RELEARN

Л. С. Кузьмич

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Алгоритм точного решения

Платон мне друг, но истина дороже

Аристотель

URSS

Л. С. Кузьмич

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Алгоритм точного решения

URSS
МОСКВА

ББК 22.161.6 22.1щ

Кузьмич Леонид Степанович

Эллиптические функции. Эллиптические интегралы: Алгоритм точного решения. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 48 с. (Relata Refero.)

В настоящей книге излагаются нетрадиционные методы интегрального исчисления в конечном виде как эллиптических интегралов, так и функций одной переменной, что в значительной мере расширяет возможности интегрирования функций.

Книга представляет интерес для математиков, механиков, инженеров, научных работников, студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей. Она будет также полезна широкому кругу читателей, интересующихся историей развития математики.

В ближайшее время планируется выпуск второй части книги, в которой автор продолжит исследование темы.

Издательство «Книжный дом "ЛИБРОКОМ"».
117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.
Формат 60×90/16. Печ. л. 3. Зак. № ВО-51.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-03325-1

12596 ID 166028

9 785397 033251

Содержание

От издательства

Эта книга продолжает серию «Relata Refero» (дословный перевод — рассказываю рассказанное).

Под этим грифом издательство предоставляет трибуну авторам, чтобы высказать публично новые идеи в науке, обосновать новую точку зрения, донести до общества новую интерпретацию известных экспериментальных данных, etc.

В споре разных точек зрения только вердикт Великого судьи — Времени — может стать решающим и окончательным. Сам же процесс поиска Истины хорошо характеризуется известным высказыванием Аристотеля, вынесенным на обложку настоящей серии: авторитет учителя не должен довлеть над учеником и препятствовать поиску новых путей.

Мы надеемся, что публикуемые в этой серии тексты внесут, несмотря на свое отклонение от установившихся канонов, свой вклад в познание Истины.

От автора

Опубликованная книга «Элементы теории эллиптических функций», написанная известным математиком Ю. С. Сикорским, посвящена эллиптическим функциям, в ней развита вычислительная сторона.

Напечатанные в книге таблицы содержат численные приближенные значения эллиптических интегралов первого и второго рода.

Я предлагаю вычисление эллиптических интегралов производить в конечном виде через конечное число элементарных функций.

Памяти растрелянных коммунаров,
приглашенных из Америки
для построения коммунизма:

Богданов, Богданович, Брицко,
Кузьмич, Комса, Кардаш, Калоша,
Комаров, Лысов, Табала, Шелег...

Хотелось бы всех поименно назвать,
Да отняли список, и негде узнать...

А. Ахматова

Предисловие

Эллиптические интегралы применяются в различных отделах механики, физики, математики и в прикладных науках.

Существуют особые таблицы, в которых содержатся численные значения эллиптических интегралов первого и второго рода. Эти интегралы привлекают внимание еще и потому, что через них может быть вычислен любой интеграл

$$\int (x, \sqrt{R})\, dx,$$

где $R(x)$ — рациональная функция.

Данная работа предлагает метод вычисления интегралов в конечном виде через конечное число элементарных функций.

1

Эллиптические интегралы

Эллиптическим в общем случае называется интеграл

$$\int (x, \sqrt{R})\, dx,$$

где R рациональная функция

$$R = ax^2 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Любой эллиптический интеграл выражается через три общепринятых канонических интеграла:

— первого рода

$$F(t, k) = \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2x^2}};$$

— второго рода

$$E(t, k) = \int\limits_0^t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt = \int\limits_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx;$$

— третьего рода

$$\prod (p, t, k) = \int\limits_0^t \frac{dt}{(p + \sin^2 t)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \int\limits_0^x \frac{dx}{(p + x^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2x^2}}.$$

В нашем случае вводим интеграл

$$\theta = \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 t)^3}} = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{(1 - k^2x^2)^3}},$$

где $x = \sin t$ — замена переменной интегрирования во всех приведенных случаях.

2

Эллиптические функции

$\cos(t+\varphi)_t$, $\cos(t+\varphi)_\varphi$, $\sin(t+\varphi)_t$, $\sin(t+\varphi)_\varphi$

Для решения эллиптических интегралов рассмотрим частный случай эллиптических функций (отличающихся от ранее известных в математике), для чего произведем известное построение эллипса. Из центра O окружности радиуса a исходят взаимно перпендикулярные диаметры (рис. 1) $A'A$, DD'. На радиусах OD, OD' откладываются от точки O равные отрезки OB, OB' длиной b Из каждой точки N окружности опускается перпендикуляр NP, и на этом перпендикуляре откладывается отрезок PM так, чтобы отношение было

$$\frac{PM}{PN} = \frac{b}{a}.$$

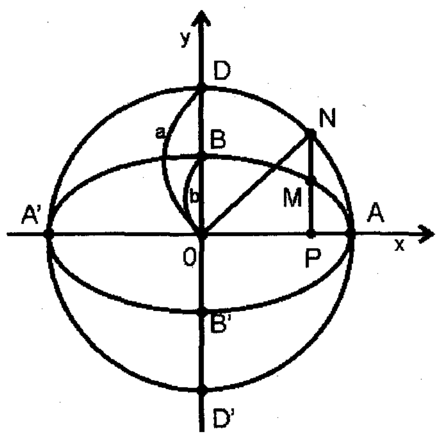


Рис. 1. Схема построения эллипса

Это построение преобразует каждую точку N окружности в другую соответственную ей точку M эллипса в одном и том же отношении $k = b/a$. Получаем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В параметрическом виде уравнение эллипса имеет вид

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad \text{или} \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\, t. \tag{1}$$

Произведем дальнейшее построение внутри окружности (рис. 2).

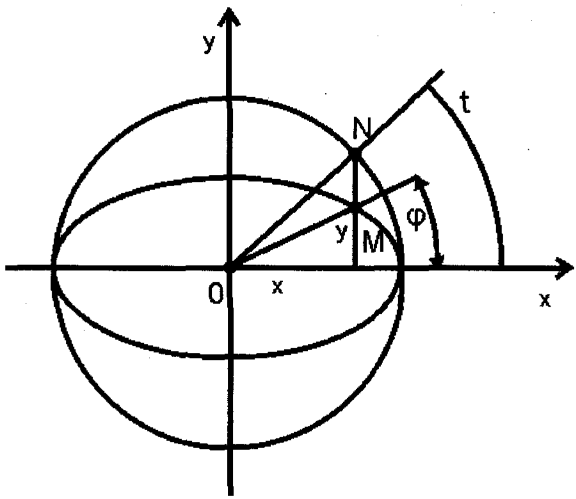


Рис. 2. Схема для построения эллиптических функций

Соединим точку O и точки N, M прямыми линиями, которые определяют углы t, φ. Точка M эллипса определяется координатами (x, y), т. е. $M(xy)$, и $y/x = \mathrm{tg}\,\varphi$.

Тогда следует (1)

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\, t.$$

Отношение $b/a = k$, является коэффициентом сжатия эллипса ($k < 1$).

Параметрическое уравнение эллипса принимает вид

$$\operatorname{tg}\varphi = k\operatorname{tg}t. \tag{2}$$

Из этого уравнения, после преобразований

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = k\frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \frac{\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi} = \frac{k^2\sin^2 t}{1-\sin^2 t}$$

получаем

$$\sin\varphi = \frac{k\sin t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\cos t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}}. \tag{3}$$

Вводя соотношение $\frac{t+\varphi}{2}=\propto$, или $t+\varphi = 2\propto$, имеем

$$\cos(t+\varphi)_t = \cos t\cos\varphi - \sin t\sin\varphi =$$
$$= \frac{\cos^2 t}{\sqrt{(1-(1-k^2)\sin^2 t}} - \frac{k\sin^2 t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}},$$

и в интегральной форме

$$\int_0^t \cos(t+\varphi)_t\,dt =$$
$$= \int_0^t \frac{\cos^2 t\,dt}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} - k\int_0^t \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}}. \tag{4}$$

Аналогичным образом возникают формулы:

$$\sin t = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-(1-k^2)\cos^2\varphi}}, \qquad \cos t = \frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1-(1-k^2)\cos^2\varphi}}$$

$$\cos(t+\varphi)_\varphi = \cos t\cos\varphi - \sin t\sin\varphi =$$
$$= \frac{k\cos^2\varphi}{\sqrt{1-(1-k^2)\cos\varphi}} - \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-(1-k^2)\cos^2\varphi}},$$

и в интегральной форме

$$\int_0^{\varphi} \cos(t+\varphi)_{\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{k\cos^2\varphi\, d\alpha}{\sqrt{1-(1-k^2)\cos^2\varphi}} - \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\, d\alpha}{\sqrt{1-(1-k^2)\cos^2\varphi}}.$$

Таким образом эллиптические функции $\cos(t+\varphi)_t$, $\cos(t+\varphi)_{\varphi}$ определятся как функции обратные эллиптическим интегралам.

Взаимная зависимость углов t, φ, α определяется из уравнений

$$\operatorname{tg}\varphi = k\operatorname{tg} t, \quad t+\varphi = 2\alpha, \qquad \text{(см. (2))}$$

что равнозначно уравнению

$$\operatorname{tg}(t+\varphi) = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg} t\cdot\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg} 2\alpha, \qquad \frac{(1+k)\operatorname{tg} t}{1-k\operatorname{tg}^2 t} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

После решения этого уравнения получим

$$\operatorname{tg}^2 t + \frac{(1+k)\operatorname{tg} t}{k\operatorname{tg} 2\alpha} - \frac{1}{k} = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = 2\alpha - t.$$

Из вышеприведенного следует

$$\cos(t+\varphi)_t = \cos(t+\varphi)_{\varphi} = \cos t\cos\varphi - \sin t\sin\varphi = \cos 2\alpha.$$

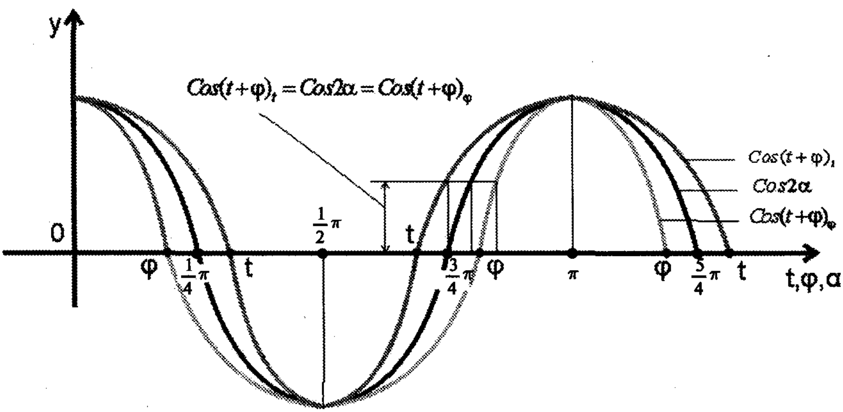


Рис. 3. Совмещенные графики эллиптических функций

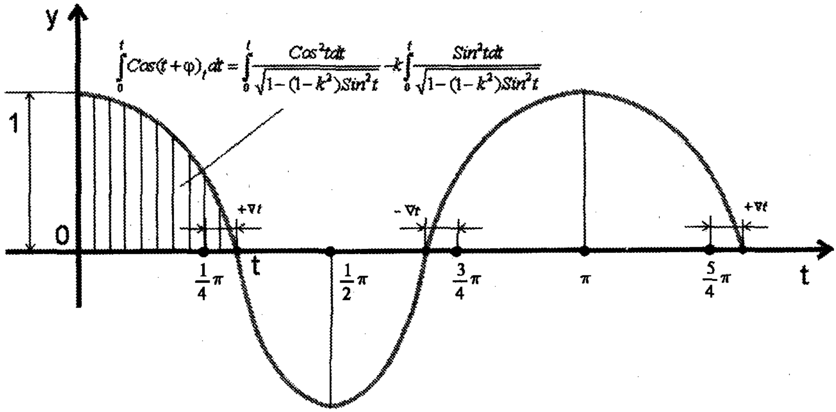


Рис. 4. График функции $\cos(t+\varphi)_t$

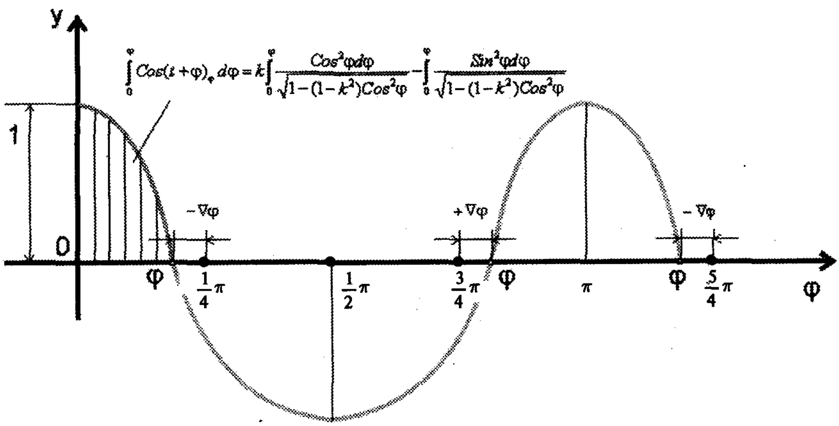


Рис. 5. График функции $\cos(t+\varphi)_\varphi$

Таким образом графики функций $\cos(t+\varphi)_t$, $\cos(t+\varphi)_\varphi$ расположены симметрично графика функции $y=\cos 2\alpha$ (рис. 3–5).

Аналогично образуются функциональные зависимости

$$\begin{aligned}\sin(t+\varphi)_t &= \sin t\cos\varphi+\sin\varphi\cos t= \\ &= \frac{\sin t\cos t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin t}}+\frac{k\sin t\cos t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin t}}= \\ &= \frac{(1+k)\sin t\cos t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}},\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\sin(t+\varphi)_\varphi &= \sin t\cos\varphi+\sin\varphi\cos t= \\ &= \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-(1-k^2)\cos^2\varphi}}+\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-(1-k^2)\cos^2\varphi}}= \\ &= \frac{(1+k)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-(1-k^2)\cos^2\varphi}},\end{aligned}$$

и интегральная форма

$$\begin{aligned}\int_0^t \sin(t+\varphi)_t\,dt &= (1+k)\int_0^t \frac{\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}}= \\ &= -\frac{1}{(1-k)}\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}\,\Bigg|_0^t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \sin(t+\varphi)_\varphi\,d\varphi &= (1+k)\int_0^\varphi \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-(1-k^2)\cos^2\varphi}}= \\ &= \frac{1}{(1-k)}\sqrt{1-(1-k^2)\cos^2\varphi}\,\Bigg|_0^\varphi.\end{aligned}$$

Аналогично графики функции

$$\sin(t+\varphi)_t=\sin(t+\varphi)_\varphi=\sin 2\alpha$$

симметричны графику $\sin 2\alpha$ (рис. 6–8).

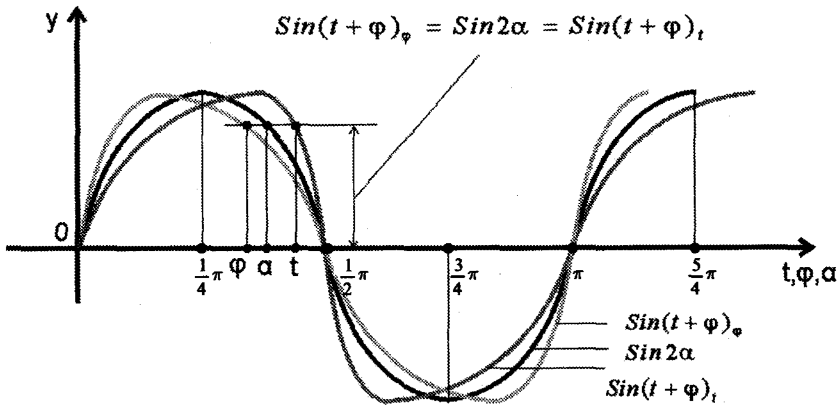


Рис. 6. Совмещенные графики эллиптических функций

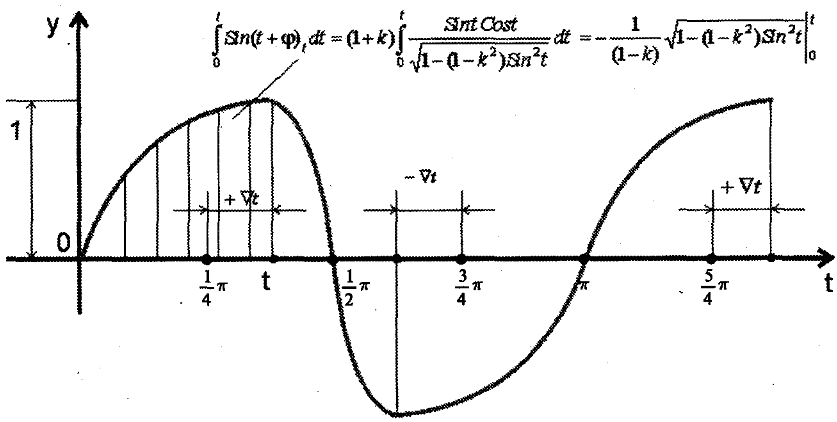


Рис. 7. График функции $\sin(t+\varphi)_t$

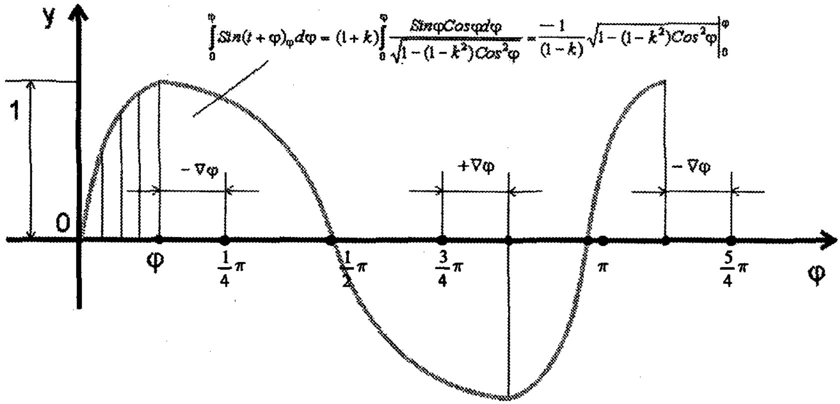


Рис. 8. График функции $\sin(t+\varphi)_\varphi$

Дифференциальные зависимости аргументов t, φ

Дифференцирую связь (2) $\operatorname{tg}\varphi = k \operatorname{tg} t$, т. е.

$$d(\operatorname{tg}\varphi) = d(k \operatorname{tg} t).$$

Получаем

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{k\,dt}{\cos^2 t}$$

и, используя (3)

$$\cos\varphi = \frac{\cos t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}},$$

имеем

$$d\varphi = \frac{k\,dt}{\cos^2 t}\cdot\frac{\cos^2 t}{1-(1-k^2)\sin^2 t} = k\frac{dt}{1-(1-k^2)\sin^2 t}. \qquad (6)$$

Аналогично

$$dt = \frac{k\,d\varphi}{1-(1-k^2)\cos^2\varphi}.$$

3

Первое интегральное уравнение

Ранее мы получили (4)

$$\int_0^t \frac{\cos^2 t\, dt}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} - k\int_0^t \frac{\sin^2 t\, dt}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} = \int_0^t \cos(t+\varphi)_t\, dt.$$

Подынтегральные функции представляем в таком виде

$$\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{(1-k^2)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} - \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}\right),$$

$$\frac{\cos^2 t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{(1-k^2)}\left(-\frac{k^2}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} + \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}\right).$$

Вносят эти выражения в уравнение (4), получаем

$$\int_0^t \cos(t+\varphi)dt =$$

$$= \frac{1}{(1-k^2)}\int_0^t \left(\frac{-k^2}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} + \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}\right)dt -$$

$$-k\int\limits_0^t \frac{1}{(1-k^2)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}}-\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}\right)dt=$$

$$=\left(\frac{-k^2-k}{(1-k^2)}\right)\int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}}+$$

$$+\frac{(1+k)}{(1-k^2)}\int\limits_0^t \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{1-k}\left(-k\int \frac{dt}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}}+\int \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t\,dt}\right). \quad (7)$$

Легко убедиться в справедливости уравнения

$$\int \cos(t+\varphi)_t\,dt+\int \cos(t+\varphi)_\varphi\,d\varphi=$$

$$=\int \cos(t+\varphi)d(t+\varphi)=\sin(t+\varphi),$$

так как ранее было доказано (рис. 3)

$$\cos(t+\varphi)_t=\cos(t+\varphi)_\varphi.$$

В то же время, имея дифференциальную зависимость (6)

$$d\varphi=\frac{k\,dt}{1-(1-k^2)\sin^2 t},$$

получаем

$$\int \cos(t+\varphi)_t\,dt+\int \cos(t+\varphi)_t\cdot\frac{k\,dt}{(1-(1-k^2)\sin^2 t}=\sin(t+\varphi),$$

и, используя уравнение (7) и

$$\int \cos(t+\varphi)_t\frac{k\,dt}{(1-(1-k^2)\sin^2 t)}=$$

$$= \int \left[\int \cos{(t+\varphi)_t}\, dt \right]' \cdot \frac{k\, dt}{1-(1-k^2)\sin^2 t},$$

получаем

$$\frac{1}{1-k}\left(-k\int \frac{dt}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} + \int \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t\, dt}\right) +$$

$$+\frac{k}{(1-k)}\left(-k\int \frac{dt}{\sqrt{(1-(1-k^2)\sin^2 t)^3}} + \int \frac{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}\;\; dt}{1-(1-k^2)\sin^2 t}\right) =$$

$$= \sin{(t+\varphi)_t},$$

где

$$\sin{(t+\varphi)_t} = \frac{(1+k)\sin t \cos t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} \quad (\text{см.}(5)),$$

и окончательно первое интегральное уравнение:

$$\int \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}\, dt - k^2 \int \frac{dt}{\sqrt{(1-(1-k^2)\sin^2 t)^3}} =$$

$$= (1-k^2)\frac{\sin t \cos t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}},$$

где

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-(1-k^2)\sin^2 t)^3}} = \Theta$$

ранее обозначенный интеграл.

В дальнейшем будем использовать дополнительный модуль

$$\mathrm{K} = \sqrt{1-k^2}, \quad \mathrm{K} \leqslant 1.$$

И тогда первое интегральное уравнение

$$E(t, \mathrm{K}) - (1-\mathrm{K}^2)\cdot\Theta(t, \mathrm{K}) = \mathrm{K}^2\frac{\sin t \cos t}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t}},$$

откуда

$$\Theta(t, \mathrm{K}) = \frac{1}{1-\mathrm{K}^2}\left[E(t, \mathrm{K}) - \frac{\mathrm{K}^2 \sin t \cos t}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t}}\right], \tag{8}$$

или

$$\Theta(t, \mathrm{K}) = \frac{1}{1-\mathrm{K}^2}\left[\int_0^x \frac{\sqrt{1-\mathrm{K}^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \frac{\mathrm{K}^2 x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2 x^2}}\right],$$

$$x = \sin t.$$

4

Конструктивная схема для решения интегралов

Для вычисления эллиптических интегралов предлагается следующая схема. В трехмерном пространстве $Oxyz$ рассматривается тело V ограниченное сверху поверхностью $y = F(x)$, снизу замкнутой областью D плоскости $Oxyz$, с боков цилиндрическими поверхностями направляющими и для которых служат функции $z_1 = \varphi(x)$, $z_2 = \chi(x)$ противоположно выпуклые. Образующие этих цилиндрических поверхностей параллельны оси Oy (рис. 9).

Функции

$$y = F(x), \quad z_1 = \varphi(x), \quad z_2 = \chi(x)$$

непрерывны и дифференцируемы.

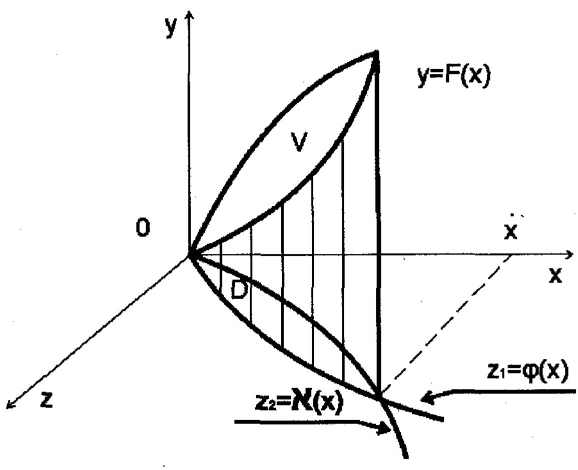


Рис. 9

Площадку области D можно определить двумя способами методом параллельных сечений:

1. $S_1 = \int\limits_0^x (z_1\,dx - z_2\,dx)$ — сечение параллельно оси Oz.

2. $S_2 = \int\limits_0^x (x\,dz_2 - x\,dz_1)$ — сечение параллельно оси Ox.

Но $S_1 = S_2$.

Затем рассмотрим два интеграла:

1. $V_1 = \int\limits_0^{\dot{x}} dy \int\limits_0^x (z_1\,dx - z_2\,dx)$.

2. $V_2 = \int\limits_0^{\dot{x}} dy \int\limits_0^x (x\,dz_2 - x\,dz_1)$.

Во втором случае для внутреннего интеграла применяем метод интегрирования по частям

$$V_2 = \int\limits_0^{\dot{x}} dy \left[\left(z_2 x - \int z_2\,dx \right) - \left(z_1 x - \int z_1\,dx \right) \right] \Bigg|_0^x =$$

$$= \int\limits_0^{\dot{x}} dy \left[(z_2 x - z_1 x) - \int (z_2\,dx - z_1\,dx) \right] \Bigg|_0^x .$$

Получаем справедливое равенство $V_1 = V_2$. Откуда после приведения подобных членов

$$\int\limits_0^x dy [z_2 x - z_1 x] \Big|_0^x = 0. \tag{9}$$

5

Эллиптический интеграл 2-го рода

$$E(t, \text{K}) = \int \sqrt{1 - \text{K}^2 \sin^2 t}\, dt$$

Для решения принимаем изложенную выше схему (рис. 9) и полученное уравнение (9)

$$\int\limits_0^{\dot{x}} dy(z_2 x - z_1 x)\Big|_0^x = 0.$$

Применяем функции:

$$y = \arcsin(\text{K}x), \quad z_1 = \beta x, \quad z_2 = \arcsin(x).$$

Изображение периодических функций

$$y = \arcsin(\text{K}x) \quad \text{и} \quad z_2 = \arcsin(x)$$

ограничено значениями $x \leqslant 1$, $z \leqslant \pi/2$.

Точка пересечения функций $z_1 = \beta x$ (прямая линия) и $z_2 = \arcsin(x)$, обозначенная $(\dot{x}\dot{z})$, подвижная и зависит от верхнего предела интегрирования $\dot{x}$ $(\dot{x} \leqslant 1)$.

Поэтому коэффициент β определяется из равенства $\dot{z}_1 = \dot{z}_2$, где

$$\dot{z}_1 = \beta\dot{x}, \quad \dot{z}_2 = \arcsin(\dot{x}),$$

следовательно

$$\arcsin(\dot{x}) = \beta\dot{x}, \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\arcsin(\dot{x})}{\dot{x}}.$$

Применяем уравнение

$$\int\limits_0^{\dot{x}} dy(z_2 x - z_1 x)\Big|_0^x.$$

$$\int\limits_0^{\dot{x}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2}} \left(\arcsin(x) \cdot x - \beta x \cdot x\right)\Big|_0^x =$$

$$= \int\limits_0^{\dot{x}} \frac{\arcsin(x) \cdot x\, dx}{\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2}} - \beta \int\limits_0^{\dot{x}} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2} \arcsin(x)\Big|_0^{\dot{x}} + \int\limits_0^{\dot{x}} \frac{\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx -$$

$$- \beta\left(-\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2} + \frac{1}{2K^2} \arcsin(Kx)\right) = 0.$$

Здесь

$$\int\limits_0^{\dot{x}} \frac{\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{K} E(t, K)\Big|_0^t, \quad x = \sin t, \quad t = \arcsin(x),$$

— интеграл 2-го рода.

Таким образом:

$$E(t, K)\Big|_0^t = \frac{1}{2}\beta\left(-x\sqrt{1 - K^2x^2} + \frac{1}{K}\arcsin(Kx)\right)\Big|_0^x +$$

$$+ \sqrt{1 - K^2x^2} \arcsin(x)\Big|_0^x, \qquad \beta = \frac{\arcsin(\dot{x})}{\dot{x}}.$$

После замены переменной $x = \sin t$:

$$E(K, t) = \frac{1}{2}\frac{\arcsin(x)}{x}\left(-x\sqrt{1 - K^2x^2} + \frac{1}{K}\arcsin(Kx)\right) +$$

$$+ \sqrt{1 - K^2x^2} \arcsin(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\arcsin(\sin t)}{\sin t}\left(-\sin t\sqrt{1 - K^2\sin^2 t} + \frac{1}{K}\arcsin(K\sin t)\right) +$$

$$+\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}\arcsin(\sin t) =$$

$$=\frac{1}{2}t\left(\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}+\frac{1}{\mathrm{K}}\frac{\arcsin(\mathrm{K}\sin t)}{\sin t}\right).$$

Эта формула не дифференцируема, так как в нее включен постоянный коэффициент β.

6

Эллиптический интеграл 1-го рода

$$F(t, \mathrm{K}) = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - \mathrm{K}^2 \sin^2 t}}$$

Вычисление эллиптического интеграла 1-го рода происходит по той же схеме (рис. 9), но с другими исходными данными, а именно:

$$y = \arcsin(x), \quad z_1 = \gamma x, \quad z_2 = \arcsin(\mathrm{K}x).$$

Коэффициент γ определяется аналогичным образом

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2, \quad \gamma\dot{x} = \arcsin(\mathrm{K}\dot{x}),$$

откуда

$$\gamma = \frac{\arcsin(\mathrm{K}\dot{x})}{\dot{x}},$$

$\dot{x}$ — верхний предел интегрирования ($\dot{x} \leqslant 1$).

Применяем уравнение

$$\int_0^{\dot{x}} dy(z_2 x - z_1 x)\Big|_0^x = 0.$$

$$\int_0^{\dot{x}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \left(\arcsin(\mathrm{K}x) \cdot x - \gamma x \cdot x\right)\Big|_0^x =$$

$$= \int_0^{\dot{x}} \frac{\arcsin(\mathrm{K}x) \cdot x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \gamma \int_0^{\dot{x}} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= -\sqrt{1 - x^2} \arcsin(\mathrm{K}x)\Big|_0^{\dot{x}} +$$

$$+\int\limits_0^{\dot{x}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{K}^2}-x^2}}\,dx-\gamma\left(-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin(x)\right)\Bigg|_0^{\dot{x}}=0.$$

Здесь

$$\int\limits_0^{\dot{x}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{K}^2}-x^2}}\,dx=\frac{1}{\mathrm{K}}\Big(E(t,\mathrm{K})-(1-\mathrm{K}^2)F(t,\mathrm{K})\Big)\Big|_0^t,$$

$$t=\arcsin(x),$$

— известное интегральное уравнение.

Откуда следует:

$$-\sqrt{1-x^2}\arcsin(\mathrm{K}x)\Big|_0^{\dot{x}}+\frac{1}{\mathrm{K}}\Big(E(t,\mathrm{K})-(1-\mathrm{K}^2)F(t,\mathrm{K})\Big)\Big|_0^t-$$

$$-\frac{1}{2}\gamma\left(-x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)\right)\Big|_0^{\dot{x}}=0,$$

или

$$F(t,\mathrm{K})\Big|_0^t=\frac{1}{1-\mathrm{K}^2}\Bigg[E(t,\mathrm{K})\Big|_0^t-\frac{1}{2}\mathrm{K}\gamma\left(-x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)\right)\Big|_0^x-$$

$$-\mathrm{K}\sqrt{1-x^2}\arcsin(\mathrm{K}x)\Big|_0^x\Bigg],$$

$$t=\arcsin(x),\qquad \gamma=\frac{\arcsin(\mathrm{K}\dot{x})}{\dot{x}}.$$

После замены переменной

$$x=\sin(t),\qquad \gamma=\frac{\arcsin(\mathrm{K}\sin t)}{\sin t},$$

$$F(\mathrm{K},t)=\frac{1}{1-\mathrm{K}^2}\Bigg[E(\mathrm{K},t)-\frac{1}{2}\mathrm{K}\frac{\arcsin(\mathrm{K}\sin t)}{\sin t}\times$$

$$\times\left(-\sin t\cos t+\arcsin(\sin t)\right)-\mathrm{K}\cos t\arcsin(\mathrm{K}\sin t)\Bigg]=$$

$$= \frac{1}{1-\mathrm{K}^2}\left[E(t,\mathrm{K}) - \frac{1}{2}\mathrm{K}\frac{\arcsin(\mathrm{K}\sin t)}{\sin t}(\sin t\cos t + t)\right].$$

Эта формула не дифференцируема, так как в нее включен постоянный коэффициент γ.

7

Вычисление интеграла 3-го рода

$$\Pi = \int \frac{dx}{(p+x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}},$$

$$\rho > 3, \quad \mathrm{K}^2 < 1$$

Проведенные предыдущие вычисления интегралов 1-го и 2-го рода, по предложенной ранее схеме (рис. 9), привели к необходимым результатам благодаря удачным подборам применяемых функций.

В данном случае, используя интегральное уравнение

$$\int\limits_0^x dy(z_2x - z_1x)\Big|_0^x = 0,$$

поступаем аналогичным образом.

1. Функция $y = F(x)$, дифференциал которой

$$dy = \frac{(p+x^2)}{x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}}$$

на участке Ox строго возрастающая, так как $dy/dx > 0$ и непрерывна $(x \leqslant 1)$.

2. $z_2 = \dfrac{x}{(p+x^2)^2}$ функция нечетная, действительная на всей оси, непрерывная, так как

$$(z_2)' = \frac{p-3x^2}{(p+x^2)^3} = 0$$

в точке $x = \sqrt{p/3}$ экстремальная. На участке $0 - x$, $x < 1$, $(z_2)' > 0$, функция возрастающая выпуклая вверх $(z_2)'' < 0)$.

3. $z_1 = \xi x$ (ξ — коэффициент зависящий от верхнего предела интегрирования определяется аналогично предыдущим случаем)

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2, \quad \xi\dot{x} = \frac{\dot{x}}{(p+\dot{x}^2)^2}, \quad \xi = \frac{1}{(p+\dot{x}^2)^2} \quad (\dot{x} \leqslant 1).$$

Подставляя эти функции в интегральное уравнение, получаем:

$$\int\limits_0^{\dot{x}} dy(z_2 x - z_1\, x)\Big|_0^x =$$

$$= \int\limits_0^{\dot{x}} \frac{(p+x^2)}{x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}} \left(\frac{x^2}{(p+x^2)^2} - \xi x^2 \right) = 0.$$

Откуда

$$\int\limits_0^{\dot{x}} \frac{dx}{(p+x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}} - \xi \int\limits_0^{\dot{x}} \frac{(p+x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}} = 0,$$

или

$$\int\limits_0^{\dot{x}} \frac{dx}{(p+x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}} =$$

$$= \xi \left(\int\limits_0^{\dot{x}} \frac{p\, dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}} + \int\limits_0^{\dot{x}} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}} \right).$$

Интегралы в правой части уравнения табличные

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}} = F(t, \mathrm{K}),$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}} = \frac{1}{\mathrm{K}^2}\big(F(t, \mathrm{K}) - E(t, \mathrm{K})\big).$$

Таким образом имеем

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{(p+x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}} = \frac{1}{\mathrm{K}^2}\xi\left[(\mathrm{K}^2p+1)F(t,\mathrm{K}) - E(t,\mathrm{K})\right]\Big|_0^t,$$

где $\xi = \dfrac{1}{(p+\sin^2 t)^2}$.

$$\prod = \frac{1}{\mathrm{K}^2(p+\sin^2 t)^2}\left[(\mathrm{K}^2p+1)F(t,\mathrm{K}) - E(t,\mathrm{K})\right]\Big|_0^t, \quad x = \sin(t).$$

8

Таблицы эллиптических интегралов

Простейшие эллиптические интегралы, приводящиеся к интегралам первого и второго рода, это:

1

$$\int \frac{\sin^2 t\,dt}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}} = \frac{1}{\mathrm{K}^2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}} - \frac{1}{\mathrm{K}^2}\int \sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}(F(t,\mathrm{K}) - E(t,\mathrm{K}) =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left[\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}} - \int \frac{\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right], \quad x=\sin t.$$

2

$$\int_0^t \frac{\cos^2 t\,dt}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}} =$$

$$= -\frac{(1-\mathrm{K}^2)}{\mathrm{K}^2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}} + \frac{1}{\mathrm{K}^2}\int \sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= -\frac{(1-\mathrm{K}^2)}{\mathrm{K}^2}F(t,\mathrm{K}) + \frac{1}{\mathrm{K}^2}E(t,\mathrm{K}) =$$

$$= -\frac{(1-\mathrm{K}^2)}{\mathrm{K}^2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}} +$$

$$+\frac{1}{\mathrm{K}^2}\int \frac{\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad x=\sin t,$$

а также ранее полученный интеграл

3

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^3}} = \Theta(t,\mathrm{K}) =$$
$$= \frac{1}{1-\mathrm{K}^2}\left[E(t,\mathrm{K}) - \frac{\mathrm{K}^2 \sin t \cos t}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}}\right] =$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-\mathrm{K}^2x^2)^3}}. \qquad (8)$$

Применяя к этим первичным интегралам дифференцирование и последующее интегрирование получим следующие интегральные формы.

4

$$\int \frac{\sin^2 t\,dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^3}} = \int \left(\int \frac{\sin^2 t\,dt}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}}\right)' \frac{dt}{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)} =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left[\int \frac{dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^3}} - \int \frac{\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}}{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)}\,dt\right] =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\big(\theta(t,\mathrm{K}) - F(t,\mathrm{K})\big) = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-\mathrm{K}^2x^2)^3}}, \qquad x = \sin t.$$

5

$$\int \frac{\sin^4 t\,dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^3}} = \int \left(\int \frac{\sin^2 t\,dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^3}}\right)' \sin^2 t\,dt =$$
$$= \int \left[\frac{1}{\mathrm{K}^2}\big(\theta(t,\mathrm{K})' - F(t,\mathrm{K})'\big)\right] \sin^2 t\,dt =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left[\int \frac{\sin^2 t\,dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^3}} - \int \frac{\sin^2 t\,dt}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}}\right] =$$

$$= \frac{1}{K^2}\left[\frac{1}{K^2}\big(\Theta(t,K) - F(t,K)\big) - \frac{1}{K^2}\big(F(t,K) - E(t,K)\big)\right] =$$

$$= \frac{1}{K^4}\left[\Theta(t,K) - 2F(t,K) + E(t,K)\right] =$$

$$= \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-K^2x^2)^3}}, \qquad x = \sin t.$$

6

$$\int \frac{\cos^2 t\,dt}{\sqrt{(1-K^2\sin^2 t)^3}} = \int \left(\int \frac{\cos^2 t\,dt}{\sqrt{1-K^2\sin^2 t}}\right)' \frac{dt}{(1-K^2\sin^2 t)} =$$

$$= -\frac{(1-K^2)}{K^2}\int \frac{F'(t,K)dt}{(1-K^2\sin^2 t)} + \frac{1}{K^2}\int \frac{E'(t,K)}{(1-K^2\sin^2 t)} =$$

$$= -\frac{(1-K^2)}{K^2}\Theta(t,K) + \frac{1}{K^2}F(t,K).$$

7

$$\int \frac{\cos^4 t\,dt}{\sqrt{(1-K^2\sin^2 t)^3}} = \int \left(\int \frac{\cos^2 t\,dt}{\sqrt{(1-K^2\sin^2 t)^3}}\right)' \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{K^2}\int \left[-(1-K^2)\Theta(t,K)' + F(t,K)'\right]\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{K^2}\int \left[\frac{-(1-K^2)\cos^2 t\,dt}{\sqrt{(1-K^2\sin^2 t)^3}} + \frac{\cos^2 t\,dt}{\sqrt{1-K^2\sin^2 t}}\right] =$$

$$= \frac{1}{K^2}\left\langle \frac{-(1-K^2)}{K^2}\left[-(1-K^2)\Theta(t,K) + F(t,K)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{-(1-K^2)}{K^2}F(t,K) + \frac{1}{K^2}E(t,K)\right]\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{K^4}\left[(1-K^2)^2\Theta(t,K) - 2(1-K^2)F(t,K) + \frac{1}{K^2}E(t,K)\right].$$

8

$$\int \frac{\sin^2 t\,dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^5}} = \int \left(\frac{\sin^2 t}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^3}}\right)\frac{dt}{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\int \left[\Theta(t,\mathrm{K})' - F(t,\mathrm{K})'\right]\frac{dt}{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left[\int \frac{dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^5}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^3}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left[J(t,\mathrm{K}) - \Theta(t,\mathrm{K})\right] = \int \frac{x^2\,dt}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-\mathrm{K}^2x^2)^5}}, \qquad x = \sin t.$$

Значение интеграла

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^5}} = J(t,\mathrm{K})$$

приведены ниже.

9

$$\int \frac{\sin^4 t\,dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^5}} = \int \left(\frac{\sin^4 t}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^3}}\right)\frac{dt}{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^4}\int \left[\theta(t,\mathrm{K})' - 2F(t,\mathrm{K})' + E(t,\mathrm{K})'\right]\frac{dt}{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^4}\left[J(t,\mathrm{K}) - 2\Theta(t,\mathrm{K}) + F(t,\mathrm{K})\right] =$$

$$= \int \frac{x^4\,dt}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-\mathrm{K}^2x^2)^5}}, \qquad x = \sin t.$$

Интеграл

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^5}} = J(t,\mathrm{K}),$$

определяемый интегрированием дифференциального уравнения

$$\left(\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{(1-\text{K}^2\sin^2 t)^3}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{(1-\text{K}^2\sin^2 t)^5}} -$$

$$-\frac{2(1-\text{K}^2)\sin^2 t}{\sqrt{(1-\text{K}^2\sin^2 t)^5}} - \frac{\text{K}^2\sin^4 t}{\sqrt{(1-\text{K}^2\sin^2 t)^5}} = (\text{см.}8,9)$$

$$= J(t,\text{K})' - \frac{2(1-\text{K}^2)}{\text{K}^2}\left[J(t,\text{K})' - \Theta(t,\text{K})'\right] -$$

$$-\frac{\text{K}^2}{\text{K}^4}\left[J(t,\text{K})' - 2\Theta(t,\text{K})' + F(t,\text{K})'\right] =$$

$$= \frac{1}{\text{K}^2}\left[(3\text{K}^2-3)J' - F' + 2(2-\text{K}^2)\Theta'\right].$$

Откуда

$$J(t,\text{K}) = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-\text{K}^2\sin^2 t)^5}} =$$

$$= \frac{1}{3(1-\text{K}^2)}\left[\frac{-\text{K}^2\sin t\cos t}{\sqrt{(1-\text{K}^2\sin^2 t)^3}} - F(t,\text{K}) + 2(2-\text{K}^2)\Theta\right].$$

10

$$\int \frac{\cos^2 t\,dt}{\sqrt{(1-\text{K}^2\sin^2 t)^5}} = \int \left(\frac{\cos^2 t}{\sqrt{(1-\text{K}^2\sin^2 t)^3}}\right)\frac{dt}{(1-\text{K}^2\sin^2 t)} =$$

$$= \frac{1}{\text{K}^2}\int \left[-(1-\text{K}^2)\theta(t,\text{K})' + F(t,\text{K})'\right]\frac{dt}{(1-\text{K}^2\sin^2 t)} =$$

$$= \frac{1}{\text{K}^2}\left[-(1-\text{K}^2)J(t,\text{K}) + \Theta(t,\text{K})\right] =$$

$$= \int \frac{(1-x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-\text{K}^2x^2)^5}}, \quad x = \sin t.$$

11

Интегрируя дифференциальное уравнение

$$\left(\sin t \cos t \sqrt{1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t}} - \frac{(2+2\mathrm{K}^2)\sin^2 t}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t}} + \frac{3\mathrm{K}^2 \sin^4 t}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t}} =$$

$$= F(t,\mathrm{K})' - \frac{(2+2\mathrm{K}^2)}{\mathrm{K}^2}\left[F(t,\mathrm{K})' - E'(t,\mathrm{K})'\right] + \frac{3\mathrm{K}^2 \sin^4 t}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t}},$$

получаем

$$\int \frac{\sin^4 t\, dt}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{3\mathrm{K}^4}\Big[\mathrm{K}^2 \sin t \cos t \sqrt{1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t} +$$

$$+ (2+\mathrm{K}^2)F(t,\mathrm{K}) - 2(1+\mathrm{K}^2)E(t,\mathrm{K})\Big] =$$

$$= \int \frac{x^4\, dt}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2 x^2}}, \qquad x = \sin t.$$

12

$$\int \frac{\sin^2 t\, dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t)^7}} = \int \left(\frac{\sin^2 t}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t)^5}}\right) \frac{dt}{(1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t)} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left[J(t,\mathrm{K})' - \theta(t,\mathrm{K})'\right] \frac{dt}{(1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t)} = (\text{см. } 8)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left[\int \frac{dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t)^7}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t)^5}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left[L(t,\mathrm{K}) - J(t,\mathrm{K})\right] = \int \frac{x^2\, dt}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-\mathrm{K}^2 x^2)^7}}, \qquad x = \sin t,$$

$$L = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2 \sin^2 t)^7}} \quad (\text{см. } 13).$$

13

$$\int \frac{\sin^4 t\,dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^7}} =$$

$$= \int \left(\frac{\sin^4 t}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^5}}\right) \frac{dt}{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)} = (\text{см. } 9)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^4} \int \left[J(t,\mathrm{K})' - 2\Theta(t,\mathrm{K})' + F(t,\mathrm{K})'\right] \frac{dt}{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^4}\left[L(t,\mathrm{K}) - 2J(t,\mathrm{K}) + \theta(t,\mathrm{K})\right] =$$

$$= \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-\mathrm{K}^2x^2)^7}}, \qquad x = \sin t.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^5}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^7}} + \frac{(4\mathrm{K}^2-2)\sin^2 t}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^7}} -$$

$$- \frac{3\mathrm{K}^2\sin^4 t}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^7}} = L(t,\mathrm{K})' + \left(\frac{4\mathrm{K}^2-2}{\mathrm{K}^2}\right)\left[L(t,\mathrm{K})' - J(t,\mathrm{K})'\right] -$$

$$- \frac{3\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}^4}\left[L(t,\mathrm{K})' - 2J(t,\mathrm{K})' + \theta(t,\mathrm{K})'\right],$$

или

$$\left(\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^5}}\right)' =$$

$$= \frac{-5(1-\mathrm{K}^2)}{\mathrm{K}^2}L(t,\mathrm{K})' + \frac{(8-4\mathrm{K}^2)}{\mathrm{K}^2}J(t,\mathrm{K})' - \frac{3}{\mathrm{K}^2}\Theta(t,\mathrm{K})',$$

после интегрирования

$$L(t,\mathrm{K}) = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^7}} =$$

$$= \frac{1}{5(1-\mathrm{K}^2)}\left[-\frac{\mathrm{K}^2\sin t\cos t}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^5}} + 4(2-\mathrm{K}^2)J(t,\mathrm{K}) - 3\theta(t,\mathrm{K})\right] =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-\mathrm{K}^2x^2)^7}}, \qquad x = \sin t.$$

14

$$\int \frac{\sin^2 t\cos^2 t}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}}\,dt = \frac{1}{\mathrm{K}^2}F(t,\mathrm{K}) - \frac{1}{\mathrm{K}^2}E(t,\mathrm{K}) -$$

$$- \left[\frac{1}{3\mathrm{K}^4}\Big(\mathrm{K}^2\sin t\cos t\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t} +\right.$$

$$\left. + (2+\mathrm{K}^2)F(t,\mathrm{K}) - 2(1+\mathrm{K}^2)E(t,\mathrm{K})\Big)\right] =$$

$$= \frac{1}{3\mathrm{K}^4}\Big[-\mathrm{K}^2\sin t\cos t\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t} +$$

$$+ (2\mathrm{K}^2-2)F(t,\mathrm{K}) + (2-\mathrm{K}^2)E(t,\mathrm{K})\Big] =$$

$$= \int \frac{x^2(1-x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\mathrm{K}^2x^2}}, \qquad x = \sin t.$$

15

$$\int \frac{\sin^2 t\cos^2 t\,dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^3}} = \int \left(\frac{\sin^2 t}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^3}}\right)\cos^2 t\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left[\theta(t,\mathrm{K})' - F(t,\mathrm{K})'\right]\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\int\left(\frac{\cos^2 t\,dt}{\sqrt{(1-\mathrm{K}^2\sin^2 t)^3}} - \frac{\cos^2 t\,dt}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2\sin^2 t}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{K}^2}\left(-(1-\mathrm{K}^2)\theta(t,\mathrm{K}) + F(t,\mathrm{K})\right)\right) -\right.$$

$$- \frac{1}{K^2}\left(-(1-K^2)F(t,K) + E(t,K)\right)\Big] =$$

$$= \frac{1}{K^4}\Big[(2-K^2)F(t,K) - E(t,K) - (1-K^2)\theta(t,K)\Big] =$$

$$= \int \frac{x^2(1-x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}}, \qquad x = \sin t.$$

16

$$\int \frac{\sin^2 t\cos^2 t\,dt}{\sqrt{(1-K^2\sin^2 t)^5}} = \int \left(\frac{\sin^2 t\cos^2 t}{\sqrt{(1-K^2\sin^2 t)^3}}\right)\frac{dt}{(1-K^2\sin^2 t)} =$$

$$= \frac{1}{K^4}\Big((2-K^2)\Theta(t,K) - F(t,K) - (1-K^2)J(t,K)\Big) =$$

$$= \int \frac{x^2(1-x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-K^2x^2)^5}}, \qquad x = \sin t.$$

9

Решение полных интегралов трех канонических форм

Пример 1

Полный интеграл 2-го рода ($t = \pi/2$, $\mathrm{K} = 0{,}707106781$):

$$E(\mathrm{K}, t) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \mathrm{K}^2 \sin^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} t \left[\sqrt{1 - \mathrm{K}^2 \sin^2 t} + \frac{1}{\mathrm{K}} \frac{\arcsin(\mathrm{K} \sin t)}{\sin t} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \left[0{,}707106781 + \frac{\pi}{4\mathrm{K}} \right] =$$

$$= 0{,}785398163 \left[0{,}707106781 + 1{,}110720735 \right] = 1{,}427718392.$$

Пример 2

Полный интеграл 1-го рода ($t = \pi/2$, $\mathrm{K} = 0{,}707106781$):

$$F(\mathrm{K}, t) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - \mathrm{K}^2 \sin^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \mathrm{K}^2} \left[E(\mathrm{K}, t) - \frac{1}{2} \mathrm{K} \frac{\arcsin(\mathrm{K} \sin t)}{\sin t} (\sin t \cos t + t) \right] =$$

$$= 2 \left[1{,}427718392 - \frac{1}{2} \mathrm{K} \frac{\pi}{4} \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) \right] = 1{,}983078759.$$

Пример 3

Интеграл 2-го рода ($t = \pi/6$, $\mathrm{K} = 0{,}707106781$):

$$E(\mathrm{K}, t) = \int\limits_0^{\pi/6} \sqrt{1 - \mathrm{K}^2 \sin^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} t \left[\sqrt{1 - \mathrm{K}^2 \sin^2 t} + \frac{1}{2} \frac{\arcsin(\mathrm{K} \sin t)}{\sin t} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} \left[\sqrt{1 - \mathrm{K}^2 \cdot 0{,}5^2} + \frac{1}{\mathrm{K}} \frac{\arcsin(\mathrm{K} \cdot 0{,}5)}{0{,}5} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} \left[0{,}935414346 + \frac{0{,}361367123}{0{,}707106781 \cdot 0{,}5} \right] =$$

$$= 0{,}261799387 \left[0{,}935414346 + 1{,}022100373 \right] = 0{,}512476205.$$

Пример 4

Интеграл 1-го рода ($t = \pi/6$, $\mathrm{K} = 0{,}707106781$):

$$F(\mathrm{K}, t) = \int\limits_0^{\pi/6} \frac{dt}{\sqrt{1 - \mathrm{K}^2 \sin^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \mathrm{K}^2} \left[E(\mathrm{K}, t) - \frac{1}{2} \mathrm{K} \frac{\arcsin(\mathrm{K} \sin t)}{\sin t} (\sin t \cos t + t) \right] =$$

$$= \frac{1}{1 - \mathrm{K}^2} \left[E(\mathrm{K}, t) - \frac{1}{2} \mathrm{K} \cdot 0{,}722734246 \cdot \left(0{,}433012701 + 0{,}523598775 \right) \right] =$$

$$= 2 \left[0{,}512476205 - 0{,}255525143 \cdot (0{,}956598775) \right] = 0{,}536075841.$$

Пример 5

Полный интеграл 3-го рода ($t = \pi/2$, $\mathrm{K} = 0{,}707106781$, $p = 4$):

$$\prod = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{(p + x^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - \mathrm{K}^2 x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\text{K}^2} \frac{1}{(p+\sin^2 t)^2} \left[(\text{K}^2 p + 1) F(\text{K}, t) - E(t, \text{K}) \right].$$

$\text{K} = 0,707106781$, $p = 4$, $F(t, K) = 1{,}983078759$, $E = 1{,}427718392$:

$$\prod = \frac{1}{0{,}5} \cdot \frac{1}{(4+1)^2} \left[(0{,}5 \cdot 4 + 1) \cdot 1{,}983078759 - 1{,}427718392 \right] =$$

$$= 0{,}08 \left[3 \cdot 1{,}983078759 - 1{,}427718392 \right] = 0{,}361721430.$$

Представляем Вам следующие книги:

URSS

Теория чисел

✓*Оре О.* **Приглашение в теорию чисел.**
✓*Вейль А.* **Основы теории чисел.**
✓*Вейль Г.* **Алгебраическая теория чисел.**
✓*Понтрягин Л. С.* **Обобщения чисел.**
✓*Жуков А. В.* **Вездесущее число «пи».**
✓*Хинчин А. Я.* **Три жемчужины теории чисел.**
✓*Хинчин А. Я.* **Цепные дроби.**
✓*Парфенов И. И.* **Цепные дроби — ожерелье мехатроники.**
✓*Ожигова Е. П.* **Что такое теория чисел.**
✓*Виноградов И. М.* **Особые варианты метода тригонометрических сумм.**
✓*Карацуба А. А.* **Основы аналитической теории чисел.**
✓*Гельфонд А. О.* **Трансцендентные и алгебраические числа.**
✓*Яглом И. М.* **Комплексные числа и их применение в геометрии.**
✓*Деза Е. И.* **Специальные числа натурального ряда.**
✓*Деза Е. И., Котова Л. В.* **Сборник задач по теории чисел.**

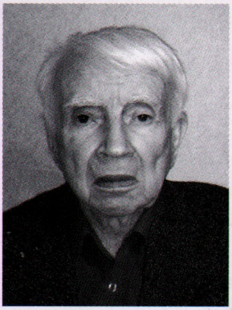
Серия «Физико-математическое наследие: теория чисел»

✓*Диофант Александрийский.* **Арифметика и книга о многоугольных числах.**
✓*Ферма П.* **Исследования по теории чисел и диофантову анализу.**
✓*Дирихле П. Г. Л.* **Лекции по теории чисел.**
✓*Дедекинд Р.* **Непрерывность и иррациональные числа.**
✓*Ингам А. Э.* **Распределение простых чисел.**
✓*Берман Г. Н.* **Число и наука о нем: Общедоступные очерки.**
✓*Ландау Э.* **Основы анализа: Действия над числами.**
✓*Титчмарш Э. Ч.* **Дзета-функция Римана.**
✓*Дэвенпорт Г.* **Высшая арифметика: Введение в теорию чисел.**
✓*Гельфонд А. О.* **Решение уравнений в целых числах.**

Дифференциальные и интегральные уравнения

✓*Филиппов А. Ф.* **Введение в теорию дифференциальных уравнений.**
✓*Филиппов А. Ф.* **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.**
✓*Эльсгольц Л. Э.* **Дифференциальные уравнения.**
✓*Степанов В. В.* **Курс дифференциальных уравнений.**
✓*Немыцкий В. В., Степанов В. В.* **Качественная теория дифференциальных уравнений.**
✓*Краснов М. Л. и др.* **Обыкновенные дифференциальные уравнения.** Сборник задач «Вся высшая математика» с подробными решениями.
✓*Краснов М. Л.* **Интегральные уравнения. Введение в теорию.**
✓*Шалдырван В. А., Медведев К. В.* **Руководство по решению обыкновенных дифференциальных уравнений.** Кн. 1, 2.
✓*Петровский И. Г.* **Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.**
✓*Петровский И. Г.* **Лекции по теории интегральных уравнений.**
✓*Федорюк М. В.* **Обыкновенные дифференциальные уравнения.**
✓*Федорюк М. В.* **Асимптотика: Интегралы и ряды.**

Об авторе



Леонид Степанович КУЗЬМИЧ

В 1947 г. окончил Саратовский институт механизации сельского хозяйства по специальности «инженер-механик». В 1952 г. поступил на работу во Всесоюзный институт механизации сельского хозяйства (ВИМ) в Москве, где в должности главного конструктора отдела почвообрабатывающих машин проработал до выхода на пенсию в 1995 г.

Занятия математикой начал несколько десятков лет назад. В 1952 г. поступал в аспирантуру при ВИМ, но не был принят, однако его реферат «Качение колеса с жестким ободом по мягкому грунту под нагрузкой» был оценен академиком ВАСХНИН на отлично. При разработке реферата Л. С. Кузьмичу пришлось иметь дело с незнакомыми интегралами, которые в конечном виде не вычисляются, и он решил посвятить свое свободное время работе над этой темой.

12596 ID 166028

9 785397 033251

Отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине http://URSS.ru

E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru