторон. В противном случае был бы нарушен закон непрерывности, т.е. поскольку от многоугольников переходят к кругу посредством напрерывного изменения и без скачка, постольку не должно быть скачка и в переходе от свойств многоугольников к свойству круга"[74].

Принцип непрерывности порожден стремлением понять каждый данный предмет как лишь экземпляр некоего всеобщего, как член некоторого ряда, подчиняющегося общей формуле. Понимание данного индивидуального сводится "внутри" принципа непрерывности к фиксированию того общего, что есть у него с другими членами ряда, и сопряжено, следовательно, с игнорированием всего особенного. Особенное, в этом смысле, всегда служит границей непрерывного[75]. Реальное, как особенное, лишь отчасти непрерывно, оно всегда, одновременно, и об-особленно, сингулярно. Эту диалектику Лейбниц чувствовал достаточно глубоко. Мы можем найти у него немало мест вроде следующего: "...Можно вообще сказать, что всякая непрерывность есть нечно идеальное и что в природе нет ничего, что обладало бы совершенно однородными частями. Но зато реальное полностью управляется идеальным и абстрактным и оказывается, что правила конечного сохраняют силу в бесконечном, как если бы существовали атомы, хотя они вовсе не существуют... и, наоборот, правила бесконечного сохраняют силу в конечном, как если бы имелись метафизические бесконечно малые, хотя в них и нет нужды и хотя деление материи никогда не приходит к бесконечно малым частицам. Это объясняется тем, что все управляется разумом и что иначе совсем не было бы ни науки, ни правила, а это не согласовалось бы с природой высшего начала"[76]. Тем не менее в той ценностной упорядоченной иерархии идей, согласно которой, по Лейбницу, был сотворен "лучший из миров", идея непрерывности явно превалировала над идеей дискретного.

---

[74]Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница. С. 196.

[75]Ср. размышлении П.А. Флоренского о близости принципа непрерывности и тенденции к изгнанию понятия формы. (См.: Историко-математические исследования... Вып. 30. С. 171).

[76]Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница... С. 193.

В наше время, время квантовой механики и р-адических геометрий, нам совсем не кажется само собой разумеющимся, что порядок мироздания необходимо связан с доминирующей ролью непрерывных соотношений. Скорее наоборот... Интересно отметить, что несмотря на своеобразную "прельщенность" XVIII в. идеей непрерывности – благодаря, в частности, и великолепной рекламе этой идеи у Лейбница, – с начала XIX в. раздаются уже иные голоса. О.Л. Коши, гению которого мы обязаны изгнанием понятия актуально бесконечно малых из анализа и переформулировкой дифференциального и интегрального исчисления в терминах предела, резко критиковал принцип непрерывности, как безусловный эвристический принцип. В своем отзыве на трактат Ж.-В. Понселе о проективных свойствах фигур, в котором принцип непрерывности играл фундаментальную роль, Коши писал: "Этот принцип (принцип непрерывности – *В.К.*) представляет собой, собственно, лишь некую сильную индукцию, с помощью которой теоремы, установленные сначала благодаря определенным ограничениям, распространяют на случай, в которых именно эти ограничения отсутствуют. Будучи применен к кривым второго порядка, он привел автора к точным результатам. Однако, мы не думаем, что он мог бы быть принят общим образом и безразлично применим ко всем видам вопросов в Геометрии или даже в Анализе. Слишком доверяя этому принципу, часто совершают очевидные ошибки. Известно, например, что при вычислении определенных интегралов при определении длин, поверхностей и объемов встречается огромное число формул, верных только при условии, что *величины, входящие* в них, остаются заключенными в определенных пределах" [77]. Принцип непрерывности, как выражение тенденции к унификации познания, стремится во всяком особенном (новом) увидеть общее (старое). Познающий разум как бы "минимизирует" здесь то спонтанное, познавательно-экзистенциальное усилие, которое и есть собственно *понимание:* встреча разума и бытия. Разум стремится понять "по непрерывности", "сходу", – привычно вписав новое в номенклатурную сетку уже известного. Поэтому принцип непрерывности нередко приводит к заблуждению: как цветное стекло пропускает только часть светового спектра и гасит остальную часть, так и разум, руководимый принципом непрерывности, не "видит" иного, качественно нового, не вписывающегося в этот принцип. И это не случайно. Как уже отмечалось, принцип непрерывности есть лишь частное выражение фундаментального *принципа* законопостоянства Лейбница: все и всегда происходит как здесь и теперь. Последний же принцип есть не только фундаментальное положение лейбницевской метафизики, но и – в силу его универсальной значимости как для сферы сущего, так и для сферы должного – определенный экзистенциально-личностный акт самоутверждения человека перед лицом Универсума. Стремление "заткнуть" все возможные "зияния" в онтологической структуре есть определенный *выбор,* сделанный Лейбницем. Однако, одна

[77] Цитата по кн.: Taton R. L'oeuvres scientifique de Monge. P.U.F., Paris, 1951. P. 266–267.

существенная "дыра" в мироздании Лейбница остается. Продолжая аналогию с цветным стеклом, можно сказать: как цветное стекло не уничтожает невидимую через него часть спектра, а поглощает ее, так и философия Лейбница, подчиняя Универсум жесткой детерминации, вытекающей из принципа законопостоянства, как бы поглощает всю абсолютность человеческой и божественной свободы в одной точке: точке оптации за этот принцип...

§ 4. ПОНЯТИЕ РЕПРЕЗЕНТАЦИИ. ИДЕЯ ФУНКЦИИ

Принцип законопостоянства и связанный с ним принцип непрерывности являлись по Лейбницу теми философемами, истинность которых гарантировала и истинность дифференциального исчисления. Однако этого было недостаточно. Говоря о непрерывности, Лейбниц, естественно, вынужден был обсуждать вопрос о природе континуума вообще. Что мы имеем в виду, когда говорим "непрерывность", "непрерывное"? Состоит ли эта непрерывность из бесконечно малых? Непрерывен ли действительный мир – или нет? Ответ Лейбница на последний вопрос связан с его учением о феноменальности пространства и времени. Пространство и время существуют по Лейбницу не сами по себе, как некие вещи, а лишь в представлении монад. Пространство есть порядок сосуществования вещей, время – порядок их последовательного существования. В пятом письме к Кларку Лейбниц подробно объясняет, что наличное у нас представление пространства, есть своеобразное гипостазирование разумом *совокупности отношений* между сосуществующими вещами. Эти отношения можно сравнивать между собой. В частности, про две вещи, находившиеся в сходных отношениях к другим вещам, говорят, что они занимали одно место. "Но дух, – пишет Лейбниц, – не удовлетворяется этим подобием, он ищет тождество, вещь, которая была бы поистине одной и той же, и представляет ее себе как будто существующей вне этих объектов; вот это-то здесь и называется местом или пространством. Оно, кстати, может быть только идеальным, ведь содержит оно не что иное, как некий порядок, в котором дух постигает применение отношений"[78].

Это учение Лейбница решительно отличается от точки зрения Декарта. Для последнего пространство – субстанция, реальность существующая сама по себе, наряду с мыслящей субстанцией. Физика и геометрия суть, в этом случае, науки изучающие действительный мир. Для Лейбница же эти науки изучают лишь действительность феноменов. Тела и движения представляют собой лишь видимость, лишь представления монад. Однако видимость эта согласована, подчеркивает Лейбниц, и именно согласованность, закономерность отличают эту "объективную видимость" от снов и произвольных фантазий. "Объективная видимость" феноменального мира связана законами физики и законом предустановленной гармонии. В свою очередь, законы физики имеют основание в законах

[78] *Лейбниц Г.В.* Соч.: В 4-х т. Т. 1. С. 479.

соотношения перцепций и аппетиций монад (обусловленных в конечном счете фундаментальными архитектоническими принципами).

Однако, здесь возникает существеннейшее для всей лейбницевской философии противоречие. Пространство и время, существующие в представлении монад и выражающие возможность существования, непрерывны. Онтологическое же "пространство", т.е. множество существующих вещей, у Лейбница дискретно. Ибо существуют, по Лейбницу, только монады, дискретные единицы бытия. В отличие от феноменального пространства, каждая часть которого делима до бесконечности, монады суть неделимые элементы бытия, из которых "сложен" универсум. "В идеальном, в непрерывном или в континууме, – пишет Лейбниц Н. Ремону, – целое предшествует частям, как арифметическая единица предшествует долям, на которые она дробится и которые можно произвольно определять, поскольку эти части существуют лишь потенциально; но в реальном простое предшествует совокупностям, и части существуют актуально, существуют прежде целого"[79]. Монада, по Лейбницу, уподобляется своеобразному зеркалу, отображающему весь универсум. Каким же образом *непрерывное* пространство феноменальной сферы может отражать *дискретный* мир монад? Для понимания этого мы должны внимательней проанализировать, какой смысл вкладывается Лейбницем в слова "отражать", "выражать", "представлять" (их ряд используется Лейбницем синонимически). Прежде всего здесь важен фрагмент "Что такое идея"[80].

Пытаясь сформулировать, что же мы понимаем под идеей некоторой вещи, Лейбниц акцентирует то, что является, по его мнению наиболее существенным: идея вещи есть нечто в человеке, что "выражает" эту вещь. Что значит "выражать"? "Что некоторая вещь *выражает* другую – так говорят тогда, когда в ней имеются свойства, соответствующие свойствам выражаемой вещи"[81]. Это соответствие свойств понимается Лейбницем не как сходство природ выражающей и выражаемой вещи, а как соответствие структурных особенностей одной и другой (т.е. особенностей взаимоотношения частей между собой, отношения частей к целому и т.д.). Поэтому возможен довольно пестрый набор примеров: схема машины выражает саму машину, язык выражает мысли и истины, цифры выражают числа, соответствующее алгебраическое выражение, например, выражает окружность. Лейбниц настойчиво подчеркивает, что для *выражения* в его смысле выражающее не обязано быть подобным по природе выражаемому. Выражающий язык может быть даже построен по произволу из элементов любой природы. Лейбницевское понятие *выражения*, так сказать, принципиально номиналистично. И именно это дает ему такой широкий диапазон применения. Не только эллипс выражает (или репрезентирует) окружность (возможно взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение одного в другое), но и "всякое полное

---

[79] *Лейбниц Г.В.* Переписка с Николаем Ремоном // Лейбниц Г.В., Соч. Т. 1. С. 540.

[80] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 3. С. 108–109.

[81] Там же.

действие репрезентирует полную причину", "деяния всякого существа репрезентируют его дух, и мир точно так же репрезентирует Бога" [82]. Подобное понимание идеи и служит у Лейбница обоснованием теоретического познания: идеи репрезентируют вещи (конечно, верные идеи), и поэтому выведенное из идей будет иметь "материальную значимость", будет справедливо для вещей.

Именно эту лейбницевскую концепцию "выражения" ("отражения", "репрезентации") нужно иметь в виду, когда речь идет о парадоксе отражения "атомарного", дискретного мира монад в представлении индивидуальной монады, т.е. в кадре непрерывного пространства-времени. Из множества попыток объяснить этот центральный для лейбницевской философии парадокс нам представляется одной из наиболее правдоподобных интерпретация Д. Манке (который следует за П. Кёлером[83]). Остановимся на ней подробно. Откуда вообще берется дискретный образ универсума "Монадологии"? Этот образ есть, согласно Лейбницу, *истинная* картина мира, т.е. мир с точки зрения Высшей монады. Бог видит мир как дискретное бесконечное многообразие монад. Но сказать так было бы упрощением. Скорее, подчеркивает Манке[84], мир представляет собой определенное единство дискретности бесконечного множества монад и непрерывности связывающих их законов. Мир в представлении высшего божественного разума есть примирение противоположностей, в частности, *высший синтез дискретности и непрерывности*. Монада же, смутно отражающая в своих представлениях весь мир, искажает эту исходную картину. Монада видит мир только лишь с некоторой партикулярной точки зрения, видит как бы перспективное изображение этого мира (являясь "центром" этой перспективы). Множество монад и представляет собой множество этих возможных точек зрения[85]. Монады, обладая разной степенью разумности с разной степенью ясности и отчетливости представляют себе мир. Известно, что Лейбниц признавал существование непрерывной шкалы монад, начиная от высшей божественной и кончая монадами неорганических существ. Божественный разум высшей монады ясно и отчетливо представляет актуально бесконечное множество идей. Монады разумных духов также способны представлять некоторую сферу идей ясно и отчетливо, однако идея актуально бесконечного множества уже оказывается недоступна их представлению. Еще ниже идут монады *неразумных живых существ, способные лишь к чувственным восприяти-*

---

[82] Там же.

[83] *Mahnke D.* Leibnizens Synthese von Universalmathematik und Individualmethaphysik. Stuttgart, 1964 (Faksimile–Neudruck der Ausgabe von Halle, 1925); *Köhler P.* Der Begriff der Repräsentation bei Leibniz. Bern, 1913.

[84] Mahnke D. Op. cit. S. 461.

[85] "И как один и тот же город, – пишет Лейбниц в "Монадологии", – если смотреть на него с разных сторон, кажется совершенно иным и как бы *перспективно* умноженным, таким же точно образом вследствие бесконечного множества простых субстанций существует как бы столько же различных универсумов, которые, однако, суть только перспективы одного и того же соответственно различным *точкам зрения* каждой монады" (*Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 1. С. 422–423).

ям, и, наконец, монады, ведущие бессознательное существование: монады минералов. Для нас интересны именно монады разумных духов, к которым относится и человек. Неспособные к ясному и отчетливому созерцанию идеи актуально бесконечного множества, они воспринимают эту идею трансформированно, соответственно той перспективной точки зрения, которую они воплощают в себе. "Во всех этих перспективах, – пишет Манке, – трансфинитное сокращается, так сказать, до чисто неопределенной (indefiniter) бесконечности, которая уже не состоит актуально из бесчисленного множества элементов, а лишь идеально может быть разделена на произвольно малые дифференциалы. ("Проекции" и "сокращения" понимаются, само собой разумеется, не буквально, в геометрически-количественном смысле, а, соответственно духовному различию идейных миров (разных монад – *В.К.*), должны пониматься качественно)"[86]. Парадокс здесь состоит именно в том, что актуально бесконечное и дискретное – мир с точки зрения Бога, – отражается в только потенциально бесконечном и непрерывном – в феноменальном восприятии монады. Объяснение этого парадокса и состоит в том особом смысле, который вкладывает Лейбниц в термин "отражать" ("выражать", "репрезентировать"). Напомним еще раз: выражающее на обязано, по Лейбницу, быть одноприродным с выражаемым. В первом должна лишь в большей или меньшей степени сохраняться структура второго. Так, бесконечная делимость континуума как бы "намекает", подводит нас к идее актуально бесконечного множества. И, с другой стороны, бесконечно делимый континуум представляет собой как бы "расфокусированное" актуально бесконечное множество. Важно отметить специфику этого рода мышления, подобного понимания репрезентации. Титаническое усилие сопрягать противоположное удовлетворяется уже где-то на границе ясного и отчетливого мышления, на границе знания и незнания[87]. В этом его дерзновение, в этом же его великий соблазн и опасность.

При репрезентации выдвигается на первый план вопрос о степени изоморфизма, выражающего выражаемому, т.е. о степени соответствия структуры выражаемого объекта и его образа. Здесь позиция Лейбница была двойственна. С одной стороны он с полной трезвостью констатировал факт ограниченности человеческого мышления. Только божественному разуму дано "интуитивное познание", т.е. полностью изоморфное во всех своих частях представление мира. Человеческое познание ограничено не только смутностью, неотчетливостью чувственных восприятий, но и, в рамках самого мышления, неспособностью к представлению актуально бесконечного. Поэтому, человеческое познание необходимо символично: в конечных или, самое большее, потенциально бесконечных образах оно стремится отобразить актуальную бесконечность универсума. С другой стороны, мы знаем уже, что дифференциально-геометричес-

[86] *Mahnke D.* Op. cit. S. 461.

[87] Связь с "ученым незнанием" Николая из Кузы усматривается не только по логическим мотивам, но имеет под собой и историко-фактическую базу. Лейбниц, конечно, был знаком с трудами Николая из Кузы (см., например: *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 1. С. 200).

кие построения Лейбница явно использовали актуально бесконечно малые величины. Основание этой двусмысленности лежит, по нашему мнению, в том факте, что в монадологии Лейбница отсутствуют какие-либо внутренние характеристики, закрепляющие монаду на том или другом уровне духовности. Так, наделенная разумом монада, человек смутно отражает всю вселенную. Но ничто, вообще говоря, в системе Лейбница не закрывает для этой монады "путь наверх", путь к духовному усовершенствованию. С монадологией вполне совместимы традиционные рецепты духовной концентрации: аскетические ограничения в сфере чувственной жизни, сознательное культивирование сосредоточенности и т.д. Ничто в системе Лейбница не запрещает монаде от смутного представления вселенной переходить ко все более и более ясному, асимптотически приближаясь к божественному разуму...

Интерпретация континуума как особого типа "репрезентации" актуально бесконечного множества монад позволяет нам лучше осознать и корни дифференциально-геометрических построений Лейбница. Если континуум есть как бы "расфокусированное" актуально бесконечное множество, то точка при этом представляет отдельную монаду. Дифференциальные построения "внутри" точки – характеристический треугольник и т.д. – соответствуют представлениям монады. Как онтологическая единица, – монада, – сама не являющаяся материальной (хотя и обладающая телом), отражает в своих представлениях материальный мир, так и точка кривой, не являющаяся вообще говоря, частью континуума, "отражает" в своих дифференциальных структурах мир макрогеометрии – поведение кривой в окрестности этой точки. То фундаментальное соотношение – подобие дифференциального характеристического треугольника и треугольника конечного, – о котором мы говорили выше, и есть выражение этого "отражения", этого соответствия (изоморфизма). Факт геометрического макромира – определенное расположение касательной по отношению к осям – "отражается" в микрогеометрии, т.е. переносится с сохранением структуры на дифференциальные элементы "внутри" точки. Как согласно теории преформизма, организм весь вырастает из начатков уже заключающихся в мельчайшем зародыше, – в принципе, в бесконечно малом! – так и в геометрии Лейбница: вся кривая в окрестности точки как бы вырастает из ее дифференциального образа "внутри" самой точки[88]. Эти соответствия неудивительны. Парадигмой этих лейбницевских построений служила одна и та же модель: монада, сама не принадлежащая материальному миру, но целиком отражающая его (по закону предустановленной гармонии).

В лейбницевской метафизике, – т.е. в монадологии, – находит свое основание и принцип законопостоянства. Генетически производный от возрожденческих представлений о всеобщей "симпатии" вещей, принцип этот прямо связан с тем тезисом, что монада в своих восприятиях отра-

[88]Нетрудно понять, что тем самым речь идет о кривых соответствующих так называемым аналитическим функциям.

жает весь мир. Хотя Лейбниц и подчеркивает постоянно, что отражение это "смутное" и зависит от степени духовности самой монады, однако наличие этого отражения даёт уже очень много. По Лейбницу, монада воспринимает весь универсум как в пространстве, так и во времени: монада смутно воспринимает не только всю совокупность существующих (теперь) вещей, но и все их будущие (и прошлые) состояния. В этом смысле для монады как бы не существует "там и тогда": все превращается в "здесь и теперь". В рамках этого единого "здесь и теперь" все отдаленное, все будущее уже отчасти присутствует. Нет ничего принципиально тайного, сокрытого в мире Лейбница, все уже более или менее явно, явлено, известно... Поэтому и невозможно ожидать от отдаленного и будущего чего-то принципиально нового: "свойства вещей всегда и везде такие же, как здесь и теперь".

Историки философии, обратившие внимание на ту большую роль, которую играет понятие *репрезентации* ("отражения") у Лейбница, справедливо подчеркивали глубокое влияние, оказанное на немецкого философа философской традицией, основывавшей свои построения на соответствии микрокосма-человека – и макрокосма-мира. Традиция эта восходит еще к античному платонизму. Определенный вклад в ее развитие сделан был и христианскими богословами (Григорий Нисский, Фома Аквинский). Особое значение приобретает эта тема в культуре Возрождения. Вышеупомянутый П. Кёлер подробно исследовал в своей книге влияние на Лейбница ближайших к нему представителей этой традиции – немецких мистиков Парацельса, Вайгеля, Бёме[89]. Ярчайшими представителями этой традиции в XV в. выступает кардинал Николай из Кузы. Остановимся на нем несколько подробнее. Для наших целей – понять философские предпосылки генезиса дифференциального исчисления – философия Кузанца имеет особенное значение. Дело в том, что в его философии идея соответствия получает дерзновенную и беспрецедентную экстраполяцию. А именно, один из членов соответствия переносится в бесконечность, или бесконечность бесконечно большого, или бесконечность бесконечно малого. Этому служит учение об абсолютном максимуме. Абсолютный максимум в силу своей абсолютности должен совпадать со всем, в том числе и с абсолютным минимумом, учит кардинал Николай[90]. Так как абсолютный минимум содержится в любом фрагменте универсума, то отсюда следует, что в любом таком фрагменте *свернуто* содержится все[91]. Эти свойства абсолютного максимума символизируются, по Кузанцу, например, в геометрии. "...Одно и то же единство в аспекте развертывания этого единства в количество называется точкой, поскольку в количестве не найдешь ничего, кроме точки: как в линии, где ее ни разделишь, везде точка, так же и в плоскости и в объемном теле"[92]. Аналогич-

[89] *Mahnke D.* Op. cit. S. 214–217.

[90] *Николай Кузанский.* Соч.: В 2-х т. М., 1979. Т. 1. С. 54.

[91] Там же. С. 103.

[92] Там же.

ным образом покой свернуто содержит движение, настоящее содержит прошлое и будущее, и вообще тождество и равенство суть свернутость различия и неравенства. В этих рассуждениях кардинала Николая уже готова та логика, которая будет для Лейбница определяющей. Противоположности, согласно этой логика... не противоположны. Одна переходит в другую. Более того: одна *свернуто* содержит в себе другую. Однако, нужно было еще много усилий чтобы диалектика Кузанца начала приносить в математике плоды. Николай, говоря о развертывании множества из единства, тут же отмечает: "Но способ этого свертывания и развертывания выше нашего ума. Кто, спрашиваю, может понять, как из божественного ума получается множество вещей, когда их бытие есть мысль бога, а она – бесконечное единство?"[93]. Лейбниц, в этом смысле, предпринимает попытку конкретной геометрической реализации общей программы Кузанца: внутри самого элементарного единства – точки, бесконечно малого дифференциала, – он постулирует существование "свернутой" актуальной бесконечности – дифференциальные треугольники, дифференциалы высших порядков, – и строит дифференциальное и интегральное исчисление.

* * *

Лейбницевская концепция "репрезентации" ("выражения") тесно связана также с генезисом центрального понятия новой математики, понятия *функции*. Обсудим еще один важный фрагмент из переписки Лейбница с философом и богословом А. Арно, лидером знаменитой янсенистской общины в Пор-Рояле. Объясняя Арно свою теорию взаимодействия тела и души, Лейбниц, как обычно, настойчиво употребляет слово "выражать" (éxprimer): душа выражает те состояния, которые претерпевает тело. Причем понять это сложно прежде всего потому, что Лейбниц не объясняет *механизма* этого выражения. Так, согласно этой доктрине, душа монады, выражающая весь универсум, ближайшим образом выражает состояния тела. Но как это понимать, спрашивает Арно, разве, например, восприятие душою движения лимфы в лимфатических сосудах более отчетливо, чем восприятия движения спутников Сатурна? Что значит вообще термин *выражать*? Лейбниц отвечает точным определением: "Одна вещь *выражает* другую (в моем словоупотреблении), когда имеется постоянное и упорядоченное соответствие (un rapport constant et réglé) между тем, что можно сказать об одной и о другой. Так, перспективная проекция выражает то, что проектируют. Выражение обще всем формам, оно есть тот род, видами которого являются и естественное восприятие, и чувство животных, и интеллектуальное познание"[94]. Это выражение движений одних частиц через другие – факт всеобщей взаимосвязи универсума. С этим, подчеркивает Лейбниц, согласились бы и картезианцы. Согласно Декарту, в мире отсутствуют пустоты, поэтому

---

[93]Там же. С. 105.

[94]Lettres de Leibniz a Arnauld (d' apres un manuscript inédit) P.U.F. Paris, 1952. P. 79.

любое движение сколь угодно малой частицы сказывается последовательно на всех, до бесконечности. Однако, вопрос, на который картезианцы не отвечают, замечает Лейбниц, это вопрос "по каким каналам действие протяженной массы переходит на неделимую сущность (т.е. душу – *В.К.*)"[95]? Как же сам Лейбниц отвечает на этот вопрос? "... Что касается меня, – пишет Лейбниц, – я выражаю это взаимодействие души и тела естественным образом через общее понятие субстанции или совершенного существа, которое говорит, что его [существа] настоящее состояние есть естественное следствие его предшествующего состояния, т.к. природа всякой души есть выражение вселенной; она (душа) изначально была создана таким образом, что в силу законов собственной природы ей приходится согласовываться с тем, что происходит в телах, и в частности, в ее собственном..."[96]. Как ни "естественно", по Лейбницу, общее понятие субстанции, природа которой есть выражение вселенной, однако, опять, *механизм* этого выражения остается неизвестным. И это не случайно, как увидим мы ниже. Но сначала еще один характерный пример из объяснений Лейбница. Арно спрашивает, как интерпретировать через понятие выражения, например, ощущение боли от укола иголкой. Ведь если представление монадой боли есть следствие других ее представлений (согласно конститутивным законам смены представлений), то получается, что монада уже раньше должна была знать об уколе, хотя на самом деле, она узнает о нем только из этого именно ощущения. Чтобы объяснить свою точку зрения, Лейбниц дает пространственно разделенное изображение двух различных рядов следствий:

Состояние тела в момент А	Состояние души в момент А
Состояние тела в следующий момент В (укол)	Состояние души в момент В (боль)

"Следовательно, как состояние тела в момент В следует за состоянием тела в момент А, так же и состояние В души есть следствие А, предшествующего состояния той же души, соответственно общему понятию субстанции. Итак, состояния души есть естественным образом и существенно выражения соответствующих состояний мира и, в частности, состояний тела, которое ей, душе, соответствует; следовательно, поскольку укол есть часть состояния тела в момент В, то представление или выражение (représentation ou expression) укола, что и есть боль, будет также частью души в момент В; так как, как одно движение следует за другим, так и в субстанции, имеющей репрезентативную природу, одно представление следует за другим"[97]. В существовании подобного соответствия нет ничего особенно удивительного, считает Лейбниц. Бог, творец мира, также установил соответствие восприятий монад и телесного мира, как человек может, например, с помощью планетарного механизма изображать движение небесных тел.

В последнем примере (с уколом) особенно выпукло проявляется ха-

[95] Ibid. P. 80.
[96] Ibid. P. 80–81.
[97] Ibid. P. 81.

рактер той идеи, которую столь настойчиво старается выразить Лейбниц. По существу он не дает *объяснения* терминам "выражать", "соответствовать", "представлять" помимо простого их сведения одного к другому. Арно имел основание упрекать Лейбница в том, что его решение проблемы коммуникации души и тела мало чем отличается от Deus ex machina окказионалистов. И тем не менее, Лейбниц делает важный шаг вперед. Хотя мы и не знаем *природы* соответствия представлений нашей души и материального мира (которая и составляет как раз "естественную природу субстанции")[98], однако, важно фиксировать само наличие этого соответствия и выделить его характерные черты. Лейбницевское понятие *выражения* (см. стр. 61) дает отчетливое определение этого соответствия. Действительно, не с точки зрения механизма этого соответствия, а с точки зрения его логической структуры (и это очень важно). *Выражение* значит постоянное и упорядоченное соответствие. Априори ясно, что могут быть разные упорядочения одного и того же выражения. Поэтому возможны разные выражения. Их можно сравнивать между собой, изучать возможность обратного выражения, в котором выражающее и выражаемое меняются местами, изучать монотонность этих выражений и т.д.

Во всех разобранных примерах, по нашему мнению, достаточно прозрачен тот факт, что Лейбниц ясно осознает и использует *математическую идею функции,* хотя и называет это другими словами ("выражение", "репрезентация" и т.д.). Впрочем, Лейбниц еще не обладал современным понятием множества, чтобы сформулировать абстрактное определение функции, как понимаем мы это сегодня. Этого, однако, и не требуется. *Идея* функции есть нечто более широкое (по применению) и глубокое (по сущности), чем то формальное определение, которым оперирует современная математика[99]. Лейбниц пользуется этой идеей при описании

[98] Лейбниц, как известно, резко отрицательно относился к идее влияния тела на душу (и наоборот). Так, в одном из писем к леди Мещэм от пишет: "...сообщение между двумя столь разнородными субстанциями (души и тела — *В.К.*) могло бы происходить разве что чудом, так же как непосредственное сообщение двух отдаленных тел, ссылаться же на какое-то никому не ведомое *влияние* одного на другое — значит маскировать чудо ничего не значащими словами" (*Лейбниц Г.В.* Соч. ... Т. 2. С. 591).

[99] Об этом очень хорошо писал П. Бутру. С одной стороны, формальное определение функции — как отображение одного множества в другое, — слишком общее и бессодержательное. Оно ничего не дает для решения конкретных задач; оно не может, само по себе, подсказать математику направление исследования. С другой стороны, класс функций, заданных конкретными конечными или бесконечными (бесконечные степенные ряды) алгебраическими выражениями — "наглядно" показывающими как "работает" алгоритм этой функции — оказывается слишком узок. Уже аналитическая функция общего вида не представима одним таким рядом (а требует, вообще говоря, бесконечного числа таких представлений). В лице такой функции мы оперируем с объектом, для которого у нас нет адекватного выражения, но *идею* которого мы ясно осознаем. "Понятие функции для математика прежде всего неопределенно, недетерминировано. Идея, которую мы о ней имеем, более богата и полна, чем любые определения или выражения, которые мы можем дать или сконструировать" (*Boutroux P.* L'idéal scientifique de mathématiciens..., p. 167). Идея функции охватывает все логическое "пространство" от конечных алгебраических выражений до бессодержательного, но строгого формально-логического определения. И даже более того, как показывает лейбницевское употребление понятия "выражение".

своего понимания соответствия материального и идеального и является еще большим вопросом – можно ли это соответствие выразить на языке теории множеств. Лейбницевское понятие выражения, конечно, шире узкоматематического понятия функции[100]. Не остается никакого сомнения, что Лейбниц ясно осознавал всю широту применения этого понятия. Совершенно сознательно использует он понятие выражения и в математике (например, геометрическая проекция выражает проектируемое, алгебраическая формула выражает кривую и т.д.). Кроме того, как известно, сам термин "функция" в математике начинает употреблять именно Лейбниц. В небольшой заметке в "Журнале ученых" за 1694 г. Лейбниц писал: "...Пусть дано отношение, как m:n двух каких-нибудь функций линии ACC; найти эту линию. Я называю *функциями* (fonctions) всякие части прямых линий, которые получают, проводя различные (*indefinites*) прямые, соответствующие неподвижной точке и точкам кривой, каковы: абсцисса AB или Aβ, ордината BC или βC, хорда AC, касательная CT или Cθ, нормаль CP или Cл, подкасательная BT или βθ, поднормаль BP или βл, AT или Aθ (resecta) или отсекаемая касательной, AP или Aл, отсекаемая нормалью, Tθ и Pл, под-отсекаемые (sub-resectae a tangente vel perpendiculari), TP или θл (corresectae), соотсекаемые, и бесконечное число других, построение которых более сложно..."[101] (рис. 4). Получаемые в результате проведения различных линий точки – B, P, T, β, л, θ – зависят от переменной точки кривой C, расстояния этих точек до фиксированной точки A или до фиксированных линий (AP и Aл), или

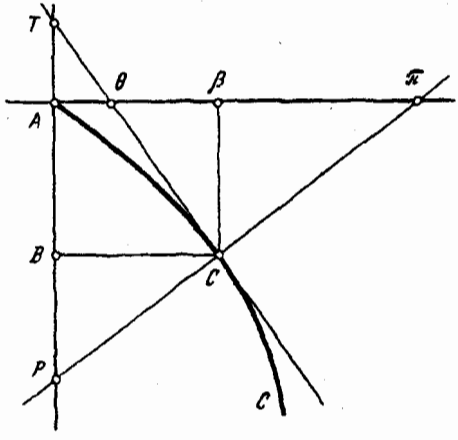

Рис. 4

[100] Оно ближе современному, более общему понятию *функтора*, которое не просто фиксирует отображение одного множества на другое, но несет некую информацию о сохранении структуры. См., например: *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. М., 1972.

[101] *Leibniz G.W.* Mathematische Schriften. B.-Halle, 1849–1863. Bd. 5. S. 307–308.

между собой (например, Тθ или Рл) также зависят от положения С, являются ее функциями, "выражают" ее положение.

Мы хотим, однако, подчеркнуть, что открытие общей идеи функции, которая направляет лейбницевские построения, было более значительным фактом, чем конкретные применения этой идеи в математике своего времени. Это понятие является одним из центральных в современной математике (и в науке вообще). И нужно заметить, что именно Лейбниц выявляет парадигмальный характер этой идеи и дает блестящие примеры ее применения в разных областях знания (в том числе и в математике). Что же принципиально новое открывает Лейбниц? Соответствия между разными величинами рассматривались, конечно, уже давно. Античные математики изучают уже сложные зависимости, отнюдь не сводимые к элементарным алгебраическим соотношениям. Птолемей, например, в "Алмагесте" дает подробную таблицу изменения длин хорд окружности в зависимости от угловой величины стягиваемых дуг. Тем более, математики XVI–XVII вв. рассматривают сложные полиномиальные и иррациональные соотношения (Декарт, например). Однако, именно пример Декарта, с его боязнью трансцендентных функций, как раз и подсказывает ответ на вопрос, что же нового принес в эту область Лейбниц. Дело в том, что все предыдущие века рассматривали функциональную зависимость скорее как выражение некоторого алгоритма, правила, по которому по значению одной величины находят другую. И правило это, вообще говоря, *конечное*. Декарт уже сознательно возводит эту алгоритмическую конечность в *принцип*, отказывая задачам, не подчиняющимся этому принципу, в праве на существование в математике. Лейбниц же, в этом смысле, делает решительный шаг. Он начинает рассматривать алгоритмически бесконечно-сложные функции – прежде всего, функции, представимые *бесконечными* степенными рядами, – и более того, неизвестные и, следовательно, произвольные функции[102]. Ярчайшим выражением того, что Лейбницу понятна общая идея функциональной зависимости, выступает, по нашему мнению, вышеприведенный пример из переписки с Арно, где соотношение между идеальными представлениями монады и материальным миром подводится под общее определение "выражения". Какой-то конечный алгоритм, позволивший бы получить одно из другого, в принципе невозможен: идеальное "не складывается" из материального (грубо говоря, нет алгоритма, переводящего одно в другое). Однако, существующую функциональную зависимость (через понятие *выражения*) Лейбниц фиксирует и делает ее одним из центральных моментов своей философии. И мы знаем (из фрагмента "Что такое идея"), что сходство природ совсем не обязательно для выражения одной вещи через другую. Высшей парадоксальности эта лейбницевская идея выражения достигает именно тогда, когда выражающее и выражаемое разносятся на два предельных онтологических полюса: материальное и идеальное. Именно

[102] Вопрос и представимости произвольных функций рядами порождает в середине XVIII в. знаменитый спор Д'Аламбера и Эйлера. Подробнее см.: *Демидов С.С.* Спор о колебании струны // Роль дискуссий в развитии естествознания. М., 1986. С. 78–102.

в этой лейбницевской философеме лежат корни идеи функции и ее математических реализаций. Удивительная широта применения идеи функциональной зависимости явно говорит, по нашему мнению, о неиндуктивном характере этой идеи: ее можно обрести и пытаться более или менее адекватно выразить, но нельзя из-обрести, сконструировать ("сложить из частей")...

...Вспомним современное определение функции. Даны два множества. Если каждому элементу первого множества поставлен в соответствие какой-нибудь элемент второго множества, то говорят, что на первом множестве задана функция со значениями во втором. Когда человек впервые слышит это определение (особенно в школе), то обычно сразу возникает много вопросов по поводу выражения "поставлен в соответствие". В каком смысле? По какому правилу? По правилам какого сорта? Кем "поставлен"? и т.д. И это неудивительно. За современным абстрактным понятием функции стоит тысячелетняя философская проблема выражения материального в идеальном (и наоборот), один из вечных вопросов человеческого познания.

Лейбницевское понятие "выражения" (репрезентации) действительно является одним из узловых пунктов, в котором пересекаются важнейшие темы его научного наследия. Главным, что характеризует новацию Лейбница, является систематическое применение идеи соответствия конечного и бесконечного. В одном из черновых набросков Лейбниц дает следующую геометрическую модель человеческого познания[103]. Мир представлен в ней гиперболой, с простирающимися в бесконечность ветвями. Человеческое же отражение этого мира, как конечные эллиптические проекции этой гиперболы (которые существуют при некотором специальном выборе плоскостей и центров проекции)[104]. Части гиперболы, достаточно близкие к вершинам, относительно хорошо изображаются (в смысле сохранения "формы") соответствующими частями эллипса. Далекие же точки ветвей гиперболы (уходящих в бесконечность) хотя и имеют каждая свой отдельный образ среди точек эллипса, однако изображение здесь уже сильно искажено: близкое к прямому переходит в кривое, и, главное, неограниченное в конечное. Это соответствует тому, что монада только *смутно* отражает весь мир. Конечно, аналогичные математические соответствия были известны уже задолго до Лейбница, как отмечали мы выше: Лейбниц, однако, ставит подобные конструкции в *центр* своей философии и в центр своей математики. Хотя он и говорит не раз, что познание бесконечного доступно человеку лишь в символической форме, тем не менее, этот символизм замышляется как универсальная система ("универсальная характеристика"), способная в *принципе* отразить всю бесконечность существующего мира. Несмотря на актуальную ограниченность человеческого познания, между ним и полнотой познания Высшей монады не существует принципиальной границы. Символизм человеческого познания не мешает, по Лейбницу, его воз-

[103] См. об этом у *Mahnke D.* Op. cit. S. 223–224.

[104] Подробнее см. об этом в главе III.

можной полноте. В математике идея репрезентации конечного бесконечным (*и наоборот*) *прямо влечет за собой введение новых аксиом*, касающихся природы континуума, и построения особой "метафизической геометрии" – дифференциального исчисления. "Со своей неслыханно смелой мыслью, что власть человеческой символики простирается и на Бога, Лейбниц, вероятно, сильнее всех философов ощутил тайный мотив, вдохновляющий, штурмующий небо, разбивающий границы эйдетического мышления полет западной, в своем ядре нордически-германской математики"[105], – писал о Лейбнице О. Беккер, один из авторитетнейших исследователей истории математики в нашем столетии. Эта чуткость Лейбница к "духу" новой математики, как пытались мы показать, была непосредственно связана с его общефилософскими, общемировоззренческими установками.

[105] *Becker O.* Mathematische Existenz. Halle, 1927. S. 288.

Глава III

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. НОВАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ПРИНЦИП НЕПРЕРЫВНОСТИ

Проективная геометрия, возникновение которой в XVII в. связано с именем Дезарга (*и отчасти* Паскаля), имела два источника. Один обусловлен прикладными геометрическими знаниями. Перспективные построения в живописи, архитектуре, геометрические соображения, используемые при резке камней, построении солнечных часов – вся эта совокупность эмпирических приемов и отдельных теоретических положений известна Дезаргу и отчасти упоминается им в его знаменитом "Черновом наброске подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью"[1] (1639) – первой специальной книге по проективной геометрии. Однако, гениальность Дезарга состояла в том, что весь этот рыхлый эмпирический материал он трактует с новой единой точки зрения. Дезарг выдвигает новый *принцип* рассмотрения геометрических фигур и демонстрирует его эффективность. Этот новый логический принцип являтся вторым – и основным – моментом, обусловившим возникновение проективной геометрии. Непосредственным образом речь идет о так называемых кониках, т.е. эллипсе, параболе, гиперболе, кривых, получаемых в результате пересечения конуса плоскостью. Эти кривые изучались уже и геометрами античности, но никому из них не удавалось дать трактовку материала с той степенью логической однородности, какая достигается Дезаргом. Проблематика, связанная с коническими сечениями приходит в XVII век через фундаментальный восьмитомный труд великого математика III в. Аполлония Пергского "Конические сечения". И в этом труде Аполлоний старается давать доказательства, по возможности, применимые сразу ко всем коникам. Однако, ему это не всегда удается. Еще более важно, что общность свойств конических сечений, выдвигаемая Аполлонием, связана, с его методом площадей – техникой, являющейся своеобразным предвосхищением аналитической геометрии[2]. К этому подходу ближе классификация кривых, данная Декартом. У Дезарга же трактовка конических сечений осуществляется согласно сов-

---

[1] Мы пользуемся двумя изданиями: *L'oeuvre mathématique* de Desargues, ed. par R. Taton, P.U.F. Paris, 1951; The geometrical work of Girard Desargues, ed.and tr. by J.V. Field, J.J. Gray. Springer-Verlag. New-York, 1967. Оба издания снабжены кратким историческим и предметным комментариями.

[2] *Field J.V., Gray J.J.* The geometrical work of Girard Desargues... P. 10.

сем иному принципу. Если непрерывно менять наклон плоскости, пересекающей конус, то соответственно непрерывно будет изменяться и кривая пересечения. Пусть, например, исходное сечение – эллипс. На *рис. 5* плоскость, проходящая через т. 0, остается перпендикулярной к плоскости рисунка и вращается вокруг оси, проходящей через т. 0 против часовой стрелки. Тогда конус с вершиной в S будет пересекаться плоскостью соответственно по эллипсу (положение 1), по прямой (2), по гиперболе (3) или по параболе (4) – плоскость сечения параллельна образующей конуса).

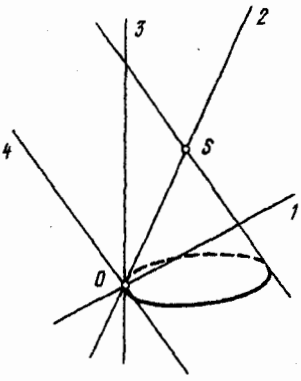

Рис. 5

Непрерывному изменению наклона плоскости, как мы уже сказали, соответствует и непрерывное изменение кривой. Однако, это "непрерывное" изменение включает в себя и скачки. При переходе плоскости от положений между 1 и 2 к 2 происходит скачкообразное изменение образа: от эллипса – конечной фигуры, – к бесконечной прямой (совпадающей с образующей). Аналогично, при переходе от положения 2 к положению между 2 и 3: от прямой к гиперболе. При вращениии плоскости в направлении по часовой стрелке от 1 к 4, эллипс сечения будет увеличиваться "до бесконечности" и при положении 4 сечение скачком перейдет в параболу. Все эти геометрические соображения были понятны, конечно, и математикам античности, однако, они не служили у них достаточным основанием для существенной, структурной интеграции кривых второго порядка в один род. В XVII в., как видели мы на примере Лейбница, соображения, связанные с непрерывностью, расценивают уже, как довольно убедительные. Непрерывно порожденные фигуры должны иметь и непрерывно изменяющиеся свойства – вот лозунг дня. Но как же объединить в один род кривые конечные, замкнутые (эллипсы) и бесконечные, разомкнутые (например, параболу)? Это делается Дезаргом путем введения *бесконечно удаленной точки.* Эта точка как бы замыкает раствор параболы и последняя, рассматриваемая вместе со своей бесконечно удаленной точкой, представляет собой аналог эллипса, с одной точкой "на бесконечности". Аналогично, гипербола может рассматриваться как замкнутая кривая, содержащая две бесконечно удаленные точки. Бесконечно удаленная точка в этом смысле вводится для того, чтобы спасти непрерывность, вводится по *непрерывности.*

Дезарг (и Паскаль) совершенно сознательно используют эту фиктивную бесконечно удаленную точку. Так, Дезарг пишет: "Таким образом столб или цилиндр, рожок или конус[3] суть два вида одного высшего рода (deux sougenres d'un surgenre), именуемого здесь пучок (rouleau), который мы

[3]Дезарг для наглядности использует термины "столб" и "рожок", наряду с "цилиндром" и "конусом".

принципиально рассматриваем здесь с общей точки зрения"...[4]. Каким образом конус и цилиндр попадают в один род? Если отдалять вершину конуса в бесконечность (сохраняя основание – окружность – неподвижным), то конус "непрерывно" переходит в цилиндр. Цилиндр тем самым интерпретируется как конус с бесконечно удаленной вершиной. Аналогично у Паскаля в доступном нам (благодаря Лейбницу) отрывке из "Трактата о кониках" мы можем прочесть: "Определение III. Про две или большее число прямых, как бы ни были они расположены, говорят, что они всегда пересекаются или на конечном расстоянии, если они встречаются в одной и той же точке, или на бесконечном расстоянии, если они параллельны"[5]. Каким образом можно две пересекающиеся и две параллельные прямые охватить одним родом? Опять, благодаря известной уже процедуре. Если у двух пересекающихся прямых мы отдаляем точку их пересечения "на бесконечность", то эти прямые переходят в параллельные. Параллельные прямые понимаются, как прямые тоже пересекающиеся, а именно в бесконечно удаленной точке. Бесконечно удаленная точка позволяет восстановить однородность во множестве конфигураций из двух прямых, в котором исходно случай двух параллельных прямых занимает исключительное положение. Введение бесконечно удаленной точки делает все случаи равноправными.

Открытые в XVII в. Дезаргом методы проективной геометрии не получили сразу же должного развития и внимания со стороны ведущих математиков. Более модным и многообещающим выглядел в то время метод аналитической геометрии, введенный Декартом. Только к началу XIX в. благодаря работам Г. Монжа и в особенности Ж.-В. Понселе проективная геометрия утвердилась в математике, как новая специфическая геометрическая дисциплина. Решающую роль здесь сыграла книга Понселе: "Трактат о проективных свойствах фигур" (1822). Трактат был знаменит не только тем, что систематически и эффективно развивал методы, введенные Дезаргом. В трактате сознательно культивировалась новая точка зрения на геометрию, особая "проективная идеология". В этом отношении особенно интересно предисловие к трактату. Оно специально обсуждает роль принципа непрерывности в проективной геометрии. Для нас будет полезно разобрать отдельные моменты этого предисловия.

Оправдывая построение проективной геометрии, Понселе вначале обсуждает причину эффективности и популярности аналитической геометрии. Последняя, согласно Понселе, эффективна благодаря тому, что может использовать общие рассуждения относительно *неопределенных* величин, не обращая внимания на размеры фигур и особенности их положений, учитывая только взаимосвязи их частей ("имплицитные рассуждения", пишет Понселе[6]). Этому именно и служит алгебраическая символика, используемая в аналитической геометрии. Обычная же *синтетическая* геометрия продвигается всегда более робко с тщательным специаль-

[4] L'oeuvre mathématique de Desargues... P. 134.

[5] *Pascal B.* Oeuvres complétes... P. 39.

[6] *Poncelet J.-V.* Traité des propriétés projectives des figures. Paris, 1822. P. XXI.

ным обследованием всех отдельных случаев. Фигуры рассматриваются так, подчеркивает Понселе, как будто они имеют физическое существование и то, что не может быть предъявлено воображению как реально существующее, – а, прежде всего, здесь подразумеваются те случаи удаления отдельных точек "в бесконечность", о которых мы только что говорили, – не принимается как понятное и доказанное. Если бы удалось в обычной геометрии каким-то образом научиться применять общие имплицитные рассуждения, она могла бы тогда соперничать с аналитической геометрией.

Какого же характера "имплицитные" рассуждения хочет Понселе ввести в геометрию ? Прежде всего это соображения, связанные с *непрерывностью*. Пусть дана какая-то определенная геометрическая фигура, и о ней доказано некоторое утверждение, зафиксировано некоторое свойство (обычными методами синтетической геометрии). Будем непрерывно деформировать исходную фигуру. "...Разве не очевидно, – пишет Понселе, – что свойства и отношения, найденные для первой системы (*геометрической фигуры – В.К.*) *будут приложимы и к последовательным* состояниям этой системы, при условии, конечно, должного внимания к возможным частным модификациям, когда некоторые величины исчезнут, или изменят смысл, или знак и т.д., – модификациям, которые всегда будет легко осознать a priori, с помощью твердых правил?"[7]. Понселе говорит сначала о *малых* изменениях геометрических фигур (о "малых шевелениях", *называют* это сегодня в геометрии). Но это не меняет ситуации. На примере пересечения конуса с плоскостью мы видели, что малые изменения наклона плоскости могут вызвать большие качественные перестройки в сечении, например, когда конечная фигура становится бесконечной. Вообще говоря, именно ради этих случаев, ради включения этих случаев в общую закономерность, – и вводятся соображения непрерывности. Они кажутся Понселе достаточно очевидными. "Это по меньшей мере то, о чем можно без труда умозаключить из имплицитных рассуждений, и это есть то, что является в наши дни общепринятым, как бы некоторой аксиомой, очевидной, неопровержимой и не нуждающейся в доказательстве... Итак, этот принцип, рассматриваемый наиболее известными геометрами как аксиома, представляет собой то, что можно назвать *принципом или законом непрерывности* математических отношений абстрактных воображаемых величин"[8]. Акцент на *воображаемых* величинах здесь не случаен. Понселе довольно сознательно требует легализации рассмотрения таких преобразований геометрических фигур, которые невозможны с реальными (материальными) объектами. Прежде всего это касается разнообразных использований в рассуждении актуальной бесконечности.

Можно ли доказать принцип непрерывности? Нет, Понселе, ясно отдает себе отчет в независимости этого принципа. Его введения в геометрию настоятельно требует не его доказанность, а его *эвристическая* эффектив-

---

[7]Там же.

[8]Там же. P. XXIII.

ность. Принцип непрерывности должен быть принят "...если не как средство доказательства, то по меньшей мере как средство открытия и изобретения. Разве не необходимо также демонстрировать ресурсы, используемые гениальными людьми разных эпох для достижения истины, так же как и те ужасные усилия, которые они потом вынуждены были предпринять, чтобы доказать эти истины согласно представлениям умов робких или мало способных достигнуть их (этих истин) самостоятельно?"[9]. Принцип непрерывности выдвигается Понселе как "принцип открытия и изобретения". Понселе соединяет эти два понятия союзом "и". Однако, между ними существенная логическая разница. Открытие предполагает пред-заданное бытие, осознание которого предстоит познающему разуму как задача. Изобретение, – в метафизическом смысле, – предполагает конструктивный произвол личности, не связанной, вообще говоря, никакими априорными структурами. Философски говоря, это два различных взгляда на математику, две различных программы ее построения. И некритическое сближение открытия и изобретения есть именно выдвижение последнего конструктивного похода к математике. Мы вернемся к этому несколько позже.

Выдвижение принципа непрерывности в число важнейших конструктивных принципов в науке Нового времени есть знак некой более общей тенденции, имеющей общефилософское значение. Античная наука опирается на систему понятий существенно иной *логической природы*. Аристотель, обсуждая свои десять логических категорий, нигде не дает их *дедукции*. Эти категории были постепенно осознаны, открыты, но античная наука не ставит задачи вывести их одну из другой. Принципиальным логическим требованием является запрет при рассуждении переходить в другой род. "Так как во всяком роде необходимо присуще то, что присуще само по себе, и поскольку оно есть (то, что оно есть), то очевидно, что научные доказательства бывают о том, что присуще само по себе, и исходят из него... Нельзя следовательно вести доказательства, переходя из одного рода в другой, как, например, нельзя геометрическое положение доказать при помощи арифметики"[10]. Т.е. мысль Аристотеля такова, что хотя и возможно получить с помощью, например, арифметики некоторое геометрическое знание, но оно, однако, будет касаться внешних сторон геометрического бытия, не будет говорить о том, что этому бытию присуще само по себе, будет существенно обусловленным точкой зрения, не будет, следовательно, необходимым, т.е. не будет научным знанием в аристотелевском смысле слова. Это требование приводит к резкому разграничению областей наук, а внутри самых наук – к тщательной дифференциации различных понятий. Даже платоновская диалектика берет взаимную причастность одних понятий другим в особом "статичном" смысле, существенно отличном от диалектических построений Нового времени (имевших свою кульминацию в диалектике Гегеля). Кассирер, характеризуя эту черту античной мысли, подчеркивал определяющую

[9] Там же. P. XXIV.

[10] *Аристотель*. Вторая аналитика. 75а, 25–40.

роль категории тождества. "Бытие понятия означает здесь... его тождественную определенность, которая в качестве необходимой предпосылки имеет абсолютную неизменность. Понятия стоят неподвижно и несвязанно одно около другого; т.к. различие понимается, как противоположность, то переход понятия в какое-либо другое расценивается, как противоречие"[11].

Новое время ориентируется на принципиально иную логическую парадигму. Наука стремится связать свои понятия в непрерывную цепь, подчиненную некоторым общим принципам. Все особенное должно выступить в качестве экземпляра общего. Всякое особенное должно занять место члена некоторого общего логического ряда. Только построение этого общего ряда возведет отдельную дисциплину в ранг науки, в ранг необходимого и полного знания, а не просто собрания случайных и разрозненных фактов. Так старается построить свою универсальную науку Декарт. На такой же идеал ориентируется в своих титанических замыслах Лейбниц. Конкретные дисциплины в XVII в. дают яркие примеры преодоления тех логических перегородок, которые были обусловлены старой (антично-средневековой) логической парадигмой. В математике таким примером является, прежде всего, создание аналитической геометрии, прямо противоречащей вышеприведенному рецепту Аристотеля. В физике это коперниканский переворот, приведший к разрушению "лунной грани" – к объединению физики земной и небесной; это также галилеевское сближение естественных и насильственных движений, тщательно различавшихся физикой Аристотеля.

Именно в этом плане проективная геометрия Дезарга оказывается характерным детищем своего времени. Отдельные кривые второго порядка объединяются в этой новой геометрии в общий род независимо от их конечности или связности. Это означает, что свойства этих различных кривых трактуются как тождественные. Дезарг осознает это как фундаментальный научный принцип. Когда Мерсенн просит Дезарга в одном из писем дать свою оценку спору между Декартом и Ферма о способе проведения касательной, то Дезарг, дипломатично уклонившись от принятия чьей-нибудь стороны, пользуется случаем, чтобы выразить собственную позицию."... Если метод общий, – пишет Дезарг, – то те же самые слова, выражающие тождественные свойства, должны подходить и объяснять каждый вид конического сечения. Итак, те же самые слова этого рассуждения означают истинную вещь как в случае гиперболы или эллипса, так и в случае параболы, но рассуждение не будет тогда основано на частном свойстве природы гиперболы или эллипса"[12] ... Но как можно обеспечить те же самые слова в рассуждении, если, например, у эллипса два фокуса, а у параболы – один. Согласно унифицирующей методологии Дезарга, нужно и у параболы найти второй фокус. Но им не может быть никакая конечная точка плоскости! Значит, второй фокус параболы должен лежать " на бесконечности". Так, с особого рода необходимостью,

[11] *Cassirer E...* S. 220–221.

[12] Письмо Дезарга к Мерсенну от 4 апреля 1638 г // L'Oeuvre mathématique de Desargues... P. 82.

унифицирующая методология Дезарга приводит к введению бесконечно удаленных точек (и прямых). Хотя вопрос о статусе этих последних остается открытым, регулятивное, направляющее значение принципа непрерывности оказывается так значительно, что наука, опираясь на этот принцип, принимает в себя элементы, про которые она сама в конце концов, не знает, что они суть. Как это возможно? Это происходит именно потому, что изменился сам идеал знания. Ориентация на единообразное, методическое выведение отдельных объектов и их свойств из некоторой конструкции, путем непрерывного изменения параметров, оказывается решающей тенденцией. Очевидные различия в получаемых фигурах объявляются лишь эпифеноменами, которые должны быть редуцированы к под-лежащему тождеству. Как это делается в проективной геометрии, конкретно мы увидим ниже. Сейчас же нам важно подчеркнуть (и оценить) общую логическую ситуацию. Кассирер, характеризуя эту тенденцию, справедливо пишет: "Переведенное на всеобщий, логический язык это означает, что бытие понятий должно быть охарактеризовано не с точки зрения их постоянных признаков, а согласно тому методическому движению (Verfahren), в результате которого они возникают"[13]. Наука должна явить рациональное единство своего предмета. В этом смысле бесконечно малые и бесконечно-большие величины математического анализа, бесконечно удаленные точки и прямые проективной геометрии суть просто граничные понятия, на которые переносятся свойства до-граничных объектов. И оправдывается это применением принципа непрерывности. Принцип непрерывности служит направляющим принципом, теми логическими "лесами", с помощью которых конструируется новая область объектов. Эти объекты недостижимы (непостижимы), вообще говоря, обычными средствами, применимыми в старой (финитной) области. Они являются предельными, граничными объектами этой области. Принцип непрерывности требует подчинения и этих объектов обычной допредельной логике. Так, касательная оказывается секущей, проходящей через две точки на бесконечно малом расстоянии одна от другой. А параллельные прямые считаются пересекающимися в бесконечно удаленной точке. Принцип непрерывности обеспечивает экспансию обычных логических норм на область граничного, бесконечного. Как относиться к этому?

Кассирер в вышеупомянутой книге считает эту характерную логическую особенность новоевропейского познания определяющей, фундаментальной для познания вообще. "Восстановление общности, – пишет он, – с по-видимости "исключительным" является... не ограничением, а необходимым условием для строгости и точности построения понятий"[14]. С этим можно, вообще говоря, согласиться. Но дело в том, что "восстановление общности" осуществляется в рассматриваемом нами случае специальным образом, через принцип непрерывности. А этот логический принцип далеко необязателен. Мы уже приводили выше критику прин-

[13] *Cassirer E.* Op. cit. S. 229.

[14] Op. cit. S. 232–233.

ципа непрерывности, данную Коши в отзыве на трактат Понселе по проективной геометрии[15]. Да и в XVII в. соображения, обусловленные принципом непрерывности, также не всегда принимались как очевидные (например, Декартом). Способ установления *единства* понятий – или специальной области, или общелогических категорий вообще – представляет собой фундаментальную философскую проблему. То решение, которое было предложено диалектической традицией, идущей от Николая из Кузы к Гегелю и которое оказало существенное влияние на научные дисциплины XVII в., отнюдь не является обязательным, – как считает это Кассирер, – не является и единственно возможным. Принятие этого специального решения есть определенный историко-философский (и историко-культурный) *выбор*. Как всякий выбор он есть определенное самоограничение. Говоря конкретней, выбирая принцип непрерывности в качестве направляющего конструктивного принципа, наука *желает* видеть себя определенным образом сконструированной. Смысл этого желания лежит уже в более широкой мировоззренческой сфере, в аксиологии, характерной для данной эпохи. В главе "Дифференциальное исчисление Лейбница" мы уже обсуждали этот более широкий, философский смысл принципа непрерывности[16]. Здесь достаточно только добавить, что дальнейшее развитие науки – и, прежде всего, математики, – убедительно показало как силу принципа непрерывности, так и его специфическую ограниченность, партикулярность.

§ 2. БЕСКОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ: ДЕЗАРГ, КЕПЛЕР, ДЕКАРТ, АРИСТОТЕЛЬ

Принцип непрерывности являлся главным логическим основанием для введения бесконечно удаленных точек. Однако, помимо этого принципиального момента интересно также разобрать и некоторые исторические особенности, связанные с этим введением. Нужно заметить, что античная геометрия, – прежде всего, "Начала" Евклида, – рассматривала, обычно, прямые и плоскости в качестве *конечных*, – хотя и сколь угодно больших, – геометрических объектов. Дезарг делает здесь решительный шаг. Для нужд проективной геометрии ему необходимо рассматривать прямые и плоскости целиком, как актуально бесконечные. В своем "Черновом наброске" Дезарг не философствует очень уж много. Однако, отголоски дискуссий, которые он вел со своими современниками (в частности, в кружке Мерсенна), можно расслышать. Рассмотрение прямых, как конечных отрезков, было в античной геометрии прямо связано с требованиями аристотелевской логики и метафизики. Аристотель признавал бесконечность только как потенциальную. Бесконечное сближалось здесь с неоформленным, со становлением. Актуальная бесконечность выступала тем самым, как contradictio in adjecto, как самопротиворечивое понятие. XVII век еще слишком связан со средне-

[15]См. гл. II, § 3. С. 16.

[16]См. гл. II, § 3.

параболы известно. Желая дать унифицированную конструкцию, Кеплер пытается чисто математически связать свойства конических сечений. И тут, соотношение физики и математики странным образом изменяется. "Тот факт, что непрерывное изменение от одного состояния к другому, по всей вероятности, является свойством природы (natural world), может объяснить, почему Кеплер попытался дать подобную интерпретацию свойств коник"[20], – пишет Филд. Другими словами, интуиция непрерывного перехода одного объекта в другой идет от опыта с материальными вещами. Она переносится на математические объекты, и здесь приводит к введению новых понятий – бесконечно удаленных объектов ("слепой фокус"). Именно в этом пункте Кеплеровские размышления близки Дезаргу. Последний также, как мы видели, апеллирует для обоснования актуально бесконечных прямых к воображению. Должно, однако заметить, что называть эту установку познания платонизмом можно только в условном смысле. Кеплер ищет математического объяснения естественных феноменов, но в саму математику он вводит новые элементы, обусловленные чувственным опытом. Это уже не та математика, на которую ориентировала свою эпистему античная платоновски-пифагорейская традиция. В кеплеровских построениях уже зарождается математика Нового времени, дерзко нарушающая многие предписания античной науки. Эта новая математика более приспособлена для описания чувственного мира, она как бы ближе "прилегает" к нему, благодаря введению новых понятий и процедур (прежде всего – предельного перехода). Кеплер не был одинок в своем "испорченном платонизме". Другой знаменитый представитель науки XVII в. – Галилей – дал в своих диалогах ярчайшие и поучительнейшие образцы того, как из отвлеченных, порой чисто философских, спекулятивных рассуждений рождаются одновременно и новый образ физики, и новая математика[21].

Дезарг вводит бесконечно удаленную точку в своем "Черновом наброске" двояко. Один способ связан с уже обсуждавшейся нами интерпретацией параллельных прямых, как пересекающихся, а именно в бесконечно удаленной точке. "Чтобы выразить, – пишет Дезарг, – особенность положения нескольких прямых, при котором они параллельны между собой, здесь (в работе "Черновой набросок" – *В.К.*) часто говорится, что все эти прямые принадлежат к одному порядку (ordonance), цель (but) которого находится на бесконечном расстоянии на каждой из них с одной и с другой стороны"[22]. Чтобы понять это определение, нужно иметь в виду, что прямые, проходящие через одну и ту же точку, Дезарг называет принадлежащими к одному *порядку*, а точка из пересечения называется *целью* этого порядка[23]. В случае же параллельных прямых цель порядка

[20] Ibid. P. 452.

[21] О "платонизме" Галилея см.: *Гайденко П.П.* Эволюция понятия науки (XVII–XVIII вв.), М. 1987, гл. II; *Катасонов В.Н.* О "платонизме" Галилея // Исследования по истории физики и механики, М., 1986.

[22] L'Oeuvre mathématique de Desagues... P. 100.

[23] Работа Дезарга отличается введением множества новых и отнюдь не облегчающих чтение терминов, что было одной из причин, помешавших широкому усвоению идей проективной геометрии в XVII в.

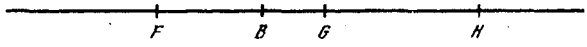

Рис. 7

мыслится как бесконечно удаленная точка. И случай пересекающихся прямых, и случай прямых параллельных рассматриваются Дезаргом, как один род, в единой терминологии.

Второй способ связан с удалением некоторых точек "на бесконечность". Так, про четыре точки на прямой B, H, G, F говорят, что они находятся *в инволюции*, если выполняется равенство;

$$\frac{BF \cdot HG}{BG \cdot HF} = 1 \qquad (1)$$

Потом Дезарг рассматривает случай, когда одна из точек, например H, уходит в бесконечность. В этом случае применение данного соотношения Дезарг считает "непостижимым", но правильным (буквально, Дезарг пишет "Ce qui est incompréhensible..."[24]. На сегодняшнем языке мы можем сказать, что при стремлении точки H в бесконечность отношение $\frac{HG}{HF}$ стремится к 1. И все соотношение (1) переходит (в пределе) в:

$$\frac{BF}{BG} = 1 \qquad (2)$$

что означает, что B – середина отрезка *FG*. Именно, так и понимает Дезарг четыре точки в инволюции, когда одна из них находится в бесконечности. Это типичная ситуация рассуждения "понепрерывности". Именно об этом Понселе писал позже в предисловии к своему трактату: "Некоторые объекты в результате изменений, происходящих в системе могут значительно изменить положение, другие могут удалиться в бесконечность или сблизиться на бесконечно малое расстояние и т.д., – общие отношения испытают тогда некоторые модификации, оставаясь все равно верными для системы"[25].

Принцип непрерывности игнорирует различие между конечными и бесконечными элементами. Бесконечными, как в смысле бесконечно больших (бесконечно далеких), так и в смысле бесконечно малых. Примером последнего служит у Дезарга рассмотрение касательной, как частного случая секущей, у которой две точки пересечения с кривой совпадают. Впрочем, этот вариант применения соображений непрерывности довольно распространен в XVII в. Эта идея вела к созданию дифференциального исчисления. Характерной особенностью Дезарга было именно введение бесконечно удаленной точки, как равноправной с обычными. Именно это позволяет ему рассматривать конус и цилиндр, как принадлежащие к одному роду, а параллельные прямые, как пересекающиеся в бесконечно удаленной точке. Это новшество далеко не всеми большими математиками XVII в. было воспринято, как удачная

[24] L'Oeuvre mathématique de Desargues... P. 120.

[25] Poncelet J.-V. Op. cit. P. XXIV.

находка. Ферма высоко оценивал работы Дезарга. Молодой Б. Паскаль был восхищен, и это восхищение не осталось бесплодным: он написал целый трактат по коникам, основанный на методах Дезарга. Однако, Декарт, с его удивительно чуткой интуицией конечного, относился к изобретению Дезарга довольно снисходительно. Конечно, Декарт испытывал слишком большой пиетет к своей собственной интерпретации геометрии. Эту причину историки приводят обычно в качестве главной, объясняющей почему Декарт не поддержал Дезарга[26]. Но мы думаем, что в несколько иронических словах Декарта в письме к Дезаргу можно услышать и более содержательные мотивы. "Что же касается способа рассматривать параллельные линии, как сходящиеся в точке на бесконечном расстоянии, для того чтобы включить их в общий род с прямыми, пересекающимися в конечной точке, то он, конечно, хорош, при условии, что вы используете его, что, как я убедился, вы и делаете, – чтобы объяснить то, что неясно в одном из этих видов через другой, в котором это более понятно, а не наоборот"[27]. Нам слышится в этих словах намек на более серьезные *логические* обстоятельства. Декарт как бы соглашается: да, бесконечно удаленную точку можно ввести, как facon de parler, как фигуральное выражение, означающее всего навсего, что прямые, пересекающиеся в этой точке, параллельны. Однако, использовать это понятие само по себе, т.е. в *положительном* смысле недопустимо. Потому что само по себе оно непонятно и ничего не означает. Декарт чутко уловил в труде Дезарга опасную тенденцию: под видом фигуральных выражений ввести новые объекты – что существенно, связанные с актуальной бесконечностью, – логический статус которых оставался непонятным. Математические построения в терминах этих новых интеллектуальных "вещей в себе" означали бы "объяснение через неясное". Именно против этого и выступает Декарт. Для воспитанного на Аристотеле выпускнике иезуитской школы такой подход к геометрии был, конечно, "соблазном".

Чтобы оценить меру этого "соблазна" полезно вспомнить некоторые положения Аристотеля. Прежде всего в отношении к бесконечности. Бесконечное понимается Аристотелем существенно, как становящееся. "...Бесконечное существует таким образом, что всегда берется иное и иное, а взятое всегда бывает конечным, но всегда разным и разным. Так, что бесконечное не следует брать как определенный предмет, например, как человека или дом, а в том смысле, как говорится о дне или состязании, бытие которых не есть какая-либо сущность, а всегда находится в возникновении и уничтожении, и хотя оно конечно, но всегда разное и разное"[28]. Бесконечное, как "день или состязание", т.е. бесконечное есть нечто изменяющееся, не вещь, а процесс. В этом смысле актуально бесконечное представляет собой contradictio in adjecto: процесс, как таковой, изменение, становление по самому своему опреде-

---

[26] Например, см.: *Цейтен Г.Г.* История математики в XVI и XVII веках. М.; Л., 1933. С. 187–188.

[27] Lettre de Deccartes à Desargues (19 juin 1639), P. 186. In: L'Oeuvre mathématique de Desargues... P. 185–186.

[28] *Аристотель*, Физика 206а, 27–206в. Изд. 4. М.: КомКнига/URSS, 2010.

лению не может быть законченным, данным актуально. В математике Аристотель рассматривает два типа бесконечности, собственно арифметическую и геометрическую. Первая есть бесконечность количества, т.е. дискретного множества. Число элементов каждого такого множества ограничено снизу – единицей, но не ограничено сверху. "А в направлении к большему мысленно можно всегда идти (дальше и дальше) ...Таким образом, бесконечное здесь в возможности существует, в действительности же нет, и взятое (число) всегда превосходит всякое определенное множество"[29]. Геометрическая же бесконечность есть бесконечность непрерывной величины. Непрерывная величина не может, по Аристотелю, быть бесконечно большой, т.к. конечна сама Вселенная. Однако, непрерывная величина допускает бесконечную делимость. Но также только потенциально. Что все это значит в отношении математики? "Наше рассуждение, отрицающее актуальность бесконечного в отношении увеличения, как не проходимого до конца, не отнимает у математиков их исследования; ведь они теперь не нуждаются в таком бесконечном и не пользуются им: (математикам) надо только, чтобы ограниченная линия была такой величины, как им желательно, а в том же отношении, в каком делится самая большая величина, можно разделить какую угодно другую. Таким образом, для доказательств бесконечное не принесет им никакой пользы, а бытие будет найдено в (реально) существующих величинах"[30]. Существующие величины, значит, величины данные актуально. Математика, по Аристотелю, имеет дело с актуально данными конечными величинами. Бесконечное, как потенциальность и неоформленность, не должна входить в математику, она "не принесет никакой пользы". Вспомним для сравнения еще раз этот, уже приводившийся, пассаж из заключительной части дезарговского "Чернового наброска": "В геометрии о величинах не рассуждают таким образом, что они существуют или эффективно, актуально, или только в возможности..."[31]. В дезарговой математике потенциальное и актуальное бытие уравниваются в своем гносеологическом достоинстве. Поэтому возможны – и действительны, т.е. полученное знание необходимо и достоверно, – в геометрии Дезарга актуально бесконечные прямые, плоскости и бесконечно удаленные точки и прямые. В этом пункте, как видим, между математикой античности и Нового времени существует разрыв, принципиальная разница логических установок. Математика Нового времени оказывается *качественно* иной.

Любопытна последняя глава третьей книги "Физики", в которой Аристотель разбирает вопрос "почему бесконечное кажется существующим". Мы читаем здесь "Доверять же мышлению в вопросе о бесконечном нелепо, так как избыток и недостаток (в данном случае) имеются не в предмете, а в мышлении. Ведь каждого из нас можно мысленно представить во много раз больше, чем он есть, увеличивая его до бесконечности,

---

[29] *Аристотель*. Физика 207в, 10–14.

[30] *Аристотель*. Физика 207в, 26–35.

[31] L'Oeuvre mathématique de Desargues... P. 179.

однако не потому находится кто-то за городом или имеет какую-то величину, что так мыслит кто-то, а потому, что так есть (на самом деле); а то, (что кто-то так мыслит), будет для него случайным обстоятельством"[32]. Наука – и математика, прежде всего – Аристотеля нацелены на бытие. Не может быть науки о воображаемом; точнее, это знание не достойно названия науки. Познание чисто воображаемого открывает нам лишь "случайные обстоятельства" бытия. Истинное познание имеет онтологическое достоинство. В такой эпистеме невозможна та предпосылка, из которой исходит Дезарг: неразличимость в геометрии актуального и потенциального бытия. Геометрия должна быть наукой об актуально сущем[33]. И, следовательно, не должна содержать знания о потенциально бесконечном. Тем и характерна философская предпосылка, складывающаяся в математике Нового времени, что вопрос о реальности математических объектов постепенно снимается. Бытие для математической теории все более и более приобретает психологический и формальный характер: быть представимым, быть непротиворечивым. Поэтому и становятся возможными те конструкции с актуально бесконечными объектами, которые с точки зрения античной математики выглядят явно сомнительными. "Ведь каждого из нас можно мысленно представить во много раз больше, чем он есть, увеличивая его до бесконечности..."

§ 3. ПРОЕКЦИЯ

Как же конкретно объединяются конические сечения в один род? Главным здесь у Дезарга (и его учеников) была идея *проекции*. Мы рассматриваем исходно конус, в основании которого лежит окружность. Коники получаются как сечения поверхности конуса различными плоскостями. Дезарг начинает первый рассматривать конические сечения, как *проекции* окружности, лежащей в основании, на плоскости сечения, – проекции с центром в вершине конуса. Проектирующие прямые, – проходящие через вершину конуса, – суть как раз образующие конуса (на рис. 8 для простоты изображены только два сечения – эллипс и парабола). Аналогично, и сечения цилиндра, т.е. конуса с бесконечно удаленной вершиной, – представляют собой, с этой точки зрения, проекции основания цилиндра на плоскости сечения. Однако, т.к. центр проекции оказывается здесь "на бесконечности", то проекция будет уже не центральной, а обычной, параллельным пучком лучей. Этой же идее Дезарга следует и Паскаль в своем "Generatio conisectionum": "Следовательно, понятно, что если глаз находится в вершине конуса и то, что рассматривают, есть окружность круга, лежащего в основании конуса, и если экран (tableau) есть плоскость, пересекающая поверхность конуса, тогда коническое сечение, порожденное этой самой плоскостью на поверхности

---

[32] Аристотель. Физика, 208а, 17–25.

[33] Со всеми оговорками, конечно, которые должно сделать по поводу статуса геометрического объекта Аристотеля. См., например: *Becker O.* Mathematische Existenz. Halle, 1927. S. 243–264.

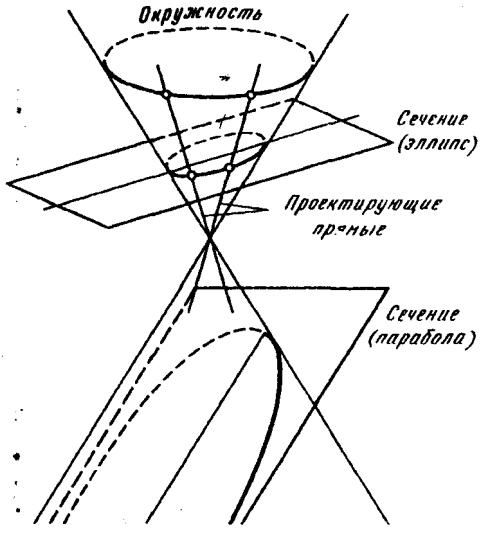

Рис. 8

конуса, будь оно точкой, прямой, углом, эллипсом, параболой или гиперболой, будет образом окружности круга"[34]. Нетрудно увидеть, что при таком подходе не только, например, гипербола есть проекция окружности, но, и наоборот, окружность, – как и все остальные коники, – есть проекция гиперболы (или любой другой коники).

Идея Дезарга состояла в следующем. Если конические сечения суть все только проекции одного самого простого – окружности, то нельзя ли,зная свойства окружности, получить и свойства других конических сечений? Другими словами, не переносятся ли при проекции свойства с прообраза на образ? Дезарг нашел такие свойства – которые мы называем сейчас проективными инвариантами – и положил их в основание своей теории. Если эти свойства сохраняются при проектировании, то доказательство справедливости их можно провести только для какой-то одной коники, для остальных же они будут верны в силу инвариантности. Последнее и было решающим шагом, по сравнению с геометрией античности. Совремменники упрекали Дезарга в том, что он своими конструкциями дал, собственно, мало нового для теории конических сечений по

[34] *Pascal B.* Oeuvres complétes... P. 40. Поясним, что точка получается в сечении, когда плоскость имеет с конусом только одну общую точку – вершину конуса; прямая – когда плоскость касается конуса по образующей; угол – когда плоскость проходит через вершину конуса и пересекает внутренность конуса; эллипс – когда плоскость пересекает только одну половину целого (двойного) конуса и не параллельная ни одной образующей; парабола – если в последнем случае снять ограничения на параллельность; гипербола – если плоскость пересекает обе половины конуса и не проходит через его вершину. Этими вариантами исчерпываются все возможные случаи пересечения (проекции).

сравнению с Аполлонием. Однако, та унифицирующая точка зрения, которая столь сознательно проводилась Дезаргом в его "Черновом наброске", позволяла давать одно доказательство сразу для всех типов коник. Этот подход, по Дезаргу, выявлял *природу* этих свойств (и самих кривых): "Самые замечательные свойства сечений пучка (rouleau) общи всем видам (сечений) и названия эллипс, парабола, гипербола были им даны по причинам внешним для них и для их природы"[35]. В этих словах непосредственно отражается характер тех революционных новаций, которые вводит в геометрию Дезарг. Дело не просто в том, что оспариваются старые названия для кривых. Эти греческие названия были существенно связаны с *методом площадей*[36], в терминах которого изучал коники Аполлоний. Дезарг, оспаривая справедливость этих названий, утверждает, что и сам метод Аполлония неадекватен *природе*, изучаемых кривых. Метод Аполлония является *внешним* по отношению к этой природе. Как сказал бы Аристотель, этот метод изучает не существенные, а лишь *привходящие* свойства кривых. Речь идет не просто о критике названий, а о самой сущности изучаемого объекта. Эта сущность, по Дезаргу, открывается именно через новый метод проекций.

Выдвижение на первый план метода проекций существенно деформировало тот взгляд на геометрию, который был в античности господствующим. Математики Древней Греции рассматривали проекции и перспективу как некоторые технические приемы, а отнюдь не как какой-то научный метод. Помимо применений в "Оптике" Евклида теория перспективы имела малое распространение в науке античности. Более того. Проекция (или тень) в общенаучном, общефилософском плане является для античности скорее символом неадекватного, поверхностного познания. Может быть, наиболее яркий пример этого рода – миф о пещере в "Государстве" Платона[37]. Обыденный опыт, чувственное познание уподобляются Платоном рассматриванию теней на стене пещеры от проносимых за спиной предметов. Восхождение к истинному знанию, к самим предметам, т.е. к умопостигаемому миру идей Платона, – есть, прежде всего, отказ от рассматривания теней (проекций), есть поворот головы к выходу из пещеры, к свету. "Начинать надо с самого легкого, – пишет Платон, – сперва смотреть на тени, затем – на отражения в воде людей и различных предметов, а уж потом – на самые вещи..."[38]. Эпистемология этого рода иерархична. Нельзя по теням (по проекциям) познать саму вещь (идею). Для существенного познания должно изменить точку зрения, обратившись от теней к их прообразам. Тень, проекция, образ в платоновском ряду понятий и символов в принципе менее существенна, менее бытийственна, и, следовательно, менее истинна, менее информативна.

---

[35] L'Oeuvre mathématique de Desargues... P. 138, примечание.

[36] См., например: *Варден Б.Л. ван дер.* Пробуждающаяся наука. М., 1959. С. 336–339. Изд. 4. М.: КомКнига/URSS, 2010.

[37] *Платон,* Государство, 514–517.

[38] Там же, 516а–в.

Мышление же Дезарга определяется иной установкой. Коническое сечение рассматривается не само по себе, а как образ (проекция) другого. Причем, мы уже отмечали, это другое сечение можно также рассматривать, как проекцию первого. Каждая кривая становится лишь образом другой. Изучается, собственно, не отдельный объект (отдельная кривая), а разом целый класс кривых, переводимых друг в друга проекциями. Изучаются не специальные свойства эллипса, параболы или гиперболы, а сразу свойства всех конических сечений, инвариантные относительно проекций. Отдельная кривая как бы исчезает. В ней важным оказывается только то, что делает ее членом некоторого ряда. Математический объект, так сказать, десубстанциализуется. Если Аристотель, обсуждая статус бесконечности в математике, еще беспокоится о том, чтобы математические выводы как-то соответствовали свойствам реального физического мира (вспомним: "Доверять же мышлению в вопросе о бесконечном нелепо"...), то у Дезарга мы видим сознательное выдвижение радикально иного принципа. Математика свободна от связи с миром материальным не только по предмету (в воображении все возможно!), но и по методу: математике не интересен вот этот индивидуальный объект, вот эта кривая, ей важно вписать этот объект в некоторый общий ряд объектов, т.е. увидеть в этом индивидуальном объекте отражение общих свойств, общей структуры. Конкретно это осуществляется через разнообразные преобразования геометрического объекта, через его проекции, в которых должна быть найдена такая *репрезентация* объекта, что инвариантные свойства выступят более или менее очевидным образом.

Эта десубстанциализация геометрического образа аналогична процедуре построения физического объекта, как она складывается в науке XVII в. В диалогах Галилея, может быть, в особенности ярко выступила эта черта новой физики. Ученый естествоиспытатель ищет не просто опыта, – как пассивного наблюдения, в котором бы проявились естественные характеристики изучаемой вещи, а ставит специально задуманный эксперимент, в котором вещь выдала бы свою физическую сущность. А.В. Ахутин в своей книге, посвященной истории эксперимента, пишет об этом: "...Он (экспериментатор) начинает это познание с того, что разрушает по меньшей мере естественную связь вещей (рассматривает движение тела, отвлекаясь от его формы или же от взаимодействия с окружающей средой), а затем и саму вещь как таковую. Он ставит свой эксперимент в "искусственных" условиях. А это не значит ли, что он как раз лишает себя возможности узнать вещь в ее природе, в ее естественном состоянии (вспомним античное понимание теоретического созерцания)? Но экспериментатор-теоретик смотрит на природу своими математическими глазами и находит, что именно "естественное" состояние вещи скрывает ее истинную природу, ее всеобщую субстанцию. Он должен разрушить и идеализировать ее непосредственную "натуру", чтобы в форме теоретически-всеобщего и необходимого знания открыть ее истинную, безусловную и объективную суть"[39]. Это ис-пытание, ис-следование

[39] *Ахутин А.В.* История принципов физического эксперимента (от античности до XVII в.) М., 1976. С. 229.

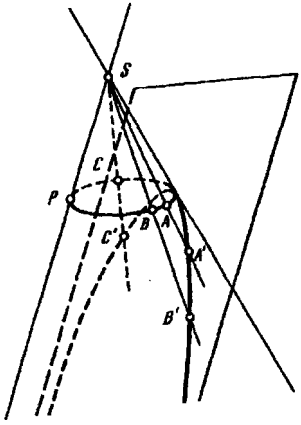

Рис. 9. **При проектировании из вершины конуса S образами точек окружности A, B, C... служат точки параболы A', B', C'... Образом же точки P будет бесконечноудаленная точка параболы.**

вещи в специально придуманных экспериментальных условиях есть своеобразное "проектирование" исходной вещи на "плоскость" экспериментальной ситуации. И обратно. Геометрическое проектирование кривых (в методе Дезарга), с целью найти ту проекцию, для которой справедливость инвариантных свойств будет более или менее очевидной, есть аналог экспериментальной ситуации, в которой вещь являет свою физическую сущность. Аналогия эта неслучайна. Здесь выступает для нас та общая эвристическая база, которая лежит в основании новоевропейской как физики, так и математики, то единство логических установок, которое обеспечило эффективное построение *математической физики.*

Разрушение непосредственной природы, "натуры" вещи, о котором говорит Ахутин, имеет в проективной геометрии Дезарга также свою аналогию. Преобразование вещи есть здесь проектирование кривой. Но дело в том, что при проектировании не все точки прообраза находят себе образ. При проектировании окружности, лежащей в основании конуса, в параболу, т.е. на плоскость, параллельную образующей конуса, – образ одной из точек "уходит в бесконечность" (см. *рис. 9*). В случае же гиперболы, две точки окружности переходят в две (различные) бесконечно удаленные точки. Окружность в этом смысле эквивалентна параболе только с включением в последнюю бесконечно удаленной точки (а гиперболе – с включением двух бесконечно удаленных точек). При проектировании приосходит разрушение исходного образа кривой: ограниченная кривая – окружность – переходит в неограниченную – параболу, гиперболу. Именно такого рода преобразования, связанные с *введением бесконечно удаленных элементов, составляют сердцевину* метода Дезарга. Именно это уравнивание конечного и бесконечного – равноправное рассмотрение конечных и бесконечноудаленных точек – позволяет объединить все кривые второго порядка в один класс. Отдельная кривая как бы исчезает. С точки зрения общей теории становится неважно – конечна она или бесконечна. Каждая индивидуальная кривая выступает лишь как проекция (всех других), лишь как представитель всего класса кривых. Путем введения бесконечно удаленных элементов все становится всем.

Мы сказали, что метод Дезарга выявляет в конических сечениях только те свойства, которые инвариантны относительно проектирования. Что же это за свойства? Нетрудно увидеть, что проектирование не сохра-

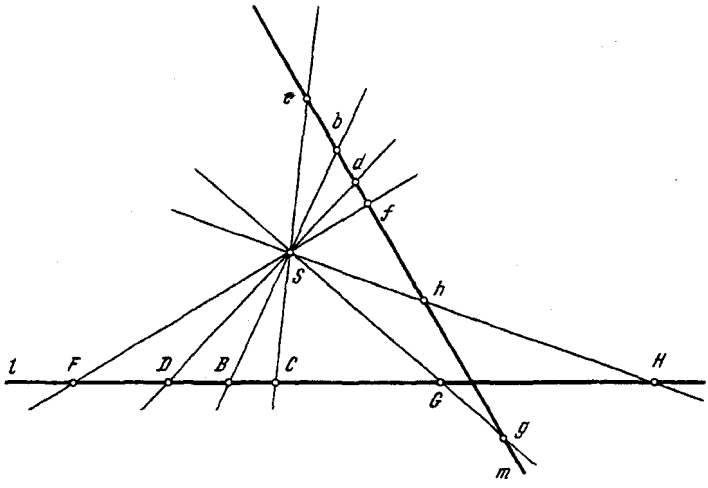

Рис. 10. Точки прямой l—B, H, D, F, C, G находятся в инволюции. Их образы после проектирования с центром в S на прямую m—b, h, d, f, c, g будут иметь другой порядок, но также будут в инволюции.

няет длины и углы. Но точки, лежащие на одной прямой, будут и после проектирования иметь образы, лежащие на одной прямой, пересекающиеся прямые перейдут в пересекающиеся прямые и т.д. Свойства, сохраняющиеся при проектировании, называют *проективными* свойствами. Именно изучению этих свойств посвящена вступительная часть "Чернового наброска" Дезарга. Среди проективных свойств выделяются некоторые главнейшие. Длины не сохраняются при проектировании. Но оказывается, что некоторые специального рода отношения длин оказываются инвариантными относительно проектирования. А именно, Дезарг определяет, что шесть точек *B, H, C, G, D, F* находятся в инволюции, если

$$\frac{GD \cdot GF}{CD \cdot CF} = \frac{GB \cdot GH}{CB \cdot CH}. \qquad (1)$$

Оказывается, что свойство точек быть в инволюции будет проективным (см. *рис. 10*).

При проектировании точек их порядок, вообще говоря, не сохраняется, однако равенство (1) будет справедливо, и для образов[40]. Дезарг развивает в своей книге некоторый объем подобной техники, которая потом применяется им для изучения коник[41].

Инвариантность инволюциии шести точек используется, например,

[40] L'Oeuvre mathématique de Desargues... P. 126—131.

[41] В настоящее время эта техника носит название теории упорядоченных соответствий. См., например: *Глаголев Н.А.* Проективная геометрия. М., 1963, гл. *II*, *§§ 1—3*.

Дезаргом при доказательстве знаменитой *теоремы Дезарга об инволюции*. Приведем ее формулировку:

Пусть B, C, D, E – вершины четырехсторонника[42], *пары противоположных сторон которого BC и ED пересекаются в точке N, BE и CD – в точке F, и BD и CE – в точке R. Тогда эти пары прямых пересекают любую другую прямую l в шести точках, находящихся в инволюции. Более того, любая коника, проходящая через B, C, D и E, и любые две пары сторон четырехсторонника также пересекают прямую l в шести точках, находящихся в инволюции.*

При доказательстве второй части теоремы, где речь идет о произвольной конике, Дезарг доказывает это положение сначала для простейшей коники – для окружности. Любую конику можно представить как некоторое коническое сечение конуса. Центральной проекцией, с центром в вершине конуса, произвольная коника проектируется на другую плоскость, где она превращается в окружность. Но для окружности теорема уже доказана, и она формулируется в терминах инволюции. А проекция сохраняет инволюцию, – значит, теорема будет верна и для любой коники[43]. Дезарг справедливо замечает в конце доказательства: "Это доказательство, само собой разумеется, применимо и во множестве других случаев, и оно показывает, что каждая важная прямая линия и точка возникает аналогичным образом для каждого сечения пучка[44], и редко случается, что какая-нибудь линия общего положения на обычной плоскости сечения имела бы выделенное свойство по отношению к этому сечению без того, чтобы линия, соответствующая ей на плоскости другого сечения пучка, имела бы также свое положение и свойства, получающиеся аналогичной конструкцией..."[45]. Здесь реализуется та программа, которую мы обсуждали выше: проективно-инвариантные свойства доказываются на примере одной кривой для всего класса кривых сразу.

Б. Паскаль, блистательный ученик Дезарга, один из немногих, кто до конца понял и оценил в XVII в. глубину нового подхода к геометрии, написал в 16 лет трактат о конических сечениях, от которого мы имеем сегодня (благодаря Лейбницу) небольшой фрагмент. В нем и в небольшой работе "Опыт о конических сечениях" Паскаль формулирует свою знаменитую теорему о шестиграннике ("мистический шестигранник", как называл ее сам Паскаль). Теорема звучит следующим образом:

Во всяком шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой

Метод доказательства, намечаемый Паскалем, полностью следует идее Дезарга. Теорема сначала доказывается для окружности, а потом с помощью проекции переносится в любое коническое сечение. Теорема

---

[42]В проективной геометрии под полным четырехсторонником понимают не просто четырехугольник, но четырехугольник вместе с двумя его диагоналями. Причем, исходный четырехугольник необязательно выпуклый.

[43]L'Oeuvre mathématique de Desargues... P. 143.

[44]Т.е. конуса. Напомним, что Дезарг использует для конуса французское слово *le rouleau*.

[45]Op. cit. P. 147.

имела принципиальное значение. Уже сам Паскаль указывал, что с ее помощью можно доказать все факты, касающиеся диаметров и касательных коник, дать построение конических сечений по заданным точкам и т.д. Дезарг утверждал, что предложение Паскаля содержит в себе четыре первые книги Аполлония[46].

* * *

Логическим основанием метода проекций являлась лейбницевская идея "выражения" ("репрезентации"). С большей или меньшей степенью осознанности эта идея являлась путеводной звездой всех пионеров проективной геометрии. Образ несет некоторую информацию о прообразе. Более того: некоторые специальные типы образов могут лучше выявить отдельные свойства прообраза. Нужно только специально изучить, какие свойства сохраняют рассматриваемые нами преобразования фигур – проекции. Тем самым систематическое изучение преобразований фигур и их инвариантов в проективной геометрии открывало дорогу к Эрлагенской программе Ф. Клейна (1872).

Построение Дезаргом системы проективной геометрии имело и важное философски-мировоззренческое значение. Лейбниц не случайно демонстрировал свое понимание гносеологических возможностей монады на модели проективного соответствия между конечной кривой – эллипсом – и бесконечной – гиперболой. (см. заключение главы "Дифференциальное исчисление"). Проективная геометрия выступлала как один из способов имманентизации новоевропейской мыслю актуальной бесконечности. В этом смысле она являлась математическим выражением пантеистических тенденций в философии XV–XVII в.: у Николая из Кузы, Дж. Бруно, Лейбница.

---

[46]Паскаль полностью овладел методом Дезарга. С удивительной для его времени свободной рассматривает он бесконечно удаленные точки плоскости равноправно с обычными. Так, интерпретируя гиперболу как специальную проекцию окружности, а касательные к гиперболе – как проекции соответственных касательных к окружности, он делает вывод: "Должно заключить отсюда, что асимптоты играют роль касательных на бесконечном расстоянии и должны рассматриваться как таковые" (Generatio conisectionum. P. 42 // *Pascal B.* Oeuvres complétes... P. 38–42).

Глава IV

БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ У НЬЮТОНА

§ 1. БИНОМИНАЛЬНЫЙ РЯД. ОБОБЩЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРАНСФИНИТНЫЕ

Бесконечные ряды были одним из самых эффективных математических изобретений XVII в. Их введение в математику связано в основном с именами Ньютона и Лейбница. Бесконечные ряды представляли собой другой – наряду с дифференциальным исчислением, с идеологией бесконечно малых величин – способ легализации актуальной бесконечности в математике. На примере открытия Ньютоном биноминального ряда интересно проследить логику этого нового подхода.

Ньютон подробно описывает историю открытия биноминального ряда во *втором письме к Ольденбургу*, секретарю Королевского лондонского общества, от 24 октября 1676 г. Это письмо последний переслал Лейбницу. Биноминальным рядом называется следующее разложение:

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

справедливое для всех действительных m и всех $|x|<1$. Ньютон приходит к нему, решая задачу интегрирования. А именно, он ищет площади, заключенные под кривыми вида $(1-x^2)^{\frac{n}{2}}$, для различных натуральных $n = 0, 1, 2, \ldots$[1]

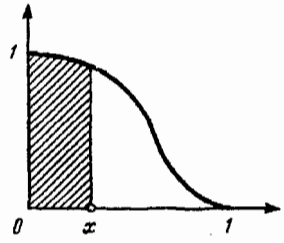

Рис. 11

[1] *Ньютон М.* Математические работы. Пер. с лат., вводная статья и комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского. М-Л., 1937. С. 233.

Эта площадь выражается в сегодняшних обозначениях интегралом:

$$f_n(x) = \int_0^x (1 - t^2)^{\frac{n}{2}} dt$$

Ньютону были известны функции $f_n(x)$ для четных n, т.к. в этом случае подинтегральное выражение представляет собой просто многочлен и задача интегрирования легко решается.

$$f_0(x) = x, f_2(x) = x - \frac{1}{3}x^3, f_4(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5, \ldots$$

Для того, чтобы написать выражения функций и для нечетных n, Ньютон прибегает к приему интерполирования (intercalatione), которым пользовался еще знаменитый математик предыдущего поколения Дж. Валлис[2]. Этот прием есть, по сути, только аналогия, попытка распространить на неизвестные случаи закономерность, осознанную для известных случаев. А именно, Ньютон представляет известные функции специальным образом и выявляет так называемые биноминальные коэффициенты для целых значений показателя степени:

$$f_0(x) = 1 \cdot x$$

$$f_2(x) = 1 \cdot x + 1 \cdot (-\frac{1}{3}x^3)$$

$$f_4(x) = 1 \cdot x + 2 \cdot (-\frac{1}{3}x^3) + 1 \cdot (\frac{1}{5}x^5)$$

$$f_6(x) = 1 \cdot x + 3 \cdot (-\frac{1}{3}x^3) + 3 \cdot (\frac{1}{5}x^3) + 1 \cdot (-\frac{1}{7}x^7)$$ и т.д.

Они представляют собой "цифры степеней 11", как пишет сам Ньютон, т.е. ряды чисел:

1; 1, 1; 1, 2, 1; 1, 3, 3, 1; и т.д.

Для нечетных n разложение $f_n(x)$ ищется в аналогичном виде (но уже как бесконечный ряд):

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} [(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1}].$$

Для определения коэффициентов a_{mn} используются условия, которым эти коэффициенты подчиняются в случае *четных* n (в этом и состоит аналогия)[3]. Другими словами, закон справедливый для четных n *полагается* справедливым и для нечетных n. Затем, дифференцируя полученное раз-

---

[2] См., напр. *Edwards C.H.* The historical development of the Calculus. N.-Y. Berlin, 1979. P. 170–178.

[3] Подробности см.: *Edwards C.H.* Op. cit. P. 180–183.

ложение, Ньютон приходит к биноминальному разложению:

$$(1 - x^2)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} x^{2k},$$

где $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-k+1)}{k!}$.

Ньютон прекрасно понимает, что по логике его построения полученное разложение гипотетично, а не представляет собой некоторый доказанный факт. Поэтому он ищет другие способы подтверждения верности полученного разложения. "В самом деле, – пишет Ньютон, – чтобы проверить эти действия, я умножил на самое себя

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^{16} \text{ и т.д. (т.е. ряд для } (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ – В.К.)}$$

при этом получилось $1 - x^2$, так как все до бесконечности остальные члены при продолжении ряда исчезали. Точно так же дважды помноженный на самого себя ряд

$$1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6 \text{ и т.д. (т.е. ряд для } (1 - x^2)^{\frac{1}{3}} \text{ – В.К.)}$$

давал тоже $1 - x^2$"[4]. Однако, умножение самой на себя бесконечной суммы также проблематично. Ньютон пытается подойти к задаче еще с одной стороны. Для чисел существовал алгоритм Виета извлечения квадратного корня. Нельзя ли этот алгоритм применить к многочленам? Модифицируя процедуру Ньютон формулирует правило "извлечения квадратного корня" из многочлена. "Форма действий при извлечении квадратного корня, – пишет Ньютон[5], – была следующей:

$$1 - x^2 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^{16} \text{ и т.д.}\right)$$

$$\frac{1}{0 - x^2}$$

$$\frac{-x^2 + \frac{1}{4}x^4}{-\frac{1}{4}x^4}$$

[4] *Ньютон И.* Математические работы... С. 235.
[5] Там же. С. 236.

$$-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{64}x^8$$
$$-\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{64}x^8\ldots^6$$

Расширение метода Виета на многочлены дает тот же результат, что и интерполяция в духе Валлиса. Но этого опять недостаточно, чтобы считать разложение доказанным. На пути к этому стоит много логических препятствий (которые будут преодолены только в XIX в.), и самое главное из них – это сам новый математический объект – *бесконечная* сумма, бесконечный ряд. Каков логический статус этого объекта? Допустим ли сам этот объект? Допускает ли он какую-то интерпретацию в терминах привычных конечных объектов? Не есть ли он просто фикция, пустое обозначение, не обозначающее на самом деле ничего (что вполне может статься, если объект, в действительности, самопротиворечив)? На все эти вопросы ни Ньютон, ни кто-либо другой не дали ответов в XVII и XVIII вв. Однако, через изучение свойств этого нового, формально введенного математического понятия росла уверенность в *правдоподобии* получаемых результатов. У Ньютона же совпадение рядов, полученных через интерполяцию и "методом Виета", подтверждают справедливость одного и другого способа разложения разом.

Однако, Ньютон осознает определенную "шкалу достоверности", на которой эти два метода занимают разное положение. "Установив это, – пишет он после разложения методом Виета, – я совершенно отказался от интерполирования рядов и стал употреблять только эти действия, как представляющие более естественную базу"[7].

Итак, принципиальную роль при построении бесконечных рядов играют соображения сходства, аналогии с конечными суммами. Бесконечные ряды должны подчиняться свойствам, аналогичным для случая конечных сумм в силу того, что бесконечный ряд может быть "приближен" конечной суммой – конечным отрезком этого бесконечного ряда. Бесконечные ряды получаются как бы "непрерывным" переходом от конечных сумм и поэтому должны сохранять свойства последних. Мы видели, какую большую роль играл принцип непрерывности (и его производные) в математических построениях Лейбница. Однако, в XVII в. Лейбниц отнюдь не является единственным мыслителем, кто осознает значение этого положения. Принцип непрерывности "носится в воздухе". Почти любой известный ученый в той или иной степени использует это положение. Для нас здесь интересна позиция Джона Локка, отдельные моменты философии которого были прямым выражением и новой математической идеологии.

Локк, аналогично Лейбницу, считает принцип непрерывности удобным эвристическим принципом. "... Мы находим, – пишет он в "Опыте о человеческом разумении", – что во всех частях мира, доступных челове-

[6] Подробности можно найти в книге: *Edwards C.H.* Op. cit. P. 184–185.

[7] *Ньютон И.* Математические работы... С. 236.

ческому наблюдению, существует последовательная связь одного с другим без больших и заметных разрывов во всем великом многообразии вещей, которые так тесно связаны друг с другом, что нелегко обнаружить границы между различными разрядами существ. Поэтому мы имели основание считать, что вещи восходят к совершенству с помощью таких плавных переходов"[8]. На этом основан метод аналогии. От того, что может быть доступно "наблюдению и засвидетельствованию" мы умозаключаем к тому, что недоступно нашим чувствам, не может быть засвидетельствовано. Этот метод, по Локку, дает *вероятное* знание в общем случае, а в частных позволяет открыть новое.

Именно в духе этого метода движется мысль Ньютона в вышеразобранном фрагменте. Отталкиваясь или от опыта действий с конечными алгебраическими выражениями, или от опыта действия с числами, Ньютон оперирует с бесконечными рядами. "Действия производимые над *буквами*, – пишет он бо введении к работе "Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых" (1664–1667), – и действия над обыкновенными *числами* крайне сходны между собой и представляются различными только по тем характеристикам, которыми они выражаются, причем в первом случае характеристики неопределенные и общие, во втором же они определенные и частные. Меня удивляет поэтому, что никто (если только не исключить Николая Меркатора в открытой им квадратуре гиперболы) не направил своего понимания на приложение к буквам принципов недавно открытого учения о десятичных дробях, особенно потому, что при этом открывается путь к более трудным и более важным открытиям"[9]. Недавно открытое учение о десятичных дробях – это техника действий с десятичными дробями, только к концу XVII в. более или менее утвердившаяся в европейской математике. Сюда же относится и эффективный алгоритм извлечения квадратного корня из числа ("алгоритм Виета"), записанного в десятичной системе счисления. Главное здесь для Ньютона то, что десятичная запись позволяет рассматривать бесконечные десятичные дроби, т.е. прежде всего, иррациональные числа – и производить над ними действия. Эту же технику Ньютон переносит и на бесконечные буквенные ряды. "...Это учение о буквенных выражениях находится в таком же отношении к алгебре, как учение об обыкновенных дробях к обыкновенной арифметике. Поэтому тот, кто знаком с десятичной и с буквенной арифметикой и кто учитывает аналогию, существующую между десятичными числами и бесконечно продолжающимися алгебраическими выражениями, сможет тогда легко изучить сложение, вычитание, деление, умножение и извлечение корней. Ибо то, что случается с числами, именно, что, чем дальше они отступают вправо, тем больше убывают в десятичном отношении, то же имеет место и для букв, когда они, как это всего чаще будет в дальнейшем, расположены в бесконечную однородную прогрессию по степеням какого-либо числителя или знаменателя"[10].

---

[8] *Локк Дж.* Соч.: В 3 т. Т. 2. М., 1985. С. 146.

[9] *Ньютон И.* Математические работы... С. 25.

[10] *Ньютон И.* Математические работы... С. 25.

Ньютон как бы предлагает нам здесь следующую пропорцию:

бесконечные алгебраические ряды / конечные алгебраические выражения = бесконечные десятичные дроби / обычная (целочисленная) арифметика

В этом схематическом равенстве есть два направления движения мысли: горизонтальное и вертикальное. Горизонтальное – справа налево – это есть перенесение свойств чисел на буквенные выражения. Это есть алгебраизация – та фундаментальная тенденция в математике XVI–XVII вв., которую мы подробно обсуждаем в главе об аналитической геометрии и алгебре Декарта. Это движение мысли представляет собой определенный тип абстракции, формализации: в "конкретном", "естественном" объекте – целое число (или непрерывная величина) – выделяются какие-то отдельные свойства (например, арифметические операции) и дальше в рамках формальной системы изучаются только эти свойства ("техника"). На языке современной математики (и философии) это есть выделение *структуры*. Здесь важно подчеркнуть, что, по мысли Ньютона, бесконечные ряды возникают только как отражение свойств десятичных дробей, бесконечные буквенные ряды не самостоятельны, а суть лишь формализация свойств чисел.

Интересно также отметить, что это "горизонтальное" движение мысли – формализация, обобщение – само по себе бесплодно и внутренне противоречиво. Обобщая метод деления чисел на многочлены, Ньютон сразу же натыкается на парадокс: одну и ту же дробь можно с помощью алгоритма деления превратить в два разных ряда. А именно он рассматривает дробь $\frac{a^2}{b+x}$. Если считать в знаменателе главным членом b, то при делении получается ряд

$$\frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \frac{a^2x^4}{b^5} - \dots$$

Если же главным членом знаменателя считать x, то получится ряд

$$\frac{a^2}{x} - \frac{a^2b}{x^2} + \frac{a^2b^2}{x^3} - \frac{a^2b^3}{x^4} + \dots$$ [11]

Не имея дополнительного критерия, невозможно решить, какому из рядов равна исходная дробь. Другими словами при формализации, обобщении мы должны заранее знать, иметь позитивный ориентир – в каком направлении обобщать[12].

---

[11] Там же. С. 26–27.

[12] Ньютон не заботился о *сходимости* бесконечных рядов, поэтому получались подобные парадоксы. Понятие сходимости придает уже ряду не только формальный смысл, – ряд получен в результате работы определенного алгоритма, – но и содержательной: ряд становится функцией. Такой же как и исходная дробь. И тогда получается, что исходная дробь представляется этими рядами одновременно, но для разных значений x: первый ряд – только для $|x| < b$, второй – только для $|x| > b$.

Но в логической пропорции, иллюстрирующей, по Ньютону, переход от чисел в десятичной записи к бесконечным рядам (стр. 160), есть и другое – "вертикальное" – направление движения от арифметики к бесконечным десятичным дробям и, соответственно, от конечных алгебраических выражений к бесконечным буквенным рядам. В этом движении от конечного к бесконечному и работает принцип непрерывности, – аналогия, уподобляющая бесконечное конечному. "...Так же как десятичные дроби, – пишет Ньютон, – обладают тем преимуществом, что выраженные в них обыкновенные дроби и корни приобретают в некоторой степени свойства целых чисел, так что с ними можно обращаться как с последними, так и буквенные бесконечные ряды приносят ту пользу, что всякие сложные выражения (дроби с составным знаменателем, корни составных величин или неявных уравнений и т.д.) можно с их помощью привести к роду простых количеств..."[13]. Речь идет о том, что действия с десятичными дробями производятся поразрядно, т.е., по существу, как с целыми числами, что много проще действий с рациональными числами общего вида (например, сложение чисел с разными знаменателями). Главное здесь – бесконечное интерпретируется в этих подходах аналогично конечному. В этом основа эффективности новых методов. В этом для Ньютона и определенное оправдание этих новых методов. В своей более ранней работе "Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов" он пишет: "Все, чего обычный анализ[14] достигает (когда это возможно) при помощи уравнений с конечным числом членов, здесь достигается при помощи бесконечных уравнений. И я не колеблюсь употреблять и здесь термин: *анализ*. Действительно, рассуждения в нем не менее достоверны, чем в первом, и уравнения не менее точны, хотя мы, люди конечного ума, и не в состоянии ни обозначить, ни воспринять все их члены так, чтобы точно узнать из них искомые величины. Подобно этому нельзя представить ни в числах, ни каким-либо другим аналитическим приемом иррациональные корни конечных уравнений так, чтобы какая-либо одна из этих величин, отличная от других, была установлена точно"[15]. *В этих словах суть проблемы, связанной с обсуждаемыми нововведениями*, обозначена очень точно. Бесконечность, участвующая в бесконечных рядах, не страшна. Точнее: не более страшна, чем при оперировании с иррациональными числами. "Язва" актуальной бесконечности уже вошла, подчеркивает Ньютон, в математику, и бесконечные ряды не добавили здесь ничего принципиально нового. Если мы считаем законным оперирование с такими символами, как, например, $\sqrt{2}$, то мы должны допустить законность и бесконечных рядов. Ведь, что мы знаем о величине $\sqrt{2}$? Мы знаем, что это иррациональное число, выражение которого в десятичной записи содержит бесконечно много знаков. Другими словами, мы, "люди конечного ума" не знаем *числового* выражения этой ве-

---

[13] *Ньютон И.* Цит. соч... С. 25–26.

[14] Анализом со второй половины XVII в. называли обычно применение алгебраических методов – в духе Декарта – для решения геометрических и арифметических задач.

[15] *Ньютон И.* Цит. соч. С. 21.

личины. Мы знаем только одно, что эта величина, помноженная на себя, даст число 2: $(\sqrt{2})^2 = 2$. И этого оказывается достаточно, чтобы *оперировать* с этой величиной. Бесконечные ряды, в этом смысле, аналогичны. Не имея возможности обозреть всю бесконечную совокупность их членов, "представить" целиком весь ряд, мы *не знаем*, нам "не дан" этот ряд. Однако, если мы имеем, например, формулу общего члена этого ряда, или какую-то другую информацию о членах этого ряда, то ее может оказаться достаточно для *оперирования* с этим рядом, для включения его в некоторую совокупность отношений с традиционными финитными объектами. "Иррациональность" ряда того же порядка, что и иррациональность числа.

И все-таки эта "иррациональность" бесконечного ряда неустранима из него. Мы обладаем этим рядом лишь de facto. Мы можем лишь производить действия с рядами. Но нам "людям конечного ума" – напомним это еще раз – не дана "сущность" этого ряда, поскольку в его определение входит актуальная бесконечность. De jure ряд остается "по ту сторону мысли". Оперирование с рядом – как, впрочем, и со знаками иррациональных величин, – знание о нем становится подобным знанию в сфере практической жизни (в сфере материальной практики). Мы сажаем саженец дерева. Мы *знаем*, что если произвести определенные действия – выкопать яму, подложить песок, навоз, регулярно поливать саженец – то, вообще говоря, вырастет дерево. У нас есть некоторые теории, объясняющие рост дерева, его питание, его зависимость от солнечной энергии и т.д., но *полного* понимания роста, развития дерева у нас нет: слишком сложна оказывается эта задача. Сам предмет знания в наших теориях о нем остается все время до конца неустранимым *x*-ом, "черным ящиком". Наше знание о нем представляет собой лишь фиксацию определенных коррелятивных связей: если сделать то-то, то "на выходе", т.е. в результате получится то-то. Почему, какова внутренняя связь, преобразующая ситуацию на входе в ситуацию на выходе – этого мы до конца не знаем. Предмет нашего знания *не растворяется* до конца в этом знании. Бытие этого предмета и мысль о нем всегда лишь коррелируют и никогда полностью не совпадают.

Вся парадоксальность новых объектов, введенных в математику XVII в., в том и состояла, что они оказывались в некотором смысле подобными – по своей эпистемологической роли – реально существующим материальным объектам, а знание о них – подобным знанию в сфере материальной практики. Конечно, уже античная математика понимает свой статус двойственно. Геометрическая наука не есть произведение только интеллектуальной способности, но также связана с воображением и, тем самым, со сферой материальной практики[16]. Положения геометрии исходно делятся на две группы: аксиомы и постулаты. Первые относятся к некоторым интеллектуально постигаемым истинам, вторые выражают возможность некоторых геометрических построений. Однако, актуальная бесконечность не постижима ни одной из этих способностей: она не-

[16] Подробнее смотри в главе об алгебре Декарта.

представима, она же и немыслима. В этом согласны не только философы и математики античности, но и философы XVII в. Последние почти единодушно повторяют, что наше представление о бесконечности есть скорее представление о возможности бесконечного продолжения некоторого процесса (например, удвоения отрезка – Лейбниц, продолжения прямой – Локк и т.д.) и, тем самым, есть представление о *потенциальной* бесконечности[17]. Актуальная бесконечность представлена только в идее Бога, однако, божественная сущность непостижима для нас. Декарт, основывавший всю свою теорию познания на предзаданности идеи Бога является характерным примером здесь. С одной стороны идея Бога есть нечто наидостовернейшее для нас: "Это достаточно понятно и достоверно для тех, кто *привык созерцать идею Бога* и отмечать его высшие совершенства. И хотя мы их не постигаем, ибо природу бесконечного не дано постичь нам, существам конечным, тем не менее мы способны уразуметь их яснее и отчетливее, чем какие-то бы ни было телесные вещи: ведь они больше наполняют наше мышление и являются более простыми, причем их не затемняют никакие ограничения"[18]. С другой стороны, рассуждения о бесконечном недопустимы в декартовской науке: "Поэтому мы никогда не станем утруждать себя рассуждениями о бесконечном. Действительно, было бы нелепо, поскольку мы сами конечны, давать ему какое бы то ни было определение и таким образом как бы пытаться ограничить его и постичь. Следовательно, мы не станем заботиться об ответе тем, кто спрашивает, бесконечна ли также и половина бесконечной линии, четно или нечетно бесконечное число и т.п.: ведь о таких вещах подобает размышлять лишь тем, кто почитает свой ум бесконечным"[19].

Однако, математики XVII в. вводят в свою науку этот непонятный, парадоксальный объект – актуальную бесконечность – и начинают постепенно привыкать к ее использованию: в дифференциальном и интегральном исчислении, в теории рядов, в проективной геометрии. Как это возможно? В общелогическом плане можно определенно сказать, что никто собственно не посягает на раскрытие "сущности бесконечности". Происходит нечто более скромное: подметив некоторые свойства бесконечных объектов, их начинают использовать (опираясь на эти опознанные свойства). Но это скромное техническое нововведение с точки зрения логики науки есть переворот огромного значения. Античность ориентирует математическое знание на идеал интеллектуальной "прозрачности". Высшим идеалом здесь оказывается платоновское царство идей, в котором бытие и смысл совпадают. Конечно, согласно платоновским критери-

---

[17] "В самом деле, *наша идея бесконечности* есть, на мой взгляд, бесконечно возрастающая идея. Но идея любой величины, которая имеется в уме, в это время сама себя ограничивает (как бы ни была она велика, она не может быть больше того, что она есть) и присоединять к ней бесконечность – значит прибавлять постоянную *меру к возрастающей величине*", – *пишет Локк в "Опыте о человеческом разумении"*, в полном соответствии с аристотелевскими канонами *(Локк Дж.* Соч.: В 3 т. Т. 1. С. 264).

[18] Первоначала философии // *Декарт Р.* Соч. М., 1989. – С. 321.

[19] Там же. С. 324.

ям сама математика античности двойственна. Однако, в ней недвусмысленно определена ценностная эпистемологическая "вертикаль": кинематика (теоретическая астрономия) → геометрия → музыка (наука об отношениях чисел) → арифметика: предшествующие члены этой последовательности имеют меньшую гносеологическую ценность, чем последующие. С введением же бесконечных рядов в математику входит некий объект – непредставимый, немыслимый, непонятный, – некая *вещь в себе*, с которой мы можем оперировать, но которая всегда остается принципиально непознанной.

§ 2. НОМИНАЛЬНАЯ СУЩНОСТЬ ЛОККА И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАЛЛЕЛИ

Для историко-философской интерпретации, описанной в предыдущем параграфе ситуации, по нашему мнению, очень удобно понятие *номинальной сущности*, введенное Локком. Это определение как бы фокусирует в себе всю номиналистическую направленность локковской философии, с одной стороны, и удачно выражает те тенденции в науке XVII в., которым суждена была долгая и плодотворная жизнь, с другой. Противопоставляя свое понимание сущности аристотелевскому ("экзистенциалистскому"), Локк настаивает, что сущности определяются отвлеченными идеями. "Мера и граница каждого вида, или species, которыми устанавливается данный отдельный вид и которые отличают его от других, есть то, что мы называем его *сущностью*; она *представляет собой* не что иное, как отвлеченную идею, *с которой связано имя*, так что все заключающиеся в данной идее существенно для данного вида. Хотя это и есть вся известная нам *сущность* природных субстанций, по которой мы различаем их по видам, однако я даю ей особенное название "номинальная сущность", чтобы отличить ее от того реального строения субстанций, от которого зависят и *номинальная сущность*, и все свойства данного вида и которое можно поэтому, как было сказано, назвать *реальной сущностью*"[20]. Определение явно ориентировано на "прагматику" познания (и одновременно стремится уйти от всякой метафизики). Так, номинальной сущностью золота является совокупность *известных* свойств золота: желтизна, определенный удельный вес, определенная степень ковкости, плавкости, твердости. Реальная же сущность золота – "это строение незаметных частиц этого тела, от которого зависят эти и все другие свойства золота"[21].

Этим определением преодолевается аристотелевское понятие сущности как единичности, как "вот этого". Локк настаивает, что в единичных вещах нет сущностного. ≪... "существенное" (сущностное) и "несущественное" (несущностное) *относятся лишь к нашим отвлеченным идеям и к связанным с ними именам* и сводятся лишь к тому, что, раз

[20] *Локк Дж.* Соч. В 3 т. Т. 1. С. 496–497.
[21] Там же.

какая бы то ни было единичная вещь не обладает **теми же качествами**, которые заключаются в отвлеченной идее, обозначаемой **каким-нибудь** общим термином, она не может быть причислена к этому *виду* и называться его именем, потому что эта отвлеченная идея и есть сама *сущность* этого *вида*»[22]. "...Сущность имеет отношение в действительности не столько к бытию отдельных вещей, сколько к их общим **наименованиям**"[23].

Реальная же сущность выступает таинственным и никогда до конца не понятным *х*-ом: "Под *реальной* же *сущностью* я подразумеваю реальное строение вещи, представляющее собой основание всех тех свойств, которые соединены в *номинальной сущности* и обнаруживаются постоянно существующими вместе с нею, – то особое строение, которое каждая вещь имеет внутри себя, без всякого отношения к чему-нибудь внешнему"[24]. Это противопоставление известных свойств вещи и того "особого строения, которое вещь имеет внутри себя, без всякого отношения к чему-нибудь внешнему", ясно говорит о том, что идея кантовской "вещи в себе" уже вызревает в системе Локка. Реальная сущность выступает как *предел* познавательной активности человека. Всякое актуальное знание – неполно: "*Наши номинальные сущности субстанций суть неполные совокупности свойств*... Не зная самой реальной сущности, нельзя знать все те свойства, которые из нее вытекают и так с ней связаны, что с устранением *какого-нибудь из них мы можем с уверенностью заключать, что* сущности здесь нет, и что вещь не принадлежит к данному *виду*"[25].

Отсюда и соответственное отношение Локка к науке (к естествознанию). Наука не должна рассчитывать на полное познание своих объектов. Всякое познание относительно и обусловленно опытом: "При познании тел мы должны довольствоваться собиранием по колоску того, что возможно собрать из отдельных опытов, ибо мы не в состоянии путем выявления реальных сущностей тел схватить сразу целый сноп и понимать природу и свойства целых видов, взятых вместе целой связкой"[26]. Естествознание вообще, согласно Локку, должно умерить свои познавательные притязания: "Приобретение и усовершенствование нашего знания субстанций таким путем, исключительно через опыт и описание (т.е. единственно возможным для нас путем вследствие слабости и посредственности наших способностей в здешнем мире), и заставляет меня подозревать, что философию природы нельзя сделать наукой. Мне думается, мы способны лишь достигнуть очень небольшого общего знания о видах тел и их различных свойствах. Для нас возможны опыты и исторические наблюдения, из которых мы можем извлекать пользу для нашего довольства и здоровья и тем самым увеличивать число удобств в этой жизни; но

---

[22] Там же. С. 496–499.
[23] Там же. С. 501.
[24] Там же. С. 500.
[25] Там же. С. 507.
[26] Там же. Т. 2. С. 126.

я боюсь, что наши дарования не идут дальше этого, и что наши способности, как я предполагаю, не продвинут нас вперед"[27].

Мы *подробно обсуждали локковское понимание естествознания*, потому, что философия математики английского философа также построена по этому принципу. Математические объекты должны быть даны в созерцании. Математическое знание синтетично – предвосхищает Локк кантовское понимание математики. Математика не строится одними комбинациями чисто логических максим. "...Мы прежде всего обнаружили, – пишет Локк, – что, у кого нет совершенной и ясной идеи углов или фигур, о которых он хочет что-нибудь узнать, тот решительно неспособен к познанию их. Предположите только, что у человека нет совершенной, точной идеи *прямого угла, разностороннего треугольника* или *трапеции*; ничто не может быть достовернее того, что он напрасно будет стараться получить какое-нибудь доказательство о них. Далее очевидно, что не влияние максим, принимаемых в математике за принципы, привело знатоков этой науки к их удивительным открытиям"[28]. "Идеи" геометрических объектов должны быть *даны* сознанию. Следует подчеркнуть, что *под идеями Локк понимает здесь представление в воображении*. Эти представления служат как бы аналогом реальной материальной вещи в естествознании.

Бесконечный ряд, – хотя и не геометрический объект, – также оказывается своеобразной *данностью*. Однако, в отличие от конечных геометрических объектов, он уже не представляет собой "совершенной и ясной идеи", т.е. идея актуальной бесконечности не дана ни воображению, ни рассудку. Эта идея оказывается на границе и того, и другого[29]... Но с бесконечным рядом можно оперировать, можно использовать его какие-то специальные свойства. Совокупность всех этих фиксированных специальных свойств данного бесконечного ряда выступает как локковская *номинальная сущность* по отношению ко всей реальной полноте свойств актуальной бесконечности, заключенной в понятии ряда. Эту актуальную полноту естественно уподобить локковской *реальной сущности*. Реальная сущность актуальной бесконечности не дана аналогично тому, как не дана реальная сущность материальной вещи – принципиально не охватываемая и гносеологически бесконечная. Математик лишь высветляет отдельные стороны этой бесконечной сущности и использует их в своей работе, полнота же свойств бесконечности остается от него скрытой[30].

---

[27] Там же. С. 124–125. Напротив, этика, согласно Локку, представляет собой адекватную сферу применения человеческих способностей. Человек может строить мораль, как науку *(Локк Дж.* Цит. соч. С. 125).

[28] *Локк Дж.* Цит. соч. С. 128.

[29] Локк посвящает обсуждению и (утверждению) этого тезиса целую главу своего "Опыта" (см.: *Локк Дж.* Соч. В 3 т. Т. 1. Кн. 2. гл. 17).

[30] Эту характеристическую особенность, связанную с актуальной бесконечностью, глубоко чувствовал и прекрасно выражал Б. Паскаль. В отрывке "Infini – rien" (№ 233 в издании Брюнсвика) из "Мыслей" он пишет: "Мы знаем, что есть бесконечность и не понимаем ее природы так же, как мы знаем ложность утверждения, что количество чисел конечно. Значит верно, что есть бесконечность среди чисел (en nombre), но мы не знаем, что она такое есть. Ложно, что она четна, ложно – что

Работа математика здесь удивительно сближается с работой физика-экспериментатора. Последний, чтобы поставить эксперимент, должен выдвинуть некоторую *гипотезу*, построить некоторую теорию, выводы которой он будет проверять в эксперименте. Это выдвижение гипотезы есть, в своей основе, чисто синтетический момент мышления, не сводимый ни к чему другому. Гипотезу нельзя ниоткуда дедуцировать. Парадоксальным образом она должна быть знанием о незнаемом. Выдвижение гипотезы опирается на наши предчувствия, на сверхчувственное, на так называемую интуицию, т.е. сверхрассудочную способность угадывать решение задачи. Дальнейшая же экспериментальная проверка выводов теории, построенной на основании принятой гипотезы, принесет с собой и оценку этому интуитивному "прозрению". Математик, работающий с актуальной бесконечностью (прежде всего, для XVII в., – с бесконечными рядами) оказывается в аналогичной ситуации. Чтобы как-то оперировать с бесконечностью, нужно опереться на какие-то ее свойства и поэтому их приходится *постулировать*. В XVII в. это обычно некоторые соображения непрерывности – в широком смысле этого слова, – свойства бесконечных совокупностей получаются "непрерывным" переходом от конечных совокупностей. Именно это соображение руководит Ньютоном при его "индуктивном" выводе биномиального закона (как показано было выше). В это же время начинает использоваться и особая форма этого аргумента "от непрерывности" – так называемая *полная математическая индукция*. Если утверждения доказаны для начального члена ряда и, если доказано, что из справедливости утверждения для n-го члена ряда следует его справедливость и для $(n + 1)$-го, тогда утверждение верно для всех членов ряда. Позже будут опознаны и изучены другие гипотетические положения, касающиеся бесконечности (аксиома выбора – конец XIX в., аксиома детерминированности и другие – в XX в., когда условная значимость всех этих положений уже сознательно подвергается исследованию). Главное для нас здесь то, что все эти положения суть не некие открытые факты, законы, сущности. Все эти положения – лишь гипотезы, оправдание которых уже не может, вообще говоря, дать сама математика, т.е. возможны, как обнаружили в XIX и XX вв., различные математические системы. Оправдание этих гипотез, как мы уже не раз отмечали, тесно связано с общекультурным фоном, на котором существует математика, и прежде всего с философией (см. главу о Лейбнице). Возможны различные математики и возможны различные миры, в которых эти математики справедливы. Причем, если в XIX в. еще спрашивали, "какова же реальная геометрия нашего мира, – геометрия Евклида или геометрия Лобачевского?" – то сегодня уже достаточно ясно, что все эти возможные миры есть не какие-то только абстрактные возможности, по сравнению с

нечетна, т.к. от добавления единицы ее природа ничуть не меняется. Однако, это есть число, а всякое число четно или нечетно. И истинно, что так понимается о каждом конечном числе.

Таким же образом, можно хорошо знать, что Бог есть, не зная того, что он есть. ...Итак, я уже показал, что можно хорошо знать существование вещи, не зная ее природы" (Pascal B. Oeuvres complètes... P. 550).

нашим действительным миром, а представляют собой как бы "части" нашего мира. Точнее, мир с определенных точек зрения представляется этими математиками. Точку же зрения определяет аксиоматика, в особенности, бесконечности, в том смысле, что аксиомы имеют и некоторое общефилософское значение, указывают на некий мировоззренческий горизонт. Вопрос об истинной математике – или, если угодно, о полной – есть вопрос об истинной философской точке зрения, об истинном полном мировоззрении, об истине.

Оперирование с бесконечными рядами у Ньютона удачно, как мы уже отмечали, вписывается в общефилософскую номиналистическую схему познания в философии Локка. Актуальная бесконечность, заключенная в понятии ряда, так и остается, – конечно, – недоступной "реальной сущностью" ряда. Но отдельные опознанные свойства ряда – его "номинальная сущность" – позволяют сделать его удобным средством исследований. Парадоксальным – и иллегальным по античным канонам – остается лишь то, что в математику, – науку, предметами которой традиционно считались строго и ясно определенные конструктивные сущности, – вводится сущность в высшей степени, неясная и неопределенная – бесконечность. У бесконечности, собственно, нет положительного определения: в качестве таковой она выступает только как отрицание всего конечного. Именно эта неопределенность отрицательности и отталкивала античную математику, с ее философски искушенным чувством формы. Новое же время сознательно полагает математическую бесконечность как положительную сущность – как реальную сущность, на языке Локка – и начинает строить науку о бесконечности, как своеобразный номиналистический "обмер" и "обсчет" этой реальной сущности.

Парадоксы, обусловленные странной природой нового математического объекта – бесконечности, не заставили себя ждать. Это были и парадоксы о равномощности целого и части бесконечного множества, которые указывал еще Галилей[31], и новые парадоксы, сопутствовавшие технике бесконечных рядов. С самого начала одной из своих основных работ "Метод флюксий и бесконечных рядов..." Ньютон сталкивается с парадоксом: дробь можно представить рядом неоднозначно[32]:

$$\frac{a^2}{b+x} = \begin{cases} \dfrac{a^2}{b} - \dfrac{a^2x}{b^2} + \dfrac{a^2x^2}{b^3} - \dfrac{a^2x^3}{b^4} + \ldots \text{, и одновременно} \\ \dfrac{a^2}{x} - \dfrac{a^2b}{x^2} + \dfrac{a^2b^2}{x^3} - \dfrac{a^2b^3}{x^4} + \ldots \end{cases}$$

Бесконечные совокупности оказывались странно "многоликими", неравными сами себе. В дальнейшем, с введением общего понятия аналитической функции, примеры этого ряда умножились. В разбираемом нами

[31] *Галилей Г.* Соч. М.; Л., 1934. Т. 1. С. 96–97.

[32] Мы отмечали уже, что причина этого – формализм построений Ньютона, без рассмотрения понятия сходимости.

примере заранее известно, что эти два ряда (при некоторых условиях) представляют функцию, заданную конечной формулой

$$y = \frac{a^2}{b+x}$$

В общем же случае теория функции оперирует с функцией, заданной самим рядом, и для которой не известно *конечной* формулы. Более того, и сам этот ряд не дает иногда полного представления этой функции. Только некоторый бесконечный набор подобных рядов определяет эту функцию во всей области ее существования. Каждый же отдельный ряд есть лишь специальный "лик" этой функции, обнаруживающийся при определенной точке зрения, лишь репрезентатор этой функции, ее знак. Сама же функция оказывается запредельной всем своим репрезентаторам – недостижимый во всей полноте локковской "реальной сущностью".

С техникой бесконечных рядов в математику входят объекты странной природы – объекты неадекватные никакому своему представлению. Любое представление (рядом) оказывается по отношению к этому объекту односторонним и случайным. Этот момент случайности был осознан сразу же. Так, уже Чирнгаузен, ознакомленный с построениями Ньютона Ольденбургом, писал последнему: "Впрочем я думаю, что можно привести и более простые и более общие основания для приведения какой-либо величины к равносильному бесконечному ряду, чем приведение к таким рядам дробей и иррациональностей с помощью деления или извлечения корня, что, как мне кажется, носит только случайный характер"...[33]. Новаторские методы Ньютона были дерзким расширением сферы применимости старых методов, но оставляли впечатление случайности. Они были не только логически необоснованы, но, если даже и закрыть глаза на это сугубо историческое обстоятельство, – главное, не достигали сущности изучаемого объекта, заставляли искать более *непосредственного* подхода. За неимением же последнего, все, что связано с бесконечными рядами, оставалось сферой безудержных спекуляций и изобретательства, которыми столь знаменит был следующий – XVIII век...

---

[33] Извлечение из письма Чирнгаузена к Ольденбергу от 1 сентября 1679 г. от Р.Х. // *Ньютон И.* Математические работы... С. 232–233.

Глава V

ВЕРОЯТНОСТЬ

§ 1. ВЕРОЯТНОСТНАЯ ЭПИСТЕМОЛОГИЯ

Попытки количественной оценки случайных событий, – в основном на примерах из азартных игр, – встречаются уже и в XIV и XV вв. XVI век дает в этом смысле два важных имени: Н. Тарталья и Дж. Кардано. Последнему принадлежит "Книга об игре в кости"[1], где систематически рассматриваются возможные исходы событий и их шансы при игре двумя и тремя костями. Н. Тарталья в своих математических работах также затрагивает вопросы комбинаторики и обсуждает знаменитую задачу о разделе ставки (мы будем говорить о ней подробнее ниже). В XVII в. благодаря работам Б. Паскаля, П. Ферма, Х. Гюйгенса, Я. Бернулли (и многих других) теория вероятностей выступает уже как особая область применения математики.

В соответствии с особенностями своего происхождения – связь с азартными играми, а также по причине специального характера предмета – случайные процессы, т.е. нечто, по определению связанное со сферой существования и в то же самое время должное быть отраженным в математике, дисциплине традиционно "эссенциалистской" – теории вероятностей с самого ее возникновения сопутствуют серьезные дискуссии, касающиеся ее *эпистемологического* статуса. Поэтому очень важно иметь представление о той интеллектуальной атмосфере, в которой возникает теория вероятностей, о том общем фронте пробабилистской методологии в XVII в., в рамках которого возникновение теории вероятностей становится почти закономерным[2].

Вообще говоря, эпистемологическая обеспокоенность нарождающейся науки Нового времени была понятна. У этой науки было много недругов. Нарождающемуся экспериментальному естествознанию приходилось бороться с догматическими аристотелевскими схемами, с традиционным жестким разделением всей сферы познания на собственно науку (ἐπιστήμη) и мнение (δοξα). Против скептиков, новых "пирронистов",

---

[1] Надо заметить, однако, что книга Кардано Liber de Ludo Aleae была издана только в посмертном 10-томном собрании сочинений в 1663 г. Ее перевод на английский см. в книге: *Ore O.* Cardano: The gambling Scholar. Princeton, 1953.

[2] Полезную информацию на эту тему можно почерпнуть в реферативном сборнике под редакцией Л.М. Косаревой "Современные исследования по истории методологии науки. Материалы к VIII Международному конгрессу по логике, методологии и философии науки". Москва, ИНИОН АН СССР, 1987.

необходимо было сформулировать свою положительную гносеологическую программу. С другой стороны, необходимо было ограничить себя и от религиозных "энтузиастов", иллюминатов и сектантов, претендовавших на непосредственное "спиритуальное" постижение истины[3]. Наконец, большинство ученых, закладывавших в XVII в. основания новой науки, были верующими людьми, и для них было очень важно показать, что новый тип знания не противоречит истинам христианской религии, что наука отнюдь *не* "доказывает, что Бога нет" (а, скорее, доказывает обратное). Весь этот комплексный социальный заказ находил в возникающей в XVII в. вероятностной эпистемологической установке определенное разрешение.

Средневековая наука во многом еще опирается на эпистемологические установки античности. Сфера знания (επιστημη) отнюдь не охватывает всего существующего, ибо последнее неоднородно и содержит в себе вещи неопределенные – становящееся, – в которых познающему взгляду платоновско-аристотелевского разума, "не на что опереться". Это соответствие характера познания предмету познания было прекрасно выражено Платоном в "Тимее": "Но в каждом рассуждении важно избрать сообразное с природой начало. Поэтому относительно изображения и первообраза надо принять вот какое различение: слово о каждом из них сродни тому предмету, который оно изъясняет. О непреложном, устойчивом и мыслимом предмете и слово должно быть непреложным и устойчивым: в той мере, в какой оно может обладать неопровержимостью и бесспорностью, ни одно из этих свойств не должно быть утрачено. Но о том, что лишь воспроизводит первообраз и являет собой лишь подобие настоящего образа, и говорить можно не более как правдоподобно. Ведь как бытие относится к рождению, так истина относится к вере"[4]. Мир становления, мир "бывания", а не истинного бытия, мир существования (противопоставленный миру сущностей) не может в принципе быть предметом знания такого же уровня строгости и достоверности, как знание математическое или философское (метафизика).

Понимание знания у провозвестников и пионеров новоевропейской науки – таких, например, как Бэкон, Галилей, Декарт, – может до определенной степени рассматриваться как продолжение античных традиций жесткого разделения сфер ἐπιστήμη и δόξα. Об этом много писал в свое время А. Койре, выдвигавший тезис о том, что галилеевская физика представляет собой "реванш Платона"[5]. Американская исследовательница Б. Шапиро, аналогично, отмечает в своей книге "Вероятность и достоверность в Англии XVII в.": "Цели Бэкона как философа были достаточно традиционны... Как и любой античный философ... Бэкон пребывал в уверенности, что его философия может достигнуть знания "форм", кото-

[3] См., например, у Локка в "Опытах о человеческом разумении" в кн. IV главу XIX "О религиозном исступлении (of Enthusiasm). И, соответственно, у Лейбница в его "Новый опытах о человеческом разумении..." в кн. IV, главу XIX. "De l'enthousiasm".

[4] *Платон. Тимей, 29в 4–с5.*

[5] *Koyré A.* Etudes galiléennes. Paris, 1939.

рые существуют по ту сторону зыбкого мира опыта"[6]. Однако, в непосредственной научной практике бэконовский оптимизм начал существенно деформироваться. Претензии на открытие истинных начал природы, основоположных аксиом знания, на создание целостной всеохватывающей онтологии приходилось заменять более скромными и компромиссными решениями. Так, например, в высшей степени противоречивыми и двусмысленными оказывались представления Галилея о природе материи[7]. Необозримо сложными и практически бесполезными оказывались многие механические модели, предложенные Декартом (например, его модель гравитации, модель роста организма из зародыша). Дискуссии, связанные с открытием яйцеклетки и сперматозоида, достаточно убедительно продемонстрировали гипотетичность теорий, которые выдвигались в качестве объяснения на разных этапах исследований[8]. Эта принципиально неустранимая гипотетичность научных теорий все настойчивее выступала на первый план. Даже Декарт, этот "новый догматик", в конце своих "Первоначал философии" делает уступку общей тенденции в понимании научного знания. Он выделяет два типа достоверности. "Первая называется моральной, т.е. достаточной для того, чтобы управлять нашими нравами, или равной достоверности вещей, в которых мы обычно не сомневаемся, когда речь идет о правилах нашего поведения, хотя и знаем, что в смысле абсолютном эти правила, может быть, и неверны"[9]. Любопытны и примеры, которые приводит Декарт для иллюстрации моральной достоверности. "... Если кто-либо, желая разгадать написанный обыкновенными буквами шифр, станет читать *B* всюду, где стоит *A*, и *C* всюду, где стоит *B*, и так последовательно поставит на место каждой буквы следующую за ней по алфавиту и при этом, читая, найдет имеющие смысл слова, он не будет сомневаться, что открыл ключ к шифру, хотя и не исключена возможность, что писавший вложил совершенно иной смысл, придав каждой букве иное значение. Однако, это был бы такой исключительный случай, особенно если в шифре много слов, что он не кажется морально вероятным"[10]. С точки зрения этой же категории *моральной достоверности* эпистемологически оправданы для Декарта и его физические теории: "Если принять во внимание, как много очевидных истин выведено относительно различных свойств магнита, огня и всех прочих вещей в мире, и притом выведено из весьма небольшого числа причин, предложенных мною в начале настоящего трактата, то, если даже вообразить, что я их предложил наудачу и помимо убеждений разума, останется столько же оснований считать их истинными причинами всего мною выведенного, сколько имеется оснований полагать, что

---

[6] *Shapiro B.J.* Probability and certainty in seventeenth—century England. Princeton, 1983. P. 18.

[7] См.: *Катасонов В.Н.* К вопросу о "платонизме" Галилея // Физическое знание: его генезис и развитие. М., 1991 (в печати).

[8] См.: напр.: *Westfall R.S.* The construction of modern science. N.-Y., London, 1971. P. 96—104.

[9] *Декарт Р.* Соч. В 2-х т. М., 1989. Т. 1. С. 420.

[10] Там же.

найден ключ к шифру, когда из значения букв, принятых произвольно, получается определенный смысл"[11]. Другим типом достоверности является у Декарта достоверность математических положений, "когда мы думаем, что вещь не может быть иной, чем мы о ней судим"[12]. Декарт распространяет эту достоверность и на свои физические спекулятивные конструкции. Опорой ему служит то знаменитое соображение, что "Бог – всеблагой источник истины и что, раз мы созданы им, то способность отличать истинное от ложного, которую он нам даровал, не может вводить нас в заблуждение, если только мы правильно ею пользуемся и она с очевидностью нам доказывает истинность чего-либо"[13]. Сложность, искусственность и бесплодность многих декартовских механических моделей склоняла ученых скорее к тому, что он здесь "неправильно пользовался" своей "способностью отличать истинное от ложного", однако, новый эпистемологический подход – построение физики на основе теорий, имеющих лишь *вероятную достоверность*, а именно моральную достоверность – что было совершенно немыслимо в рамках традиционной аристотелевской науки – *имел широкий отклик* у естествоиспытателей.

Английские последователи программы Ф. Бэкона, объединенные с 1660 г. в рамках Лондонского Королевского Общества, должны были вскоре признать, что индуктивное восхождение от экспериментальных фактов к "формам" и "общим аксиомам" природы оказалось не таким простым делом, как это представлялось знаменитому канцлеру-философу. "В контексте эмпирической науки метафизические принципы если и обсуждались, то очень редко. Хотя строительные метафоры, с их "крепким основанием" и "твердой базой" бесконечно повторялись, никто, как казалось, не желал или не мог объяснить, как были связаны между собой субструктуры (экспериментальной науки – *В.К.*) и структуры (философии – *В.К.*), *объяснить процесс, благодаря которому естественная история* превратится в натуральную философию", – пишет в вышеупомянутой книге Б. Шапиро[14]. Обыденная работа над сбором фактов и экспериментальных данных, обсуждение методологии проверки этих фактов и оценки их достоверности приводит многих членов Королевского Общества ("виртуозов", как называли они себя) к заключению о необходимости пересмотреть традиционную эпистемологическую дихотомию познания на собственном знании и мнении. В противном случае многие *новые эмпирически найденные закономерности, экспериментально подтвержденные теории* пришлось бы просто записать в рубрику "мнений" и исключить их из сферы научного знания, что не отвечало ни духу бэконовской программы, ни просто здравому смыслу[15]. Постепенно осознается относительная ценность подтвержденного в той или иной степени мнения. Постепенно пробивает себе дорогу идея, что подобное мнение

[11] Там же. С. 421.

[12] Там же.

[13] Там же. С. 421.

[14] *Shapiro B.J.* Op. cit. P.24.

[15] Однако, этот здравый смысл был уже здравым смыслом Нового времени, существующий в новом мировоззренческом горизонте.

также имеет определенную *научную* значимость. "Виртуозы" – такие как Дж. Вилкинс, С. Уорд, Дж. Гланвилл, Р. Бойль и другие – уже не довольствуются простым разделением на знание и незнание (мнение), а – с разными вариациями – предлагают целую шкалу эпистемологической достоверности. На вершине этой шкалы стоит абсолютное, непогрешимое знание самого Бога. Ниже идет принудительное, доказательное знание математических дисциплин, логики, метафизики. Еще ниже следует достоверность непосредственного чувственного опыта ("более чем моральная достоверность"). Вера, в том числе и религиозная, опыт в передаче других имеют максимум моральную достоверность. И, наконец, еще ниже расположена вся широкая сфера всевозможных мнений разной степени вероятности. Джок Локк является в определенном смысле глашатаем тех новых философских ориентаций, которые вызревали среди естествоиспытателей Лондонского Королевского Общества. Не случайно в его знаменитом "Опыте о человеческом разумении" вероятностной эпистемологии посвящено немало страниц. Мы уже приводили цитату, выражающую скептическую оценку Локком эпистемологического статуса экспериментальных наук[16]. Однако это отнюдь не служит для него поводом отказаться от естествознания. Нужно, считал Локк, лишь сознательно изменить эпистемологические ориентиры. В главе "О вероятности" последней книги "Опытов" читаем: "*Вероятность восполняет недостаток познания.* Как было сказано, наше познание очень ограниченно, и мы не настолько счастливы, чтобы находить достоверную истину во всякой вещи, которую нам приходится рассматривать. Большая часть положений, о которых мы думаем, рассуждаем, беседуем и на основе которых действуем, таковы, что мы не можем приобрести несомненного знания их истинности. Тем не менее, некоторые из них так близко граничат с достоверностью, что мы нисколько не сомневаемся в них и *соглашаемся* с ними так твердо и действуем в результате этого согласия так решительно, как если бы они были неопровержимо доказаны, а наше познание их было совершенным и достоверным. Но здесь существуют различные степени (несогласия), начиная от чрезвычайной близости к достоверности и доказательству, кончая невероятностью и неправдоподобием, вплоть до невозможности, а также различные степени *согласия* (assent), начиная от полной *уверенности* (assurance) и убежденности (confidence) и, кончая *предположением, сомнением* и *недоверием*"[17]. Достоверное и вероятное знание, по Локку, принципиально отличны одно от другого: "*Разница же между вероятностью и достоверностью, между верованием и знанием состоит* в том, что во всех частях знания есть интуиция: каждая непосредственная идея, каждый шаг имеет свою видимую и достоверную связь. Не то с верой: меня склоняет верить нечто внешнее к той вещи, в отношении которой у меня есть вера, нечто такое, что не имеет очевидной связи ни с вещью, ни со мной и что поэтому не показывает ясно соответствия

[16] См. главу о рядах.

[17] *Локк Дж.* Соч. В 3 т. М., 1985. Т. 2. С. 134.

или несоответствия рассматриваемых идей"[18]. Однако убежденность Локка, что увеличение знания в естествознании достижимо только за счет расширения объема опыта, заставляет его бесконечно сближать вероятное и достоверное знание, представляя последнее как бы предельным случаем первого.

Лейбниц, несмотря на всю радикальность своего детерминизма, прекрасно осознавал всю эту идеологию. Он не раз подчеркивал необходимость дополнить логику учением о вероятности[19]. Ян Хакинг в своей книге о возникновении теории вероятностей утверждает даже, что Лейбниц в рамках "Универсальной характеристики" делал наброски пробабилистской теории, предвосхищающей индуктивную логику в духе Дж.М. Кейнса и Р. Карнапа[20].

Интересен следующий фрагмент из одного из бесчисленных лейбницевских набросков его "Универсальной характеристики". В "Предварительных сведениях к энциклопедии, или универсальной науке" Лейбниц дает определения достоверного и вероятного познаний: "*Самодостоверно* то, относительно чего мы согласны в силу его самого, так что известно, что оно не может быть удостоверено чем-то другим, относительно чего мы были бы согласны еще более... Но поскольку часто нам приходится иметь дело с тем, в отношении чего мы лишены достоверного знания, *необходимо по крайней мере, чтобы мы достоверно знали, что то или иное предложение является вероятным* (здесь подчеркнуто мной – *В.К.*). Таким образом, одни предложения истинны в силу истинности, другие – в силу вероятности. Вероятность не есть нечто абсолютное, вытекающее из каких-либо данных достоверных сведений. Однако пусть даже этих сведений недостаточно для разрешения проблемы, их достаточно, чтобы мы правильно судили о том, какая из двух противоположностей желательнее, исходя из данных известных нам обстоятельств. А желательнее та, которая требует меньших усилий и меньших средств. Как только одно из данных признается нами таким, мы достоверно познаем его вероятность. Но существуют степени вероятности, а кое-что достигает такой степени вероятности, что противоположное не идет с ним ни в какое мыслимое сравнение; такие предложения называются *морально достоверными*, остальные же обозначаются общим именем вероятных"[21]. В конце мы опять видим выдвижение категории моральной достоверности. Но еще

---

[18] *Локк Дж.* Соч. В 3 т. М., 1985. Т. 2. С. 135.

[19] Так в "Новых опытах..." он пишет: "Я уже не раз говорил, что нужен новый *раздел логики*, который занимался бы степенями вероятности, так как Аристотель в своей "Топике" ничего не дал по этому вопросу. Он удовольствовался приведением в известный порядок некоторых ходячих, распределенных по общим местам правил, которые могут пригодиться для пополнения и украшения речи, но он не дал нам *необходимого критерия для взвешивания шансов и для составления на основании их твердого суждения*". (*Лейбниц Г.В.* Соч.: В 4 т. М., 1983. Т. 2. С. 479; подчеркнуто мной – *В.К.*). Лейбниц говорит, конечно, о *количественном* взвешивании шансов.

[20] *Hacking I.* The emergence of probability. Cambridge University Press, 1975. P. 134–142.

[21] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 3. С. 420–421.

важнее в этом фрагменте место, подчеркнутое нами. Лейбниц выставляет требование *достоверного знания о вероятности*. В рамках традиционного античко-средневекового разделения сфер достоверного (науки) и вероятного (мнения) это требование представляется каким-то парадоксом, оксюмороном, скандалом! Однако, подобный "пассаж" отнюдь не беспрецедентен в XVII столетии. Именно в том же логическом направлении переосмысливает Декарт аристотелевское понятие движения, возводя его в ранг со-стояния и формулируя закон инерции. "Лейбницевский ум" работает по аналогичной программе: он хочет понять истинность вероятного, другими словами, истинность сомнительного. Логика этого движения та же, что и у Декарта: нужно найти тождественное в изменчивом и непостоянном, найти тождественное в ином, иначе – найти тождество противоположностей. И с неумолимой логикой, открытой много веков назад, вероятное связывается законом тождества, субстанциализируется и ищет своего воплощения в числе.

§ 2. ПРОБАБИЛИЗМ ИЕЗУИТОВ И ЕГО КРИТИКА. ПАСКАЛЬ

Слово *вероятность, вероятный* – лат. *probabilitas, probabilis* – приходит в науку XVII в. не из средневековой науки – *scientia*, а из сферы, эпистемологический статус которой считался принципиально более низким, – *opinio*. *Вероятный* означало исходно "достойный одобрения", "внушающий доверие", "хорошо себя зарекомендовавший" (с точки зрения компетентных экспертов). Подобное употребление слова сохраняется еще и в XVIII в. Так, Я. Хакинг приводит пример, что в англоязычных странах употреблялось выражение probable doctor, в смысле доктора с хорошей репутацией, признанного специалиста[22]. Э.Ф. Бирн, посвятивший исследованию значения слова "вероятность" в философии Фомы Аквинского фундаментальную монографию, следующим образом описывает связь вероятности и мнения: ≪Приписывание вероятности к области мнения имеет различные коннотации. На первом месте, она относится к авторитету тех, кто принимает данное мнение; и с этой точки зрения "вероятность" предполагает *одобрение* по отношению к принятым утверждениям и *честность* в отношении тех авторитетных инстанций, которые приняли его. На втором месте, "вероятность" соотносится с аргументами, которые представлены в пользу обсуждаемого мнения; и с этой точки зрения она предполагает *доказательность*, т.е. способность быть доказанной (хотя и не необходимо). На третьем месте, – вероятность несет в себе некоторые занижающие коннотации именно из-за того, что обсуждаемое утверждение есть *только* вероятное; т.е. с этой точки зрения утверждение является только лишь *пробным*, а не строго доказанным, как утверждения научные в собственном смысле≫[23]. Эта соотнесенность *вероятности* со сферой *мнения* выпукло выступает в истории дис-

[22] *Hacking I.* Op. cit. P. 18.

[23] *Byrne E.F.* Probability and Opinion. The Hague, 1968. P. 188.

куссий по вопросу оценки моральных суждений в католицизме XVII в. Почти все большие философы столетия так или иначе касались этого вопроса, сыгравшего катализирующую роль в истории формирования математического понятия вероятности.

Речь идет о стратегии, которой должен руководствоваться верующий в сложных моральных ситуациях. Если совесть верующего не сомневается в том, что необходимо следовать тому или иному закону, предписанию церкви, то здесь не возникает и проблемы. Если же совесть сомневается, а действовать необходимо, то тогда нужно иметь некое руководство, некие соображения, которые бы помогли принять то или иное решение. Такое руководство, обусловленное некоторым принципом, называется в католицизме *этической системой*. Этических систем существовало в XVII в. несколько. Все они сходились на том, что в сложных моральных ситуациях следует руководствоваться мнениями, высказанными признанными учителями церкви, т.е. *вероятными мнениями* (вероятными, прежде всего, в том старом значении этого слова, которое мы упоминаем выше, но также в смысле нашего сегодняшнего словоупотребления). Однако, поскольку этих мнений, высказанных авторитетными богословами, было много и нередко они противоречили друг другу, то проблема в том и состояла – как ориентироваться в этих различных моральных оценках жизненных ситуаций. Одна из систем, например, называется тутиоризм. Вот ее определение из одного классического иезуитского трактата[24] по нравственному богословию: "Абсолютный тутиоризм (от лат. tutior – более безопасный) учит, что мы должны следовать более безопасному мнению (в пользу соблюдения закона), даже если противоположное мнение в пользу свободы (от закона – *В.К.*) является наивероятнейшим"[25]. Эта этическая система стремится уменьшить риск греха до минимума. Она предписывает не обращать внимания на возможность по видимости "лояльных" отступлений от нравственных правил (законов) церкви, не соблазняться ими и действовать всегда сообразно закону. Последователи тутиоризма (двух степеней – абсолютный и умеренный) должны были вести довольно строгий образ жизни. Такой моральной системы придерживались, например, монахини в знаменитом монастыре Пор-Рояль[26]. Такова же была моральная ориентация и других знаменитых янсенистов века, так называемых "уединившихся" (les Solitaires), в число

---

[24]Мы пользуемся традиционным, много раз переиздававшимся иезуитским учебником нашего века по нравственному богословию: H. Noldin, S.J. Summa theologiae moralis. T. 1. Deprincipiis. Oenipons, 1934. Edition 22. Основные определения – моральных систем, понимания свободы и т.д. – почти тождественно повторяют формулировки, которые сложились к концу XVII в. в богословской литературе иезуитов. Ср., напр.: *Busenbaum H.*, S.J. Medulla theologicae moralis. Auctore ... Lublini prostant in officina Georgii Försteri, 1655.

[25]*Noldin H.* Op. cit. P. 228.

[26]Монастырь был переведен в 1635 г. в Париж и здесь под влиянием его духовника и руководителя Сен-Сирана (Жан дю Вержье де Оран), державшегося янсенистской доктрины, при ревностном участии настоятельницы Анжелики Арно в монастыре были утверждены строгие, подвижнические правила жизни.

которых входили Антуан Арно, Пьер Николь[27] и находившийся под их духовным руководством Блез Паскаль.

Но в XVII в. подобный ригоризм в нравственной жизни был отнюдь не для всех приемлем. Поэтому существовали конкурирующие этические системы, также одобренные известными богословами. Отступления от закона (и, следовательно, от тутиоризма) могли быть оправданы только благодаря *вероятности* мнений в пользу свободы, т.е. поддержки этих мнений со стороны авторитетов. Но так как эта поддержка могла быть разной степени, то, естественно, возникают этические системы, которые связывают принятие мнения в пользу свободы с оценкой этой *степени* "оправданности" мнения. Такими являлись пробабилиоризм (лат. *probabilior* – более вероятный) и эквипробабилизм (лат. *aequiprobabilis* – равновероятный). По первой системе разрешается следовать мнению (менее безопасному) в пользу свободы, покуда оно более вероятное, чем противоположное мнение в пользу закона. По второй, разрешается руководствоваться мнением в пользу свободы и в случае вероятности равной вероятности противоположного мнения.

Парадокс заключается в том, что обе системы требовали оценки вероятности, – если не количественной, то, так сказать, "качественной", т.е. в отношении сравнений "больше – меньше", "равно", но было непонятно, как строго оправдать подобные оценки. Ведь речь шла не о математической вероятности, которая представляет собой некое число (между нулем и единицей), а о вероятности другого рода. Вероятность, о которой идет речь в этических системах, есть в определенном смысле синоним правдоподобия. Но, на самом деле, ситуация сложнее. Вероятность этических систем есть правдоподобие, но с точки зрения того или иного богослова, т.е. с точки зрения той или другой мировоззренческой позиции. И вопрос о правдоподобии последней сам оставался открытым[28]. Эту особую вероятность, как ожидаемое человеком правдоподобие мнения, гипотезы, и в, широком смысле, высказывания – мы будем называть ее *априорной вероятностью* – никак нельзя свести к чисто математической вероятности[29]. Последняя определяется, – в случае конечного числа исходов, – как отношение числа исходов, благоприятных данному событию, к числу всех исходов. Это определение было понятно уже и Тарталье, и Кардано (в XVI в.). Однако, подобная схема становится совершенно неприменимой к случаю априорной вероятности.

Затруднения с исчислением вероятности мнений вели, конечно, к критике пробабилиоризма и эквипробабилизма. Главными критиками выступали здесь иезуиты[30]. Более прагматичные, более склонные к компромиссу ради достижения стратегических целей, старающиеся идти "в ногу со

---

[27]Создатели знаменитой "Логики, или искусства мыслить" (1662).

[28]Все богословы, о которых идет речь, были, конечно, христианами. Однако, толкование многих положений догматического и морального характера было различным.

[29]Хотя нередко априорной вероятности и приписывают численное выражение.

[30]Пробабилиоризм вплоть до XIX в. находил себе много сторонников среди доминиканцев.

временем", отнюдь не располагавшему к "закручиванию гаек" в нравственной области, иезуиты воевали на два фронта: против тутиористов, и против пробабилиористов. Борьба против янсенистов, в значительной степени придерживавшихся тутиоризма, сопровождалась известными драматическими событиями: арест и заключение аббата Сен-Сирана в 1638 г., осуждение А. Арно в 1656, разрушение монастыря Пор-Рояль в 1710 г. Пробабилиоризм пережил XVII в., но и против него иезуиты не ослабляли своих нападений. Орден Игнатия Лойолы выдвинул свою этическую систему: пробабилизм. Иезуитский теолог XVII в. Бузенбаум пишет: "Без греха дозволяется следовать вероятному мнению, даже чужому и менее безопасному (т.е. которое представляется менее удаленным от всякого греха, чем иное), оставив более вероятное и более безопасное собственное; однако, исключая всякую несправедливость и опасность для ближнего и лишь до тех пор, пока избираемое мнение все еще вероятно. Это общее суждение *Учителей /Doctorum/*"[31].

Заметим это требование, аналог которого мы уже встречали у Лейбница: мнение должно быть твердо и определенно вероятным. От вероятного, в котором обычно, т.е. противопоставляя его достоверному (научному), – видели нечто неопределенное, "неустойчивое", в зависимости от точки зрения (от *мнения*) приближающееся или к достоверности, или к невероятности, – от вероятного начинают требовать определенности, *истинной вероятности*. Иезуиты понимали под этим нечто конкретное: "Чтобы какое-либо мнение могло называться истинно или твердо вероятным, требуется соблюдение следующих трех условий: а) чтобы это мнение основывалось на истинно весомом доводе или авторитете; б) чтобы это мнение *не входило в противоречие ни с постановлениями Церкви, ни* с очевидными доводами; в) чтобы доводы в пользу этого мнения не утрачивали свою вероятность при сравнении с доводами в пользу противоположного мнения"[32]. Но несмотря на эту "субстанциализацию" вероятности, главным пунктом пробабилизма, направленным против пробабилиоризма, был именно отказ оценивать вероятности. Оправдывая пробабилизм, Бузенбаум пишет: "Причина этого в том, что тот, кто следует суждению серьезных авторитетов или связанному с достаточно весомым доводом (т.к. это и есть вероятное), действует не опрометчиво, но благоразумно, а именно, следуя мудрым мужам и совету опытных. Поскольку было бы невыносимым бременем и привело бы к большой мнительности исследовать во всякой вещи, что является более вероятным и более безопасным"[33].

Логика иезуитов понятна: они учили, что, если вообще признавать *внешние принципы* для формирования уверенной совести, т.е. формирование своего мнения, опираясь больше на авторитет других, а не на суть дела, – то с необходимостью придешь к пробабилизму, т.к. "оценка веро-

---

[31] *Busenbaum H.*, S.J. Medullae theologicae moralis. Auctore ... Lublini, prostant in officina Georgii Försteri, 1655. P. 5.

[32] *Noldin H.* Op. cit. P. 236.

[33] *Busenbaum H.* Ibid.

ятности" без численного выражения ее есть только пустые слова. Если же не признавать допустимость внешних принципов, то приходишь к тутиоризму, тому "бремени неудобоносимому", которое для иезуитов, "идущих навстречу миру", никак не могло быть приемлемой стратегией христианства в XVII в.

Эти три этические системы – тутиоризм, пробабилиоризм, пробабилизм – рельефно демонстрируют нам стадии, этапы трансформации понятия вероятности. Причем важно не просто то, что постепенно пробивала себе дорогу идея количественной оценки вероятности. Для того, чтобы начать измерять вероятность, необходимо было, чтобы она обрела особый статус вещи, *способной быть измеренной.* Ибо тутиоризм отказывается опираться на вероятное мнение, потому что еще всецело держится за средневековое разделение знания и мнения[34]: мнение не есть знание, оно зыбко, неопределенно, изменчиво, оно – "мэон" знания. Пробабилизм иезуитов занимает промежуточное положение. Вероятность признается уже как некая сущность. Можно говорить о твердой вероятности, об истинной вероятности. В этом смысле, по сравнению с тутиоризмом делается принципиальный шаг вперед. Если тутиоризм, выбирая самое безопасное (в пользу закона) мнение, ориентируется больше на откровение, на заповеди Бога или на такие авторитеты, подозрений в богодухновенности которых не высказывает никто (апостолы, отцы церкви), – и в этом смысле на сверхчеловеческое знание, – то иезуиты *делают* бо́льшую уступку человеческому началу в знании – мнению, признают его принципиальную соизмеримость ("соипостасность") знанию. Наконец, пробабилиоризм стремится уже и измерять эту степень знания, заключенную в мнении.

Но иезуитская практика оправдания мнения *внешней вероятностью,* т.е. ссылкой на аналогичные мнения авторитетов, была благоприятной почвой для возникновения всяческих извращений. Конечно, иезуиты признавали, что твердо вероятное мнение это прежде всего мнение большинства учителей церкви. Но, т.к. пробабилизм, по самому своему определению, не требовал сравнения вероятности мнения с вероятностью противоположного мнения, то "не только утверждение, которое большинством богословов признается вероятным, но даже утверждение, которое пять или шесть богословов, известных своей святостью, мудростью и знаниями, считают истинным или вероятным, должно считаться подлинно и твердо вероятным..."[35]. И, наконец, "нельзя отрицать, что даже один автор может высказать мнение подлинно вероятное: а именно, если серьезный автор, имеющий большую известность, исследует какой-либо вопрос серьезно, тщательно и профессионально и т.д."[36]. Подобное неопределенно широкое понимание вероятного мнения на практике оборачивалось казуистическими трюками и нередко полным произволом

---

[34]Это соответствовало общей программе янсенизма, как возврату "к началам" христианства: к Августину, к св. отцам в догматике (вопрос о природе благодати), в церковной практике (вопрос о частых причащениях).

[35]*Noldin H.* Op. cit. P. 237.

[36]Ibid.

в оправдании или осуждении любого мнения. Иезуитская практика подвергалась резкой критике с разных сторон. В Англии против нее решительно выступали так называемые латитудинаристы. Под этим именем примерно с 1650 г. объединилась широкая группа английских интеллектуалов, стремившихся на принципах своеобразного экуменизма к преодолению трагических религиозных конфронтаций XVII в. Для латитудинаризма была характерна антицерковная (антикатолическая) направленность, умаление роли св. отцов в учении церкви, сознательное пренебрежение догматическими вопросами и выдвижение на первый план вопросов моральных. Многие из латитудинаристов или сами участвовали в научном движении XVII в. или сочувственно относились к нему: (Р. Бойль, Дж. Тиллотсон, Дж. Вилкинс, Т. Мор, Дж. Гланвилл и др.). Поэтому немало усилий затрачивалось латитудинаристами для построения *естественной теологии* – систематического изучения свидетельств о Боге, находимых наукой как в природе, так и во внутренней духовной жизни человека[37]. В сфере морали латитудинаристы критиковали иезуитов именно за переоценку того, что одни мнения могут быть более вероятными (в смысле, более правдоподобными), чем другие. Сами латитудинаристы пытались культивировать некоторую систему исчисления пользы для человека от тех или иных его действий. "Индивидуум должен был вычислить пользу и ущерб от различных способов действия, стараясь максимизировать общую сумму счастья в этом мире и в другом (загробном – *В.К.*) ... – пишет Б. Шапиро. – Они (латитудинаристы – *В.К.*) противопоставляли свой метод казуистическим понятиям вероятности (т.е. пробабилизму иезуитов – *В.К.*), которые были связаны с концепциями правдоподобия и авторитета, производными от традиционной риторики. Принятие моральных решений, касающихся религиозной веры или научной оценки[38], требовало рационального исчисления вероятностей, основанного на лучшей и наиболее полной информации и доступной достоверности"[39].

Во Франции пробабилизм иезуитов критиковался янсенистами. Пробабилизм был одним из пунктов драматической борьбы между иезуитами и янсенистами. В 1656–1657 гг. 33-летний Блез Паскаль по просьбе своего духовного наставника Антуана Арно написал знаменитые "Письма к провинциалу", содержащие едкую критику взглядов иезуитов по вопросам о природе благодати и моральной вероятности. Последний вопрос разбирается, в частности, в VI письме. Письмо построено как диалог лояльного "простеца" с отцом-иезуитом. После разбора многочислен-

---

[37]Однако, отношения латитудинаризма с христианством были довольно двусмысленными. Б. Шапиро в вышеуказанной книге пишет: "Уклоняясь от дискуссии о предопределении, благодати и первородном грехе, они обычно считали, что человек от природы наделен началами, побуждающими его искать земного счастья и спасения. В некотором смысле спасение было в руках человека (*Shapiro B.J.* Op. cit. P. 87)".

[38]В смысле моральной достоверности научных гипотез, о которой мы говорили выше.

[39]*Shapiro B.J.* Op. cit. P. 105.

ных примеров, в которых иезуит демонстрирует силу казуистической аргументации "от вероятного мнения", благополучно оправдывая в том числе церковное вымогательство, разврат монахов, и даже убийство, Паскаль с ядовитой иронией замечает (от имени своего представителя – "простеца"): "... Вы хорошо утвердили тех, кто следует вашему вероятному мнению и по отношению к Богу, и по отношению к совести. Так как то, что вы говорите, укрепляет уверенность в соответствии с мнением какого-нибудь основательного богослова (un docteur grave). Вы позволили им также обрести уверенность перед духовниками: т.к. вы обязали священников под страхом смертного греха отпускать им грехи согласно вероятному мнению (sur une opinion probable). Но вы нисколько не утвердили их со стороны гражданских судей, так что они, следуя вашим вероятным мнениям, могут подвергнуться бичеванию и оказаться на виселице. Это, конечно, серьезный недостаток... Если с одной стороны вы судьи духовников, то разве не являетесь вы, с другой стороны, духовниками судей? Ваша власть простирается далеко: обяжите их (судей – *В.К.*) под страхом отлучения от причастия оправдывать преступников, при наличии некого вероятного мнения, чтобы, к великому позору для вероятности, не могло бы случиться так, что те, кого вы сделали невинными в теории, не оказались бы выпоротыми и вздернутыми на виселицу на практике. А без этого как же вы найдете себе учеников?"[40].

Паскаль вместе с янсенистами считал, что в сложных моральных ситуациях следует опираться не на внешнюю вероятность, а скорее на суть дела. Если же вынести решения было действительно трудно, то следовало держаться больше закона, чем противного ему, хотя и вероятного, мнения. Поэтому при разборе сложных вопросов, не поддающихся по тем или иным причинам однозначному решению, мы видим Паскаля все время рассуждающим, взвешивающим вероятности *pro* и *contra*. У Паскаля эта оценка вероятностей имеет еще особое значение. Дело в том, что он занимаался и математической теорией вероятности. Знаменитая переписка Паскаля и П. Ферма о задаче раздела ставки являлась существенным шагом на пути становления основных теоретико-вероятностных схем[41]. Но и в полемических сочинениях Паскаля в этом взвешивании вероятностей чувствуется взгляд математика, пытающегося как-то структурировать сферу вероятного и по возможности выявить ее количественный аспект. Гений Паскаля проявляется здесь в удивительном такте и изяществе, с которым он касается сложных вещей. В этом смысле любопытным фрагментом "Мыслей" Паскаля, где сознательно используются соображения теории вероятностей, является знаменитое "пари на Бога" (фрагмент № 233 – "Infini – rien")[42]. Паскаль, рассуждая по "человеческому разумению", на языке, так сказать, агностика, "без чувств шестых" хочет показать разумность, правдоподобность предположения, что Бог есть. Задача ставится в предельно "внешней форме": предположим, что вас вы-

[40] *Pascal B.* Les provinciales. Gallimard, 1966. P. 128–129.

[41] Эта переписка приведена (в переводе на английский), например, в книге: *David F.N.* Games, Gods and Gambling. L. 1962.

[42] *Pascal B.* Oeurves complètes... P. 550–551.

нуждают биться об заклад: есть Бог или нет[43]. Вероятности и того и другого, для вас, неверующего, равны. Каков ваш возможный выигрыш в этом пари? Проблема обсуждается в несколько этапов. Если вы говорите, что Бог есть, то в случае выигрыша вы получаете "все", т.е. бесконечное блаженство после смерти, а в случае проигрыша, т.е., если Бога на самом деле нет, – не теряете ничего. Если же вы говорите, что Бога нет, то в случае выигрыша вы "остаетесь при своих", а в случае проигрыша теряете вечное блаженство. Вывод очевиден: "Не колеблясь, бейтесь об заклад, что Он есть", – формулирует Паскаль[44]. Далее Паскаль хочет определить – не очень ли мы рискуем. Если бы мы поставили свою (одну) жизнь, имея возможность выиграть две или три другие жизни, причем шансы выигрыша и проигрыша были бы равны, то мы поступили бы разумно. Под возможностью проиграть свою (одну) жизнь Паскаль понимает здесь отказ от жизни, в которой высшим принципом служит удовлетворение собственных эгоистических желаний, подчинение жизни требованиям церковных норм – аскезу. Но обещаемый религией выигрыш есть не две, не три жизни, а бесконечная блаженная жизнь. В этом случае если бы даже один из бесконечного числа шансов был бы за вас, то следовало бы рискнуть. "... Но имеется бесконечность бесконечно блаженной жизни в качестве награды – и один шанс выигрыша против конечного числа шансов проиграть и то, чем вы рискуете, конечно. Везде, где есть бесконечность выигрыша и нет бесконечного количества шансов проигрыша против конечного числа шансов выигрыша, любая конечная часть уничтожается. Нет смысла колебаться, нужно все отдать. И таким образом, если мы вынуждены играть, нужно скорее отречься от соображений сохранить жизнь (опять, жизнь по законам естественного эгоизма – *В.К.*), чем рискнуть ею ради бесконечного выигрыша, столь же вероятного, как и потеря своего ничтожного существования"[45]. Здесь Паскаль, по существу, оценивает *математическое ожидание* нашего пари. Математическим ожиданием случайной величины, принимающей два значения x_1 и x_2 с вероятностями p_1 и p_2, называется число:

$$M = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2$$

Интуитивный смысл математического ожидания: оно есть *среднее* значение случайной величины. Паскаль взвешивал, с одной стороны, вероятности (шансы), а, с другой, выигрыш. Особенно наглядно это видно из последней фразы следующего абзаца того же фрагмента: "... Таким образом, наше утверждение имеет бесконечную силу, поскольку имеется конечное, которое рискуют проиграть, равные шансы проиграть и выиграть, и бесконечность, которую можно выиграть"[46].

---

[43] Чуть выше Паскаль подчеркивает, что христианская вера утверждается не на разуме, а именно на вере, она есть глупость (stultitia – лат.), безумие с точки зрения разума. Но данный фрагмент есть рассуждение, обращенное к "внешним", к неверующим, еще не разочаровавшимся в возможностях человеческого разума.

[44] *Pascal B.* Oeuvres complètes... P. 550.

[45] Op. cit. P. 551.

[46] Ibidem.

Паскаль опять говорит здесь, по существу, о математическом ожидании, которое условно можно записать следующим образом:

$$M = (-a)\cdot\frac{1}{2} + \infty\cdot\frac{1}{2} = \infty$$

a – это конечная "цена жизни", а знак минус значит то, что мы можем ее проиграть;

∞ – бесконечная (положительная) "цена" вечного блаженства;

$\frac{1}{2}$ – равные вероятности для рассуждающего "агностика" достоверности религиозных упований или их ложности.

Но, несмотря на логическую значимость аргументации Паскаля, нужно, конечно, соблюдать историческую справедливость. Идея математического ожидания в рассматриваемом отрывке уже осознана, но еще отнюдь не эксплицирована.

§ 3. ЧАСТОТНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И ПРИНЦИП ЗАКОНОПОСТОЯНСТВА. АПРИОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотренные нами примеры применения вероятностных соображений в XVII в. достаточно выпукло характеризуют интеллектуальную ситуацию времени. Все – и роль категории моральной достоверности в экспериментальных науках, и проблема оценки моральных суждений в нравственном богословии, и опыт вероятностных подсчетов в азартных играх – все подталкивало ученых к созданию теории вероятностей. Любопытно, что связь вероятностного суждения со сферой мнения – *opinio*, – а не знания – *scientia* – также начинает, благодаря переосмыслению этих понятий, играть положительную роль. Мы отмечали выше, что XVII век получает в наследство от предыдущих специфический смысл слова probabilis: оно означает "достойный одобрения", "внушающий доверие" – внушающий доверие, прежде всего, авторитетным экспертам. Другими словами, обратившись к книгам, к научному "преданию", мы должны выяснить вероятность того или иного мнения. Но, как известно, XVI–XVII века отмечены как раз тенденцией *разрыва с традицией*, с преданием, революционным и утопическим стремлением строительства "Новой Атлантиды"[47], новой культуры. Таков драматический разрыв Лютера с церковной традицией католицизма. И в религиозной революции Лютера особенно важен этот мотив: возврат к Писанию, к откровению, к самим истокам христианства, через голову предания к самому началу... Тот же пафос одушевляет и нарождающуюся новую науку: уйти от бесконечного комментирования древних авторов, обратиться к самим

[47]Незаконченное утопическое произведение Ф. Бэкона, написанное в 1623–1624 гг. Описывает благосостояние некого идеального государства, созданного на основе научно-технического прогресса.

"началам" – к природе. Галилей великолепно выразил этот пафос в знаменитом отрывке из своего "Пробирщика". Полемизируя со своим антагонистом Сарси, Галилей пишет: "Сдается мне, что я распознал у Сарси твердое убеждение в том, будто при философствовании необычайно важно опираться на мнение какого-нибудь знаменитого автора, словно наш разум непременно должен быть обручен с чьими-то рассуждениями, ибо в противном случае он пуст и бесплоден. Он (Сарси), по-видимому, полагает, что философия – книга чьих-то вымыслов – такая же как "Илиада" или "Неистовый Роланд" – книги, для которых менее всего значит, истинно ли то, что в них написано. В действительности же, синьор Сарси, все обстоит не так. Философия написана в величественной книге (я имею в виду Вселенную), которая постоянно открыта нашему взору, но понять ее может лишь тот, кто сначала научится постигать ее язык и толковать знаки, которыми она написана. Написана же она на языке математики, и знаки ее – треугольники, круги и другие геометрические фигуры, без которых человек не смог бы понять в ней ни единого слова..."[48]. В этом смысле обращение к природе есть также обращение к книге, но книге, написанной самим Богом. И вероятное мнение, подтвержденное в книге природы, т.е. экспериментально подтвержденное, – есть мнение вероятное в старом смысле слова, т.е. оправданное, принятое некоторым авторитетом, но этим авторитетом выступает в данном случае сам божественный Автор этой книги, Творец мира. С точки зрения теории вероятностей это значит наличие в повторяющихся событиях некоторых устойчивых частот. Т.е., если в n последовательно проведенных испытаниях некоторый признак A появился $m_A(n)$ раз, то *частота* этого признака

$$r_A(n) = \frac{m_A(n)}{n}$$

близка к некоторому числу при всех доступных n. *Вероятность* признака в этом смысле есть среднее значение частоты появления этого признака.

Однако, главным остается вопрос: будет ли эта частота устойчива? Будет ли она с возрастанием n стремиться к некоторому пределу или будет флуктуировать? Если имеется последний случай, то тогда вероятности нельзя уже приписать никакого значения. Лейбниц, прекрасно чувствовавший всю эту проблематику, подчеркивал, что здесь для построения науки необходим некоторый дополнительный *принцип*. В своих "Новых опытах" в одной из глав, посвященных вероятным суждениям, он пишет: "Но от вероятностей фактов перейдем к вероятности мнений относительно вещей, не доступных нашим чувствам. Подобные вещи не допускают никакого свидетельства. Таковы вопросы о существовании и природе духов, ангелов, демонов и т.д., о материальных субстанциях, находящихся на планетах и в других обиталищах обширной вселенной, наконец о способе действия большинства явлений природы. Относительно всех этих вещей мы можем составлять только догадки, где *аналогия* является главным правилом вероятности, ибо, поскольку они не могут быть за-

[48] *Галилей Г.* Пробирных дел мастер. М., 1987. С. 41.

свидетельствованы, они могут казаться вероятными лишь в той мере, в какой они более или менее соответствуют установленным истинам"[49]. Все это полностью справедливо и по отношению к частотной вероятности. Здесь, несмотря на то, что мы можем производить некоторые эксперименты для наблюдения за частотами, выводы о вероятности, тем не менее требуют применения особого принципа – лейбницевской аналогии. Это непосредственно связано с тем, что речь идет о бесконечности, т.е. о том, что никоим образом "не доступно нашим чувствам". Любые, сколь угодно большие наблюдения над поведением частот не могут сами по себе дать ответа на вопрос: к чему будет стремиться частота, когда число испытаний будет стремиться к бесконечности. Наконец, если бы даже мы имели возможность произвести эту, конкретную бесконечную серию испытаний и получили бы некоторую частоту, то совсем не очевидно, почему другая бесконечная серия испытаний должна давать то же значение предельной частоты. Лейбниц видит это очень четко. В конце рассматриваемого параграфа он пишет: "...все эти взгляды вполне соответствуют наблюдаемой нами *аналогии вещей, которую я распространяю за пределы наших наблюдений*, не ограничивая последних известными частями материи или известными видами действий, причем единственное имеющееся здесь различие – это различие между большим и малым, между заметным и незаметным (подчеркнуто мной – *В.К.*)"[50]. – Аналогия распространяется "за пределы наблюдений", т.е. в случае частотной вероятности на актуально бесконечную последовательность испытаний. Мы видим, что понимать вероятность как предел частот значит, по существу, (явно или неявно) использовать лейбницевский *принцип законопостоянства*, обсуждавшийся нами в главе о дифференциальном исчислении[51]. А этот принцип, как было там показано, связан с важными мировоззренческими допущениями. Мир, подчиненный этому принципу, есть мир, в котором как бы не происходит ничего нового, "все всегда и везде является таким, как здесь и теперь". В этом мире невозможен никакой разрыв, чудо (по существу, и творчество...), только "органическое", подчиненное непрерывным, аналитическим функциям "произрастание" одного из другого... Даже бог этого мира неспособен вмешаться в свое творение: он заранее должен все рассчитать (бог деизма).

Однако, трудности частотной интерпретации вероятности связаны не только с тем, что они требуют довольно сильных метафизических допущений. Вообще говоря, непонятно, как находить значение этой вероятности. Предположим, мы бросам монету, чтобы определить поведение частоты появления "герба". Это только теоретически, другими словами, с точки зрения некоторого специального понимания вероятности, которое мы будем обсуждать ниже, – вероятность выпадения герба равна 0,5.

---

[49] *Лейбниц Г.В.* Соч. В 4 т. Т. 2. С. 485.

[50] Там же. С. 487.

[51] Не случайно параграф, из которого мы здесь цитировали, полон рассуждений о принципе непрерывности, о том, что "в лунном царстве Арлекина все происходит, как у нас" и т.д.

Если мы придерживаемся частотного определения, мы должны эмпирически по поведению частоты определить эту вероятность. Подход этот имеет свой резон: монета, вообще говоря, несимметрична (начиная с того, что на разных ее сторонах оттиснуты разные рисунки) и поэтому предел частоты совсем не обязательно равен 0,5. Только эксперимент мог бы решить этот вопрос. Но каким образом получить из эксперимента действительное значение вероятности – совершенно непонятно. Предположим, мы бросили монету 1000 раз, и "гербов" выпало 523. Можно ли утверждать, что вероятность выпадения герба равна 0,5? или 0,52? Предположим, что мы продолжали испытания до миллиона и "гербов" выпало, скажем 527232. Можно ли утверждать, что вероятность выпадения герба равна 0,52? *или 0,5? Или, хотя бы, что эта вероятность с точностью до первого* знака равна 0,5? На эти вопросы не мог ответить ни XVII век, ни наш. Выдвинутая в 1914 г. Р. Мизесом частотная интерпретация вероятности[52], несмотря на широкую дискуссию, так и не смогла обеспечить приемлемого определения вероятности[53]. Определить, что такое предельная частота с точки зрения допредельных частот без специальных – и довольно искусственных – допущений не представляется возможным.

Но есть и другой подход к пониманию вероятности, не частотный, а тот, при котором простейшим ("элементарным") событиям *априори* назначаются некоторые вероятности. Так и в XVI, и в XVII веке этот подход используется при решении задач с бросанием кубика. У Лейбница, например, в "Новых опытах" *находим следующее* рассуждение: "Предположим, например, что, кидая две кости, один из игроков выигрывает, если он получил 7 очков, а другой – если он получит 9 очков. Спрашивается, в каком отношении находятся между собой их шансы выиграть? Я утверждаю, что шансы второго равняются лишь двум третям шансов первого, так как первый может с двумя костями составить 7 тремя способами, а именно при помощи 1 и 6, или 2 и 5, или 3 и 4, а второй может получить 9 очков лишь двумя способами, а именно при помощи 3 и 6 или 4 и 5. *И все эти способы одинаково возможны.* Поэтому шансы, относящиеся друг к другу, как числа равных возможностей, относятся между собой, как 3 к 2 или как 1 к 2/3 (подчеркнуто мной – *В.К.*)"[54]. Здесь наш главный вопрос именно об этой равновозможности: *на основании* чего она утверждается? Эта равновозможность является следствием равновозможности выпадения любой грани *одного* кубика. Но на чем основана эта последняя? Заметим, что эта равновозможность превращается в теории вероятностей в равновероятность: выпадение каждой грани кубика имеет одну и ту же вероятность – 1/6. Через эту вероятность мы можем вычислять потом вероятности более сложных событий. Момент этот принципиален. Теория вероятностей оперирует, обычно, с некоторыми *априорными вероятностями*, и вопрос об их происхождении находится уже,

---

[52] См.: *Мизес Р.* Вероятность и статистика. М.-Л., 1930. Изд. 5. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2009.

[53] Критику теории Мизеса см., например: *Крамер Г.* Случайные величины и распределение вероятностей. М., 1947; *Рассел Б.* Человеческое познание. М., 1957; Математика, ее содержание, методы и значения. Т. 2. М., 1956.

[54] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 2. С. 479.

собственно, вне математики. Вот что пишет об этом А. Пуанкаре: "Полное определение вероятности есть, тем самым, род порочного круга: как узнать, что все случаи равновероятны? Математическое определение здесь невозможно; мы должны в каждом применении делать соглашения (conventions), говоря, что мы рассматриваем такие-то и такие случаи как равновероятные. Эти соглашения не совсем произвольны, но они ускользают от сознания математика, который и не должен их исследовать, как только они уже приняты. Таким образом, целое задачи о вероятности распадается на два этапа исследования: первый, так сказать, метафизический, который оправдывает то или иное соглашение; и второй, математический, который применяет к этим соглашениям правила исчисления"[55]. Теория вероятностей, как математическая дисциплина, особенно после формулировки ее в аксиоматической форме А.Н. Колмогоровым в 1933 г., может быть отнесена ко второму этапу из тех, о которых говорит Пуанкаре. Но почти в любом приложении, почти в любой элементарной задаче, решаемой с помощью исчисления вероятностей, мы должны описать сначала так называемое "пространство элементарных исходов" и присвоить им – априорные! – вероятности. Другими словами, мы должны дать некоторую *интерпретацию* реальной ситуации, построить некоторую ее *модель*. Например, в случае бросания кубика пространство элементарных исходов состоит из шести исходов, вероятности каждого из которых равны 1/6. Это приписывание априорных вероятностей имеет действительно "метафизическую" природу, связано с более или менее глубокими, с более или менее осознанными представлениями о природе и познании в целом. Мы не случайно употребляли здесь термин *априорная вероятность* – тот же самый, который употреблялся для оценки достоверности мнения (см. параграф 1). Теория вероятностей как бы расчистила, упорядочила, формализовала сферу оценки мнений, вытеснив все интуитивное – не в смысле просто созерцания, а в смысле прозрения, в смысле сверхчувственного, – все связанное с догадкой, провидением на границу себя самой, в свои собственные основания. Вся математическая теория представляет собой лишь надстройку над этим основанием, калькуляторски-рассудочную рационализацию, имеющую свой корень в целостной структуре познающего разума. Для математики XVII в., которая еще не мыслила себя как только некий абстрактно-аксиоматический *аппарат*, внимание к этим обоим этапам, о которых говорит Пуанкаре, в решении вероятностных задач было естественно и значимо. Поэтому нам следует внимательнее рассмотреть аргументы, используемые при априорных оценках вероятности.

[55] *Poincaré H.* Calcul des probabilités. Paris, 1912. P. 28–29.

§ 4. ПРИНЦИП НЕДОСТАТОЧНОГО ОСНОВАНИЯ. "МИР ОПРАВДАННЫХ ОЖИДАНИЙ"

Пространство элементарных событий ("элементарных исходов") состоит, обычно, из событий, вероятности которых считаются равными[56]. Например, при бросании симметричной монеты мы принимаем пространство элементарных исходов состоящим из двух событий, "орел" или "решетка", оба с вероятностями 0,5. Аналогично, при бросании симметричного кубика – шесть разных исходов, каждый с вероятностью 1/6. Главный вопрос сейчас: на основании чего мы считаем элементарные события равновероятными? Вообще, говоря, это, конечно, не так. У всякого реального кубика и реальной монеты есть асимметрия: в форме, в плотности материала, в условиях маркировки различных сторон (разное количество точек, например, на разных гранях кубика). Кроме того, практически невозможно обеспечить равные условия при разных бросаниях. Поэтому, нужно ясно себе представлять, что приписывая равновероятность разным элементарным исходам, мы имеем дело с некоторой умственной моделью, соответствие которой реальности достаточно спорно. Но почему же традиционно избирается именно эта модель? Почему элементарным исходам приписывается равная вероятностью? Обычно, это объясняется с помощью так называемого *принципа недостаточного основания* или *принципа индифферентности*. Его можно сформулировать следующим образом: если у нас отсутствуют основания считать один элементарный исход более вероятным, чем другой, то мы можем считать их равновероятными. Это утверждение, на первый взгляд такое естественное, порождает довольно сильные (и парадоксальные) следствия. Прежде всего, из него следует, что при полном отсутствии информации о каком-то событии или факте вероятность этого факта равна 0,5 ("fifty-fifty"). Но давно уже были осознаны еще более поразительные парадоксы. Если мы предположим, например, что на планетах системы альфа Центавра существует жизнь, то как мы можем ответить на вопрос: существуют ли там плотоядные? Мы не располагаем никакой информацией на этот счет. Значит ли это, что вероятность иметь на планете плотоядных будет 0,5? И если так, то можно ли тогда сказать, что среди всех имеющих жизнь планет в среднем половина будет иметь представителей плотоядных? Имеются и еще более парадоксальные примеры. Предположим, что мы вообще ничего не знаем об условиях жизни на планетах альфы Центавра (или на каких-либо других планетах Вселенной). Тогда вероятность того, что на планетах *нет* кошек равна 0,5 и то же самое верно для змей, пчел и т.д. По правилам исчисления вероятностей, вероятность того, что на планете нет ни кошек, ни змей, ни пчел, равна произведению вероятностей – $0{,}125 = (0{,}5)^3$. И рассуждая аналогичным образом для большого числа видов мы можем придти, тем самым, на основании полного незнания к утверждению, что

[56] Речь идет о простейших, конечных задачах – бросание одного или нескольких кубиков, бросание монет и т.д., с которых и начиналась теория вероятностей в XVII в.

вероятность того, что на рассматриваемых планетах отсутствует жизнь, довольно мала[57]. Эти парадоксы показывают, что с принципом недостаточного основания нужно обращаться довольно осторожно.

Особенность применения принципа недостаточного основания состоит в том, что, благодаря ему, мы делаем *незнание основанием знания*. Однако, парадоксы, постоянно сопровождающие эти конструкции, показывают, что основание это довольно шатко. С XVIII в. (с работ Бюффона) соображени "равновероятности" начинают применяться к геометрическим объектам. В этих задачах предполагается, что точки равномерно распределены в рассматриваемом отрезке (плоской фигуре, объеме) и вероятность попадания точки в какой-нибудь подотрезок (под-область, под-объем) пропорциональна длине (площади, объему) этого под-отрезка (под-области, под-объема). Однако, этих, казалось бы, очень естественных соображений, оказывается недостаточно для решения некоторых задач. Выбрать однозначно пространство элементарных исходов, в котором точки распределены равномерно, оказывается иногда невозможным. Таков, например, парадокс Бертрана (напечатанный впервые в 1889 г. в книге Ж.-Л. Бертрана "Исчисление вероятностей"). В некоторой окружности случайным образом выбирается хорда. Требуется найти вероятность того, что эта хорда длиннее стороны вписанного в данную окружность правильного треугольника. Здесь, в зависимости от того как мы будем интерпретировать пространство элементарных исходов (как середины хорд, равномерно распределенных, внутри круга, или как концы хорд, равномерно распределенных на окружности и т.д.), мы будем получать разные ответы: и 0,25, и 1/3, и 0,5[58].

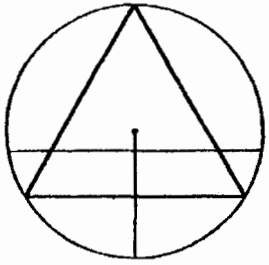

Рис. 12

Из чисто логической постановки задачи совсем не ясно какой способ интерпретации является более *естественным*. Не спасает положения, по нашему мнению, и то замечание, которым сопровождается обсуждаемый парадокс в вышеуказанной книге. Рассматривая возможность различных интерпретаций равновероятности, автор пишет, что выбор между ними

[57]Примеры взяты из статьи: *Dotterer R.H.* Ignorance and equal probability // Philosophy of science, July, 1941. V. 8. N 3. P. 297–303.

[58]См.: *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М., 1990. С. 50–51.

"не всегда возможен на основе лишь логических рассуждений без учета данных практики"[59]. Но какие бы данные практики могли бы помочь нам здесь? Опыты по случайному выбору хорд? Но мы уже обсуждали в предыдущем параграфе бессилие частотной интерпретации вероятности: никакое количество опытов не может само по себе подтвердить (или опровергнуть) какое-либо конкретное значение вероятности.

Мы имеем два подхода к теории вероятностей, противопоставленных один другому. Один – частотный, где вероятность понимается как предел частоты в конечных испытаниях. Трудности этой схемы мы уже отмечали. Здесь известны исходы конечного числа опытов, известны конечные частоты, но неизвестна предельная частота, само существование которой требует введения дополнительных принципов. Второй подход – априорные вероятности – в некотором смысле симметричен первому. Теперь нам известна вероятность, т.е. как бы предельная частота – но не известны *реальные исходы* испытаний, конечные частоты[60]. Первый подход идет от действительных опытов с реальными материальными объектами. Второй – описывает ситуацию в своеобразном "мире сущностей". В этом мире существуют идеально симметричные монеты, кубики и еще нечто, трудно выразимое, – равноправие различных бросков монет, кубиков и т.д., без чего утверждения о равновероятности были бы бессмысленными. Этот "мир сущностей" в определенном смысле аналогичен миру объектов классической механики, возникающему в XVII в. в трудах Галилея, Декарта, Ньютона. В мире классической механики мы также имеем дело с идеализированными "прообразами" реальных вещей – идеально гладкие плоскости, идеально упругие шары, точечные массы и т.д. В диалогах Галилея в особенности рельефно выступает сложнейшая философская проблема обоснования адекватности конструкций теоретической механики, "естественному" материальному миру[61]. Мир теории вероятностей ставит аналогичную проблему. Однако, здесь появляются дополнительные сложности. В галилеевском мире классической механики все, вообще говоря, детерминировано. В идеальном же мире теории вероятностей возможны *случайные события*. Собственно, мы не можем предсказать исход случайного события в рамках нашего теоретико-вероятностного мира. В этом, как было сказано, и состоит техническая (и фундаментально-теоретическая) проблема генератора случайных чисел. Но, постулируя, что случайные события возможны, мы подчиняем их жестко-

---

[59] Там же. С. 50.

[60] Не случайно в современном математическом моделировании, использующем теорию вероятностей, построение *генератора случайных чисел* является всегда существенной проблемой. Он должен представлять собой парадоксальный "механизм свободы".

[61] См.: *Галилей Г.* Диалог о двух главнейших системах мира. М.; Л., 1948; *Галилей Г.* Беседы и математические доказательства // Соч. Т. 1. М.; Л., 1934; *Koyré A.* Etudes galiléennes. Paris, 1939.

Гайденко П.П. Эволюция понятия науки (XVII–XVIII вв.). М., 1987; *Ахутин А.В.* История принципов физического эксперимента (от античности до XVII в.). М., 1976.

му аксиоматическому требованию. Например, в схеме для бросаний монеты мы полагаем, что в *любой* бесконечной серии бросаний частоты появления герба будут стремиться к 0,5. В нашем теоретико-вероятностном мире допускаются случайные события, допускается, так сказать, свобода. Однако, исход этих событий предрешен. Наше теоретико-вероятностная Utopia представляется своеобразным "миром оправданных ожиданий..."

Аналогия с миром галилеевской механики оказывается неслучайной и может быть продолжена. Фундаментальным положением классической механики является закон инерции. Интересно то, что этот закон никем не был открыт в духе того, как были открыты, например, кольца Сатурна или, скажем, месторождение алмазов в Якутии. Закон этот является необходимым условием самой *мыслимости* конструктов теоретической механики. Закон этот осознается в чисто *умственных экспериментах* Галилея и Декарта. В теории вероятностей аналогом этого закона выступает принцип равновероятности. Точнее говоря, принцип недостаточного основания выступает общим логическим началом и для закона инерции, и для равновероятности элементарных исходов в теории вероятностей. Первое в особенности видно из галилеевских умственных экспериментов, подводящих к формулировке закона инерции[62]. Рассматривая движение шарика по (идеальной) наклонной плоскости вверх и вниз, Галилей подчеркивает, что замедление и ускорение в движении шарика обусловлены именно наклоном плоскости. Чем больше этот наклон, тем сильнее проявляется замедление или ускорение. И, обратно, чем меньше этот наклон, тем меньше его влияние на исходное движение. В пределе, делая плоскость горизонтальной, мы получаем сохранение равномерного прямолинейного движения – закон инерции[63]. Другими словами, *устраняя основания* для изменения движения, Галилей приходит к его сохранению, т.к. все рассуждение неявно предполагает *закон достаточного основания* Лейбница: всякое изменение должно иметь некое основание. Но именно по той же причине элементарным исходам в теоретико-вероятностных схемах приписываются одинаковые вероятности. Для абсолютно симметричного кубика, в силу самого его определения, у нас нет оснований считать выпадение одной грани более вероятным, чем другой, – поэтому вероятности выпадения каждой грани считаются равными 1/6. И в том, и в другом случае мы встречаемся с парадоксальной логикой *принципа недостаточного основания*: незнание оказывается опорой. Чистое незнание в силу самой природы своего безразличия оказывается *незыблемым* основанием знания.

---

[62]См.: *Галилей Г.* Диалог о двух главнейших системах мира. М.; Л., 1948. С. 118–119.

[63]С известными оговорками относительно того, что у Галилея опыт предполагается происходящим в центральном поле гравитационной силы.

§ 5. СВОБОДА И ВЕРОЯТНОСТЬ

Мир теории вероятностей есть мир, в котором допускаются случайные события, недетерминированность и, следовательно, некоторая *свобода*. Но последнюю можно мыслить по-разному. На какое же понимание свободы ориентируются теоретико-вероятностные схемы, входящие в математику в XVII в.? XVI–XVII века раздираемы спорами о природе свободы, божественного предопределения и благодати. На одном полюсе – лютеровское сочинение "О рабстве воли" (1525). С неумолимой последовательностью через все диалектические сложности соотношения свободы и необходимости проводит Лютер мысль о примате божественного Провидения. "...Все, что мы делаем, все, что совершается, даже если это и кажется нам изменчивым и случайным, свершается, однако, если принимать во внимание Божью волю, необходимо и неизменно"[64]. "Итак, христианину, прежде всего, необходимо и спасительно знать, что Бог ничего не предвидит по необходимости, а знает все, располагает и совершает по неизменной, вечной и непогрешимой Своей воле. Эта молния поражает и начисто испепеляет свободную волю; поэтому те, которые собираются утверждать существование свободной воли, должны отрицать существование этой молнии, или доказать, что она не есть она, или избавиться от нее еще каким-либо способом"[65]. В кальвинизме эта логика приводит к отрицанию возможности спасения всех людей благодаря искупительной жертве Иисуса Христа: одни от века предопределены к спасению, другие – к осуждению.

Особым типом детерминизма являются лейбницевские "Опыты теодицеи о благости Божией..." Лейбницевская теология есть вариант интеллектуалистской теологии, где, благодаря акценту на премудрости Бога, детерминирована оказывается не только человеческая, но и божественная воля: она подчинена закону достаточного основания. Особенно настойчиво спорит Лейбниц с концепцией *свободы безразличия*[66]: "Таким образом, существует свобода случайности, или некоторым образом безразличия, если только, говоря о *безразличии*, имеют в виду, что ничто не принуждает нас ни к одной, ни к другой стороне; но нет *безразличия равновесия*, т.е. такого, где все было бы совершенно равно как в отношении к одной, так и в отношении к другой стороне, так что не существовало бы большей склонности к одной какой-либо стороне..."[67]. "...Поэтому тот же *случай с Буридановым ослом, находящимся между двумя охапками сена*, равно привлекающими его в ту и в другую сторону, есть вымысел, не имеющий места во вселенной, в порядке природы... Верно и то, что, если бы такой случай был возможен, то надо сказать, что осел издох бы от голода; но в сущности вопрос ставится о невозможном, по крайней мере, если Бог не совершит этого нарочно. Потому что вселенная не де-

---

[64] *Лютер М.* О рабстве воли // Эразм Роттердамский. Философские произведения. М., 1987. С. 309.

[65] Там же. С. 308.

[66] *Против точки зрения иезуитов (см. ниже).*

[67] *Лейбниц Г.В.* Соч.: В 4 т. Т. 4. М., 1989. С. 158.

лится на две половины плоскостью, рассекающей осла посредине в длину, так чтобы и та, и другая половина были совершенно равны и подобны... Ибо ни части вселенной, ни внутренности животного не похожи и неравномерно расположены по обеим сторонам этого вертикального сечения. Таким образом, внутри и вне осла существует множество не замечаемых нами вещей, которые и вынуждают его направляться в одну сторону скорее, чем в другую. И хотя человек свободен, а осел нет, но на том же самом основании остается верным и в отношении к человеку, что случай полного равновесия между двумя сторонами невозможен и что ангел или, по крайней мере, Бог всегда мог бы представить основание, почему человек склонен принять избранную им сторону, указав причину или мотив, побуждающий человека на самом деле склониться к этой стороне, хотя этот мотив очень часто бывает сложным и нам самим непонятным, так как переплетение причин, связанных одна с другою, простирается очень далеко"[68]. Любопытно, что, желая доказать возможность своеобразной свободы безразличия, Лейбниц последовательно изгоняет возможность любой свободы. Лейбницевский мир детерминизма и асимметрии, которая и является как бы гарантом его развития, движения, – трудно совместить с миром теории вероятностей, с его фундаментальной равновероятностью различных исходов.

Особого понимания свободы держатся янсенисты. Это понимание идет от концепции епископа Ипра Янсениуса (откуда и имя "янсенисты"), изложенного им в многотомном сочинении "Августин" (1640). Эта работа представляет собой комментарий на сочинения одного из знаменитейших отцов церкви IV–V вв. Аврелия Августина. Свобода понимается здесь как отсутствие принуждения. Однако, падшая человеческая душа способна обрести эту свободу только при помощи божией благодати. Душа не может сопротивляться этой благодати, но только с помощью этого подчинения она оказывается свободной от низких чувственных страстей и демонических влияний. Божественная благодать как бы изнутри очищает и облагораживает человеческую волю. Подчинение высшему оказывается необходимым условием свободы от низшего – в этом и состоит парадокс. Это и вызывало нарекания и споры. В этой концепции отражался вполне определенный духовный и психологический опыт, уже почти потерянный к XVII в. Янсенисты и были как раз одушевлены возрождением этого "исходного" понимания христианства.

Детерминистскому пониманию свободы противостоят гуманистическое и... понимание иезуитов. Ярким представителем первого является Эразм Роттердамский, выразивший свою позицию в полемическом сочинении "Диатриба, или рассуждение о свободе воли" (1524), направленном против Лютера. Позиция Эразма характерна для века Реформации. Эразм, хотя и апеллирует нередко к традиции, к традиционному пониманию свободы воли в христианстве, однако, во всей его духовной установке чувствуется глубокая внутренняя свобода от послушания этой традиции. Точка опоры Эразма – здравый смысл. Именно с этой точки зрения – не

[68] Там же. С. 159–160.

очень глубокой, заметим, но без сомнения значимой и серьезной – оценивает он аргументы за и против свободной воли. Эразм занимает своего рода "умеренную" позицию по этому вопросу. Во-первых, здравый смысл свидетельствует о головокружительной сложности вопроса и об ответственности тех или иных формулировок здесь. Из этого делается вывод о необходимости сознательного смирения перед тайнами божественной Премудрости: "...было бы неблагочестивой чрезмерностью вторгаться в эти скрытые от нас вопросы, чтобы не сказать – излишние: предвидит ли Бог не по необходимости, способна ли наша воля сделать что-либо по отношению к тому, что касается вечного спасения, или она только подчиняется действию благодати? Делаем ли мы все, что делаем – хорошее и плохое – по чистой необходимости, или же скорее мы претерпеваем воздействие?"[69] Во-вторых, содержательная же позиция Эразма ограничивается тем естественным с точки здравого смысла соображением, что многочисленные примеры из истории общения человека с Богом, описанные в Библии, будут просто бессмысленны, непонятны, если мы откажем человеку в каком-то минимуме свободы. Например, как понимать предупреждение Бога, обращенное к Каину, перед убийством брата Авеля, если нет свободы выбора у человека: "И сказал Господь (Бог) Каину: почему ты огорчился? И отчего поникло лицо твое? Если делаешь доброе, то не поднимаешь ли лица? а если не делаешь доброго, то у дверей грех лежит; он влечет тебя к себе, но ты господствуй над ним"[70].

Любопытно, что теология свободы иезуитов, яростно оспаривавших взгляды янсенистов и реформаторов, в определенной степени близка гуманистической. Главным здесь было введенное испанским иезуитским теологом XVI в. Луисом Молиной понятие "индифферентности" (или безразличия).

В своем комментарии к Фоме Аквинскому он пишет: "В другом смысле можно брать свободу выбора как противоположность необходимости: в этом смысле тот называется поступающим свободно, кто, имея все необходимое для действия, может действовать или не действовать, или так, что может действовать и противоположным образом... Поэтому свободный выбор (чтобы его можно было признать у кого-либо) есть не что иное, как воля, в которой формально наличествует вышеразъясненная свобода, предваряемая суждением разума. Поступающий свободно в рамках этого определения отграничен от действующего по природе, который не может действовать или не действовать, но когда все необходимое наличествует для действия, с необходимостью действует и так действует, что не может действовать противоположным образом... Но отсюда следует, что воля приобретает качество свободного выбора не применительно ко всем своим действиям, а только по отношению к тем, которые она может не совершать. Если же она может одновременно совершить с безразличием (indifferenter) либо это, либо противоположное действие, то име-

[69] *Роттердамский Эразм.* Философские произведения. М., 1987. С. 221.

[70] Библия: Бытие 4,6–7. У Эразма см. в указан. соч. С. 238.

ется также и свобода в отношении к виду действия, имеющая характер полной и совершенной свободы"[71].

Определения действительно являются продуктом новой культуры, новой духовной ситуации, которая зарождается в XVI–XVII столетии. Иезуиты, чуткие к этому новому духу времени, хорошо понимают, что человеческий разум и воля являют примеры беспрецедентной активности, и что, потребовав от них слишком большого смирения, можно не получить в результате ничего... Подчеркивание свободы безразличия служит акцентированию человеческой самодеятельности, спонтанности, независимости в принятии решений ни от какой инстанции. В то же время, по сравнению с концепцией свободы янсенистов, мы видим у иезуитов как бы потерю вертикального измерения в спиритуалогии. Для янсенистов свобода – *не данность, а предмет духовного усилия и дар*. В соответствии с евангельским "Познайте Истину, и истина сделает вас свободными"[72]. Обретение свободы *в плоскости* данного мира немыслимо без частичного выхода из этой плоскости в направлении "духовной вертикали" – к более нравственной, святой жизни, т.е. как подчинение (несвобода!) высшим моральным ценностям и заповедям. У иезуитов же свобода выбора, свобода безразличия, в некотором смысле, гарантирована уже здесь, в плоскости этого мира[73] ... Свобода янсенистов есть всегда "свобода для": свобода для высшей жизни, для Бога. У иезуитов свобода понимается более внешне, более умеренно: скорее "свобода от", свобода от принуждения, голая возможность выбора.

Нетрудно видеть, что именно это последнее понимание свободы в богословии иезуитов является как бы логическим прообразом принципа недостаточного основания, служащего базисным положением теоретико-вероятностных конструкций. Ведь эта свобода безразличия, свобода выбора, но выраженная не в терминах собственно свободы, а через коррелятивный термин случайности, т.е. не с точки зрения выбирающего субъекта, а с внешней точки зрения – субъекта, наблюдающего за выбором другого, – и есть как раз равновозможность, равновероятность возможных выборов. Всякая неравновозможность в исходе выбора значила бы уже некий момент принуждения и отсутствия того безразличия, которое представляет собой ядро концепции иезуитов. Мир теории вероятностей

---

[71] *Molina L.* Commentaria in Prima Divi Fhomae portem... Lyon. 1593. P. 175. В иезуитском учебнике, на который мы уже не раз ссылались, читаем: "Свобода воли человека называется свободой безразличия, потому что воля при наличии всего, требуемого для действия, пребывает безразличной, т.е. не принуждается к одному (к действию), но может действовать или бездействовать, действовать так, или иначе; называется также свободой выбора, потому что, по определению, может выбирать между тем и другим. Безразличие противополагается направленности на одно. Безразличие, присущее человеческой воле и сущностно составляющее ее свободу, есть безразличие активное, благодаря которому воля может сама себя направить на одну из противоположностей или на один из различных вариантов действия" *(Noldin H.* Op. cit, P. 24).

[72] Еванг. От Иоанна 8,32.

[73] Хотя, конечно, обретение ее также требует усилия человека и помощи Бога.

есть мир теоретических конструктов, бесконечно далеких от действительного материального мира. Но мы знаем, что в этом мире аксиоматически допускается случайность, допускается некоторая свобода. И вот эта свобода имеет, так сказать, вполне определенное качество. Лейбниц, как мы видели выше, считал, что ситуация Буриданова осла не реализуется в мире ("если Бог не совершит этого нарочно"). Мир принципиально асимметричен. В теоретико-вероятностном же мире каждый гипотетический свободный субъект находится именно в ситуации Буриданова осла. Но симметрия его положения выражается не столько через геометрические термины – "две половины вселенной по разные стороны плоскости, рассекающей осла посередине в длину", – а через постулируемую *равновероятность* двух (или больше) возможных исходов. Симметрия эта выражена не столько в причинной форме – равные геометрические условия дают равную вероятность, – сколько в целевой форме: вероятности, т.е. так или иначе, пределы частот в испытаниях, – *должны* быть одинаковыми. Сама же идея равновероятности *питается* той интуицией свободы, которая столь четко была выражена иезуитскими богословами XVI–XVII столетия: свобода безразличия[74]. За абстрактными конструкциями математических дисциплин здесь, как и во многих других областях науки, внимательный анализ позволяет увидеть *лицо* человека в исторической конкретности его фундаментальных и интимнейших духовных предпочтений...

Теория вероятностей считается частью математики. Однако та принципиальная роль, которую играют эпистемологические проблемы в основаниях этой науки заставляют не согласиться с этим широкораспространенным заблуждением. Вслед за А. Пуанкаре (см. выше его высказывание) мы готовы признать, что *лишь* математическая, формализованная часть теории вероятностей принадлежит собственно математике. Все же вопросы, связанные с самими принципами формализации, с возможностью применения теории вероятностей "к жизни" находятся уже вне математики. Как целое, теория вероятностей по логическому статусу своего существования играет в науке роль, аналогичную роли классической механики. По нашему глубокому убеждению, которое мы отчасти пытались объяснить, теория вероятности в рамках новоевропейской культуры имеет и *значимость*, вполне сравнимую со значимостью классической механики в нашей цивилизации.

---

[74] Любопытно, что и Декарт, обсуждая проблему согласования свободы выбора и божественного предопределения в "Первоначалах философии", акцентирует в человеческой свободе все ту же черту *безразличия*. Подчеркивая непостижимость для нашего конечного ума этой проблемы во всей полноте, он пишет: "...однако нашего понимания недостаточно для усмотрения того, каким образом он (Бог) оставил свободные поступки человека *непредопределенными; в то же время* мы настолько осознаем присутствие в нас свободы и безразличия, что ничего не способны постичь с большей очевидностью и совершенством" (*Декарт Р.* Соч. В 2 т. М., 1989. Т. 1. С. 330).

§ 6. СОМНЕНИЯ Д'АЛАМБЕРА

Неизбежность принятия некоторых специальных принципов, имеющих метафизическую природу, для оправдания исчисления вероятностей особенно ярко подчеркивали критики этого исчисления. Одним из них был знаменитый математик и философ-просветитель Ж. Д'Аламбер (1717–1783). История эта относится, собственно, к XVIII веку, однако возражений,подобных тем, которые выдвигал Д'Аламбер, было достаточно и в XVII[75]. Д'Аламбер – один из издателей знаменитой "Энциклопедии" – поместил, в частности, в четвертом ее томе (1754) статью "Орел или решетка" ("Croix ou pile"), в которой оспаривал обычные схемы теории вероятностей. Так, например, изучается вероятность появления хотя бы одного герба при двух бросаниях монеты. Обычно считается, что все возможные исходы равновероятны:

Первое бросание	*Второе бросание*
орел	орел
орел	решетка
решетка	орел
решетка	решетка

Так как хотя бы один "орел" появляется в трех из четырех исходов, то искомая вероятность считается равной 3/4. Д'Аламбер оспаривает эту схему. Он считает, что если следовать собственному смыслу игры, то нужно учитывать, что игра прекращается с первым выпадением герба. Поэтому случай "орел – орел" вообще не имеет места. По Д'Аламберу таблица исходов будет выглядеть следующим образом:

Первое бросание	*Второе бросание*
орел	
решетка	орел
решетка	решетка

Т.е. испытание продолжается только до первого выпадения "орла". Если считать эти случаи равновероятными, – что Д'Аламбер и делает в статье "Орел и решетка", – то вероятность будет 2/3 (а не 3/4). Позже, полемизируя по этому вопросу, Д'Аламбер не настаивал на равновероятности исходов своей схемы, но настойчиво отрицал равновероятность классической схемы. Его мнение основывалось на том, что существуют обусловленные жизненной практикой и широко распространенные оценки ожиданий случайных событий, которые отнюдь не совпадают с предписываемыми теорией вероятностей. Так, если мы совершаем последовательные испытания, – например,бросаем монету, – и если у нас, например, выпало 99 раз "решетка", то вероятность выпадения "орла" в следующем испытании будет выше, чем вероятность выпадения "решет-

[75]См., например, спор Паскаля и Ферма о разделе ставки при игре трех игроков // *David F.N.* Games, Gods and Gambling.... P. 239–250.

ки". Так подсказывает нам наша "интуиция". Классическая же схема считает, что в каждом испытании вероятности "орла" и "решетки" одинаковы. Именно такого рода аргументы приводит Д'Аламбер против классической схемы. Он оспаривает не теорию вероятности, но ее конкретные модели, выступает против того постулируемого "мира оправданных ожиданий", который лежит в основании всего исчисления. В "Размышлениях по поводу исчисления вероятностей" Д'Аламбер пишет: "Дело в том, что нужно различать между тем, что *метафизически* возможно,и тем, что возможно *физически*. В первом классе находятся все вещи, существование которых не влечет за собой ничего абсурдного; во втором же – все те вещи, существование которых не только не содержит ничего абсурдного, но и даже ничего экстраординарного, что не встречается в обычном ходе вещей. *Метафизически* возможно получить две шестерки на двух кубиках сто раз подряд; но это невозможно *физически*, потому что это никогда не происходило и не произойдет. В обычном ходе природы одно и то же событие (какое бы ни было) достаточно редко происходит два раза подряд, еще реже три или четыре раза и никогда – сто раз подряд; и нет никого, кто не согласился бы с полной уверенностью биться об заклад всем своим достоянием, каким бы большим оно ни было, что двойная шестерка не выпадет сто раз подряд"[76]. Другими словами, если классическая схема, постулируя равновероятность некоторых элементарных исходов, оставляет возможность для некоторых необычных событий, – например, выпадение сто раз подряд "орла", – то, по Д'Аламберу, подобные "метафизические" возможности должны быть заранее устранены из прикладных рассуждений. Почему? Потому, что мир устроен по-другому, в жизни не бывает таких экстравагантных "исходов", ее "ход", так сказать, более равномерен и устойчив, считает Д'Аламбер. Конечно, должно заметить (против Д'Аламбера), что подобного рода априорные представления о характере мировых процессов отнюдь не являются какими-то "физическими" фактами, а также представляют собой определенную "метафизику". Здесь важно не то, что Д'Аламбер "ошибался" в своих подсчетах (или еще хуже – "не понимал" теории вероятностей), а как раз то, что его критика, выдвигавшая свою (другую) аксиоматику (схематику), выявляла предпосылки классической схемы, ставила под сомнение ее безусловность, поднимала вопрос о ее философской оправданности.

Д'Аламбер хочет не опровергнуть, а усовершенствовать теорию вероятностей. В частности, поскольку некоторые события "физически" невозможны, то их вероятность нужно считать равной нулю. "Метафизическая" вероятность – т.е. по классической схеме, – начиная с некоторого значения должна быть заменена нулем. Но начиная с какого значения? Д'Аламбер показывает, что на пути решения этого вопроса стоят препятствия. Например, если мы возьмем в качестве границы 0,001 и вероятности, которые ниже этого числа будем считать нулевыми, то как

[76] *D'Alambert J.* Opuscules mathématiques, t. 2. Paris, MDCCLXI. P. 10–11.

быть с вероятностями 1/999, 1/998, 1/997? Если мы не считаем их нулем, то как объяснить резкий скачок в наших оценках при переходе от 1/999 к 1/1000?[77] Кроме того, Д'Аламбер, как и многие его коллеги (как весь XVIII век), разделяет убеждение, что в природе господствует принцип непрерывности. Тогда, если мы, например, будем рассматривать вероятность 2^{-99} (вероятность появления 99 раз подряд решетки) как нулевую, то разве не должно соответственно уменьшить и бóльшие вероятности, например $1/8 = 2^{-3}$, $1/16 = 2^{-4}$?[78] Но насколько?

Свои "Размышления по поводу исчисления вероятностей" Д'Аламбер заканчивает следующим заключением:

"1° что если правило, которое я дал в "Энциклопедии" (не зная лучшего) для определения вероятностей в игре "орел или решетка", строго говоря, не точно, то обычное правило для определения этой вероятности еще менее таково; 2° что для построения удовлетворительной теории исчисления вероятностей нужно решить несколько проблем, которые, может быть, неразрешимы; а именно, определить (assigner) истинное значение вероятностей в случаях, которые не равновероятны или которые могут рассматриваться как таковые[79]; определить, когда вероятность должна рассматриваться как нулевая; определить, наконец, как следует оценивать ожидание или ставку, чтобы вероятность была большей или меньшей"[80].

Критика Д'Аламбера, несмотря на множество допущенных им в рассуждениях явных ошибок, в целом сыграла положительную роль. Она помогла лучше осознать тот философский горизонт, в котором осуществляла себя новая математическая дисциплина.

---

[77] Op. cit. P. 11.

[78] Op. cit. P. 19. Любопытно, что, ставя эти вопросы, Д'Аламбер не говорит, что "решить эти затруднения могла бы только практика".

[79] Речь идет об определении вероятностей неравновероятных элементарных исходов.

[80] Op. cit. P. 24.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На протяжении всей книги мы неоднократно показывали фундаментальную роль принципа непрерывности как эвристического направляющего принципа новых математических конструкций в XVII в. Здесь, в заключение, хотелось бы вернуться к этому еще раз. Итак, чем же обусловлена эта фундаментальная роль принципа непрерывности? Мы уже приводили соответствующие цитаты из Лейбница. Принцип непрерывности как конструктивный геометрический принцип следует по Лейбницу из основного (для Лейбница) метафизического *принципа достаточного основания*: все происходящее (существующее) должно иметь свою причину, почему оно происходит (существует) так, а не иначе. Отсюда следует отсутствие "дыр", "зияний" (hiatus'ов) в мироздании. Такая "дыра" в логическом смысле означала бы произвольное необусловленное бытие, необусловленное ничем предыдущим событие, т.е. собственно *свободное* деяние[1], с точки зрения чисто имманентной действительности необъяснимое, чудо. Подобные чудеса невозможны в мире Лейбница. В мире, подчиненном закону достаточного основания, каждое будущее событие является строгим следствием всех предыдущих, и никакое самопроизвольное движение в этом мире невозможно. Но так или иначе Лейбниц был христианским философом. Для него было необходимым согласовать все основные свои метафизические положения с христианским мировоззрением. Последнее же, представляя мир сотворенным Богом, признавая факт грехопадения, Боговоплощения и Искупления, факт чудес, совершаемых в истории, так или иначе признавало *разрывность* мировой (исторической) действительности, признавало факт участия в истории иных, не обусловленных мировым (тварным) целым сил. В своих многочисленных (законченных и нет) работах, посвященных этому согласованию, Лейбниц демонстрирует весь титанизм притязаний рационализма, как мировоззрения, стремящегося сделать все в мире понятным, все *измерить разумом человека*. Так как в мире нет места чуду, то нет места и Богу, как вмешивающемуся в мировой порядок. Бог Лейбница есть Бог

[1] Ср. кантовское понимание свободы в тексте тезиса третьей антиномии чистого разума: "...Необходимо допустить причинность, благодаря которой нечто происходит таким образом, что причина его не определяется в свою очередь никакой другой предшествующей причиной по необходимым законам, иными словами, необходимо допустить *абсолютную спонтанность* причин – (способность) *самой собой* начинать тот или иной ряд явлений, продолжающийся далее по законам природы..." (*Кант И.* Соч. в 6 т. Т. 3. М., 1964. С. 420).

деизма. Богу остается только роль Творца. Но и последняя достаточно специфична. Если Бог Декарта (или Мальбранша) есть Бог волюнтаризма, творящий мир, его законы по своей свободной воле, то Бог Лейбница есть Бог, воля которого изначально подчинена фундаментальным метафизическим принципам и, прежде всего, принципу достаточного основания. Все должно было быть сотворено так, чтобы мировое целое из себя самого могло бы произвести всю совокупность исторических событий без исключения. В мире Лейбница невозможны исключения, все закономерно. В частности, и в грехопадении человеческого рода в Адаме нет, вообще говоря, никакой трагедии, в смысле трагической ошибки, несчастья. В своем "Оправдании Бога на основании его справедливости..." Лейбниц пишет: "Но истинный корень падения заключается в исконном несовершенстве и слабости тварей, вследствие чего *грех должен был входить в наилучший возможный порядок вещей*, о котором шла речь выше. Отсюда следует, что падение по справедливости было допущено, несмотря на совершенство и мудрость Бога, и *даже не могло не быть допущено без нарушения последних*"[2] (подчеркнуто мной – *В.К.*).

Все происходящее в мире Лейбница запланировано. И не просто как возможность, которой могло бы и не быть. Все происходящее является закономерным следствием всего предыдущего. Поэтому было запланировано и грехопадение... Все объяснения Лейбница в "Теодицее", обуславливающие необходимость зла в мире гармонией и совершенством целого, трудно принять. Человеческая совесть не хочет мириться с представлением "благого Бога", уравновешивающего зло, вошедшее в мир вместе с грехопадением, "совершенной гармонией целого". Слишком дорогой ценой покупается эта гармония... Лейбницевская рационализация тайны грехопадения, *тайны свободы*, неудовлетворительна и уничтожает не только эту тайну – как рационализация, – но и саму свободу. Задача совмещения бесконечной божественной благости – одного из основных религиозных постулатов – и свободы человека, включающей и свободу произвола, задача совмещения совершенства божьего творения, божественного провидения и вопиющего факта мирового зла – короче, задача теодицеи остается неразрешенной. Лейбницевская теодицея уничтожает и человеческую свободу, и божественную, подчиняя последнюю (как и первую) закону достаточного основания.

Для нас здесь это интересно потому, что Лейбниц неоднократно высказывает мысль об определенной параллели между проблемами свободы и структуры континуума. "...Для человеческого ума, – писал Лейбниц, – существует два наиболее запутанных вопроса ("два лабиринта"). Первый из них касается структуры непрерывного, или континуума, а второй – природы свободы, и возникают они из одного и того же бесконечного источника"[3]. Природа свободы интересна для Лейбница именно с точки зрения согласования ее с Божественным всеведением, провидением. Как совместить свободное (спонтанное) действие (случайное событие) с совер-

[2] *Лейбниц Г.В.* Соч. в 4 т. М., 1989. Т. 4. С. 482.

[3] Там же. Т. 1. С. 313.

шенным предведением Бога? Лейбниц решает этот вопрос благодаря своей интерпретации свободы. Свобода для Лейбница есть отнюдь не "способность спонтанно начинать новый ряд явлений", как сформулирует это Кант, а *детерминированный* более или менее осознанными факторами выбор между некоторыми возможностями. Свобода у Лейбница подчинена, как мы уже говорили, принципу достаточного основания. Свободный выбор любой возможности предопределен конкретным метафизическим обстоянием, на фоне которого, – как результат которого! – и выступает этот выбор.

Лейбниц считал, что истина любого утверждения по своей природе аналитична: предикат некоторым образом содержится в субъекте. Простейшей, изначальной из таких истин является закон тождества: A = A (и связанный с ним закон противоречия). Необходимые истины допускают (путем разложения и подстановок) *конечную* редукцию к тождественным истинам. Случайные же истины (в частности, *истины факта*) при последовательном вскрытии их оснований не позволяют *конечного* разложения на тождественные истины. Тем не менее и случайные истины Лейбниц истолковывает, как аналитические. "...В случайных истинах, хотя предикат и присутствует в субъекте, это, однако, никогда не может быть доказано, и никогда предложение не может быть приведено к уравнению или тождеству, но решение простирается в бесконечность. Один только Бог видит хотя и не конец процесса разложения, ибо его вообще не существует, но взаимную связь терминов и, следовательно, включение предиката в субъект, ибо ему известно все, что включено в этот ряд"[4]. Бог, имея как данность всю бесконечную цепь взаимнообусловливающих событий, *априори предвидит* всякое событие, в том числе и *свободный выбор.*

Именно подобное понимание детерминированности свободы позволяет Лейбницу параллель со сравнением величин. "...Когда я все более сосредотачивал мысль, не давая ей блуждать в тумане трудностей, мне пришла в голову своеобразная аналогия между истинами и пропорциями, которая, осветив ярким светом, все удивительным образом разъяснила. Подобно тому как во всякой пропорции меньшее число включается в большее либо равное в равное, так и во всякой истине предикат присутствует в субъекте; как во всякой пропорции, которая существует между однородными (подобными) количествами (числами), может быть проведен некий анализ равных или совпадающих, и меньшее может быть отнято от большого вычитанием из большего части, равной меньшему, и подобным же образом от вычтенного может быть отнят остаток и так далее, беспрерывно вплоть до бесконечности; точно так и в анализе истин на место одного термина всегда подставляется равнозначный ему, так что предикат разлагается на те части, которые содержатся в субъекте. Но точно так же, как в пропорциях анализ когда-то все же исчерпывается и приходит к общей мере, которая своим повторением полностью определяет оба термина пропорции, а иногда анализ может быть продолжен в

[4] Там же. С. 315.

бесконечность, как бывает при сопоставлении рационального и мнимого числа или стороны и диагонали квадрата, аналогично этому истины иногда бывают доказуемыми, т.е. необходимыми, а иногда – произвольными (liberae) либо случайными, которые никаким анализом не могут быть приведены к тождеству, т.е. как бы к общей форме"[5]. Речь идет о нахождении общей меры двух отрезков[6]. Для несоизмеримых отрезков процесс вычитания меньшего из большего и остатка из меньшего продолжается до бесконечности. Никакой конечный отрезок не является общей мерой исходных отрезков. Условно говоря, эта общая мера достигается в результате "проведения" бесконечного деления, "дающего" в остатке "неделимое" – бесконечно малую величину. Но как раз в отношении этого вопроса мыслители и делятся на два противостоящих лагеря: одни, признавая возможность бесконечного деления, не считают тем не менее возможным использовать это деление как актуально данное, другие – делают этот решающий шаг. Лейбниц принадлежал как раз к последним. Декарт же воздержался от попытки строить на этом основании науку. В своих "Первоначалах философии", обсуждая бесконечную делимость материи[7], Декарт в параграфе, озаглавленном "Мы не должны сомневаться в этом делении, хотя бы не могли его постигнуть" (ч. II, § 35), пишет: "И хотя мы не можем постичь способ, каким совершается это беспредельное деление, мы не должны, однако, сомневаться в том, что оно совершается, ибо мы понимаем, что это деление необходимо следует из природы материи, отчетливейшим образом нами уже понятой, и понимаем также, что *эта истина принадлежит к числу тех, которые нашей конечной мыслью обнять нельзя*"[8] (подчеркнуто мной – *В.К.*).

Лейбниц проводит аналогию между новыми методами в математике, использующими актуальную бесконечность, и детерминацией "случайных" событий. "Между тем как несоизмеримые предложения подлежат геометрической науке и бесконечные ряды допускают доказательства, так в значительно большей степени случайные, т.е. неопределенные (infinitae), истины подлежат божественному знанию и познаются Богом не через доказательство (что заключает противоречие), но видятся им во всей их безошибочности"[9]. В этой аналогии видение Бога уподобляется доказательствам в новоизобретенных областях математики, оперирующих с актуально бесконечными величинами. Но Лейбниц сам никогда не был окончательно удовлетворен обоснованием процедур новой математики. Мы приводили в книге примеры многочисленных попыток дать это обоснование, которые никогда не могли полностью свести новые методы к старой (античной) математической эпистеме. Поэтому "объяснение" ви́дения Бога, по аналогии с доказательствами в новой "геометрической науке" объясняет очень мало. Последние сами были довольно сомнительны... Эта аналогия столько же поясняет лейбницевскую интер-

---

[5] Там же. С. 316.

[6] С помощью так называемого "алгоритма Евклида".

[7] Напомним, что материя у Декарта тождественна с протяжением.

[8] *Декарт Р.* Соч. в 2 т. М., 1989. Т. 1. С. 367.

[9] *Лейбниц Г.В.* Цит. соч. С. 317.

претацию случайных событий, сколько и наоборот – через последнюю косвенно подтверждает оправданность новых математических методов, использующих инфинитезимальные величины... И, действительно, мы можем найти у Лейбница истолкования этой аналогии в последнем смысле. Так, в вышеупомянутой работе "Оправдание Бога на основании его справедливости..." Лейбниц, подробно обсудив вопрос о соотношении человеческой свободы и божественного предопределения, пишет: "(122) *И геометры некоторым образом подражают Богу*, когда они при помощи недавно открытого анализа бесконечно малых сравнивают друг с другом величины бесконечно малые и недоступные выражению и выводят более важные и полезные, нежели можно было думать, заключения даже для самих величин, допускающих выражения (т.е. конечных – *В.К.*)"[10] (подчеркнуто мной – *В.К.*).

Здесь уже метод бесконечно малых уподобляется "методу" божественного Провидения, в бесконечных цепях взаимозависимых событий дающему априорное обоснование всем случайным событиям (свободным действиям) и оправдывающему допущения зла и страдания в мире заранее предусмотренной гармонией целого.

Так, утверждаясь посредством аналогий с теологическими (и, как мы видели в книге, с биологическими, физическими, общефилософскими) положениями, метод бесконечно малых ищет у Лейбница своего *достаточного основания*, в самом этом поиске конструируя это основание по *аналогии с самим собой*, перестраивая всю культурную среду согласно родственным себе мировоззренческим принципам, и являя самого себя в качестве математического выражения этой тотальной духовной перестройки.

[10] Там же. Т. 4. С. 489–490.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

Глава I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДЕКАРТА: АЛГЕБРА И ТЕХНИКА 8

§ 1. Геометрия в античности и геометрия у Декарта 8
§ 2. Аналитическая геометрия как технизация геометрии 17
§ 3. Спор о смысле геометрии 21

Глава II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ЛЕЙБНИЦА 26

§ 1. Метод идеальных элементов и прагматическая точка зрения на йсчисление бесконечно малых 26
§ 2. Принцип законопостоянства 34
§ 3. Принцип непрерывности 44
§ 4. Понятие репрезентации. Идея функции 55

Глава III. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ 68

§ 1. Новая геометрия и принцип непрерывности 68
§ 2. Бесконечные элементы: Дезарг, Кеплер, Декарт, Аристотель 75
§ 3. Проекция 82

Глава IV. БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ У НЬЮТОНА 90

§ 1. Биноминальный ряд. Обобщения алгебраические и трансфинитные 90
§ 2. Номинальная сущность Локка и ее математические параллели 99

Глава V. ВЕРОЯТНОСТЬ 105

§ 1. Вероятностная эпистемология 105
§ 2. Пробабилизм иезуитов и его критика. Паскаль 111
§ 3. Частотная вероятность и принцип законопостоянства. Априорные вероятности 119
§ 4. Принцип недостаточного основания. "Мир оправданных ожиданий" 124
§ 5. Свобода и вероятность 128
§ 6. Сомнения Д'Аламбера 133

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 136

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Другие книги нашего издательства:

История науки

Сурин А. В., Панов М. И. (ред.) **Судьбы творцов российской науки.**
Бонгард-Левин Г. М., Захаров В. Е. (ред.) **Российская научная эмиграция.**
Яглом И. М. **Герман Вейль.**
Полякова Т. С. **Леонард Эйлер и математическое образование в России.**
Григорян А. А. **Закономерности и парадоксы развития теории вероятностей.**
Медведев Ф. А. **Очерки истории теории функций действительного переменного.**
Медведев Ф. А. **Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв.**
Стройк Д. Я. **Очерк истории дифференциальной геометрии (до XX столетия).**
Жижченко А. Б. **Алгебраическая геометрия в работах советских математиков.**
Горобец Б. С. **Круг Ландау: Жизнь гения.**
Горобец Б. С. **Круг Ландау: Физика войны и мира.**
Горобец Б. С. **Круг Ландау и Лифшица.**
Горобец Б. С. **Секретные физики из Атомного проекта СССР: Семья Лейпунских.**
Дорфман Я. Г. **Всемирная история физики: С начала XIX до середины XX вв.**
Дорфман Я. Г. **Всемирная история физики: С древнейших времен до конца XVIII века.**
Абрамов А. И. **История ядерной физики.**
Богуш А. А. **Очерки по истории физики микромира.**
Попков В. И. **Физика и ее парадигмы в датах и цитатах.**
Акимов М. Л., Логвинов В. В. **Словарь современного естествознания.**
Логвинов В. В. **Все открытия и достижения науки и техники за последние 200 лет.**
Хайтун С. Д. **История парадокса Гиббса.**
Харгиттаи И. **Откровенная наука.** Кн. 1, 2. Пер. с англ.
Золотов Ю. А. **Делающие науку. Кто они? Из записных книжек.**
Золотов Ю. А. **Химики в других областях или на других Олимпах.**
Золотов Ю. А. **Кто был кто в аналитической химии в России и СССР.**
Шлегель Г. Г. **История микробиологии.**
Мечникова О. Н. **Жизнь Ильи Ильича Мечникова.**
Бирюков Б. В. **Трудные времена философии.** Кн. 1–7.
Кондрашов Н. А. **История лингвистических учений.**
Томсен В. **История языковедения до конца XIX века.**
Алпатов В. М. **История одного мифа: Марр и марризм.**
Ушаков И. А. **История науки сквозь призму озарений.** Кн. 1–8.

Серия «Классики науки»

Ньютон И. **Математические начала натуральной философии.**
Гюйгенс Х. **Трактат о свете.**
Гельмгольц Г. **Учение о слуховых ощущениях как физиол. основа для теории музыки.**
Гейзенберг В. **Избранные труды.**
Циолковский К. Э. **Труды по ракетной технике.**
Смородинский Я. А. **Избранные труды.**
Тодхантер И. **История математических теорий притяжения и фигуры Земли.**
Дарвин Ч. **Пангенезис.**
Лукреций. **О природе вещей: Билингва.**
Боэций. **«Утешение Философией» и другие трактаты.**

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Другие книги нашего издательства:

URSS

Философия математики

Вейль Г. **О философии математики.**
Реньи А. **Диалоги о математике.**
Асмус В. Ф. **Проблема интуиции в философии и математике.**
Харди Г. Г. **Апология математика.**
Светлов В. А. **Философия математики.**
Яновская С. А. **Методологические проблемы науки.**

Серия «Физико-математическое наследие: математика (философия математики)»

Фосс А. **Сущность математики.**
Фрейсинэ Ш. **Очерки по философии математики.**
Кутюра Л. **Философские принципы математики.**
Флоренский П. А. **Мнимости в геометрии.**
Стеклов В. А. **Математика и ее значение для человечества.**
Лаплас П. **Опыт философии теории вероятностей.**

Серия «Из наследия мировой философской мысли: философия науки»

Аристотель. **Физика.**
Пуанкаре А. **Наука и гипотеза.**
Пуанкаре А., Кутюра Л. **Математика и логика.**
Лейбниц Г. В. **Труды по философии науки.**
Карнап Р. **Философские основания физики. Введение в философию науки.**
Дюгем П. **Физическая теория. Ее цель и строение.**
Ренан Э. **Будущее науки.**
Энгельмейер П. К. **Теория творчества.**
Васильев А. В. **Пространство, время, движение.**
Франк Ф. **Философия науки: Связь между наукой и философией.**
Бутру Э. **Наука и религия в современной философии.**
Лесевич В. В. **Письма о научной философии.**
Ражо Г. **Ученые и философия.**
Васильев С. Ф. **Из истории научных мировоззрений: От Галилея до Больцмана.**
Чудинов Э. М. **Природа научной истины.**
Кузнецов Б. Г. **Этюды о меганауке.**
Кузнецов Б. Г. **Эволюция картины мира.**

Тел./факс:
+7 (499) 724-25-45
(многоканальный)

E-mail:
URSS@URSS.ru

http://URSS.ru

Наши книги можно приобрести в магазинах:

«Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (495) 625-2457)
«Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (495) 203-8242)
«Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (495) 238-5001, 780-3370)
«Дом научно-технической книги» (Ленинский пр-т, 40. Тел. (495) 137-6019)
«Дом книги на Ладожской» (м. Бауманская, ул. Ладожская, 8, стр. 1. Тел. 267-0302)
«Гнозис» (м. Университет, 1 гум. корпус МГУ, комн. 141. Тел. (495) 939-4713)
«У Кентавра» (РГГУ) (м. Новослободская, ул. Чаянова, 15. Тел. (499) 973-4301)
«СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 448-2355)

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

URSS

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

Колмогоров А. Н. **Математика в ее историческом развитии.**
Попов Г. Н. **Очерки по истории математики.**
Депман И. Я. **Из истории математики.**
Депман И. Я. **История арифметики.**
Депман И. Я. **Рассказы о старой и новой алгебре.**
Башмакова И. Г. **Диофант и диофантовы уравнения.**
Ожигова Е. П. **Развитие теории чисел в России.**
Александрова Н. В. **История математических терминов, понятий, обозначений.**
Гнеденко Б. В. **Очерк по истории теории вероятностей.**
Борис Владимирович Гнеденко в воспоминаниях учеников и соратников.
Жизнеописание Льва Семеновича Понтрягина, математика, составленное им самим.
Мышкис А. Д. **Советские математики: Мои воспоминания.**

Серия «Физико-математическое наследие: математика (история математики)»

Бурбаки Н. **Очерки по истории математики.**
Декарт Р. **Геометрия: С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта.**
Ван дер Варден Б. Л. **Пробуждающаяся наука: Математика Древнего мира.**
Цейтен И. Г. **История математики в древности и в Средние века.**
Вилейтнер Г. **Хрестоматия по истории математики.**
Гнеденко Б. В. **Очерки по истории математики в России.**
Гнеденко Б. В. **Беседы о математике, математиках и мехмате МГУ.**
Хинчин А. Я. **Великая теорема Ферма.**
Шереметевский В. П. **Очерки по истории математики.**
Беллюстин В. К. **Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики.**
Володарский А. И. **Ариабхата.**
Володарский А. И. **Очерки истории средневековой индийской математики.**
Березкина Э. И. **Математика древнего Китая.**
Нейгебауэр О. **Лекции по истории античных математич. наук: Догреческая математика.**
Успенский Я. В. **Очерк истории логарифмов.**
Бонола Р. **Неевклидова геометрия: Критико-историческое исследование ее развития.**
Тюлина И. А. **Жозеф Луи Лагранж: 1736–1813.**
Ожигова Е. П. **Шарль Эрмит: 1822–1901.**
Полищук Е. М. **Эмиль Борель: 1871–1956**
Полищук Е. М. **Вито Вольтерра: 1860–1940.**
Полищук Е. М. **Софус Ли: 1842–1899.**

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел. **+7 (499) 724–25–45 (многоканальный)**
или *электронной почтой* URSS@URSS.ru
Полный каталог изданий представлен
в *интернет-магазине:* http://URSS.ru

Научная и учебная литература

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Владимир Николаевич КАТАСОНОВ

Об авторе

Доктор философских наук, заведующий кафедрой философии религии и религиозных аспектов культуры Православного Свято-Тихоновского гуманитарного университета. По первому образованию математик. С 1982 по 2005 гг. работал в системе Российской академии наук. Автор более 100 научных работ на русском и иностранных языках, в том числе книг: «Метафизическая математика XVII века» (1993), «Боровшийся с бесконечным: философско-религиозные основы аспекты генезиса теории множеств Г. Кантора» (1999), «Хождение по водам: религиозно-нравственный смысл повести А. С. Пушкина "Капитанская дочка"» (1999), «Христианство, наука, культура» (2009). Автор ряда телевизионных передач (фильмы об И. В. Киреевском, А. С. Пушкине и др.), а также радиопередач. Участник и организатор множества конференций в России и за рубежом по религиозным проблемам науки и культуры. Лауреат премии Фонда Джона Темплтона за курс по науке и религии (1995), участник Оксфордских семинаров по науке и религии в 2003–2005 гг., член Европейского общества по изучению науки и религии (ESSSAT, с 1995 г.). Круг интересов: проблемы взаимовлияния истории религии, философии и науки; религиозные аспекты культуры; история отечественной и зарубежной философии.

Наше издательство предлагает следующие книги:

9824 ID 120764

9 785397 017718 >

Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице в нашем интернет-маг

E-mail: URSS@URSS.ru

изданий
ете:
SS.ru

URSS НАШИ НОВЫЕ КООРДИНАТЫ

ТЕЛ
(МНО
1173

интернет-магазин OZON.ru

73145191

5–45
т, 56