

Л. С. Кузьмич

# ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

# ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Алгоритм  
точного решения

*Станьон мне дроз,  
но истинна дороже  
Аристотель*



**Л. С. Кузьмич**

**ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ  
ФУНКЦИИ.  
ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ  
ИНТЕГРАЛЫ**

***Алгоритм  
точного решения***



**URSS**

**МОСКВА**

**Кузьмич Леонид Степанович**

**Эллиптические функции. Эллиптические интегралы: Алгоритм точного решения.** — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 48 с. (Relata Refero.)

В настоящей книге излагаются нетрадиционные методы интегрального исчисления в конечном виде как эллиптических интегралов, так и функций одной переменной, что в значительной мере расширяет возможности интегрирования функций.

Книга представляет интерес для математиков, механиков, инженеров, научных работников, студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей. Она будет также полезна широкому кругу читателей, интересующихся историей развития математики.

В ближайшее время планируется выпуск второй части книги, в которой автор продолжит исследование темы.

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»».

117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.

Формат 60×90/16. Печ. л. 3. Зак. № ВО-51.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.


ISBN 978-5-397-03325-1

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012

12596 ID 166028



9 785397 033251

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: <a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a>
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
	URSS

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

## Содержание

От издательства . . . . .	4
От автора . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
1. Эллиптические интегралы . . . . .	8
2. Эллиптические функции $\cos(t + \varphi)_t$ , $\cos(t + \varphi)_\varphi$ , $\sin(t + \varphi)_t$ , $\sin(t + \varphi)_\varphi$ . . . . .	9
3. Первое интегральное уравнение . . . . .	17
4. Конструктивная схема для решения интегралов . . . . .	21
5. Эллиптический интеграл 2-го рода $E(t, K) = \int \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t} dt$ . . . . .	23
6. Эллиптический интеграл 1-го рода $F(t, K) = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}}$ . . . . .	26
7. Вычисление интеграла 3-го рода $\Pi = \int \frac{dx}{(p + x^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - K^2 x^2}}$ , $\rho > 3$ , $K^2 < 1$ . . . . .	29
8. Таблицы эллиптических интегралов . . . . .	32
9. Решение полных интегралов трех канонических форм . . . . .	41

## *От издательства*

Эта книга продолжает серию «Relata Refero» (дословный перевод — рассказываю рассказанное).

Под этим грифом издательство предоставляет трибуну авторам, чтобы высказать публично новые идеи в науке, обосновать новую точку зрения, донести до общества новую интерпретацию известных экспериментальных данных, etc.

В споре разных точек зрения только вердикт Великого судьи — Времени — может стать решающим и окончательным. Сам же процесс поиска Истины хорошо характеризуется известным высказыванием Аристотеля, вынесенным на обложку настоящей серии: авторитет учителя не должен довлеть над учеником и препятствовать поиску новых путей.

Мы надеемся, что публикуемые в этой серии тексты внесут, несмотря на свое отклонение от установившихся канонов, свой вклад в познание Истины.

## *От автора*

Опубликованная книга «Элементы теории эллиптических функций», написанная известным математиком Ю. С. Сикорским, посвящена эллиптическим функциям, в ней развита вычислительная сторона.

Напечатанные в книге таблицы содержат численные приближенные значения эллиптических интегралов первого и второго рода.

Я предлагаю вычисление эллиптических интегралов производить в конечном виде через конечное число элементарных функций.

*Памяти расстрелянных коммунаров,  
приглашенных из Америки  
для построения коммунизма:*

***Богданов, Богданович, Брицко,  
Кузьмич, Комса, Кардаш, Калоша,  
Комаров, Лысов, Табала, Шелег...***

*Хотелось бы всех поименно назвать,  
Да отняли список, и негде узнать...*

А. Ахматова

## *Предисловие*

Эллиптические интегралы применяются в различных отделах механики, физики, математики и в прикладных науках.

Существуют особые таблицы, в которых содержатся численные значения эллиптических интегралов первого и второго рода. Эти интегралы привлекают внимание еще и потому, что через них может быть вычислен любой интеграл

$$\int (x, \sqrt{R}) dx,$$

где  $R(x)$  — рациональная функция.

Данная работа предлагает метод вычисления интегралов в конечном виде через конечное число элементарных функций.



# 1

## Эллиптические интегралы

Эллиптическим в общем случае называется интеграл

$$\int (x, \sqrt{R}) dx,$$

где  $R$  рациональная функция

$$R = ax^2 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Любой эллиптический интеграл выражается через три общепринятых канонических интеграла:

— первого рода

$$F(t, k) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}};$$

— второго рода

$$E(t, k) = \int_0^t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$$

— третьего рода

$$\Pi(p, t, k) = \int_0^t \frac{dt}{(p + \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \int_0^x \frac{dx}{(p + x^2) \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}}.$$

В нашем случае вводим интеграл

$$\theta = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 t)^3}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{(1 - k^2 x^2)^3}},$$

где  $x = \sin t$  — замена переменной интегрирования во всех приведенных случаях.

## 2

### Эллиптические функции

$$\begin{aligned} &\cos(t + \varphi)_t, \cos(t + \varphi)_\varphi, \\ &\sin(t + \varphi)_t, \sin(t + \varphi)_\varphi \end{aligned}$$

Для решения эллиптических интегралов рассмотрим частный случай эллиптических функций (отличающихся от ранее известных в математике), для чего произведем известное построение эллипса. Из центра  $O$  окружности радиуса  $a$  исходят взаимно перпендикулярные диаметры (рис. 1)  $A'A$ ,  $DD'$ . На радиусах  $OD$ ,  $OD'$  откладываются от точки  $O$  равные отрезки  $OB$ ,  $OB'$  длиной  $b$ . Из каждой точки  $N$  окружности опускается перпендикуляр  $NP$ , и на этом перпендикуляре откладывается отрезок  $PM$  так, чтобы отношение было

$$\frac{PM}{PN} = \frac{b}{a}.$$

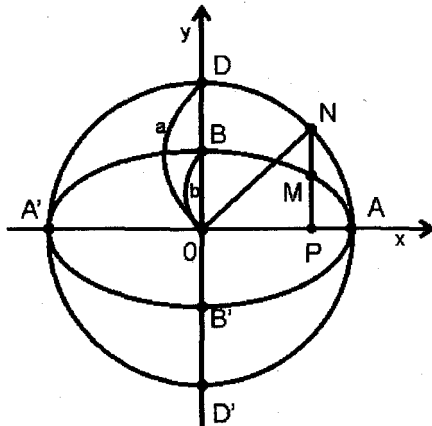


Рис. 1. Схема построения эллипса

## 2. Эллиптические функции

Это построение преобразует каждую точку  $N$  окружности в другую соответственную ей точку  $M$  эллипса в одном и том же отношении  $k = b/a$ . Получаем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В параметрическом виде уравнение эллипса имеет вид

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad \text{или} \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} t. \quad (1)$$

Произведем дальнейшее построение внутри окружности (рис. 2).

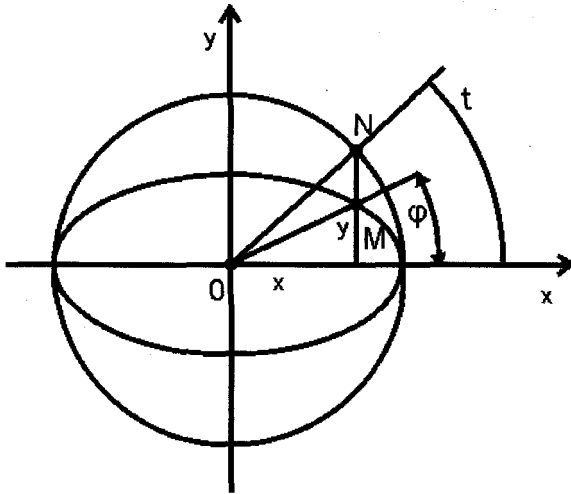


Рис. 2. Схема для построения эллиптических функций

Соединим точку  $O$  и точки  $N$ ,  $M$  прямыми линиями, которые определяют углы  $t$ ,  $\varphi$ . Точка  $M$  эллипса определяется координатами  $(x, y)$ , т. е.  $M(xy)$ , и  $y/x = \operatorname{tg} \varphi$ .

Тогда следует (1)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} t.$$

Отношение  $b/a = k$ , является коэффициентом сжатия эллипса ( $k < 1$ ).

Параметрическое уравнение эллипса принимает вид

$$\operatorname{tg} \varphi = k \operatorname{tg} t. \quad (2)$$

Из этого уравнения, после преобразований

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = k \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \frac{\sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{k^2 \sin^2 t}{1 - \sin^2 t}$$

получаем

$$\sin \varphi = \frac{k \sin t}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}}, \quad \cos \varphi = \frac{\cos t}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}}. \quad (3)$$

Вводя соотношение  $\frac{t + \varphi}{2} = \alpha$ , или  $t + \varphi = 2 \alpha$ , имеем

$$\begin{aligned} \cos(t + \varphi)_t &= \cos t \cos \varphi - \sin t \sin \varphi = \\ &= \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} - \frac{k \sin^2 t}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}}, \end{aligned}$$

и в интегральной форме

$$\begin{aligned} &\int_0^t \cos(t + \varphi)_t dt = \\ &= \int_0^t \frac{\cos^2 t dt}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} - k \int_0^t \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогичным образом возникают формулы:

$$\begin{aligned} \sin t &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi}}, \quad \cos t = \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi}} \\ \cos(t + \varphi)_\varphi &= \cos t \cos \varphi - \sin t \sin \varphi = \\ &= \frac{k \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi}} - \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

и в интегральной форме

$$\int_0^\varphi \cos(t + \varphi)_\varphi d\varphi = \int_0^\varphi \frac{k \cos^2 \varphi d\alpha}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi}} - \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi d\alpha}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi}}.$$

Таким образом эллиптические функции  $\cos(t + \varphi)_t$ ,  $\cos(t + \varphi)_\varphi$  определяются как функции обратные эллиптическим интегралам.

Взаимная зависимость углов  $t$ ,  $\varphi$ ,  $\alpha$  определяется из уравнений

$$\operatorname{tg} \varphi = k \operatorname{tg} t, \quad t + \varphi = 2\alpha, \quad (\text{см. (2)})$$

что равнозначно уравнению

$$\operatorname{tg}(t + \varphi) = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} 2\alpha, \quad \frac{(1 + k) \operatorname{tg} t}{1 - k \operatorname{tg}^2 t} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

После решения этого уравнения получим

$$\operatorname{tg}^2 t + \frac{(1 + k) \operatorname{tg} t}{k \operatorname{tg} 2\alpha} - \frac{1}{k} = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = 2\alpha - t.$$

Из вышеприведенного следует

$$\cos(t + \varphi)_t = \cos(t + \varphi)_\varphi = \cos t \cos \varphi - \sin t \sin \varphi = \cos 2\alpha.$$

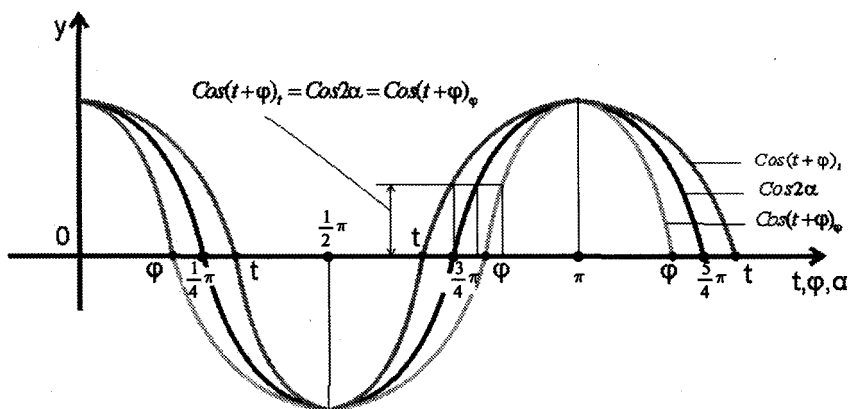
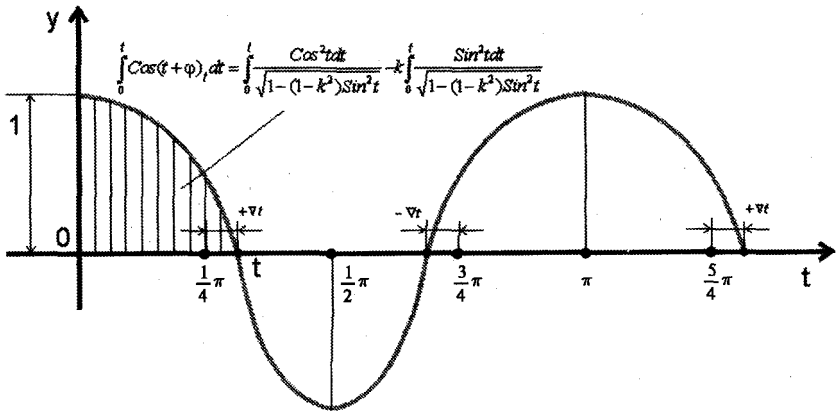
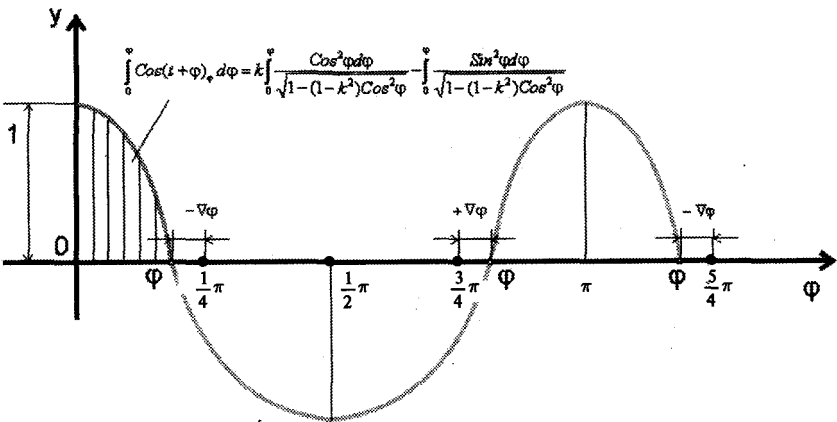


Рис. 3. Совмещенные графики эллиптических функций

## 2. Эллиптические функции



**Рис. 4.** График функции  $\cos(t + \varphi)_t$



**Рис. 5.** График функции  $\cos(t + \varphi)_\varphi$

Таким образом графики функций  $\cos(t + \varphi)_t$ ,  $\cos(t + \varphi)_\varphi$  расположены симметрично графика функции  $y = \cos 2\alpha$  (рис. 3–5).

*Аналогично образуются функциональные зависимости*

$$\begin{aligned} \sin(t + \varphi)_t &= \sin t \cos \varphi + \sin \varphi \cos t = \\ &= \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} + \frac{k \sin t \cos t}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} = \\ &= \frac{(1 + k) \sin t \cos t}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sin(t + \varphi)_\varphi &= \sin t \cos \varphi + \sin \varphi \cos t = \\ &= \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi}} + \frac{k \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi}} = \\ &= \frac{(1 + k) \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

и интегральная форма

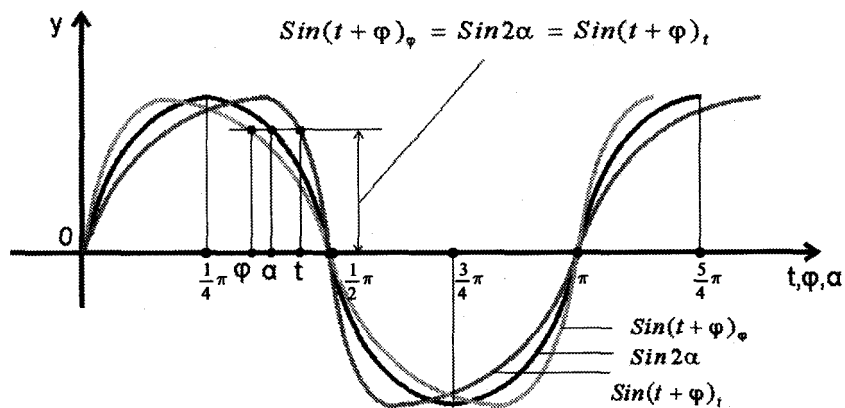
$$\begin{aligned} \int_0^t \sin(t + \varphi)_t dt &= (1 + k) \int_0^t \frac{\sin t \cos t dt}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} = \\ &= -\frac{1}{(1 - k)} \sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t} \Big|_0^t, \\ \int_0^\alpha \sin(t + \varphi)_\varphi d\varphi &= (1 + k) \int_0^\alpha \frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{(1 - k)} \sqrt{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi} \Big|_0^\alpha. \end{aligned}$$

Аналогично графики функции

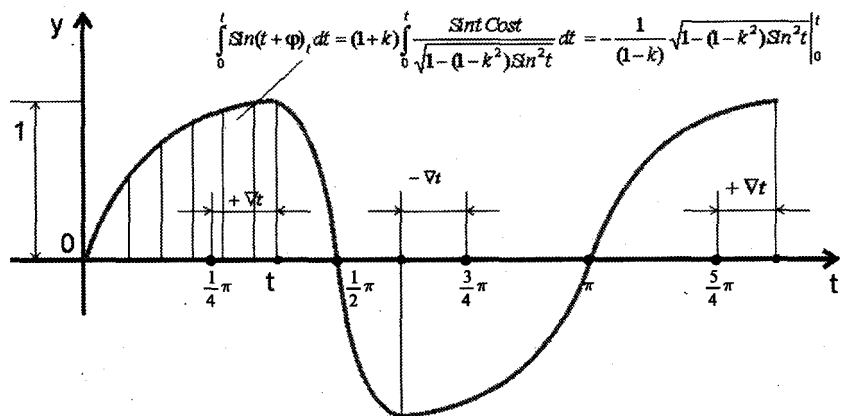
$$\sin(t + \varphi)_t = \sin(t + \varphi)_\varphi = \sin 2\alpha$$

симметричны графику  $\sin 2\alpha$  (рис. 6–8).

## 2. Эллиптические функции



**Рис. 6.** Совмещенные графики эллиптических функций



**Рис. 7.** График функции  $\text{sin}(t + \varphi)_t$



## 2. Эллиптические функции

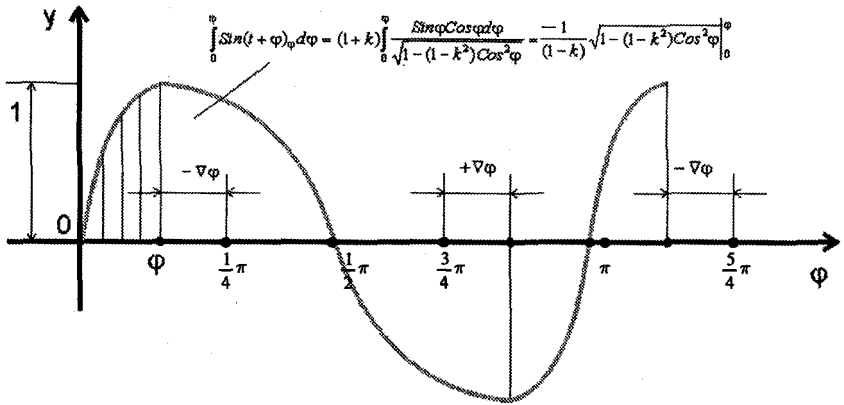


Рис. 8. График функции  $\sin(t + \varphi)_\varphi$

### Дифференциальные зависимости аргументов $t, \varphi$

Дифференцирую связь (2)  $\operatorname{tg} \varphi = k \operatorname{tg} t$ , т. е.

$$d(\operatorname{tg} \varphi) = d(k \operatorname{tg} t).$$

Получаем

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{k dt}{\cos^2 t}$$

и, используя (3)

$$\cos \varphi = \frac{\cos t}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}},$$

имеем

$$d\varphi = \frac{k dt}{\cos^2 t} \cdot \frac{\cos^2 t}{1 - (1 - k^2) \sin^2 t} = k \frac{dt}{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}. \quad (6)$$

Аналогично

$$dt = \frac{k d\varphi}{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi}.$$

### 3

## Первое интегральное уравнение

Ранее мы получили (4)

$$\int_0^t \frac{\cos^2 t \, dt}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} - k \int_0^t \frac{\sin^2 t \, dt}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} = \int_0^t \cos(t + \varphi)_t \, dt.$$

Подынтегральные функции представляем в таком виде

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} = \\ & = \frac{1}{(1 - k^2)} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} - \sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t} \right), \\ & \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} = \\ & = \frac{1}{(1 - k^2)} \left( -\frac{k^2}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} + \sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t} \right). \end{aligned}$$

Внося эти выражения в уравнение (4), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \cos(t + \varphi) \, dt = \\ & = \frac{1}{(1 - k^2)} \int_0^t \left( \frac{-k^2}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t}} + \sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 t} \right) dt - \end{aligned}$$

### 3. Первое интегральное уравнение

$$\begin{aligned}
 & -k \int_0^t \frac{1}{(1-k^2)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} - \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t} \right) dt = \\
 & = \left( \frac{-k^2-k}{(1-k^2)} \right) \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} + \\
 & + \frac{(1+k)}{(1-k^2)} \int_0^t \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t} dt = \\
 & = \frac{1}{1-k} \left( -k \int \frac{dt}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} + \int \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t} dt \right). \quad (7)
 \end{aligned}$$

Легко убедиться в справедливости уравнения

$$\begin{aligned}
 & \int \cos(t+\varphi)_t dt + \int \cos(t+\varphi)_\varphi d\varphi = \\
 & = \int \cos(t+\varphi) d(t+\varphi) = \sin(t+\varphi),
 \end{aligned}$$

так как ранее было доказано (рис. 3)

$$\cos(t+\varphi)_t = \cos(t+\varphi)_\varphi.$$

В то же время, имея дифференциальную зависимость (6)

$$d\varphi = \frac{k dt}{1-(1-k^2)\sin^2 t},$$

получаем

$$\int \cos(t+\varphi)_t dt + \int \cos(t+\varphi)_t \cdot \frac{k dt}{1-(1-k^2)\sin^2 t} = \sin(t+\varphi),$$

и, используя уравнение (7) и

$$\int \cos(t+\varphi)_t \frac{k dt}{1-(1-k^2)\sin^2 t} =$$

### 3. Первое интегральное уравнение

---

$$= \int \left[ \int \cos(t + \varphi)_t dt \right]' \cdot \frac{k dt}{1 - (1 - k^2) \sin^2 t},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-k} \left( -k \int \frac{dt}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} + \int \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t} dt \right) + \\ & + \frac{k}{(1-k)} \left( -k \int \frac{dt}{\sqrt{(1-(1-k^2)\sin^2 t)^3}} + \int \frac{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t} dt}{1-(1-k^2)\sin^2 t} \right) = \\ & = \sin(t + \varphi)_t, \end{aligned}$$

где

$$\sin(t + \varphi)_t = \frac{(1+k) \sin t \cos t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}} \quad (\text{см. (5)}),$$

и окончательно первое интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t} dt - k^2 \int \frac{dt}{\sqrt{(1-(1-k^2)\sin^2 t)^3}} = \\ & = (1-k^2) \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2 t}}, \end{aligned}$$

где

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-(1-k^2)\sin^2 t)^3}} = \Theta$$

ранее обозначенный интеграл.

В дальнейшем будем использовать дополнительный модуль

$$K = \sqrt{1-k^2}, \quad K \leq 1.$$

И тогда первое интегральное уравнение

$$E(t, K) - (1-K^2) \cdot \Theta(t, K) = K^2 \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 t}},$$

### 3. Первое интегральное уравнение

---

откуда

$$\Theta(t, K) = \frac{1}{1 - K^2} \left[ E(t, K) - \frac{K^2 \sin t \cos t}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} \right], \quad (8)$$

или

$$\Theta(t, K) = \frac{1}{1 - K^2} \left[ \int_0^x \frac{\sqrt{1 - K^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx - \frac{K^2 x \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - K^2 x^2}} \right],$$

$$x = \sin t.$$

## 4

### Конструктивная схема для решения интегралов

Для вычисления эллиптических интегралов предлагается следующая схема. В трехмерном пространстве  $Oxyz$  рассматривается тело  $V$  ограниченное сверху поверхностью  $y = F(x)$ , снизу замкнутой областью  $D$  плоскости  $Oxyz$ , с боков цилиндрическими поверхностями направляющими и для которых служат функции  $z_1 = \varphi(x)$ ,  $z_2 = \chi(x)$  противоположно выпуклые. Образующие этих цилиндрических поверхностей параллельны оси  $Oy$  (рис. 9).

Функции

$$y = F(x), \quad z_1 = \varphi(x), \quad z_2 = \chi(x)$$

непрерывны и дифференцируемы.

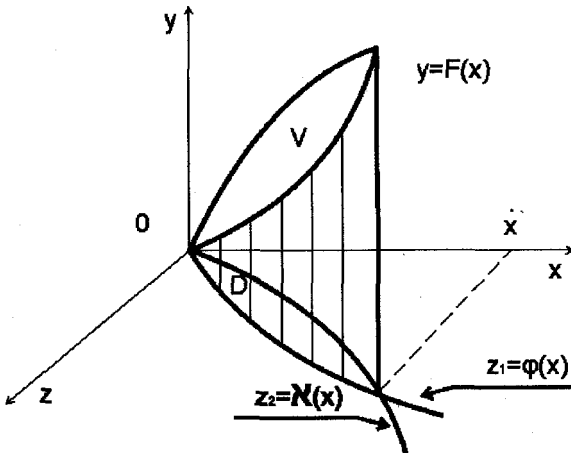


Рис. 9

#### 4. Конструктивная схема для решения интегралов

Площадку области  $D$  можно определить двумя способами методом параллельных сечений:

1.  $S_1 = \int_0^x (z_1 dx - z_2 dx)$  — сечение параллельно оси  $Oz$ .

2.  $S_2 = \int_0^x (x dz_2 - x dz_1)$  — сечение параллельно оси  $Ox$ .

Но  $S_1 = S_2$ .

Затем рассмотрим два интеграла:

1.  $V_1 = \int_0^{\dot{x}} dy \int_0^x (z_1 dx - z_2 dx)$ .

2.  $V_2 = \int_0^{\dot{x}} dy \int_0^x (x dz_2 - x dz_1)$ .

Во втором случае для внутреннего интеграла применяем метод интегрирования по частям

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^{\dot{x}} dy \left[ \left( z_2 x - \int z_2 dx \right) - \left( z_1 x - \int z_1 dx \right) \right] \Big|_0^x = \\ &= \int_0^{\dot{x}} dy \left[ (z_2 x - z_1 x) - \int (z_2 dx - z_1 dx) \right] \Big|_0^x. \end{aligned}$$

Получаем справедливое равенство  $V_1 = V_2$ . Откуда после приведения подобных членов

$$\int_0^x dy [z_2 x - z_1 x] \Big|_0^x = 0. \quad (9)$$

## 5

### Эллиптический интеграл 2-го рода

$$E(t, K) = \int \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t} dt$$

Для решения принимаем изложенную выше схему (рис. 9) и полученное уравнение (9)

$$\int_0^{\dot{x}} dy(z_2x - z_1x) \Big|_0^x = 0.$$

Применяем функции:

$$y = \arcsin(Kx), \quad z_1 = \beta x, \quad z_2 = \arcsin(x).$$

Изображение периодических функций

$$y = \arcsin(Kx) \quad \text{и} \quad z_2 = \arcsin(x)$$

ограничено значениями  $x \leq 1$ ,  $z \leq \pi/2$ .

Точка пересечения функций  $z_1 = \beta x$  (прямая линия) и  $z_2 = \arcsin(x)$ , обозначенная  $(\dot{x}, \dot{z})$ , подвижная и зависит от верхнего предела интегрирования  $\dot{x}$  ( $\dot{x} \leq 1$ ).

Поэтому коэффициент  $\beta$  определяется из равенства  $\dot{z}_1 = \dot{z}_2$ , где

$$\dot{z}_1 = \beta \dot{x}, \quad \dot{z}_2 = \arcsin(\dot{x}),$$

следовательно

$$\arcsin(\dot{x}) = \beta \dot{x}, \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\arcsin(\dot{x})}{\dot{x}}.$$

Применяем уравнение

$$\int_0^{\dot{x}} dy(z_2x - z_1x) \Big|_0^x.$$



$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\dot{x}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2}} (\arcsin(x) \cdot x - \beta x \cdot x) \Big|_0^{\dot{x}} = \\
 & = \int_0^{\dot{x}} \frac{\arcsin(x) \cdot x \, dx}{\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2}} - \beta \int_0^{\dot{x}} \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2}} = \\
 & = -\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2} \arcsin(x) \Big|_0^{\dot{x}} + \int_0^{\dot{x}} \frac{\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx - \\
 & - \beta \left( -\frac{x}{2} \sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2} + \frac{1}{2K^2} \arcsin(Kx) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\int_0^{\dot{x}} \frac{\sqrt{\frac{1}{K^2} - x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \frac{1}{K} E(t, K) \Big|_0^t, \quad x = \sin t, \quad t = \arcsin(x),$$

— интеграл 2-го рода.

Таким образом:

$$\begin{aligned}
 E(t, K) \Big|_0^t &= \frac{1}{2} \beta \left( -x \sqrt{1 - K^2 x^2} + \frac{1}{K} \arcsin(Kx) \right) \Big|_0^x + \\
 & + \sqrt{1 - K^2 x^2} \arcsin(x) \Big|_0^x, \quad \beta = \frac{\arcsin(\dot{x})}{\dot{x}}.
 \end{aligned}$$

После замены переменной  $x = \sin t$ :

$$\begin{aligned}
 E(K, t) &= \frac{1}{2} \frac{\arcsin(x)}{x} \left( -x \sqrt{1 - K^2 x^2} + \frac{1}{K} \arcsin(Kx) \right) + \\
 & + \sqrt{1 - K^2 x^2} \arcsin(x) = \\
 & = \frac{1}{2} \frac{\arcsin(\sin t)}{\sin t} \left( -\sin t \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t} + \frac{1}{K} \arcsin(K \sin t) \right) +
 \end{aligned}$$

## 5. Эллиптический интеграл 2-го рода

---

$$\begin{aligned} & + \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t} \arcsin (\sin t) = \\ & = \frac{1}{2} t \left( \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t} + \frac{1}{K} \frac{\arcsin (K \sin t)}{\sin t} \right). \end{aligned}$$

Эта формула не дифференцируема, так как в нее включен постоянный коэффициент  $\beta$ .

## 6

### Эллиптический интеграл 1-го рода

$$F(t, K) = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}}$$

Вычисление эллиптического интеграла 1-го рода происходит по той же схеме (рис. 9), но с другими исходными данными, а именно:

$$y = \arcsin(x), \quad z_1 = \gamma x, \quad z_2 = \arcsin(Kx).$$

Коэффициент  $\gamma$  определяется аналогичным образом

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2, \quad \gamma \dot{x} = \arcsin(K\dot{x}),$$

откуда

$$\gamma = \frac{\arcsin(K\dot{x})}{\dot{x}},$$

$\dot{x}$  — верхний предел интегрирования ( $\dot{x} \leq 1$ ).

Применяем уравнение

$$\int_0^{\dot{x}} dy(z_2x - z_1x) \Big|_0^x = 0.$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\dot{x}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} (\arcsin(Kx) \cdot x - \gamma x \cdot x) \Big|_0^x = \\ & = \int_0^{\dot{x}} \frac{\arcsin(Kx) \cdot x dx}{\sqrt{1-x^2}} - \gamma \int_0^{\dot{x}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ & = -\sqrt{1-x^2} \arcsin(Kx) \Big|_0^{\dot{x}} + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{\dot{x}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\frac{1}{K^2}-x^2}} dx - \gamma \left( -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin(x) \right) \Big|_0^{\dot{x}} = 0.$$

Здесь

$$\int_0^{\dot{x}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\frac{1}{K^2}-x^2}} dx = \frac{1}{K} \left( E(t, K) - (1-K^2)F(t, K) \right) \Big|_0^t,$$

$$t = \arcsin(x),$$

— известное интегральное уравнение.

Откуда следует:

$$\begin{aligned} -\sqrt{1-x^2} \arcsin(Kx) \Big|_0^{\dot{x}} + \frac{1}{K} \left( E(t, K) - (1-K^2)F(t, K) \right) \Big|_0^t - \\ - \frac{1}{2} \gamma \left( -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right) \Big|_0^{\dot{x}} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} F(t, K) \Big|_0^t = \frac{1}{1-K^2} \left[ E(t, K) \Big|_0^t - \frac{1}{2} K \gamma \left( -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right) \Big|_0^{\dot{x}} - \right. \\ \left. - K \sqrt{1-x^2} \arcsin(Kx) \Big|_0^{\dot{x}} \right], \\ t = \arcsin(x), \quad \gamma = \frac{\arcsin(K\dot{x})}{\dot{x}}. \end{aligned}$$

После замены переменной

$$x = \sin(t), \quad \gamma = \frac{\arcsin(K \sin t)}{\sin t},$$

$$\begin{aligned} F(K, t) = \frac{1}{1-K^2} \left[ E(K, t) - \frac{1}{2} K \frac{\arcsin(K \sin t)}{\sin t} \times \right. \\ \left. \times \left( -\sin t \cos t + \arcsin(\sin t) \right) - K \cos t \arcsin(K \sin t) \right] = \end{aligned}$$

## 6. Эллиптический интеграл 1-го рода

---

$$= \frac{1}{1 - K^2} \left[ E(t, K) - \frac{1}{2} K \frac{\arcsin (K \sin t)}{\sin t} (\sin t \cos t + t) \right].$$

Эта формула не дифференцируема, так как в нее включен постоянный коэффициент  $\gamma$ .

### Вычисление интеграла 3-го рода

$$\Pi = \int \frac{dx}{(p+x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}},$$

$$\rho > 3, \quad K^2 < 1$$

Проведенные предыдущие вычисления интегралов 1-го и 2-го рода, по предложенной ранее схеме (рис. 9), привели к необходимым результатам благодаря удачным подборам применяемых функций.

В данном случае, используя интегральное уравнение

$$\int_0^x dy(z_2x - z_1x) \Big|_0^x = 0,$$

поступаем аналогичным образом.

1. Функция  $y = F(x)$ , дифференциал которой

$$dy = \frac{(p+x^2)}{x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}}$$

на участке  $Ox$  строго возрастающая, так как  $dy/dx > 0$  и непрерывна ( $x \leq 1$ ).

2.  $z_2 = \frac{x}{(p+x^2)^2}$  функция нечетная, действительная на всей оси, непрерывная, так как

$$(z_2)' = \frac{p-3x^2}{(p+x^2)^3} = 0$$

в точке  $x = \sqrt{p/3}$  экстремальная. На участке  $0-x$ ,  $x < 1$ ,  $(z_2)' > 0$ , функция возрастающая выпуклая вверх ( $(z_2)'' < 0$ ).

3.  $z_1 = \xi x$  ( $\xi$  — коэффициент зависящий от верхнего предела интегрирования определяется аналогично предыдущим случаем)

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2, \quad \xi \dot{x} = \frac{\dot{x}}{(p + \dot{x}^2)^2}, \quad \xi = \frac{1}{(p + \dot{x}^2)^2} \quad (\dot{x} \leq 1).$$

Подставляя эти функции в интегральное уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\dot{x}} dy(z_2 x - z_1 x) \Big|_0^x = \\ & = \int_0^{\dot{x}} \frac{(p + x^2)}{x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}} \left( \frac{x^2}{(p+x^2)^2} - \xi x^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$\int_0^{\dot{x}} \frac{dx}{(p+x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}} - \xi \int_0^{\dot{x}} \frac{(p+x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} & \int_0^{\dot{x}} \frac{dx}{(p+x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}} = \\ & = \xi \left( \int_0^{\dot{x}} \frac{p dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}} + \int_0^{\dot{x}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}} \right). \end{aligned}$$

Интегралы в правой части уравнения табличные

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}} = F(t, K),$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}} = \frac{1}{K^2} (F(t, K) - E(t, K)).$$

Таким образом имеем

$$\int_0^z \frac{dx}{(p+x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}} = \frac{1}{K^2} \xi [(K^2p+1)F(t, K) - E(t, K)] \Big|_0^t,$$

где  $\xi = \frac{1}{(p + \sin^2 t)^2}$ .

$$\Pi = \frac{1}{K^2(p + \sin^2 t)^2} [(K^2p+1)F(t, K) - E(t, K)] \Big|_0^t, \quad x = \sin(t).$$



## 8

## Таблицы эллиптических интегралов

Простейшие эллиптические интегралы, приводящиеся к интегралам первого и второго рода, это:

1

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 t \, dt}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} &= \frac{1}{K^2} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} - \frac{1}{K^2} \int \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t} \, dt = \\ &= \frac{1}{K^2} (F(t, K) - E(t, K)) = \\ &= \frac{1}{K^2} \left[ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}} - \int \frac{\sqrt{1-K^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \right], \quad x = \sin t. \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{\cos^2 t \, dt}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} = \\ &= -\frac{(1 - K^2)}{K^2} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} + \frac{1}{K^2} \int \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t} \, dt = \\ &= -\frac{(1 - K^2)}{K^2} F(t, K) + \frac{1}{K^2} E(t, K) = \\ &= -\frac{(1 - K^2)}{K^2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}} + \\ &\quad + \frac{1}{K^2} \int \frac{\sqrt{1-K^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad x = \sin t, \end{aligned}$$

а также ранее полученный интеграл

3

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^3}} &= \Theta(t, K) = \\ &= \frac{1}{1 - K^2} \left[ E(t, K) - \frac{K^2 \sin t \cos t}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} \right] = \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{(1 - K^2 x^2)^3}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Применяя к этим первичным интегралам дифференцирование и последующее интегрирование получим следующие интегральные формы.

4

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 t \, dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^3}} &= \int \left( \int \frac{\sin^2 t \, dt}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} \right)' \frac{dt}{(1 - K^2 \sin^2 t)} = \\ &= \frac{1}{K^2} \left[ \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^3}} - \int \frac{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}}{(1 - K^2 \sin^2 t)} dt \right] = \\ &= \frac{1}{K^2} (\theta(t, K) - F(t, K)) = \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{(1 - K^2 x^2)^3}}, \quad x = \sin t. \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^4 t \, dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^3}} &= \int \left( \int \frac{\sin^2 t \, dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^3}} \right)' \sin^2 t \, dt = \\ &= \int \left[ \frac{1}{K^2} (\theta(t, K)' - F(t, K)') \right] \sin^2 t \, dt = \\ &= \frac{1}{K^2} \left[ \int \frac{\sin^2 t \, dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^3}} - \int \frac{\sin^2 t \, dt}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{K^2} \left[ \frac{1}{K^2} (\Theta(t, K) - F(t, K)) - \frac{1}{K^2} (F(t, K) - E(t, K)) \right] = \\
&= \frac{1}{K^4} [\Theta(t, K) - 2F(t, K) + E(t, K)] = \\
&= \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{(1-K^2 x^2)^3}}, \quad x = \sin t.
\end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^2 t dt}{\sqrt{(1-K^2 \sin^2 t)^3}} &= \int \left( \int \frac{\cos^2 t dt}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 t}} \right)' \frac{dt}{(1-K^2 \sin^2 t)} = \\
&= -\frac{(1-K^2)}{K^2} \int \frac{F'(t, K) dt}{(1-K^2 \sin^2 t)} + \frac{1}{K^2} \int \frac{E'(t, K)}{(1-K^2 \sin^2 t)} = \\
&= -\frac{(1-K^2)}{K^2} \Theta(t, K) + \frac{1}{K^2} F(t, K).
\end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^4 t dt}{\sqrt{(1-K^2 \sin^2 t)^3}} &= \int \left( \int \frac{\cos^2 t dt}{\sqrt{(1-K^2 \sin^2 t)^3}} \right)' \cos^2 t dt = \\
&= \frac{1}{K^2} \int [-(1-K^2)\Theta(t, K)' + F(t, K)'] \cos^2 t dt = \\
&= \frac{1}{K^2} \int \left[ \frac{-(1-K^2) \cos^2 t dt}{\sqrt{(1-K^2 \sin^2 t)^3}} + \frac{\cos^2 t dt}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 t}} \right] = \\
&= \frac{1}{K^2} \left\langle \frac{-(1-K^2)}{K^2} \left[ -(1-K^2)\Theta(t, K) + F(t, K) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{-(1-K^2)}{K^2} F(t, K) + \frac{1}{K^2} E(t, K) \right] \right\rangle = \\
&= \frac{1}{K^4} \left[ (1-K^2)^2 \Theta(t, K) - 2(1-K^2) F(t, K) + \frac{1}{K^2} E(t, K) \right].
\end{aligned}$$

## 8

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 t \, dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} &= \int \left( \frac{\sin^2 t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^3}} \right) \frac{dt}{(1 - K^2 \sin^2 t)} = \\
&= \frac{1}{K^2} \int [\Theta(t, K)' - F(t, K)'] \frac{dt}{(1 - K^2 \sin^2 t)} = \\
&= \frac{1}{K^2} \left[ \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^3}} \right] = \\
&= \frac{1}{K^2} [J(t, K) - \Theta(t, K)] = \int \frac{x^2 \, dt}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{(1 - K^2 x^2)^5}}, \quad x = \sin t.
\end{aligned}$$

Значение интеграла

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} = J(t, K)$$

приведены ниже.

## 9

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^4 t \, dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} &= \int \left( \frac{\sin^4 t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^3}} \right) \frac{dt}{(1 - K^2 \sin^2 t)} = \\
&= \frac{1}{K^4} \int [\theta(t, K)' - 2F(t, K)' + E(t, K)'] \frac{dt}{(1 - K^2 \sin^2 t)} = \\
&= \frac{1}{K^4} [J(t, K) - 2\Theta(t, K) + F(t, K)] = \\
&= \int \frac{x^4 \, dt}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{(1 - K^2 x^2)^5}}, \quad x = \sin t.
\end{aligned}$$

Интеграл

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} = J(t, K),$$

определяемый интегрированием дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^3}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} - \\ & - \frac{2(1 - K^2) \sin^2 t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} - \frac{K^2 \sin^4 t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} = (\text{см.8, 9}) \\ & = J(t, K)' - \frac{2(1 - K^2)}{K^2} [J(t, K)' - \Theta(t, K)'] - \\ & - \frac{K^2}{K^4} [J(t, K)' - 2\Theta(t, K)' + F(t, K)'] = \\ & = \frac{1}{K^2} [(3K^2 - 3)J' - F' + 2(2 - K^2)\Theta']. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} J(t, K) &= \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} = \\ &= \frac{1}{3(1 - K^2)} \left[ \frac{-K^2 \sin t \cos t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^3}} - F(t, K) + 2(2 - K^2)\Theta \right]. \end{aligned}$$

## 10

$$\begin{aligned} & \int \frac{\cos^2 t \, dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} = \int \left( \frac{\cos^2 t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^3}} \right) \frac{dt}{(1 - K^2 \sin^2 t)} = \\ &= \frac{1}{K^2} \int [-(1 - K^2)\theta(t, K)' + F(t, K)'] \frac{dt}{(1 - K^2 \sin^2 t)} = \\ &= \frac{1}{K^2} [-(1 - K^2)J(t, K) + \Theta(t, K)] = \\ &= \int \frac{(1 - x^2) \, dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{(1 - K^2 x^2)^5}}, \quad x = \sin t. \end{aligned}$$

## 11

Интегрируя дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & (\sin t \cos t \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t})' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} - \frac{(2 + 2K^2) \sin^2 t}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} + \frac{3K^2 \sin^4 t}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} = \\ &= F(t, K)' - \frac{(2 + 2K^2)}{K^2} [F(t, K)' - E'(t, K)'] + \frac{3K^2 \sin^4 t}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin^4 t dt}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} = \\ &= \frac{1}{3K^4} \left[ K^2 \sin t \cos t \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t} + \right. \\ & \quad \left. + (2 + K^2)F(t, K) - 2(1 + K^2)E(t, K) \right] = \\ &= \int \frac{x^4 dt}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - K^2 x^2}}, \quad x = \sin t. \end{aligned}$$

## 12

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin^2 t dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^7}} = \int \left( \frac{\sin^2 t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} \right) \frac{dt}{(1 - K^2 \sin^2 t)} = \\ &= \frac{1}{K^2} [J(t, K)' - \theta(t, K)'] \frac{dt}{(1 - K^2 \sin^2 t)} = (\text{см. 8}) \\ &= \frac{1}{K^2} \left[ \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^7}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} \right] = \\ &= \frac{1}{K^2} [L(t, K) - J(t, K)] = \int \frac{x^2 dt}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{(1 - K^2 x^2)^7}}, \quad x = \sin t, \\ & L = \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^7}} \quad (\text{см. 13}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sin^4 t \, dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^7}} = \\
& = \int \left( \frac{\sin^4 t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} \right) \frac{dt}{(1 - K^2 \sin^2 t)} = (\text{см. 9}) \\
& = \frac{1}{K^4} \int [J(t, K)' - 2\Theta(t, K)' + F(t, K)'] \frac{dt}{(1 - K^2 \sin^2 t)} = \\
& = \frac{1}{K^4} [L(t, K) - 2J(t, K) + \theta(t, K)] = \\
& = \int \frac{x^4 \, dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{(1 - K^2 x^2)^7}}, \quad x = \sin t.
\end{aligned}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^7}} + \frac{(4K^2 - 2) \sin^2 t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^7}} - \\
& - \frac{3K^2 \sin^4 t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^7}} = L(t, K)' + \left( \frac{4K^2 - 2}{K^2} \right) [L(t, K)' - J(t, K)'] - \\
& - \frac{3K^2}{K^4} [L(t, K)' - 2J(t, K)' + \theta(t, K)'],
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^5}} \right)' = \\
& = \frac{-5(1 - K^2)}{K^2} L(t, K)' + \frac{(8 - 4K^2)}{K^2} J(t, K)' - \frac{3}{K^2} \Theta(t, K)',
\end{aligned}$$

после интегрирования

$$L(t, K) = \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - K^2 \sin^2 t)^7}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5(1-K^2)} \left[ -\frac{K^2 \sin t \cos t}{\sqrt{(1-K^2 \sin^2 t)^5}} + 4(2-K^2)J(t, K) - 3\theta(t, K) \right] = \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{(1-K^2 x^2)^7}}, \quad x = \sin t.
\end{aligned}$$

14

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 t \cos^2 t}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 t}} dt &= \frac{1}{K^2} F(t, K) - \frac{1}{K^2} E(t, K) - \\
&- \left[ \frac{1}{3K^4} \left( K^2 \sin t \cos t \sqrt{1-K^2 \sin^2 t} + \right. \right. \\
&\left. \left. + (2+K^2)F(t, K) - 2(1+K^2)E(t, K) \right) \right] = \\
&= \frac{1}{3K^4} \left[ -K^2 \sin t \cos t \sqrt{1-K^2 \sin^2 t} + \right. \\
&\left. + (2K^2 - 2)F(t, K) + (2-K^2)E(t, K) \right] = \\
&= \int \frac{x^2(1-x^2)dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-K^2 x^2}}, \quad x = \sin t.
\end{aligned}$$

15

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 t \cos^2 t dt}{\sqrt{(1-K^2 \sin^2 t)^3}} &= \int \left( \frac{\sin^2 t}{\sqrt{(1-K^2 \sin^2 t)^3}} \right) \cos^2 t dt = \\
&= \int \frac{1}{K^2} [\theta(t, K)' - F(t, K)'] \cos^2 t dt = \\
&= \frac{1}{K^2} \int \left( \frac{\cos^2 t dt}{\sqrt{(1-K^2 \sin^2 t)^3}} - \frac{\cos^2 t dt}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 t}} \right) = \\
&= \frac{1}{K^2} \left[ \left( \frac{1}{K^2} (-(1-K^2)\theta(t, K) + F(t, K)) \right) - \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{K^2} \left( -(1-K^2)F(t, K) + E(t, K) \right) \Big] = \\
& = \frac{1}{K^4} \left[ (2-K^2)F(t, K) - E(t, K) - (1-K^2)\theta(t, K) \right] = \\
& = \int \frac{x^2(1-x^2) dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}}, \quad x = \sin t.
\end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sin^2 t \cos^2 t dt}{\sqrt{(1-K^2 \sin^2 t)^5}} = \int \left( \frac{\sin^2 t \cos^2 t}{\sqrt{(1-K^2 \sin^2 t)^3}} \right) \frac{dt}{(1-K^2 \sin^2 t)} = \\
& = \frac{1}{K^4} \left( (2-K^2)\Theta(t, K) - F(t, K) - (1-K^2)J(t, K) \right) = \\
& = \int \frac{x^2(1-x^2) dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-K^2x^2)^5}}, \quad x = \sin t.
\end{aligned}$$

## 9

### Решение полных интегралов трех канонических форм

#### Пример 1

Полный интеграл 2-го рода ( $t = \pi/2$ ,  $K = 0,707106781$ ):

$$\begin{aligned} E(K, t) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \frac{1}{2} t \left[ \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t} + \frac{1}{K} \frac{\arcsin(K \sin t)}{\sin t} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \left[ 0,707106781 + \frac{\pi}{4K} \right] = \\ &= 0,785398163 [0,707106781 + 1,110720735] = 1,427718392. \end{aligned}$$

#### Пример 2

Полный интеграл 1-го рода ( $t = \pi/2$ ,  $K = 0,707106781$ ):

$$\begin{aligned} F(K, t) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} = \\ &= \frac{1}{1 - K^2} \left[ E(K, t) - \frac{1}{2} K \frac{\arcsin(K \sin t)}{\sin t} (\sin t \cos t + t) \right] = \\ &= 2 \left[ 1,427718392 - \frac{1}{2} K \frac{\pi}{4} \left( 0 + \frac{\pi}{2} \right) \right] = 1,983078759. \end{aligned}$$

**Пример 3**

Интеграл 2-го рода ( $t = \pi/6$ ,  $K = 0,707106781$ ):

$$\begin{aligned}
 E(K, t) &= \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} t \left[ \sqrt{1 - K^2 \sin^2 t} + \frac{1 \arcsin(K \sin t)}{\sin t} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} \left[ \sqrt{1 - K^2 \cdot 0,5^2} + \frac{1 \arcsin(K \cdot 0,5)}{0,5} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} \left[ 0,935414346 + \frac{0,361367123}{0,707106781 \cdot 0,5} \right] = \\
 &= 0,261799387 [0,935414346 + 1,022100373] = 0,512476205.
 \end{aligned}$$

**Пример 4**

Интеграл 1-го рода ( $t = \pi/6$ ,  $K = 0,707106781$ ):

$$\begin{aligned}
 F(K, t) &= \int_0^{\pi/6} \frac{dt}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} = \\
 &= \frac{1}{1 - K^2} \left[ E(K, t) - \frac{1}{2} K \frac{\arcsin(K \sin t)}{\sin t} (\sin t \cos t + t) \right] = \\
 &= \frac{1}{1 - K^2} \left[ E(K, t) - \frac{1}{2} K \cdot 0,722734246 \cdot (0,433012701 + 0,523598775) \right] = \\
 &= 2 [0,512476205 - 0,255525143 \cdot (0,956598775)] = 0,536075841.
 \end{aligned}$$

**Пример 5**

Полный интеграл 3-го рода ( $t = \pi/2$ ,  $K = 0,707106781$ ,  $p = 4$ ):

$$\Pi = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(p + x^2) \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - K^2 x^2}} =$$

9. Решение полных интегралов трех канонических форм

---

$$= \frac{1}{K^2} \frac{1}{(p + \sin^2 t)^2} [(K^2 p + 1)F(K, t) - E(t, K)].$$

$$K = 0,707106781, p = 4, F(t, K) = 1,983078759, E = 1,427718392:$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{0,5} \cdot \frac{1}{(4 + 1)^2} [(0,5 \cdot 4 + 1) \cdot 1,983078759 - 1,427718392] = \\ &= 0,08 [3 \cdot 1,983078759 - 1,427718392] = 0,361721430. \end{aligned}$$

## Представляем Вам следующие книги:



URSS

### Алгебра

- ✓ *Чеботарев Н. Г.* Основы теории Галуа. В 2 кн.
- ✓ *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления.
- ✓ *Фробениус Ф. Г.* Теория характеров и представлений групп.
- ✓ *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований.
- ✓ *Бэр Р.* Линейная алгебра и проективная геометрия.
- ✓ *Никифоров В. А., Шкода Б. В.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия.
- ✓ *Шевалле К.* Введение в теорию алгебраических функций.
- ✓ *Уокер Р.* Алгебраические кривые.
- ✓ *Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И.* Перестановочные матрицы.
- ✓ *Киселев А. П.* Задачи и упражнения к «Элементом алгебры».
- ✓ *Золотаревская Д. И.* Сборник задач по линейной алгебре.
- ✓ *Кутищев Г. П.* Решение алгебраических уравнений произвольной степени: Теория, методы, алгоритмы.

### Серия «Физико-математическое наследие: алгебра»

- ✓ *Чеботарев Н. Г.* Введение в теорию алгебр.
- ✓ *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли.
- ✓ *Чеботарев Н. Г.* Теория Галуа.
- ✓ *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций.
- ✓ *Александров П. С.* Введение в теорию групп.
- ✓ *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств.
- ✓ *Бохер М.* Введение в высшую алгебру.
- ✓ *Млодзеевский Б. К.* Основы высшей алгебры.
- ✓ *Шмидт О. Ю.* Абстрактная теория групп.

### Серия «Физико-математическое наследие: топология»

- ✓ *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию.
- ✓ *Милнор Дж.* Теория Морса.
- ✓ *Стинрод Н.* Топология косых произведений.
- ✓ *Листинг И. Б.* Предварительные исследования по топологии.

### Теория вероятностей и математическая статистика

- ✓ *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей.
- ✓ *Гнеденко Б. В.* Очерк по истории теории вероятностей.
- ✓ *Гнеденко Б. В.* Математика и контроль качества продукции.
- ✓ *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания.
- ✓ *Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания.
- ✓ *Хинчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания.
- ✓ *Хинчин А. Я.* Асимптотические законы теории вероятностей.
- ✓ *Хинчин А. Я.* Математические основания квантовой статистики.
- ✓ *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения.
- ✓ *Боровков А. А.* Эргодичность и устойчивость случайных процессов.
- ✓ *Тактаров Н. Г.* Теория вероятностей и математическая статистика.

## Представляем Вам следующие книги:



### Теория чисел

- ✓ *Оре О.* Приглашение в теорию чисел.
- ✓ *Вейль А.* Основы теории чисел.
- ✓ *Вейль Г.* Алгебраическая теория чисел.
- ✓ *Понтрягин Л. С.* Обобщения чисел.
- ✓ *Жуков А. В.* Вездесущее число «пи».
- ✓ *Хинчин А. Я.* Три жемчужины теории чисел.
- ✓ *Хинчин А. Я.* Цепные дроби.
- ✓ *Парфенов И. И.* Цепные дроби — ожерелье мехатроники.
- ✓ *Ожигова Е. П.* Что такое теория чисел.
- ✓ *Виноградов И. М.* Особые варианты метода тригонометрических сумм.
- ✓ *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел.
- ✓ *Гельфонд А. О.* Трансцендентные и алгебраические числа.
- ✓ *Яглом И. М.* Комплексные числа и их применение в геометрии.
- ✓ *Деза Е. И.* Специальные числа натурального ряда.
- ✓ *Деза Е. И., Котова Л. В.* Сборник задач по теории чисел.

### Серия «Физико-математическое наследие: теория чисел»

- ✓ *Диофант Александрийский.* Арифметика и книга о многоугольных числах.
- ✓ *Ферма П.* Исследования по теории чисел и диофантову анализу.
- ✓ *Лирихле П. Г. Л.* Лекции по теории чисел.
- ✓ *Дедекин Р.* Непрерывность и иррациональные числа.
- ✓ *Ингам А. Э.* Распределение простых чисел.
- ✓ *Берман Г. Н.* Число и наука о нем: Общедоступные очерки.
- ✓ *Ландау Э.* Основы анализа: Действия над числами.
- ✓ *Титчмарш Э. Ч.* Дзета-функция Римана.
- ✓ *Дэвенпорт Г.* Высшая арифметика: Введение в теорию чисел.
- ✓ *Гельфонд А. О.* Решение уравнений в целых числах.

### Дифференциальные и интегральные уравнения

- ✓ *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений.
- ✓ *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
- ✓ *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения.
- ✓ *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений.
- ✓ *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений.
- ✓ *Краснов М. Л. и др.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Сборник задач «Вся высшая математика» с подробными решениями.
- ✓ *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию.
- ✓ *Шалдырван В. А., Медведев К. В.* Руководство по решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Кн. 1, 2.
- ✓ *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
- ✓ *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений.
- ✓ *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
- ✓ *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды.

## Представляем Вам следующие книги:



URSS

Серия «**НАУКУ — ВСЕМ!** Шедевры научно-популярной литературы»

- ✓ *Колмогоров А. Н.* Математика — наука и профессия.
- ✓ *Гашков С. Б.* Занимательная компьютерная арифметика: Математика и искусство счета на компьютерах и без них.
- ✓ *Гашков С. Б.* Занимательная компьютерная арифметика: Быстрые алгоритмы операций с числами и многочленами.
- ✓ *Гнеденко Б. В.* Беседы о теории массового обслуживания.
- ✓ *Гнеденко Б. В.* Беседы о математической статистике.
- ✓ *Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей.
- ✓ *Мизес Р.* Вероятность и статистика.
- ✓ *Меннхен Ф.* Некоторые тайны артистов-вычислителей.
- ✓ *Вильямс Дж. Д.* Совершенный стратег, или Букварь по теории стратегических игр.
- ✓ *Юдин Д. Б., Юдин А. Д.* Математики измеряют сложность.

### Математическая логика

- ✓ *Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.* Математическая логика.
- ✓ *Драгалин А. Г.* Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ.
- ✓ *Фреге Г.* Логика и логическая семантика.
- ✓ *Гладкий А. В.* Введение в современную логику.
- ✓ *Гамов Г., Стерн М.* Занимательные задачи.
- ✓ *Карпенко А. С.* Развитие многозначной логики.
- ✓ *Карпенко А. С.* Логика Лукасевича и простые числа.
- ✓ *Карпенко А. С.* Фатализм и случайность будущего: Логический анализ.

Серия «**Физико-математическое наследие: основания математики и логики**»

- ✓ *Чёрч А.* Введение в математическую логику.
- ✓ *Гудстейн Р. Л.* Математическая логика.
- ✓ *Бурбаки Н.* Теория множеств.
- ✓ *Хаусдорф Ф.* Теория множеств.
- ✓ *Френкель А. А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств.

Серия «**Физико-математическое наследие: теория функций**»

- ✓ *Курант Р.* Геометрическая теория функций комплексной переменной.
- ✓ *Привалов И. И.* Субгармонические функции.
- ✓ *Бор Г.* Почти периодические функции.
- ✓ *Артин Э.* Введение в теорию гамма-функций.

### Дискретная математика

- ✓ *Харари Ф.* Теория графов.
- ✓ *Оре О.* Графы и их применение.
- ✓ *Оре О.* Теория графов.
- ✓ *Емеличев В. А., Мельников О. И. и др.* Лекции по теории графов.
- ✓ *Мельников О. И.* Теория графов в занимательных задачах: Более 250 задач с подробными решениями.
- ✓ *Мельников О. И.* Незнайка в стране графов: Юным математикам и программистам.

## Представляем Вам следующие книги:



URSS

Серия «Relata Refero»

- ✓ *Владимиров Ю. С.* Физика дальнего действия: Природа пространства-времени.
  - ✓ *Петров Ю. И.* Парадоксы фундаментальных представлений физики.
  - ✓ *Петров Ю. И.* Некоторые фундаментальные представления физики: критика и анализ.
  - ✓ *Моисеев Б. М.* Кризис физики и проблемы методологии.
  - ✓ *Моисеев Б. М.* Физическая модель светового кванта.
  - ✓ *Моисеев Б. М.* Теория относительности и физическая природа света.
  - ✓ *Зуккишиани Л. М.* Физика сплошной среды: Единая теория поля.
  - ✓ *Авдеев Е. Н.* Ошибки классической теории тяготения.
  - ✓ *Колесников А. А.* Гравитация и самоорганизация.
  - ✓ *Елисеев Ю. И.* Квантовый эфир — основа Вселенной: Теория единого поля.
- 
- ✓ *Супрун В. П.* Математика для старшекласников: Задачи повышенной сложности.
  - ✓ *Супрун В. П.* Математика для старшекласников: Нестандартные методы решения задач.
  - ✓ *Супрун В. П.* Математика для старшекласников: Методы решения и доказательства неравенств. 367 задач с подробными решениями.
  - ✓ *Мордохай-Болтовской Д. Д.* Геометрия радиоярлий.
  - ✓ *Золотаревская Д. И.* Теория вероятностей. Задачи с решениями.
  - ✓ *Федин С. Н.* Математики тоже шутят.
  - ✓ *Петров Н. Н.* Математические игры.
  - ✓ *Пойа Д.* Как решать задачу.
  - ✓ *Литвинов В. Н.* Правильный пятиугольник: Геометрия, декоративное искусство, архитектура.
  - ✓ *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях.
  - ✓ *Медведев Г. Н.* Участникам олимпиад и вступительных испытаний по математике.
  - ✓ *Кривошапко С. Н., Иванов В. Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей.
  - ✓ *Кривошапко С. Н., Мамиева И. А.* Аналитические поверхности в архитектуре зданий, конструкций и изделий.

### Наши книги можно приобрести в магазинах:

Тел./факс:  
+7 (499) 724-25-45  
(многоканальный)

E-mail:  
URSS@URSS.ru  
<http://URSS.ru>

«НАУКУ — ВСЕМ!» (м. Профсоюзная, Нахимовский пр-т, 56. Тел. (499) 724-2545)  
 «Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (495) 625-2457)  
 «Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (495) 203-8242)  
 «Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (495) 238-5001, (495) 780-3370)  
 «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр-т, 40. Тел. (495) 137-6019)  
 «Дом книги на Ладонской» (м. Бауманская, ул. Ладонская, 8, стр. 1. Тел. (495) 267-0302)  
 «Санкт-Петербургский Дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 448-2355)  
 «Нижинский бум» (г. Киев, книжный рынок «Петровка», ряд 62, место 8 (павильон «АкадемКнига»). Тел. +38 (067) 273-5010)  
 Сеть магазинов «Дом книги» (г. Екатеринбург, ул. Антона Валека, 12. Тел. (343) 253-5010)



## Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!



Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Среди выпущенных и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

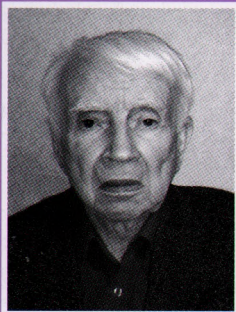
- ✓ *Краснов М. Л. и др. Вся высшая математика.* Т. 1–7.
- ✓ *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Сборники задач «Вся высшая математика» с подробными решениями.*
- ✓ *Тактаров Н. Г. Справочник по высшей математике для студентов вузов.*
- ✓ *Боярчук А. К. и др. Справочное пособие по высшей математике (Антидемидович). Т. 1–5.*
  - Т. 1. Введение в анализ, производная, интеграл.
  - Т. 2. Ряды, функции векторного аргумента.
  - Т. 3. Интегралы, зависящие от параметра; кратные и криволинейные интегралы.
  - Т. 4. Функции комплексного переменного: теория и практика.
  - Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах.
- ✓ *Босс В. Лекции по математике.* Т. 1–16. Т. 1: Анализ; Т. 2: Дифференциальные уравнения; Т. 3: Линейная алгебра; Т. 4: Вероятность, информация, статистика; Т. 5: Функциональный анализ; Т. 6: От Диофанта до Тьюринга; Т. 7: Оптимизация; Т. 8: Теория групп; Т. 9: ТФКП; Т. 10. Перебор и эффективные алгоритмы; Т. 11. Уравнения математической физики; Т. 12. Контрпримеры и парадоксы; Т. 13. Топология; Т. 14. Теория чисел; Т. 15. Нелинейные операторы и неподвижные точки; Т. 16. Теория множеств: От Кантора до Коэна.
- ✓ *Босс В. Лекции по теории управления.* Т. 1: Автоматическое регулирование.
- ✓ *Босс В. Интуиция и математика.*
- ✓ *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Введение в математическую статистику. Статистика знает все.*
- ✓ *Пантаев М. Ю. Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода: Полный курс математического анализа.* В 2 т.
- ✓ *Зуев Ю. А. По океану дискретной математики: От перечислительной комбинаторики до современной криптографии.* В 2 т.
- ✓ *Боровков А. А. Теория вероятностей.*
- ✓ *Крэндэлл Р., Померанс К. Простые числа: Вычислительные и криптографические аспекты.*
- ✓ *Пухначев Ю. В., Попов Ю. П. Математика без формул.* В 2 кн.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:  
 тел. +7 (499) 724–25–45 (многоканальный)  
 или электронной почтой URSS@URSS.ru  
 Полный каталог изданий представлен  
 в интернет-магазине: <http://URSS.ru>

Научная и учебная  
 литература

## Об авторе

## Леонид Степанович КУЗЬМИЧ

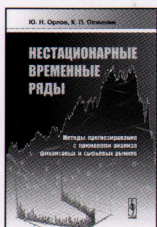
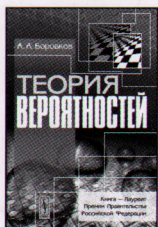
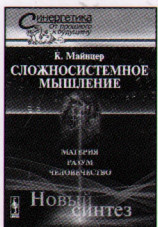
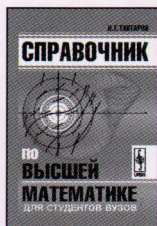


В 1947 г. окончил Саратовский институт механизации сельского хозяйства по специальности «инженер-механик». В 1952 г. поступил на работу во Всесоюзный институт механизации сельского хозяйства (ВИМ) в Москве, где в должности главного конструктора отдела почвообрабатывающих машин проработал до выхода на пенсию в 1995 г.

Занятия математикой начал несколько десятков лет назад. В 1952 г. поступал в аспирантуру при ВИМ, но не был принят, однако его реферат «Качение колеса с жестким ободом по мягкому грунту под нагрузкой»

был оценен академиком ВАСХНИЛ на отлично. При разработке реферата Л. С. Кузьмичу пришлось иметь дело с неизвестными интегралами, которые в конечном виде не вычисляются, и он решил посвятить свое свободное время работе над этой темой.

### Наше издательство предлагает следующие книги:



12596 ID 166028



9 785397 033251 >

Отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru). Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на веб-странице этой книги в нашем интернет-магазине <http://URSS.ru>



E-mail: [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru)

Каталог изданий в Интернете:

<http://URSS.ru>

**URSS** НАШИ НОВЫЕ  
КОординаты

ТЕЛЕФОН  
МНОГО  
11733

интернет-магазин  
**OZON.ru**

-45  
; 56



81466062