

*М. Дж. Сальвадори*

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕХНИКЕ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО  
О. В. ЛОКУЦИЕВСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
К. А. СЕМЕНДЯЕВА

**И \* Л**

Издательство  
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

*Москва—1955*

**NUMERICAL METHODS  
IN ENGINEERING**

*Mario G. Salvadori*

With a collection of problems by

*Melvin L. Baron*

NEW YORK, 1952

## ОТ РЕДАКТОРА

Современное развитие техники привело к необходимости повысить точность инженерных расчетов и перевести их на более солидную математическую основу. В инженерном деле все больше применений находят, в частности, дифференциальные уравнения, как обыкновенные, так и в частных производных. При этом на практике зачастую оказывается невозможным применение точных или аналитических приближенных методов решения задач, относящихся к таким уравнениям, и приходится пользоваться приближенными численными методами.

Книга Сальвадори является одной из пока еще немногих книг, посвященных численным методам. Она не является систематическим руководством — автор ставил перед собой лишь задачу ознакомить широкие круги инженеров и научных работников с простейшими методами решения наиболее часто встречающихся задач, причем в отборе этих методов заметно сказались его личные вкусы. Изложение имеет сугубо практический характер, при котором общее описание и теоретическое обоснование метода преимущественно заменяется рецептурой, иллюстрируемой применениями к частным задачам.

Следует указать, что в ряде мест автор допускает фактические неточности или же сомнительные и бездоказательные утверждения; в этих местах нами сделаны соответствующие примечания. Кроме того, повидимому, не следует особенно доверять ответам к задачам: при выборочной проверке ответов были обнаружены ошибки (в переводе они устранены).

Ссылки на малодоступную иностранную литературу там, где это было возможно, заменены ссылками на книги, имеющиеся на русском языке.

Можно не сомневаться, что книга Сальвадори, в которой дается описание ряда практически ценных и малоизвестных численных методов, сопровождаемое большим количеством задач, имеющих конкретное прикладное содержание, будет полезной читателям, заинтересованным в применении численных методов к техническим вопросам.

*К. А. Семендяев.*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

За последние десятилетия вследствие ряда причин численные методы приобрели в прикладной математике весьма широкое распространение. Недорогие электрические счетные машины серийного выпуска, а особенно современные быстродействующие электронные вычислительные машины делают возможными вычисления, считавшиеся недоступными еще несколько лет тому назад. Значительно чаще, чем когда-либо раньше, из потребностей техники возникают задачи, аналитическое решение которых весьма сложно или даже вообще невозможно. Задачи эти зачастую требуют немедленного ответа, в то время как число людей, могущих разрабатывать необходимый для их решения комплекс аналитических проблем, недостаточно. Решение же этих задач численными методами позволяет широко использовать работников, имеющих ограниченные познания в области математики.

Сказанное поясняет как популярность численных методов, так и растущий спрос на работников, владеющих этими методами. Этим же объясняется и увеличение числа курсов по численным методам в наших колледжах и университетах.

В основу этой книги положен полугодовой курс лекций, прочитанный автором в Инженерной школе Колумбийского университета, — последний из пяти курсов, начатых автором двенадцать лет назад с целью расширить математическую подготовку студентов, а также заполнить разрыв между их познаниями в теоретической математике и умением применить эти познания к решению конкретных физических задач.

В книге небольшого размера невозможно, конечно, охватить все вопросы, в которых оказываются полезными численные методы. Наша книга предназначена для студентов, занимающихся вопросами техники, физики, химии, математики, а также для лиц, желающих познакомиться с численными методами, чтобы применять их в своей повседневной практической работе. Цель книги — познакомить читателя с теми методами численного решения математических задач, которые чаще всего используются в тех или иных технических вопросах. Предполагается, что читатель владеет элементами дифференциального и интегрального исчисления и теории дифференциальных уравнений.

Книга состоит из пяти глав, посвященных следующим вопросам:

I. Решение алгебраических уравнений высших степеней и систем линейных уравнений.

II. Элементарная теория конечных разностей и применение ее к численному дифференцированию, интегрированию, интерполяции, экстраполяции.

III. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

IV. Решение краевых задач и задач о собственных значениях для обыкновенных дифференциальных уравнений.

V. Решение различных задач (задача Коши, смешанная краевая задача, задача Дирихле, задачи о собственных значениях) для уравнений в частных производных.

Материал книги расположен таким образом, что все расчетные формулы выводятся на основе теории конечных разностей. Такое расположение материала делает выкладки наиболее простыми, позволяет избежать ненужных повторений и дает возможность весьма просто оценить погрешность расчетных формул. В книге (повидимому, впервые) систематически используются процессы эффективной экстраполяции.

Чтобы дать широкое (насколько возможно в рамках этой книги) представление о приложениях численных методов, все рассматриваемые вычислительные схемы иллюстрируются примерами из техники (механика, сопротивление материалов, теория упругости и пластичности, электротехника, теплотехника, теория колебаний\* и т. д.). Однако для понимания самого численного метода, примененного в том или ином из этих примеров, читателю нет необходимости специально знакомиться с той отраслью знаний, из которой этот пример заимствован.

Отбор численных методов, рассматриваемых в книге, производился по признакам простоты и эффективности. Одни из них известны более двух веков, другие разработаны совсем недавно. Вычисления по этим методам можно производить на электрических счетных машинах, а во многих случаях — даже на счетной линейке. Мы не называем здесь современные электронные счетные машины (которые, очевидно, также годятся для этой цели), так как теория их применения представляет собой совсем новую главу прикладной математики.

Задачи, приведенные в конце каждой из глав, в основном двух типов: отвлеченные вычислительные упражнения и примеры из различных областей техники. Многие из задач первого типа в действительности также имеют физический характер и могут быть интерпретированы тем или иным способом. Математическая формулировка задач второго типа или дается в тексте, или может быть извлечена из соответствующего подстрочного примечания.

М. Л. Барон под моим наблюдением подобрал и решил 400 задач, содержащихся в этой книге. Он же проверил задачи, рассматриваемые в тексте, и изготовил эскизы чертежей. Я рад выразить ему самую глубокую признательность за его эффективную помощь.

*М. Дж. Сальвадори.*

Нью-Йорк.

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Решение алгебраических и трансцендентных уравнений, а также систем линейных уравнений является одной из наиболее часто встречающихся в прикладной математике вычислительных задач. Несмотря на то, что здесь существует много различных методов (часто весьма остроумных с теоретической точки зрения), процесс решения этих уравнений остается трудоемким.

В этой главе предлагаются методы отыскания действительных и комплексных корней алгебраических уравнений высших степеней, действительных корней трансцендентных уравнений и решений систем линейных алгебраических уравнений. Излагаемые ниже методы с успехом можно использовать при вычислениях на счетной линейке и на счетных электрических машинах. Эти методы дают точность до десяти значащих цифр и позволяют решать системы из 40—100 линейных уравнений. В значительной мере их можно использовать и при вычислениях на современных электронных машинах.

Вычислительные процессы, описываемые ниже, являются попыткой скомбинировать различные методы так, чтобы максимально облегчить работу вычислителя; однако читатель может предпочесть другие, классические приемы или формулы, так как выбор методики часто зависит от привычки или личного вкуса.

## § 2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ КОРНИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Алгебраическое уравнение степени  $n$  имеет  $n$  корней; некоторые из них — действительные и простые, некоторые — действительные и кратные, а остальные — попарно сопряженные комплексные.

При решении алгебраических уравнений высоких степеней прежде всего рекомендуется найти наибольший (или наименьший) по абсолютному значению действительный корень. Лучше всего это делать методом последовательных приближений, оценивая остатки от деления по схеме Горнера.

Возможное число положительных и отрицательных корней может быть определено по правилу знаков Декарта: *число положительных корней равно или на четное число меньше числа перемен знака в ряде коэффициентов уравнения, причем коэффициенты, равные нулю, опускаются; число отрицательных корней равно*

или на четное число меньше числа сохранений знака в ряде коэффициентов при условии, что нет коэффициентов, равных нулю <sup>1)</sup>.

Пусть дано уравнение

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \quad (2.1)$$

Его наибольший <sup>в)</sup> корень часто можно аппроксимировать корнем линейного уравнения <sup>4)</sup>

$$x + a_{n-1} = 0. \quad (2.2)$$

или большим по абсолютной величине корнем квадратного уравнения:

$$x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0. \quad (2.3)$$

Если наибольший корень уравнения (2.1) значительно превосходит остальные по абсолютной величине, то указанные аппроксимации весьма точны.

Наименьший корень уравнения (2.1) можно аналогичным образом аппроксимировать корнем уравнения

$$a_1x + a_0 = 0 \quad (2.4)$$

или меньшим по абсолютному значению корнем квадратного уравнения

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (2.5)$$

если только наименьший корень уравнения (2.1) значительно меньше остальных.

Общий метод определения действительных корней мы продемонстрируем на примере уравнения

$$y = f(x) = x^3 - 12,2x^2 + 7,45x + 42 = 0, \quad (a)$$

которое, по правилу знаков Декарта, имеет или два положительных корня, или ни одного, и ровно один отрицательный.

Приближенное значение наибольшего корня находится из уравнения

$$x - 12,2 = 0$$

или из уравнения

$$x^2 - 12,2x + 7,45 = 0.$$

1) В оригинале эта теорема сформулирована неточно. — Прим. перев.

2) Коэффициент  $a_n$  при  $x^n$  обычно приводят к единице делением всего уравнения на  $a_n$ .

в) Под наибольшим (наименьшим) корнем уравнения всюду в этой главе понимается корень, наибольший (наименьший) по абсолютному значению. — Прим. перев.

4) Эта аппроксимация не проходит, если наибольший корень — кратный. — Прим. перев.



Из первого уравнения находим  $x_1 = 12,2$ , а из второго —

$$x_1 = 6,1 + \sqrt{(6,1)^2 - 7,45} = 11,55,$$

(знак  $+$  перед радикалом выбран для того, чтобы получился больший из двух корней последнего уравнения).

Разделив по схеме Горнера <sup>1)</sup>  $f(x)$  на  $x - x_1$  для предполагаемого значения  $x_1 = 12$  <sup>2)</sup>, мы получим

	1	—12,2	7,45	42
12		12,0	—2,40	60,6
	1	—0,2	5,05	102,6

Величина остатка может привести читателя к предположению, что 12 — плохое приближение  $x_1$ . Это, однако, не так, потому что если корень значительно больше единицы, то остаток весьма чувствителен к изменению корня. Действительно, другая проба, при  $x_1 = 10$ , дает:

	1	—12,2	7,45	42
10		10,0	—22,00	—145,50
	1	—2,2	—14,55	—103,50

Значения  $x = 12$  и  $x = 10$  приближают корень соответственно сверху и снизу. Поэтому следующее приближение мы можем

1) При делении многочлена  $f(x)$  на  $x - x_0$  возникает равенство

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = \\ &= (x - x_0)(x^{n-1} + s_{n-1}x^{n-2} + s_{n-2}x^{n-3} + \dots + s_2x + s_1) + s_0, \end{aligned}$$

где  $s_0 = f(x_0)$  остаток от деления. Из этого равенства видно, что  $s_{n-k} = a_{n-k} + x_0s_{n-k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), причем при  $k = 1$  следует положить в правой части  $s_n = 1$ . Таким образом, коэффициенты частного и остаток  $s_0$  могут быть вычислены по написанной рекуррентной формуле. Автор записывает вычисления в виде следующей таблицы, которая и называется схемой Горнера.

	1	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	...	$-a_2$	$a_1$	$a_0$
$x_0$		$x_0s_n = x_0$	$x_0s_{n-1}$	...	$x_0s_3$	$x_0s_2$	$x_0s_1$
	$s_n = 1$	$s_{n-1}$	$s_{n-2}$	...	$s_2$	$s_1$	$s_0$

Вычисления проводятся по рекуррентной формуле сверху вниз и слева направо. — Прим. перев.

2) Коэффициенты при тех степенях  $x$ , которые не входят в уравнение, в схеме Горнера нужно положить равными нулю.

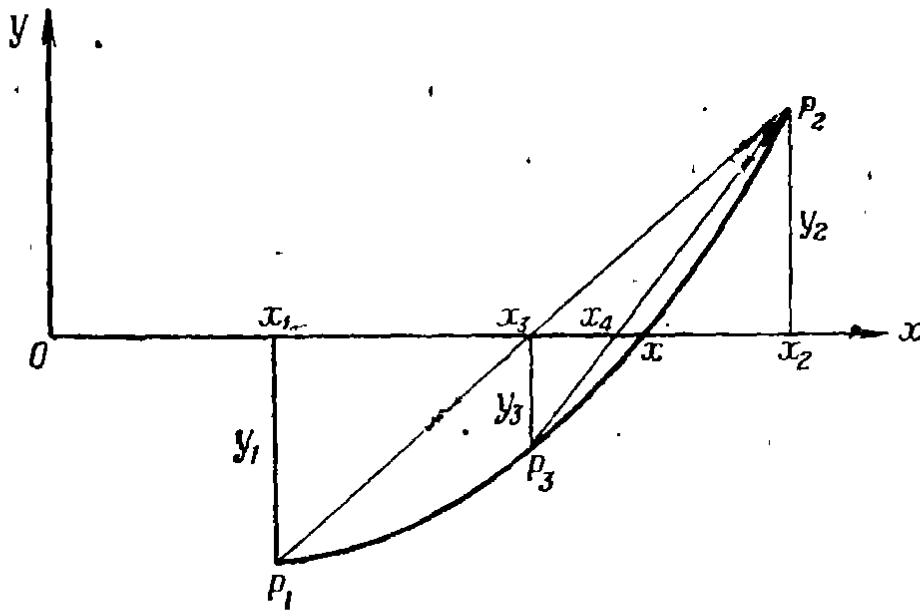
получить посредством *линейной интерполяции*. Пересечение оси  $x$  ( $y = 0$ ) с прямой

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1},$$

проходящей через точки  $P_1(x_1, y_1)$  и  $P_2(x_2, y_2)$ :

$$x_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}, \quad (2.6)$$

определяет соответствующее интерполированное значение  $x_3$  (фиг 1). Вычисления по формуле (2.6) могут быть проведены на счетной



Фиг. 1. Линейная интерполяция.

машине без промежуточных записей. В применении к нашему случаю ( $x_1 = 12$ ,  $y_1 = 103$ ,  $x_2 = 10$ ,  $y_2 = -103$ ) формула (2.6) дает

$$x_3 = \frac{12(-103) - 10(103)}{-103 - 103} = 11;$$

применив схему Горнера, получим остаток  $y_3 = -21,25$ .

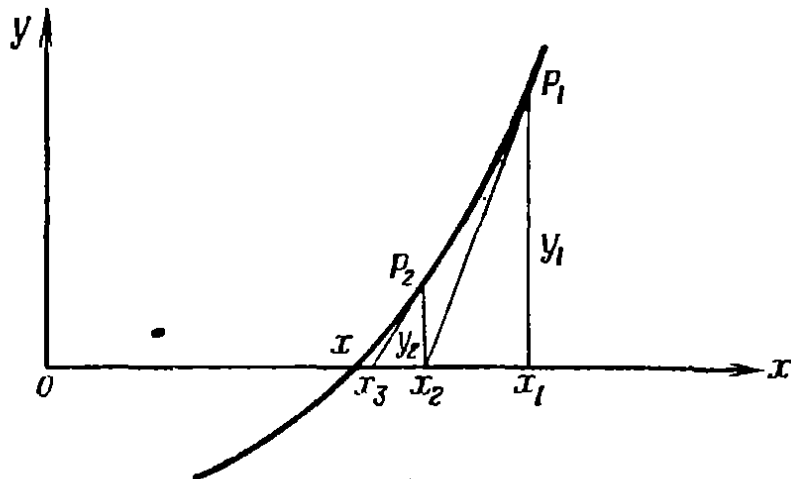
Теперь мы можем проинтерполировать линейно между 11 и 12; получим при этом  $x_4 = 11,17$  и остаток  $y_4 = -3,55$ ; наконец, значение 11,20 дает:

	1	-12,2	7,45	42	
11,20		11,2	-11,20	-42,0	
	1	-1,0	-3,75	0	(6)

Это показывает, что  $x = 11,20$  есть требуемый корень.

Кроме описанного выше приема интерполяций, для улучшения приближенного значения корня  $x_n$  можно воспользоваться (и притом

обычно с определенной выгодой) методом касательных Ньютона (фиг. 2).



Фиг. 2. Метод касательных Ньютона.

Разделив на  $x - x_n$  сначала  $f(x)$ , а затем полученное частное, мы найдем  $f(x_n)$  и  $f'(x_n)$ . В качестве следующего приближения возьмем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.7)$$

Так, для  $x_1 = 12$  мы получим

$x_1 = 12$	1	-12,2	7,45	42
		12,0	-2,40	61
	1	-0,2	5,05	103 = $f(x_1)$
$x_1 = 12$		12,0	142	
	1	11,8		147 = $f'(x_1)$

$$x_2 = 12 - \frac{103}{147} = 12 - 0,7 = 11,3.$$

Используя значение  $x_2 = 11,3$ , найдем

$x_2 = 11,30$	1	-12,2	7,45	42,0
		11,3	-10,17	-30,7
	1	-0,9	-2,72	11,3 = $f(x_2)$
$x_2 = 11,30$		11,3	117,52	
	1	10,4		114,80 = $f'(x_2)$

$$x_3 = 11,30 - \frac{11}{115} = 11,30 - 0,10 = 11,20,$$

что совпадает с полученным ранее значением корня.

Одна из принципиальных выгод деления  $f(x)$  на  $x - x_n$  состоит в том, что оно сразу дает коэффициенты приведенного уравнения,

т. е. того уравнения степени  $n - 1$ , корни которого совпадают с остальными  $n - 1$  корнями первоначального. Так, делением уравнения (а) на  $x - 11,2$  получаем квадратный трехчлен, коэффициенты которого определяются последним шагом схемы (б):

$$x^2 - x - 3,75 = 0.$$

Решая последнее уравнение по обычной формуле, получим оставшиеся два корня уравнения (а):

$$x = 0,5 \pm \sqrt{0,25 + 3,75} = \begin{cases} +2,5, \\ -1,5. \end{cases}$$

Если наибольший корень уравнения (а) значительно больше единицы, то, как уже говорилось, остаток от деления  $f(x)$  на  $x - x_1$  резко меняется при изменении  $x_1$ . Этим можно воспользоваться для улучшения точности приближенно найденного корня. Как это делается, видно из следующей схемы обратного деления:

$$\begin{array}{r} \phantom{x_1 = 12} \phantom{1} \phantom{-12,2} \phantom{7,45} \phantom{42} \\ \phantom{x_1 = 12} \phantom{1} \phantom{-12,2} \phantom{7,45} \phantom{42} \\ x_1 = 12 \phantom{1} \phantom{-12,2} \phantom{7,45} \phantom{42} \\ \hline \phantom{x_1 = 12} \phantom{1} \phantom{-12,2} \phantom{7,45} \phantom{42} \\ \phantom{x_1 = 12} 11,29 \phantom{-12,2} \phantom{7,45} \phantom{42} \\ \phantom{x_1 = 12} \phantom{11,29} -0,91 \phantom{7,45} \phantom{42} \\ \phantom{x_1 = 12} \phantom{11,29} \phantom{-0,91} -3,50 \phantom{42} \\ \phantom{x_1 = 12} \phantom{11,29} \phantom{-0,91} \phantom{-3,50} \underline{0} \end{array}$$

Здесь мы исходим из предположения, что остаток равен нулю; значение  $-42$ , которое обращает остаток в нуль, делим на приближенное значение корня, т. е. на 12; это дает  $-3,50$ . Число, написанное под 7,45, в сумме с 7,45 должно дать  $-3,50$ ; следовательно, оно равно  $-3,50 - 7,45 = -10,95$ . Число  $-0,91$  есть частное  $-10,95/12$ , и, наконец, 11,29 есть разность  $-0,91 - (-12,2)$ . Последнее число контролирует, насколько верно предположенное значение корня. Видно, что разность между предположенным значением и значением, полученным обратным делением, мала; это показывает, что 12 близко к корню. Испробуем аналогичным образом значение  $x_2 = 11$ :

$$\begin{array}{r} \phantom{x_2 = 11} \phantom{1} \phantom{-12,2} \phantom{7,45} \phantom{42} \\ \phantom{x_2 = 11} \phantom{1} \phantom{-12,2} \phantom{7,45} \phantom{42} \\ x_2 = 11 \phantom{1} \phantom{-12,2} \phantom{7,45} \phantom{42} \\ \hline \phantom{x_2 = 11} \phantom{1} \phantom{-12,2} \phantom{7,45} \phantom{42} \\ \phantom{x_2 = 11} 11,18 \phantom{-12,2} \phantom{7,45} \phantom{42} \\ \phantom{x_2 = 11} \phantom{11,18} -1,02 \phantom{7,45} \phantom{42} \\ \phantom{x_2 = 11} \phantom{11,18} \phantom{-1,02} -3,82 \phantom{42} \\ \phantom{x_2 = 11} \phantom{11,18} \phantom{-1,02} \phantom{-3,82} \underline{0} \end{array}$$

Погрешность при первой пробе была  $12 - 11,29 = 0,71$ ; при второй пробе ошибка составляет  $11 - 11,18 = -0,18$ , и линейная интерполяция дает

$$x = \frac{12(-0,18) - 11(0,71)}{-0,18 - 0,71} = 11,20.$$

Результаты рассмотренного примера показывают, что все  $m$  действительных корней алгебраического уравнения можно поочередно найти с требуемой точностью, если воспользоваться делением последовательно на  $(x - x_1)$ ,  $(x - x_2)$ , ...,  $(x - x_m)$ .

Особого рассмотрения требует случай, когда уравнение имеет два близких корня. Вспомним, что корень кратности  $k$  обращает в нуль не только многочлен  $f(x)$ , но и первые  $k-1$  его производных. Например, деля на  $x-3$  многочлен

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9,$$

найдем:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 3 & 9 \\ 3 & & 3 & -6 & -9 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 = f(3) \\ 3 & & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & & 0 = f'(3) \end{array}$$

Следовательно,  $x=3$  есть двойной корень этого уравнения.

Если значение  $f'(x)$  близко к нулю в окрестности корня  $\bar{x}$ , то правая часть равенства (2.7) резко меняется при изменении  $x$ . В этом случае удобно определить корень  $a$  уравнения  $f'(x)=0$ , близкий к  $\bar{x}$ , затем вычислить  $f''(a)$  и разложить  $f(x)$  по степеням  $x-a$ , пренебрегая членами третьего и более высоких порядков:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots \cong \\ &\cong f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2. \end{aligned}$$

Для того чтобы найти корни  $f(x)$ , близкие к  $a$ , решим квадратное уравнение

$$f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 = 0.$$

При этом получим

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{\frac{-f(a)}{\frac{1}{2}f''(a)}}. \quad (2.8)$$

Например, деля на  $x-1$  левую часть уравнения

$$x^3 - x^2 - 1,01x + 0,99 = 0,$$

найдем:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1,01 & 0,99 \\ 1 & & 1 & 0 & -1,01 \\ \hline & 1 & 0 & -1,01 & -0,02 = f(1) \\ 1 & & 1 & 1,00 & \\ \hline & 1 & 1 & & -0,01 = f'(1) \end{array}$$

Так как  $f'(1)$  мало, то мы решим уравнение

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,01 = 0,$$

взяв в качестве первого приближения  $x = 1$ :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 & 3 & -2 & -1,01 \\
 1 & & 3 & 1,00 \\
 \hline
 & 3 & 1 & | -0,01 = f'(1) \\
 1 & & 3 & \\
 \hline
 & 3 & & | 4 = f''(1).
 \end{array}
 \end{array}$$

По формуле (2.7) определяем корень

$$a = 1 - \frac{-0,01}{4} = 1,0025.$$

Значения  $f(a)$  и  $f''(a)$  найдем посредством трех последовательных делений<sup>1)</sup> на  $x - a$ :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 1 & -1 & -1,01 & 0,990 \\
 a = 1,0025 & & 1,0025 & 0,0025 & -1,010 \\
 \hline
 1 & 0,0025 & -1,0075 & | -0,020 = f(a) \\
 a = 1,0025 & & 1,0025 & 1,0075 \\
 \hline
 1 & 1,0050 & & | 0 = f'(a) \\
 a = 1,0025 & & 1,0025 & \\
 \hline
 1 & & & | 2,0075 = \frac{1}{2} f''(a)
 \end{array}
 \end{array}$$

По формуле (2.8),

$$x_{1,2} = 1,0025 \pm \sqrt{-\frac{-0,020}{2,0075}} = \begin{cases} 1,102, \\ 0,903. \end{cases}$$

Истинные корни равны 1,10 и 0,90.

Когда все действительные корни будут определены, мы получим уравнение, имеющее лишь попарно сопряженные комплексные корни.

### § 3. КОМПЛЕКСНЫЕ КОРНИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ<sup>2)</sup>

Если уравнение — квадратное, то его корни легко вычислить по обычной формуле. Уравнение четвертой, шестой или более высокой степени удобно разложить на квадратные множители. Каждому из этих множителей будет тогда соответствовать пара комплексно сопряженных корней. Разложение на множители можно провести по

<sup>1)</sup> Деля многочлен  $f(x)$  последовательно  $n$  раз на  $(x - a)$ , мы получим в остатках  $f(a)$ ,  $f'(a)$ ,  $\frac{1}{2!} f''(a)$ , ...,  $\frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ .

<sup>2)</sup> В этом параграфе предполагается, что уравнение имеет лишь комплексные корни. — *Прим. перев.*

схеме сокращенного деления, подбирая делители (являющиеся квадратными трехчленами) так, чтобы остаток (имеющий вид  $s_1x + s_0$ ) с некоторой степенью точности обратился в нуль.

Таблица 1

Сокращенное деление на  $x^2 + px + q$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = \\ = (x^2 + px + q)(s_n x^{n-2} + s_{n-1} x^{n-3} + s_{n-2} x^{n-4} + \dots + s_3 x + s_2) + s_1 x + s_0.$$

1	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	...	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$-p$		$-p \cdot s_n$	$-p s_{n-1}$	$-p s_{n-2}$	...	$-p s_3$	$-p s_2$	
$-q$			$-q s_n$	$-q s_{n-1}$	...	$-q s_4$	$-q s_3$	$-q s_2$
	$s_n$	$s_{n-1}$	$s_{n-2}$	$s_{n-3}$	...	$s_2$	$s_1$	$s_0$

Прежде всего следует отделить множитель, отвечающий паре корней с наибольшим или наименьшим модулем. В качестве *первого приближения* этого множителя в случае уравнения (2.1) удобно взять

$$x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} \quad (3.1)$$

для пары с наибольшим модулем и

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

или

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} \quad (3.2)$$

для пары с наименьшим модулем.

Улучшить это первое приближение можно двумя путями — подбором или итерациями. Оба метода мы продемонстрируем на примере следующего уравнения четвертой степени:

$$f(x) = x^4 + 27,4x^3 + 307,44x^2 - 873,7x + 1503,11 = 0. \quad (a)$$

Первое приближение множителя, соответствующего паре наименьших корней, есть

$$x^2 - \frac{873,7}{307,44} x + \frac{1503,11}{307,44} = x^2 - 2,84x + 4,89 \cong x^2 - 3x + 5.$$

Для определения остатка от деления на квадратный трехчлен  $x^2 + px + q$  воспользуемся схемой сокращенного деления <sup>1)</sup>, приведенной в табл. 1,

где

$$s_n = a_n, s_{n-1} = a_{n-1} - ps_n, s_{n-2} = a_{n-2} - ps_{n-1} - qs_n, \dots$$

Деление по этой схеме многочлена (а) (коэффициенты его округлены) на  $x^2 - 3x + 5$  выглядит следующим образом:

1	1	27,4	307	-874	1503
3		3,0	91,2	1179,6	
-5			-5,0	-152,0	-1966
	1	30,4	393,2	153,6	-463

(6)

Остаток, таким образом, равен  $153,6x - 463$ , а частное равно  $x^2 + 30,4x + 393,2$ . Попробовав разделить на  $x^2 - 2x + 5$ , получим:

1	1	27,4	307	-874	1503
2		2,0	58,8	721,6	
-5			-5,0	-147,0	-1804
	1	29,4	360,8	-299,4	-301

В новом остатке свободный член  $s_0$  изменился мало, а коэффициент  $s_1$  при  $x$  изменил знак. Попробуем поделить на  $x^2 - 3x + 4$ :

1	1	27,4	307	-874	1503
3		3,0	91,2	1182,6	
-4			-4,0	-121,6	-1576,8
	1	30,4	394,2	187,0	-73,8

Теперь коэффициент  $s_1'$  положителен и больше, чем при первой пробе, а свободный член  $s_0$  существенно меньше. Деля на  $x^2 - 2,5x + 4$ ,

1) Соотношения  $s_n = a_n, s_{n-1} = a_{n-1} - ps_n, s_{n-2} = a_{n-2} - ps_{n-1} - qs_n, s_{n-3} = a_{n-3} - ps_{n-2} - qs_{n-1}, \dots, s_{n-k} = a_{n-k} - ps_{n-k+1} - qs_{n-k+2}, \dots, s_1 = a_1 - ps_2 - qs_3, s_0 = a_0 - qs_2$  легко следуют из равенства над таблицей. — Прим. перев.



получим остаток  $-49,1x - 8,2$ . Наконец, выбрав в качестве делителя  $x^2 - 2,6x + 3,9$ , получим остаток  $0,2x + 17$ , который можно считать приближенно равным нулю. Частное в этом случае равно  $x^2 + 30x + 381,10$ . Следовательно, корни уравнения (а) приближенно равны

$$x_{1,2} = 1,3 \pm \sqrt{(1,3)^2 - 3,9} = 1,3 \pm 1,49i,$$

$$x_{3,4} = -15 \pm \sqrt{15^2 - 381,10} = -15 \pm 12,5i.$$

Истинные значения корней равны  $x_{1,2} = 1,3 \pm 1,5i$ ,  $x_{3,4} = -15 \pm 12,5i$ .

Итерационный метод Фридмана<sup>1)</sup> (который проще хорошо известного метода Лина)<sup>2)</sup> освобождает от необходимости приблизительных прикидок, но в некоторых случаях сходится крайне медленно или вообще расходится. Повидимому, удобнее всего комбинировать оба метода.

Процесс Фридмана (как и процесс подбора) начинается с деления левой части уравнения  $f(x) = 0$  на тот же квадратный трехчлен, причем делемое и делитель располагаются по убывающим<sup>3)</sup> степеням  $x$ . Затем  $f(x)$  делят на полученное частное, но теперь и делемое и делитель располагают по возрастающим степеням  $x$ . В частном получается при этом квадратный трехчлен, который и принимается за следующее приближение искомого множителя. Остатков от деления вычислять не нужно, так как они нигде не используются.

Так, разделив  $f(x)$  на трехчлен  $x^2 - 3x + 5$ , в частном получим [стр. 16, схема (б)]

$$x^2 + 30,4x + 393,2 \stackrel{c}{=} \\ = 393,2(1 + 0,077x + 0,0025x^2).$$

Теперь надлежит разделить

$$f(x) = 1503,11 - 873,7x + \\ + 307,44x^2 + 27,4x^3 + x^4 \\ \text{на } 1 + 0,077x + 0,0025x^2.$$

Производя это деление по схеме табл. 1<sup>4)</sup>, получим помещенную рядом таблицу.

- 1	1503,11	- 873,70	307,44
- 0,077		- 115,74	76,19
- 0,0025			- 3,76
	1503,11	- 989,44	379,87

1) Friedman, Note on Approximating Complex Zeros of a Polynomial, Communications on Pure and Applied Mathematics, II, 195 (June-September 1949).

2) Метод Лина (аналогичный приведенной на стр. 12 схеме обратного деления) в русской литературе не описан. — Прим. ред.

3) Так поступают при отделении множителя, соответствующего паре наименьших по модулю корней. Если же отделяется множитель, соответствующий наибольшей паре, то делемое и делитель располагают по возрастающим степеням  $x$ . Подробнее об этом см. далее. — Прим. перев.

4) Применимость этой таблицы легко следует из равенства

$$\varphi(t) = a_n + a_{n-1}t + a_{n-2}t^2 + \dots + a_1t^{n-1} + a_0t^n = \\ = (1 + pt + qt^2)(s_n + s_{n-1}t + s_{n-2}t^2 + \dots + s_3t^{n-3} + s_2t^{n-2} + s_1t^{n-1} + s_0t^n).$$

— Прим. перев.

Таким образом, частное равно

$$11503,11 - 989,44x + 379,87x^2 = 379,87(x^2 - 2,60x + 3,78).$$

Повторяя эту пару операций еще раз и располагая оба деления в одной таблице (слева — по убывающим, а справа — по возрастающим степеням  $x$ ), получим

1	1	27,4	307,44	307,44	- 873,70	1503,11	1
2,6		2,6	78,00	77,96	- 118,14		- 0,0786
- 3,78			- 3,78	- 3,94			- 0,00262
	1	30,0	381,66*	381,46*	- 991,84	1503,11	

Следовательно, частное от первого деления (слева) равно

$$x^2 + 30x + 381,66 = 381,66(1 + 0,0786x + 0,00262x^2),$$

а от второго (справа)

$$381,46x^2 - 991,84x + 1503,11 = 381,46(x^2 - 2,60x + 3,94).$$

Близость чисел, отмеченных звездочками, указывает на то, что последовательные приближения можно прекратить, и  $f(x)$ , таким образом, разлагается на множители, приближенно равные  $x^2 - 2,6x + 3,94$  и  $x^2 + 30x + 381,66$ . Из этого разложения находим корни основного уравнения:

$$x_{1,2} = 1,3 \pm 1,5i; \quad x_{3,4} = -15 \pm 12,5i.$$

Эти значения со всеми вычисленными знаками совпадают с истинными.

Если мы хотим воспользоваться методом Фридмана для отделения квадратного множителя, соответствующего наибольшей паре корней, то при первом делении следует расположить делимое и делитель по возрастающим степеням  $x$ , а при втором — по убывающим. Пусть, например, нам дано уравнение

$$f(x) = x^6 - 11x^5 + 89x^4 + 89x^3 + 89x^2 + 88x + 100 = 0.$$

Располагая многочлен  $f(x)$  по возрастающим степеням  $x$  и деля его на  $x^2 - 11x + 89 = 89(1 - 0,12x + 0,011x^2)$ , в частном получим  $100(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ . Теперь расположим  $f(x)$  по убывающим степеням  $x$  и разделим на  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ . Частное равно  $x^2 - 12x + 100$ . Корни этого трехчлена, равные  $6 \pm 8i$ , совпадают с точными значениями корней уравнения  $f(x) = 0$ . Вычисления про-

ведены по следующей схеме (слева — деление на  $1 - 0,12x + 0,011$ , а справа — на  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ):

1	100	88	89	89	89	89	-11	1	1
0,12		12	12	12	12	12	-1		-1
-0,011			-1	-1	-1	-1			-1
	100	100	100	100	100	100	-12	1	

Мы не будем подробно останавливаться на методах определения кратных комплексных корней, так как этот случай редко встречается в практике. Скажем лишь, что здесь предпочтительнее метод подбора, так как итерации сходятся весьма медленно.

„Возведение корней в квадрат“, или способ Лобачевского <sup>1)</sup>, более громоздко, нежели описанный выше способ (особенно при наличии комплексных корней), но тем не менее широко используется.

Найдя все корни уравнения, можно проконтролировать вычисления по формулам Вьета:

$$\sum_{i=1}^n x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad (3.3)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \quad (3.4)$$

Так, например, для уравнения (а) настоящего параграфа получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 x_i &= (1,3 + 1,49i) + (1,3 - 1,49i) + \\ &+ (-15 + 12,5i) + (-15 - 12,5i) = -27,4, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 &= 1491. \end{aligned}$$

Из этих равенств видно, что мнимые части корней найдены не очень точно.

#### § 4. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

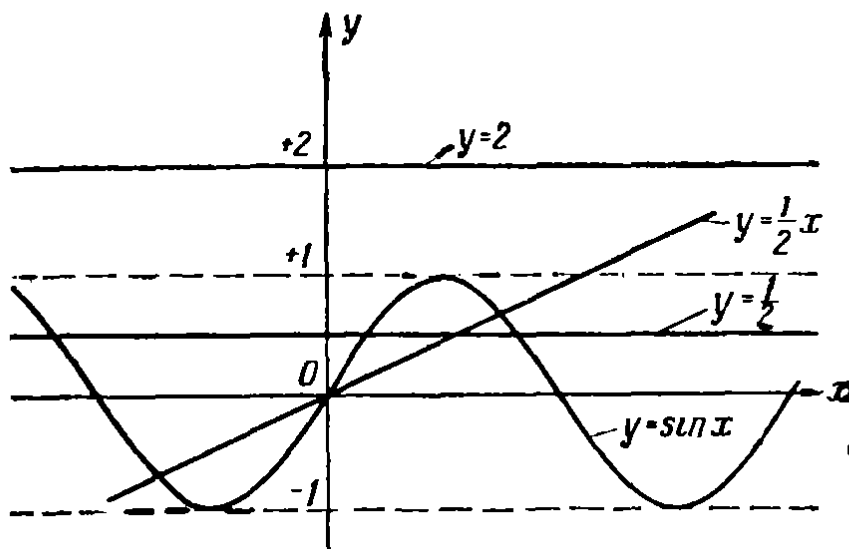
К этому классу относятся все уравнения, не являющиеся алгебраическими. Трансцендентное уравнение может иметь как конечное, так и бесконечное число корней. Может случиться и так, что действительные корни вообще отсутствуют. Например, уравнение

$$\sin x = 2$$

<sup>1)</sup> Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, М.—Л., 1954.—  
Прим. перев.

не имеет ни одного действительного корня (фиг. 3), но имеет бесконечное число комплексных. Уравнение

$$\sin x = \frac{1}{2}$$



имеет бесконечное число действительных корней. Уравнение

$$\sin x = \frac{1}{2} x$$

имеет три действительных корня (см. фиг. 3).

Для определения корня трансцендентного урав-

нения прежде всего аппроксимируют его сверху и снизу, используя для этого график или пробы. После этого уточняют найденное значение путем линейной интерполяции [формула (2.6)].

Рассмотрим, например, уравнение

$$y = f(x) = e^x - 3x = 0. \quad (a)$$

Оно имеет два действительных корня, один из которых заключен между 0,4 и 0,9 (фиг. 4).

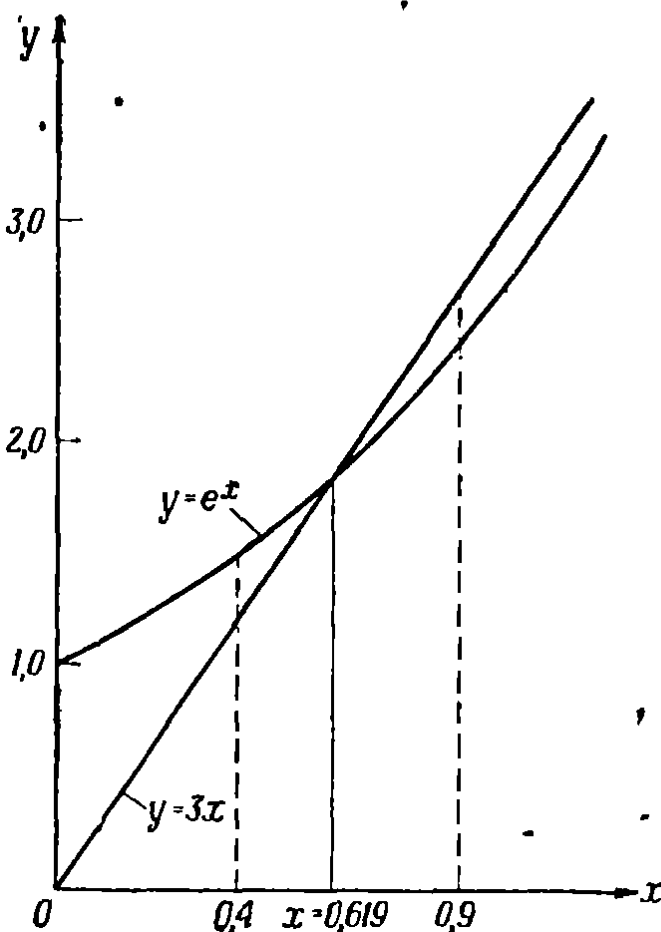
Так как  $f(0,9) = -0,24$  и  $f(0,4) = 0,29$ , то, согласно (2.6), получаем

$$x_3 = \frac{0,9(0,29) - 0,4(-0,24)}{0,29 - (-0,24)} = 0,67.$$

Но  $f(0,67) = y_3 = -0,056$ . Продолжая интерполяционный процесс, найдем последовательно:  $x_4 = 0,626$ ,  $y_4 = -0,008$  и  $x_5 = 0,620$ ,  $y_5 = -0,001$ .

С другой стороны, можно воспользоваться методом касательных Ньютона. Имеем:

$$f(x) = e^x - 3x; \quad f'(x) = e^x - 3.$$



Фиг. 4. Уравнение  $e^x - 3x = 0$ .

Начав со значений  $x_0 = 0,9$ ,  $f(x_0) = -0,24$ ,  $f'(x_0) = -0,54$ , по формуле (2.7) последовательно найдем:

$$x_1 = 0,9 - \frac{-0,24}{-0,54} = 0,455; \quad f(x_1) = 0,21; \quad f'(x_1) = -1,42;$$

$$x_2 = 0,455 - \frac{0,21}{-1,42} = 0,603; \quad f(x_2) = 0,019; \quad f'(x_2) = -1,17;$$

$$x_3 = 0,603 - \frac{0,019}{-1,17} = 0,614; \quad f(x_3) = 0,0058; \quad f'(x_3) = -1,15;$$

$$x_4 = 0,614 - \frac{0,0058}{-1,15} = 0,619; \quad f(x_4) = 0,00001.$$

Еще один метод определения действительных корней трансцендентного уравнения (*не всегда сходящийся*) — разложение входящих в уравнение функций в степенные ряды и решение алгебраических уравнений, которые получатся, если ограничиться двумя, тремя, ...,  $n$  членами этих разложений.

Так, например, разлагая в ряд левую часть уравнения (а), получим

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - 3x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\right) - 3x = \\ &= 1 - 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \end{aligned}$$

Вычислив наименьшие корни соответствующих алгебраических уравнений, найдем следующие приближения для решения (а):

$$1 - 2x = 0, \quad x_1 = 0,5;$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0, \quad x_1 = 0,586;$$

$$x^3 + 3x^2 - 12x + 6 = 0, \quad x_1 = 0,613;$$

$$\bullet \quad x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 48x + 24 = 0, \quad x_1 = 0,618.$$

Этот метод выгоден в тех случаях, когда нужно определить несколько первых корней трансцендентного уравнения.

## § 5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Одной из наиболее важных и часто встречающихся задач вычислительной математики является решение систем линейных алгебраических уравнений. Для выполнения расчетов можно предложить много разнообразных методов. Приведенные здесь четыре метода приспособлены к вычислениям на счетных машинах или на счетной линейке и обладают следующими особенностями:

1. *Схема Гаусса* — легко запоминаемый процесс систематического исключения неизвестных; удобен для счетной линейки.

2. *Схема Холецкого* — процесс систематического исключения неизвестных; удобен при вычислениях на машинах,

3. *Итерационный метод Гаусса—Зейделя* — процесс последовательных приближений; годится лишь при решении систем определенного типа; удобен при машинных вычислениях.

4. *Релаксация* — процесс последовательных приближений; удобен при решении систем большого числа уравнений (в частности, на счетной линейке).

В последующих параграфах мы проиллюстрируем все эти методы на примерах.

### § 6. СХЕМА ГАУССА

В табл. 2 (стр. 23) по схеме Гаусса последовательного исключения неизвестных решена следующая система:

Уравнение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$c$
I	2	2	4	—2	10
II	1	3	2	1	17
III	3	1	3	1	18
IV	1	3	4	2	27

(6.1)

В этой системе уравнение I, например, читается так<sup>1)</sup>:

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 10.$$

Табл. 2 понятна сама собой. Пояснений требуют лишь числа  $r$  и столбец  $S$ . Числа  $r$  представляют собой отношения коэффициентов, получающиеся следующим образом:  $r_2$ , например, есть отношение обведенного кружком коэффициента 1 при  $x_1$  из второй строки к обведенному квадратом коэффициенту 2 при  $x_1$  из первой строки;  $r_3$  есть отношение обведенного кружком коэффициента 3 при  $x_1$  из пятой строки к обведенному квадратом коэффициенту 2 при  $x_1$  из первой строки;  $r'_3$  есть отношение обведенного кружком коэффициента —2 при  $x_2$  из седьмой строки к обведенному квадратом коэффициенту 2 при  $x_2$  из четвертой строки и т. д. Столбец  $S$ , содержащий сумму всех коэффициентов (включая правую часть уравнения) соответствующей строки, используется в качестве контрольного: если число  $S$  некоторой строки получено при помощи операции, указанной в пояснительном столбце, то оно должно оказаться равным сумме остальных

<sup>1)</sup> Константа  $c$  всегда пишется в правой части уравнения,

Таблица 2  
Схема Гаусса

№ строки	$r$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$c$	$S$	Пояснения
(1)		2	2	4	-2	10	16	(1)
2	$r_2 = \frac{1}{2}$	1	3	2	1	17	24	(II)
3		-1	-1	-2	1	-5	-8	$-r_2 \times (1)$
(4)		0	2	0	2	12	16	(2)+(3)
5	$r_3 = \frac{3}{2}$	3	1	3	1	18	26	(III)
6		-3	-3	-6	3	-15	-24	$-r_3 \times (1)$
7	$r'_3 = -\frac{2}{2}$	0	-2	-3	4	3	2	(5)+(6)
8			2	0	2	12	16	$-r'_3 \times (4)$
(9)			0	-3	6	15	18	(7)+(8)
10	$r_4 = \frac{1}{2}$	1	3	4	2	27	37	(IV)
11		-1	-1	-2	1	-5	-8	$-r_4 \times (1)$
12	$r'_4 = \frac{2}{2}$	0	2	2	3	22	29	(10)+(11)
13			-2	0	-2	-12	-16	$-r'_4 \times (4)$
14	$r''_4 = \frac{2}{-3}$		0	2	1	10	13	(12)+(13)
15				-2	4	10	12	$-r''_4 \times (9)$
(16)				0	5	20	25	(14)+(15)
17	Const $c_i$	10	12	15	20			
18	$-x_4 a_{i4}$	8	-8	-24	20	$x_4 = \frac{20}{5} = 4$		
19	$-x_3 a_{i3}$	-12	0	-9		$x_3 = (-9)/(-3) = 3$		
20	$-x_2 a_{i2}$	-4	4			$x_2 = \frac{4}{2} = 2$		
21	$(i=1,4,9,16)$	2				$x_1 = \frac{2}{2} = 1$		

чисел этой строки. Если число неизвестных больше четырех, то этот контроль следует обязательно проводить. Значения неизвестных получаются последовательно из уравнений, находящихся в строках с номерами  $n^2$  (1, 4, 9, 16), начиная с последнего<sup>1)</sup>:

$$\text{Строка 16: } 5x_4 = 20, \quad x_4 = 4.$$

$$\text{Строка 9: } -3x_3 + 6x_4 = 15, \quad x_3 = 3.$$

$$\text{Строка 4: } 2x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 12, \quad x_2 = 2.$$

$$\text{Строка 1: } 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 10, \quad x_1 = 1.$$

<sup>1)</sup> Вычисления проведены в нижней части табл. 2.

Если по схеме Гаусса решаются две (или более) системы, отличающиеся лишь правыми частями, то в соответствующих таблицах совпадут все столбцы, кроме  $c$  и  $S$ . Это важное свойство схемы можно использовать для того, чтобы с помощью лишь незначительной добавочной работы уточнить решение. Для этого нужно определить значения  $c'$  левых частей при найденных приближенных значениях неизвестных  $x$ , а затем составить разности  $e = c - c'$ . Беря  $e$  в качестве правых частей, найдем решение  $x'$  новой системы. Суммы  $x + x'$  и будут более точным решением.

Предположим, что, вычисляя корни системы (а)

Уравнение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
I	1	2	1	6,00
II	2	1	1	6,11
III	1	1	2	5,73

(а)

с двумя знаками, мы нашли  $x_1 = 1,60$ ,  $x_2 = 1,50$ ,  $x_3 = 1,30$ .

Для уточнения этих значений вычислим

$$e_1 = 6,00 - (1,60 + 2 \cdot 1,50 + 1,30) = 0,10,$$

$$e_2 = 6,11 - (2 \cdot 1,60 + 1,50 + 1,30) = 0,11,$$

$$e_3 = 5,73 - (1,60 + 1,50 + 2 \cdot 1,30) = 0,03$$

и решим так называемую систему уравнений для погрешностей;

Уравнение	$x'_1$	$x'_2$	$x'_3$	$e$
I	1	2	1	0,10
II	2	1	1	0,11
III	1	1	2	0,03



Ее решение есть  $x'_1 = 0,05$ ,  $x'_2 = 0,04$ ,  $x'_3 = -0,03$ . В данном случае уточненное решение

$$x_1 = 1,60 + 0,05 = 1,65,$$

$$x_2 = 1,50 + 0,04 = 1,54,$$

$$x_3 = 1,30 - 0,03 = 1,27$$

совпадает с истинным решением системы (а).

## § 7. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Прямоугольная таблица, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется  $(m, n)$ -матрицей. Мы будем обозначать матрицы большими латинскими буквами, напечатанными жирным шрифтом. Так, например, таблица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

представляет собой  $(2, 3)$ -матрицу. Элемент матрицы, стоящий на пересечении  $i$ -й строки с  $j$ -м столбцом, будем обозначать через  $a_{ij}$ .

$(n, n)$ -матрица называется *квадратной матрицей порядка  $n$* . Элементы  $a_{ii}$  этой матрицы образуют *главную диагональ*. Определитель, элементы которого совпадают с элементами квадратной матрицы  $A$ , называется *определителем этой матрицы* и обозначается обычно через  $|A|$ . Если все элементы квадратной матрицы, лежащие под главной диагональю, равны нулю, то она называется *верхней треугольной матрицей*; если же в нуль обращаются все элементы, лежащие над главной диагональю, то матрица называется *нижней треугольной*. Нижние треугольные матрицы будем обозначать буквой  $L$ . Квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а под ней — нули, называется *единичной верхней треугольной матрицей*. Эти матрицы мы будем обозначать через  $T$ .

$(n, 1)$ -матрица называется *вектором*. Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю. *Единичной* называется матрица, главная диагональ которой состоит из единиц, а остальные элементы являются нулями.

Две матрицы  $A$  и  $B$  считаются равными тогда и только тогда, когда  $a_{ij} = b_{ij}$  при всех значениях  $i, j$ .

*Суммой* двух матриц  $A$  и  $B$  называется матрица  $C$  с элементами  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

*Произведением* двух матриц  $A$  и  $B$  называется матрица  $C$ , элементы которой равны

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (7.1)$$

где  $n$  — число столбцов матрицы  $A$ , равное числу строк матрицы  $B$ . (Заметим, что произведение  $AB$  только тогда и определено, когда число столбцов  $A$  равно числу строк  $B$ ).

Произведение  $AB$  получается, таким образом, умножением „строк на столбцы“. Ясно что оно может и не совпадать с произведением  $BA$  (если последнее, вообще, существует).

Пример. Если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

то произведение  $AB$  равно

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) & (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) & (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \\ (1 \cdot 2 + 3 \cdot 1) & (1 \cdot 1 + 3 \cdot 2) & (1 \cdot 1 + 3 \cdot 1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix} = C. \end{aligned}$$

Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц. Например, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = AB = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 5 \end{bmatrix};$$

$$|A| = 3; \quad |B| = -5,$$

то определитель матрицы  $C$  равен

$$|C| = |A||B| = 3 \cdot (-5) = -15^1).$$

Наиболее эффективный метод нахождения численного (или буквенного) значения определителя

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<sup>1)</sup> Более подробно с алгеброй квадратных матриц можно познакомиться по книге А. Г. Куроша „Курс высшей алгебры“, М.—Л., 1955.—Прим. перев.

состоит в понижении его порядка на единицу по следующей схеме<sup>1)</sup>:

$$D_n = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}, \quad (7.2)$$

каждый элемент которой является определителем второго порядка.

Так, например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{1-2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1^{3-2}} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \cdot 12 = 3.$$

Вспомнив правило умножения матриц, можно записать систему, например, трех линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3 \end{aligned} \right\}$$

в следующей матричной форме:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

или, проще,

$$AX = C.$$

Матрица  $A = [a_{ij}]$  называется матрицей системы, а векторы  $X = [x_i]$  и  $C = [c_i]$  — соответственно вектором неизвестных и вектором правых частей.

<sup>1)</sup> См. Унттекер Э. и Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, М.—Л., 1935, стр. 70.— Прим. перев.

Основной шаг при решении линейной системы уравнений путем исключения неизвестных состоит в сведении этой системы к единичной верхней треугольной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 1 & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix},$$

или

$$TX = K,$$

так как эту систему

$$\left. \begin{aligned} x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 &= k_1, \\ x_2 + t_{23}x_3 &= k_2, \\ x_3 &= k_3 \end{aligned} \right\}$$

можно немедленно решить последовательной подстановкой.

### § 8. СХЕМА ХОЛЕЦКОГО <sup>1)</sup>

Метод Холецкого удобно излагать в матричной форме, так как он сводится к нахождению вспомогательной нижней треугольной матрицы  $L$ , с помощью которой удается преобразовать исходную систему  $AX - C = 0$ , к единичной верхней треугольной форме  $TX - K = 0$ .

С этой целью мы предположим, что исходная система уже приведена к единичной треугольной форме  $TX - K = 0$  и что, умножив последнее равенство на нижнюю треугольную матрицу  $L$ , мы возвращаемся к исходной форме:

$$L(TX - K) = AX - C = 0.$$

Из нашего предположения вытекают следующие два матричных уравнения:

$$LT = A, \quad LK = C.$$

Вспомнив правило умножения матриц, мы увидим, что  $L$ ,  $T$  и  $K$  можно весьма просто определить <sup>2)</sup>. Действительно, запишем последние два равенства для случая системы трех уравнений в явном виде:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & k_1 \\ 0 & 1 & t_{23} & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & k_3 \end{bmatrix}$$

<sup>1)</sup> Метод Холецкого был впервые использован им в 1916 г. во Франции для симметрических систем; в матричной форме он был изложен в 1938 г. в Польше Базахевичем; к машинам был приспособлен в 1941 г. в США Краутом; позже изучался в 1948 г. в Англии Тюрнгом и в 1949 г. в Германии Цурмюлом.

<sup>2)</sup> Из самого процесса определения  $L$ ,  $T$  и  $K$  следует, что они однозначно определены заданием  $A$  и  $C$ ,

(для компактности векторы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{K}$  приписаны справа соответственно к матрицам  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{T}$ ). Отсюда следует, что для элементов матриц  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{K}$  имеют место следующие равенства:

$$1. \quad a_{11} = l_{11} \cdot 1 + l_{12} \cdot 0 + l_{13} \cdot 0 = l_{11},$$

т. е. первые столбцы матриц  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{A}$  совпадают;

$$2. \quad a_{1j} = l_{11}t_{1j} + 0 \cdot t_{2j} + 0 \cdot t_{3j} = l_{11}t_{1j} = a_{11}t_{1j},$$

т. е. первая строка  $\mathbf{T}$  равна первой строке  $\mathbf{A}$ , деленной на  $a_{11}$ ;

$$3. \quad a_{22} = l_{21}t_{12} + l_{22} \cdot 1, \quad \text{т. е. } l_{22} = a_{22} - l_{21}t_{12},$$

$$a_{23} = l_{21}t_{13} + l_{22}t_{23}, \quad \text{т. е. } t_{23} = (a_{23} - l_{21}t_{13})/l_{22},$$

$$a_{32} = l_{31}t_{12} + l_{32} \cdot 1, \quad \text{т. е. } l_{32} = a_{32} - l_{31}t_{12},$$

$$c_2 = l_{21}k_1 + l_{22}k_2, \quad \text{т. е. } k_2 = (c_2 - l_{21}k_1)/l_{22},$$

и т. д.

Таким путем можно последовательно определить все элементы матриц  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{K}$ <sup>1)</sup>.

Общие формулы записываются в следующем виде:

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} l_{ir}t_{rj}, \quad l_{i1} = a_{i1}, \quad (8.1)$$

$$t_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left[ a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} l_{ir}t_{rj} \right], \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \text{ } ^2), \quad (8.2)$$

где для простоты положено  $a_{i, n+1} = c_i$ ,  $t_{i, n+1} = k_i$ , причем  $n+1$  есть номер последнего столбца каждой из расширенных матриц ( $\mathbf{T} + \mathbf{K}$  и  $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ ).

Из равенств (8.1) и (8.2) видно, что если матрица  $\mathbf{A}$  симметрична (т. е. если  $a_{ij} = a_{ji}$ ), то

$$l_{ij} = t_{ji} \cdot l_{ii} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j) \quad (8.3)$$

и, следовательно, вычисление элементов матрицы  $\mathbf{L}$  (кроме диагональных) является промежуточным шагом при определении  $t_{ij}$ .

<sup>1)</sup> Для этого нужно первую строку матрицы  $\mathbf{L}$  умножить поочередно на все столбцы матрицы  $\mathbf{T}$  (начиная с первого), а затем на вектор  $\mathbf{K}$ . Тогда при каждой из этих операций возникнет равенство, все члены которого, кроме одного, уже определены, и мы можем найти этот единственный неизвестный член. Затем аналогично следует поступать со второй строкой и т. д.— *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Заметим, что  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{T}$  и, следовательно,  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{L}||\mathbf{T}|$ . Поэтому из неравенства  $|\mathbf{A}| \neq 0$  вытекает, что одновременно  $|\mathbf{L}| \neq 0$  и  $|\mathbf{T}| \neq 0$ . Но так как оба последних определителя равны произведению своих диагональных элементов, то  $l_{ii} \neq 0$  ни при каком  $i$ , и деление в (8.2) всегда возможно.

Операции (8.1) и (8.2) легко провести на вычислительных машинах без записи промежуточных результатов. Это делает метод Холецкого наиболее удобным среди всех методов исключения. Если учитывать только операции умножения, деления<sup>1)</sup> и записи чисел, то для решения системы  $n$  уравнений по схеме Гаусса понадобится  $n^3/3 +$  число порядка  $n^2$  операций, а по схеме Холецкого — только  $n^2 +$  число порядка  $n$ <sup>2)</sup>. Так, например, при  $n = 10$  схема Гаусса требует примерно  $\frac{1}{3} \cdot 10^3 + 10^2 = 433$  операции, а схема Холецкого  $10^2 + 10 = 110$ .

Время, необходимое для решения системы  $n$  уравнений по схеме Холецкого, составляет приблизительно  $0,001n^4$  часов. Так, систему десяти уравнений можно легко решить за 10 часов. Число знаков, теряемых при вычислениях, зависит от самой системы, но в среднем оно порядка  $0,3n$ . Так, систему десяти уравнений следует решать с тремя запасными знаками.

Поясним табл. 3, в которой по схеме Холецкого решена система (6.1). Прежде всего записываются: а) первый столбец матрицы  $L$ , равный первому столбцу матрицы  $A$ , т. е.  $[2, 1, 3, 1]$ , и б) первая строка расширенной матрицы  $T + K$ , равная первой строке расширенной матрицы  $A + C$ , деленной на  $a_{11} = 2$ , т. е.  $[1, 1, 2, -1, 5]$ . Затем из уравнения, в котором  $a_{22}$  приравнивается произведению второй строки  $L$  на второй столбец  $T$ , вычисляется  $l_{22}$ :

$$3 = 1 \cdot 1 + l_{22} \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0; \quad l_{22} = 2$$

[можно непосредственно воспользоваться соотношением (8.1)]. Далее, отыскивается  $t_{23}$ . Для этого следует  $a_{23}$  приравнять произведению второй строки  $L$  на третий столбец  $T$  или прямо воспользоваться соотношением (8.2):

$$a_{23} = 2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot t_{23} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0; \quad t_{23} = 0.$$

Аналогично определяется  $t_{24}$ :

$$a_{24} = 1 = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot t_{24} + 0 \cdot t_{34} + 0 \cdot t_{44}; \quad t_{24} = 1,$$

и, наконец,  $t_{25} = k_2$ :

$$a_{25} = c_2 = 17 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot t_{25} + 0 \cdot t_{35} + 0 \cdot t_{45}; \quad t_{25} = k_2 = 6.$$

1) Деление здесь расценивается как два умножения.

2) Эти подсчеты неверны. Легко видеть, что схемы Гаусса и Холецкого требуют почти одинакового количества умножений и делений. Метод Холецкого экономичнее за счет сложений и вычитаний, большая часть которых в этом методе выполняется в процессе умножения без дополнительной затраты времени, а также за счет уменьшения количества записей.

Нельзя признать верной и даваемую ниже формулу для затраты времени на решение. Поскольку количество выполняемых действий порядка  $n^3$ , следует считать, что и затрата времени на решение пропорциональна  $n^3$ . Поэтому выражение, данное автором, следует заменить на  $0,01n^3$ . — Прим. ред.

Схема Холецкого

Таблица 3

		A				C	L				T				K	
$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$c$	$S$					$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$k$	$S$
1	2	2	4	-2	10	16	2	0	0	0	1	1	2	-1	5	8
2	1	3	2	1	17	24	1	2	0	0	0	1	0	1	6	8
3	3	1	3	1	18	26	3	-2	-3	0	0	0	1	-2	-5	-6
4	1	3	4	2	27	37	1	2	2	5	0	0	0	1	4	5
5	7	9	13	2	72	$S'$	7	2	-1	5						

Сокращенная схема Холецкого

Таблица 4

		A				C	L и T				K	$\pm f$
$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$c$	$S$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$k$	$S$
1	2	2	4	-2	10	16	2	1	2	-1	5	8
2	1	3	2	1	17	24	1	2	0	1	6	8
3	3	1	3	1	18	26	3	-2	-3	-2	-5	-6
4	1	3	4	2	27	37	1	2	2	5	4	5
5	7	9	13	2	72	$S'$	7	2	-1	5		

Точно так же определяются и остальные элементы  $L$  и  $T$ . К расширенным матрицам  $A + C$  и  $T + K$  можно приписать контрольные столбцы  $S$ , а к матрицам  $A$  и  $L$  — контрольные строки  $S'$ . Эти столбцы (или строки) получаются посредством тех же операций, что и столбцы (или строки) соответствующих матриц, что позволяет контролировать сумму элементов строки (или столбца).

При решении нескольких систем с одинаковыми левыми частями, но различными правыми можно ограничиться одной таблицей, в которой содержится по несколько столбцов  $C$  и  $K$ .

Когда метод будет хорошо освоен, можно сократить запись, объединив треугольные матрицы  $L$  и  $T$  в одну квадратную (что возможно, так как на главной диагонали  $T$  стоят единицы). Схема с этими сокращениями представлена на табл. 4.

Таблица 5

Схема Холецкого для случая симметрической матрицы

	A			C	S	L			T			K	S
$i \backslash j$	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	4	5
1	2	2	4	8	16	2	0	0	1	1	2	4	8
2	2	1	2	5	10	2	-1	0	0	1	2	3	6
3	4	2	3	9	18	4	-2	-1	0	0	1	1	2
4	8	5	9	22	$S'$	8	-3	-1					

$$(1) \quad l_{22} = 1 - 2 = -1;$$

$$(2) \quad t_{23} = (2 - 2 \cdot 2) / (-1) = -2 / -1 = l_{32} / -1 = 2;$$

$$(3) \quad t_{24} = (5 - 2 \cdot 4) / (-1) = l_{42} / -1 = 3;$$

$$(3a) \quad t_{25} = (10 - 2 \cdot 8) / (-1) = 6.$$

$$(4) \quad l_{32} = -2;$$

$$(4a) \quad l_{42} = -3;$$

$$(5) \quad l_{33} = 3 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = -1;$$

$$(6) \quad t_{34} = (9 - 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3) / (-1) = l_{43} / -1 = 1;$$

$$(6a) \quad t_{35} = (18 - 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6) / (-1) = 2;$$

$$x_3 = 1; \quad x_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1; \quad x_1 = 4 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1.$$



После того как матрица  $T$  и вектор  $K$  определены, значения  $x_j$  легко получаются решением треугольной системы  $TX = K$ :

$$\begin{array}{ll} \text{Строка 4:} & x_4 = 4; \\ \text{Строка 3:} & x_3 - 2x_4 = -5; \quad x_3 = 3; \\ \text{Строка 2:} & x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 6; \quad x_2 = 2; \\ \text{Строка 1:} & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5; \quad x_1 = 1. \end{array}$$

В табл. 5 приведено решение системы трех уравнений с симметрической матрицей с использованием соотношений (8.3).

### § 9. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ГАУССА — ЗЕЙДЕЛЯ

Система линейных уравнений называется *диагональной*, если в каждом уравнении найдется неизвестное (*эти неизвестные должны быть обязательно различны в разных уравнениях*), коэффициент при котором по абсолютной величине больше суммы абсолютных величин остальных коэффициентов. Обычно неизвестные нумеруют так, чтобы максимальные коэффициенты заполняли главную диагональ. К системам диагонального вида сводится большой круг физических задач.

Весьма важным свойством диагональных систем является возможность решать их методами последовательных приближений. Наиболее простым среди них является *итерационный метод Гаусса—Зейделя*. Для того чтобы решить систему, следуя этому методу, разрешим каждое из уравнений системы относительно того неизвестного, при котором стоит максимальный коэффициент:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1n}x_n + k_1, \\ x_2 = b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n + k_2, \\ \dots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{n, n-1}x_{n-1} + k_n. \end{array} \right\} \quad (9.1)$$

В правую часть каждого из уравнений (9.1) вместо неизвестных  $x_j$  подставим произвольные числа  $x_j^{(0)}$ . При этом в левых частях получатся новые значения неизвестных  $x_i^{(1)}$ . Подставив их в правые части (9.1), получим второе приближение  $x_i^{(2)}$  и т. д. Сигналом окончания процесса служит совпадение  $x_i^{(m+1)}$  и  $x_i^{(m)}$  с нужным числом знаков. Найденные значения  $x_i^{(m)}$  и представляют собой решение системы.

В этом процессе каждое новое значение неизвестного получается при вычислениях на машине без промежуточных записей. Заметим еще, что процесс сходится *при любых* начальных значениях. Вследствие этого появление случайных ошибок (что, очевидно, эквивалентно

изменению начальных значений) не нарушает сходимости процесса. Зейдель заметил, что можно добиться существенного ускорения сходимости, если в правую часть (9.1) каждый раз подставлять *последнее* из уже найденных приближений<sup>1)</sup>. На любой стадии процесса допустимо также угадывание неизвестных, которое может ускорить сходимость.

В качестве примера применения описанного метода рассмотрим следующую систему:

Уравнение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
I	10	1	1	12
II	2	10	1	13
III	2	2	10	14

Запишем ее в форме (9.1), „подготовленной для итераций“:

Таблица 6

$n$	1	2	3	4
$x_1$	1,20	0,99	1,00	1,00
$x_2$	1,16	1,01	1,00	
$x_3$	0,92	1,00	1,00	

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1,2 - 0,1x_2 - 0,1x_3, \\ x_2 &= 1,3 - 0,2x_1 - 0,1x_3, \\ x_3 &= 1,4 - 0,2x_1 - 0,2x_2. \end{aligned} \right\}$$

Выбрав в качестве нулевого приближения  $x_2 = x_3 = 0$ , из первого уравнения найдем  $x_1 = 1,2$ . При  $x_1 = 1,2$  и  $x_3 = 0$  второе уравнение дает  $x_2 = 1,3 - 0,2 \cdot 1,2 = 1,16$ . Наконец, с  $x_1 = 1,2$  и  $x_2 = 1,16$  найдем из третьего уравнения  $x_3 = 1,40 - 0,2 \cdot 1,2 - 0,2 \cdot 1,16 = 0,92$ . Возвращаясь к первому уравнению, при  $x_2 = 1,16$  и  $x_3 = 0,92$  получим  $x_1 = 0,99$ , и т. д. Результаты дальнейших итераций приведены в табл. 6.

1) Так, например, подставив в правую часть первого из уравнений (9.1) значения  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ , найдем  $x_1^{(1)}$ . Во второе уравнение подставляем  $x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ . Так как тем самым определено  $x_2^{(1)}$ , то в третье уравнение можно подставить  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$  и т. д. — *Прим. перев.*

Утверждение, что применение итерационного процесса Зейделя всегда существенно улучшает сходимость, неверно. — *Прим. ред.*

При вычислениях на счетной линейке удобно вести запись в форме табл. 7; уравнения (9.1) записываются при этом „вертикально“.

Таблица 7

**§ 10. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РЕЛАКСАЦИИ**

Релаксация — метод решения систем алгебраических линейных уравнений последовательными приближениями. Этот метод дает вычислителю широкие возможности использования своего математического искусства и физической интуиции для ускорения сходимости процесса. Релаксация обязана своей заслуженной известностью работам Саусвелла и его школы<sup>1)</sup>.

Рассмотрим систему, „подготовленную для релаксации“, т. е. такую, в которой все коэффициенты, стоящие на главной диагонали, равны — 1, а свободные члены перенесены в левую сторону:

	I	II	III
$x_1$	1	— 0,2	— 0,2
$x_2$	— 0,1	1	— 0,2
$x_3$	— 0,1	— 0,1	1
$c$	1,20	1,30	1,40
	(1,20) — 0,12 — 0,09	— 0,24 (1,16) — 0,09	— 0,24 — 0,24 (0,92)
	(0,99) — 0,10 — 0,10	— 0,20 (1,01) — 0,10	— 0,20 — 0,20 (1,00)
	(1,00) — 0,10 — 0,10	— 0,20 (1,00) — 0,10	— 0,20 — 0,20 (1,00)
	(1,00)		

$$\left. \begin{aligned} -x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1n}x_n + k_1 &= 0, \\ b_{21}x_1 - x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n + k_2 &= 0, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + b_{n3}x_3 + \dots - x_n + k_n &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Обозначим значение левой части  $l$ -го уравнения при предполагаемых начальных значениях неизвестных  $x_j^{(0)}$  через  $R_l$  („невязка“):

$$\left. \begin{aligned} -x_1^{(0)} + b_{12}x_2^{(0)} + b_{13}x_3^{(0)} + \dots + b_{1n}x_n^{(0)} + k_1 &= R_1, \\ b_{21}x_1^{(0)} - x_2^{(0)} + b_{23}x_3^{(0)} + \dots + b_{2n}x_n^{(0)} + k_2 &= R_2, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_{n1}x_1^{(0)} + b_{n2}x_2^{(0)} + b_{n3}x_3^{(0)} + \dots - x_n^{(0)} + k_n &= R_n. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

<sup>1)</sup> Southwell R. V. Relaxation Methods in Theoretical Physics, London, 1946; Southwell R. V., Relaxation Methods in Engineering Science, London, 1940.

Процесс релаксации состоит в том, что значения неизвестных постепенно изменяют (по одному или группами) до тех пор, пока все  $R_i$  с нужной точностью не обратятся в нуль. Оговорим прежде всего, что если значение одного из неизвестных, например  $x_k^{(0)}$ , увеличить на  $\delta x_k$ , то  $R_k$  уменьшится на ту же величину  $\delta x_k$ , а каждая из остальных  $R_i$  увеличится на  $b_{ik}\delta x_k$ . Следовательно, если мы хотим обратить одну из невязок, например  $R_k$ , в нуль, то нужно увеличить  $x_k^{(0)}$  на  $\delta x_k = R_k$  (при этом изменятся, конечно, и остальные невязки). Процесс релаксации (в своей простейшей форме) в том и заключается, что все  $R_i$  поочередно обращаются в нуль путем изменения соответствующих значений  $x_i^{(0)}$ . При этом на каждом шаге процесса удобно изменять то неизвестное, которому соответствует наибольшая по абсолютной величине невязка.

Релаксацию удобно выполнять в форме таблицы, в которой каждому неизвестному  $x_i$  отнесены два столбца. В первом из них записываются начальное значение  $x_i^{(0)}$  этого неизвестного и его последовательные изменения  $\delta x_i$ , а во втором, расположенном обычно справа от первого, — соответствующие невязки. Когда все невязки обратятся с требуемой точностью в нуль, мы можем вычислить значение  $x_i$  как сумму  $x_i^{(0)}$  и всех изменений  $\delta x_i$ .

В качестве примера рассмотрим систему

Уравнение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
I	10	-2	-2	6
II	-1	10	-2	7
III	-1	-1	10	8

(a)

которая, будучи подготовлена для релаксации [см. (10.1)], примет следующий вид:

Уравнение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$k$
I	-1	0,2	0,2	0,6
II	0,1	-1	0,2	0,7
III	0,1	0,1	-1	0,8

(б)

Выбрав в качестве начальных значений  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ , найдем соответствующие им невязки:

$$R_1 = 0,60; \quad R_2 = 0,70; \quad R_3 = 0,80.$$

Таблица 8

$x_1$	$R_1$	$x_2$	$R_2$	$x_3$	$R_3$
0	0,60	0	0,70	0	0,80
	0,16		0,16	0,80	-0,80
	0,76	0,86	0,86		0
	0,17		-0,86		0,09
0,93	0,93		0		0,09
	-0,93		0,09		0,09
	0		0,09	0,18	0,18
	0,04		0,04		-0,18
	0,04	0,13	0,13		0
	0,03		-0,13		0,01
0,07	0,07		0		0,01
	-0,07		0,01		0,01
	0		0,01	0,02	0,02
	0		0		-0,02
	0	0,01	0,01		0
	0		-0,01		0
1,00	0	1,00	0	1,00	0

Начальные значения неизвестных  $x_i^{(0)}$  и невязок записаны в первой строке (в соответствующих столбцах) табл. 8. Максимальная невязка есть  $R_3 = 0,80$ . Для того чтобы обратить ее в нуль, изменим  $x_3^{(0)}$ , положив  $\delta x_3 = 0,80$ . Тогда  $R_2$  увеличится на  $b_{23} \delta x_3 = 0,2 \times 0,80 = 0,16$ , а  $R_1$  — на  $b_{13} \delta x_3 = 0,2 \cdot 0,80 = 0,16$ . Таким образом, новые невязки равны:  $R_1 = 0,60 + 0,16 = 0,76$ ,  $R_2 = 0,70 + 0,16 = 0,86$  и  $R_3 = 0,80 - 0,80 = 0$ . Наибольшая из новых невязок есть  $R_2 = 0,86$ . Увеличив  $x_2^{(0)}$  на  $\delta x_2 = 0,86$ , обратим эту невязку в нуль. На этом шаге  $\delta R_3 = b_{32} \cdot \delta x_2 = 0,1 \cdot 0,86 = 0,09$  и  $\delta R_1 = b_{12} \delta x_2 = 0,2 \times 0,86 = 0,17$ , и, таким образом,  $R_1 = 0,76 + 0,17 = 0,93$ ,  $R_2 = 0$ ,  $R_3 = 0 + 0,09 = 0,09$ . Обращение в нуль наибольшей из этих невязок, а именно  $R_1$ , достигается увеличением  $x_1^{(0)}$  на  $\delta x_1 = 0,93$ . Это

увеличение приводит к следующим изменениям невязок:  $\delta R_2 = b_{21} \delta x_1 = 0,1 \cdot 0,93 = 0,09$ ;  $\delta R_3 = b_{31} \delta x_1 = 0,1 \cdot 0,93 = 0,09$ . Процесс продолжается до тех пор, пока все невязки не обратятся в нуль с точностью до единицы последнего знака. После этого мы можем определить все  $x_j$ , просуммировав соответствующие столбцы:

$$x_1 = 0,93 + 0,07 = 1,00,$$

$$x_2 = 0,86 + 0,13 + 0,01 = 1,00,$$

$$x_3 = 0,80 + 0,18 + 0,02 = 1,00.$$

Результат можно (и нужно) проконтролировать подстановкой в исходные уравнения.

Практически изменения ( $\delta R_j$ ) невязок отдельно не выписываются, и схема приобретает тогда более компактную форму табл. 9 (в этой таблице для удобства все числа умножены на 100).

Таблица 9

$x_1$	$R_1$	$x_2$	$R_2$	$x_3$	$R_3$
0	60	0	70	0	80
	70	86	86	80	9
93	93		9	18	18
	7	13	13		7
7	7	1	7	2	2
100		100		100	

Чтобы показать еще некоторые особенности техники решения методом релаксации, мы рассмотрим следующую систему (в), подготовленную для релаксации:

$v_1$	$v_2$	$v_3$	$k$
-1	0,3951	0	0,2695
0,3556	-1	0,3556	0,4763
0	0,3232	-1	1,0717

(в)

Эта система связана с физической задачей, которая будет рассмотрена в § 3 гл. IV.

В первом приближении коэффициенты  $b_{ij}$  можно округлить до одного или до двух знаков, так как возникающая благодаря этому

погрешность исправляется в дальнейшем ходе процесса — для этого достаточно на некотором шаге вычислить невязки по истинным значениям коэффициентов. На следующих шагах тоже, конечно, следует пользоваться этими истинными значениями. Так, для того чтобы найти решение с точностью до одного процента, округлим коэффициенты системы (в) до двух знаков. Это приведет нас к следующей системе (г):

$v_1$	$v_2$	$v_3$	$k$	$B$
-1	0,40	0	0,27	-0,60
0,36	-1	0,36	0,48	-0,28
0	0,32	-1	1,07	-0,68

(г)

Отправляясь от начальных приближений

$$v_1^{(0)} = 0,25, \quad v_2^{(0)} = 0,50, \quad v_3^{(0)} = 0,75,$$

найдем соответствующие невязки:

$$R_1 = -0,25 + 0,40 \cdot 0,50 + 0,27 = 0,22,$$

$$R_2 = 0,36 \cdot 0,25 - 0,50 + 0,36 \cdot 0,75 + 0,48 = 0,34,$$

$$R_3 = 0,32 \cdot 0,50 - 0,75 + 1,07 = 0,48.$$

Система (г) решена в табл. 10. На каждом шаге приводилась к нулю наибольшая невязка.

Таблица 10

$v_1$	$R_1$	$v_2$	$R_2$	$v_3$	$R_3$
25	<del>22</del>	50	<del>34</del>	75	<del>48</del>
42	<del>42</del>	51	<del>51</del>	48	<del>18</del>
	<del>8</del>	15	<del>18</del>	21	<del>21</del>
9	<del>8</del>	8	<del>8</del>		<del>8</del>
1	<del>1</del>	3	<del>8</del>	4	<del>4</del>
		1	<del>1</del>		
77		128		148	

В табл. 11 получены два дополнительных знака  $v_j$ . Для этого невязки были вычислены по найденным ранее значениям  $v_j$  и

истинным коэффициентам ( $v$ ). При подсчете изменений невязок ( $\delta R_j$ ) использованы округленные коэффициенты ( $\gamma$ ). На каждом шаге уничтожалась наибольшая из невязок. Для удобства как невязки, так и неизвестные умножены на  $10^4$ .

Таблица 11

$u_1$	$R_1$	$u_2$	$R_2$	$u_3$	$R_3$
7790	<del>52</del>	12800	<del>-35</del>	14800	<del>53</del>
52			<del>-17</del>	53	
1	<del>X</del>	2	<del>X</del>	1	<del>X</del>
7753		12802		14854	

Во всех предыдущих примерах процесс релаксации проводился автоматически согласно правилу: на каждом шаге обратить в нуль наибольшую невязку предыдущего шага. Однако часто бывает более выгодно поступать иначе. Так, например, при „групповой релаксации“ все неизвестные (или группу их) увеличивают одновременно на одно и то же подходящим образом выбранное число  $\delta$ . Это приводит к увеличению невязок  $R_i$  на

$$\delta R_i = \left( -1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} \right) \delta = B_i \delta. \quad (10.3)$$

При „недостаточной (или избыточной) релаксации“ изменения неизвестных берутся столь малыми (или большими), чтобы невязки сохранили (или изменили) знаки. В табл. 12 система уравнений (в), в которой

$$B_1 = -1 + 0,40 = -0,60,$$

$$B_2 = 0,36 - 1,00 + 0,36 = -0,28,$$

$$B_3 = 0,32 - 1 = -0,68,$$

решена сначала с точностью до  $1\%$  посредством первоначального „группового“ изменения на  $+0,60$  и последующего применения „избыточной“ релаксации. Далее в таблице выписаны невязки, составленные по истинным значениям коэффициентов ( $v$ ), и найдены окончательные значения неизвестных.

Искусство, приобретаемое опытом, и некоторая физическая интуиция подскажут наиболее выгодные изменения неизвестных, и тогда процесс релаксации будет заканчиваться после небольшого числа шагов. В процессе решения не следует стремиться к тому, чтобы резко уменьшить одновременно все невязки. Значительно важнее угадать подходящие значения  $\delta x$ . Новички обычно стараются



обратить в нуль определенную невязку  $R_i$  и соответственно подбирают  $\delta x_i$ . Целесообразнее выбирать в круглых цифрах  $\delta x_i$  и затем вычислять получающиеся  $\delta R_i$ .

Таблица 12

$v_1$	$R_1$	$v_2$	$R_2$	$v_3$	$R_3$	Пояснения
25	22	50	34	75	48	$v_j^{(0)}$ и $R_i^{(0)}$ согласна (2)
60	-14	60	17	60	7	Групповое изменение $\delta = 60$
-7	-8	20	-8	15	13	Избыточная релаксация
	1		2	-2	-2	
78			-1	148		Корни с точностью до 1%
		130				
7800	31	13000	-200	14800	119	Невязки согласно (в) Простая релаксация
-49	-45	-200	28	55	55	
1	1	2	2	1	1	
7752	1	12802	0	14856	-1	Корни с точностью до 0,01% и контроль невязок Простая релаксация
1				-1		
7753		12802		14855		Окончательные значения корней

## Задачи

1. Вычислить методом Ньютона корни следующих уравнений (с указанным числом знаков).

(а)  $x^3 + 1,2x^2 - 4x - 4,8 = 0$  (2 знака);

(б)  $x^3 - 0,87x^2 - 15,651x + 23,701 = 0$  (3 знака);

(в)  $x^3 + 6,6x^2 - 29,05x + 22,64 = 0$  (3 знака).

Ответ: (а)  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -2$ ;  $x_3 = -1,2$ ;

(в)  $x_1 = 2,10$ ;  $x_2 = -9,80$ ;  $x_3 = 1,10$ .

2. Вычислить методом Ньютона корни следующих уравнений (с тремя знаками). В случае необходимости воспользоваться формулой (2.8).

(а)  $x^3 + 2,9x^2 + 14,89x + 6,85 = 0$ ;

(б)  $x^3 - 2,4x^2 - 1,4x - 6,8 = 0$ ;

(в)  $x^4 + 6,4x^3 + 24,04x^2 + 36,96x + 18,72 = 0$ ;

(г)  $x^4 - 2x^3 + 1,99x^2 - 2x + 0,99 = 0$ ;

(д)  $x^4 - x^3 - 0,44x^2 - 13,88x + 2,8 = 0$ .

Ответ: (б)  $x_1 = 3,40$ ;  $x_{2,3} = -0,500 \pm 1,323i$ ;

(г)  $x_1 = 1,100$ ;  $x_2 = 0,900$ ;  $x_{3,4} = \pm i$ .

3. Вычислить с четырьмя знаками корни следующих уравнений. Наибольший корень определять по схеме обратного деления с последующими линейными интерполяциями.

$$(a) \quad x^3 - 4,65x^2 - 49,92x - 76,67 = 0;$$

$$(б) \quad x^3 + 6,8x^2 - 62,49x + 63,468 = 0;$$

$$(в) \quad x^3 - 13,6x^2 - 57,4x - 228,8 = 0;$$

$$(г) \quad x^3 - 10,2x^2 - 51,8x - 71,00 = 0.$$

Ответ: (а)  $x_1 = 10,25$ ;  $x_2 = -3,40$ ;  $x_3 = -2,20$ ;

(в)  $x_1 = 17,6$ ;  $x_{2,3} = -2,00 \pm 3,00i$ .

4. Вычислить с тремя знаками корни следующего уравнения (два из этих корней близки друг к другу):

$$x^4 - 0,41x^3 + 1,632x^2 - 9,146x + 7,260 = 0.$$

Ответ:  $x_1 = 1,21$ ;  $x_2 = 1,20$ ;  $x_{3,4} = -1,00 \pm 2,00i$ .

5. Вычислить методом Фридмана корни следующего уравнения (с тремя знаками):

$$x^4 - 14x^3 + 69,09x^2 + 182,56x + 109 = 0.$$

Ответ:  $x_{1,2} = -1,00 \pm 0,30i$ ;  $x_{3,4} = 8,00 \pm 6,00i$ .

6. Найти с тремя знаками корни следующего уравнения:

$$x^5 - 20,2x^4 + 132,18x^3 - 60,592x^2 - 72,693x - 14,525 = 0.$$

Для определения комплексных корней воспользоваться методом Фридмана.

7. Вычислить методом Ньютона действительные корни следующего уравнения (с тремя знаками):

$$\cos x = x^2.$$

Ответ:  $x_{1,2} = \pm 0,824$ .

8. Вычислить методом Ньютона два наименьших положительных корня следующих уравнений (с тремя знаками):

$$(a) \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{th} x;$$

$$(б) \quad \cos x \cdot \operatorname{ch} x + 1 = 0;$$

$$(в) \quad \cos x \cdot \operatorname{ch} x = 1;$$

$$(г) \quad \operatorname{tg} x = x;$$

$$(д) \quad \operatorname{tg} x = -x;$$

$$(е) \quad \operatorname{tg} x = 2x;$$

$$(ж) \quad x \operatorname{tg} x = 1;$$

$$(з) \quad x \operatorname{tg} x = 2.$$

Ответ: (а)  $x_1 = 3,93$ ;  $x_2 = 7,07$ ; (в)  $x_1 = 4,73$ ;  $x_2 = 7,85$ ;

(д)  $x_1 = 2,03$ ;  $x_2 = 4,91$ ; (ж)  $x_1 = 0,860$ ;  $x_2 = 3,43$ .

9. Вычислить методом степенных рядов наименьший положительный корень следующего уравнения (с тремя знаками):

$$x \operatorname{tg} x = 1.$$

Ответ:  $x = 0,860$ .

10. Вычислить методом степенных рядов положительный корень следующего уравнения (с тремя знаками):

$$\cos x = x^3.$$

11. Вычислить методом Ньютона первые два нуля функции Бесселя первого порядка первого рода (с тремя знаками).

Указание. Воспользоваться таблицей бесселевых функций и соотношением

$$J_1'(x) = -\frac{1}{x} J_1(x) + J_0(x).$$

Ответ:  $x_1 = 3,83$ ;  $x_2 = 7,02$ .

12. Решить по схеме Гаусса (с тремя знаками) следующие системы уравнений:

(а)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
3,5	2,8	6,2	9,87
2,7	8,0	3,0	-6,17
-4,0	-3,6	-2,8	5,65

(б)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
2,1	-4,5	-2,0	19,07
3,0	2,5	4,3	3,21
-6,0	3,5	2,5	-18,25

(в)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$c$
2,0	-4	-3,25	1	4,84
3,0	-3	-4,30	8	8,89
1,0	-5	3,30	-20	-14,01
2,5	-4	2,00	-3	-20,29

(г)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$c$
3	-2	5,3	-2,1	1,0	28,3
1	4	-6,0	4,5	-6,0	-36,2
3	6	-7,3	-9,0	3,4	24,5
-2	-3	1,0	-4,0	6,0	16,2
1	-4	6,5	1,0	-3,0	4,3

Отвeт: (б)  $x_1 = 1,34$ ;  $x_2 = -4,76$ ;  $x_3 = 2,58$ ;

(г)  $x_1 = 2,06$ ;  $x_2 = 3,22$ ;  $x_3 = 4,03$ ;  $x_4 = -2,01$ ;  $x_5 = 3,00$ .

13. Следующие системы решить в первом приближении по схеме Гаусса на счетной линейке. После этого написать системы уравнений погрешностей (вычисления провести на машине или вручную) и определить дополнительные знаки, решив эти системы также по схеме Гаусса на счетной линейке.

(а)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
3,5	2,8	6,2	9,8999
2,7	8,0	3,0	-6,1744
-4,0	-3,6	-2,8	5,6512

(б)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$c$
2,0	-4,0	-3,25	1,0	4,8392
3,0	-3,0	-4,30	8,0	8,8581
1,0	-5,0	3,30	-20,0	-13,9212
2,5	-4,0	2,00	-3,0	-20,2815

Отвeт: (а)  $x_1 = -3,0347$ ;  $x_2 = -1,1904$ ;  $x_3 = 3,8475$ ,

14. Прodelать следующие матричные операции:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}; \quad (б) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(в) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(г) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}; \quad (д) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (ж) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(з) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (и) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отвeт: (a)  $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 11 & 3 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix};$  (г)  $\begin{bmatrix} 5 & 19 & 6 \\ 7 & 12 & -3 \\ 15 & 40 & 10 \end{bmatrix};$

(e)  $\begin{bmatrix} 18 & 5 & 6 & 4 \\ 28 & 17 & -10 & 3 \\ 11 & 11 & 5 & 2 \\ 10 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix};$  (з)  $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$

15. Решить (с тремя знаками) методом Холецкого следующие системы уравнений.

(a)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
2,5	-3,0	4,6	-1,05
-3,5	2,6	1,5	-14,46
-6,5	-3,5	7,3	-17,735

(б)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
-3,60	2,40	1,50	-1,359
1,40	-1,30	2,65	-3,725
4,26	-3,00	2,85	-3,623

(в) Система (в) задачи 12.

(г) Система (г) задачи 12.

(д)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$c$
2	-1	4	-3	1	11
-1	1	2	1	3	14
4	2	3	3	-1	4
-3	1	3	2	4	16
1	3	-1	4	4	18

Ответ: (а)  $x_1 = 1,24$ ;  $x_2 = -2,45$ ;  $x_3 = -2,50$ .

(в)  $x_1 = 2,34$ ;  $x_2 = 4,51$ ;  $x_3 = -6,00$ ;  $x_4 = -1,30$ ;

(д)  $x_1 = 1,00$ ;  $x_2 = 2,00$ ;  $x_3 = 1,00$ ;  $x_4 = -1,00$ ;

$x_5 = 4,00$ .

16. Решить (с тремя знаками) методом итераций следующие системы:

(а)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
-6	1	1	-1133
1	-6	1	-3200
1	1	-6	-4200

(б)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
-1	0,4	0,5	-1,41
0	-1	0,3	2,81
0,2	0,3	-1	-4,48

(В)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$c$
10	8	6	0	16,4
0	10	8	4	-3,8
2	0	10	2	36,9
1	0	6	10	30,9

(Г)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$c$
10	1	1	1	1	15
2	10	2	1	1	17
2	1	10	1	2	18
1	2	2	10	2	19
1	1	1	2	10	25

(Д)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$c$
8,0	-2,4	-1,6	2,0	0	12,00
0	10,0	0	-4,0	-2,3	21,06
0	3,2	8,0	1,6	2,4	-23,28
-3,2	0	4,8	10,0	2,1	-14,06
-1,6	0	1,6	2,4	8,0	-22,32

(e)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$c$
4,00	0,80	0	1,20	0	5,60
0	8,00	1,60	1,60	2,40	-13,472
2,40	0,80	8,00	0	1,60	30,16
0	1,80	0	6,00	0,60	6,54
2,20	0	2,30	1,50	10,00	-15,631

Ответ: (a)  $x_1 = 467$ ;  $x_2 = 762$ ;  $x_3 = 905$ ;

(b)  $x_1 = 2,40$ ;  $x_2 = -3,20$ ;  $x_3 = 3,00$ ;  $x_4 = 1,05$ .

(д)  $x_1 = 1,20$ ;  $x_2 = 2,00$ ;  $x_3 = -3,25$ ;  $x_4 = 1,00$ ;  $x_5 = -2,20$ .

17. Методом релаксации решить (с тремя знаками) следующие системы:

(a) Система (б) задачи 16.

(б)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
-6	2	4	0
1	1	-5	-350
1	-6	2	-700

(в) Система (в) задачи 16.

(г) Система (д) задачи 16.

(д) Система (е) задачи 16.

Ответ: (б)  $x_1 = 155$ ;  $x_2 = 189$ ;  $x_3 = 139$ ; (д)  $x_1 = 1,20$ ;

$x_2 = -2,00$ ;  $x_3 = 4,23$ ;  $x_4 = 2,00$ ;  $x_5 = -3,10$ .



18. Решить методом релаксации следующие системы:

(a)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
-1	0,875	0,121	1,132
0,444	-1	0,222	-1,266
0,092	0,545	-1	-2,256

(Округлить до одного десятичного знака)

(б)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c$
10,22	1,25	3,12	21,047
1,25	10,45	4,15	62,440
3,12	4,15	10,62	109,726

(Округлить до двух значащих цифр)

Первое приближение получить решением систем с указанными округлениями коэффициентов. Ответ дать с тремя знаками.

Ответ: (а)  $x_1 = 2,10$ ;  $x_2 = 3,12$ ;  $x_3 = 4,15$ .

## Г Л А В А II

### КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

#### § 1. ВВЕДЕНИЕ

Если мы не можем проинтегрировать дифференциальное уравнение, к которому сведена техническая задача, в замкнутом виде, то следует воспользоваться приближенными методами. Таковыми являются, например, методы, основанные на разложениях в ряды. В других случаях это могут быть методы чисто вычислительного характера, позволяющие найти численные значения неизвестной функции в некоторых фиксированных точках области ее определения. Такими методами могут решаться задачи с различными начальными и краевыми условиями как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных. Полученные численные решения хотя и не позволяют обычно установить общие физические законы, но тем не менее дают возможность выявить зависимость искомых функций от различных параметров задачи, в особенности, если уравнения записаны в безразмерной форме.

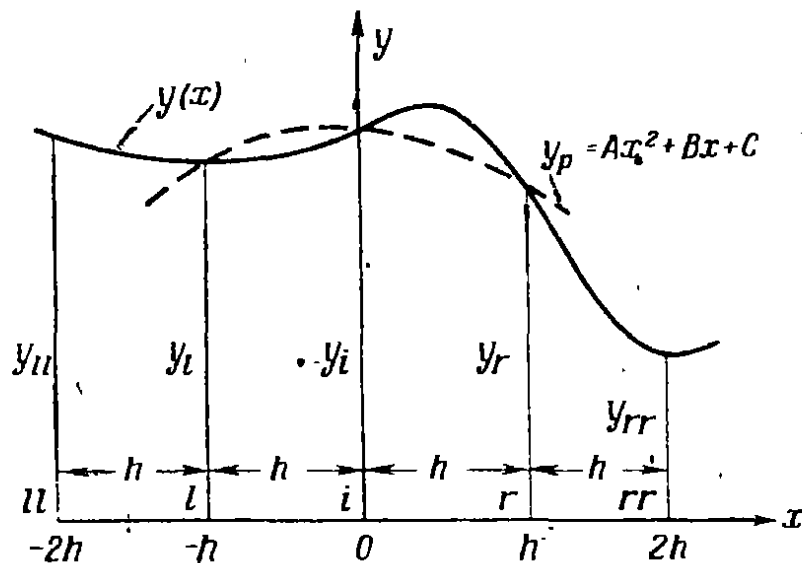
Численные методы интегрирования получили особенно большое распространение в последние годы. Это обусловлено, с одной стороны, тем, что современные технические проблемы обычно приводят к сложным дифференциальным уравнениям, которые редко удается проинтегрировать в замкнутом виде, а с другой стороны, тем, что вычислительные машины стали более доступными. Численное интегрирование имеет еще одно преимущество: основную часть работы вычислитель проделывает без применения высшей математики и физики.

При численном интегрировании неизвестную функцию определяют в некоторых фиксированных точках, которые мы будем называть *узлами*. Узлы расположены на оси  $x$  в случае обыкновенных дифференциальных уравнений и на плоскости  $(x, y)$  в случае уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Для того чтобы определить *узловые значения* неизвестной функции  $f$ , приходится аппроксимировать ее производные, входящие в дифференциальное уравнение. Эти аппроксимации можно провести, например, разложением  $f$  в степенной ряд. Другой путь — замена производных функции  $f$  соответствующими производными многочлена, совпадающего с  $f$  в некоторых узловых точках. Вопросы аппроксимации производных рассматриваются в следующих параграфах.

## § 2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Пусть функция  $y = f(x)$  задана графиком или таблицей значений в некоторых узловых точках. Наиболее простым методом приближенного вычисления ее производных является замена  $y$  многочленом, принимающим те же узловые значения, что и  $y$ . Производные этого многочлена и выбираются в качестве приближенных значений соответствующих производных функции  $y$ .

В качестве примера найдем вторую производную  $y''$  функции  $y$ , заданной в трех точках  $l, i, r$  оси  $x$ ; эти точки будем предполагать равноотстоящими, с расстоянием  $h$  между двумя соседними (фиг. 5)<sup>1)</sup>.



Фиг. 5. Интерполяционный многочлен.

Пусть  $y_l, y_i, y_r$  — значения функции  $y$  соответственно в точках  $l, i, r$ . Рассмотрим многочлен второй степени

$$y_p = Ax^2 + Bx + C, \quad (a)$$

значения которого в точках  $l, i, r$  совпадают со значениями  $y$  в этих точках. Для простоты предположим (это не нарушит общности), что точка  $i$  совпадает с началом координат. Тогда

$$y(-h) = y_l = Ah^2 - Bh + C,$$

$$y(0) = y_i = C,$$

$$y(h) = y_r = Ah^2 + Bh + C,$$

откуда

$$y_l - 2y_i + y_r = 2Ah^2.$$

<sup>1)</sup> Через  $l$  обозначен тот узел, в котором отыскивается значение производной; через  $l$  и  $r$  обозначены узлы, лежащие соответственно слева и справа от  $l$ .

Так как вторая производная многочлена (а) равна  $2A$ , то  $y_i''$  (значение второй производной  $y$  в точке  $i$ ) аппроксимируется выражением

$$y_i'' = \frac{1}{h^2} (y_l - 2y_i + y_r). \quad (2.1)$$

Воспользовавшись интерполяционными многочленами высших степеней, можно аналогичным образом получить приближенные значения производных высших порядков. Построим, например, кубический многочлен

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad (6)$$

значения которого совпадают со значениями  $y$  в точках  $l$ ,  $i$ ,  $r$  и, кроме того, в точке  $rr$  (см. фиг. 5). Выбирая  $i$  в качестве начала координат, получим:

$$\begin{cases} y(-h) = y_l = -Ah^3 + Bh^2 - Ch + D, \\ y(0) = y_i = D, \\ y(h) = y_r = Ah^3 + Bh^2 + Ch + D, \\ y(2h) = y_{rr} = 8Ah^3 + 4Bh^2 + 2Ch + D. \end{cases}$$

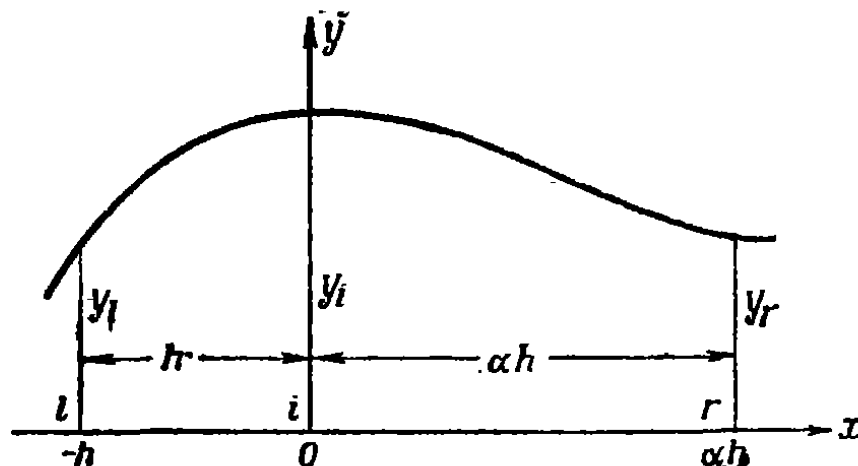
Исключение из этих соотношений величин  $B$ ,  $C$ ,  $D$  приводит к следующей формуле:

$$6Ah^3 = -y_l + 3y_i - 3y_r + y_{rr}.$$

Так как третья производная многочлена (б) равна  $6A$ , то для  $y_i'''$  получается следующее приближенное значение <sup>1)</sup>:

$$y_i''' = \frac{1}{h^3} (-y_l + 3y_i - 3y_r + y_{rr}). \quad (2.2)$$

Аналогичные формулы можно получить и для случая неравноотстоящих узлов. Для примера вычислим в точке  $i$  вторую производную функции  $y$ , известной в трех точках, указанных на фиг. 6.



Фиг. 6. Неравноотстоящие узловые точки.

<sup>1)</sup> Большое количество аналогичных формул можно найти в книге Л. Коллатца „Численные методы решения дифференциальных уравнений“, М., 1953. — Прим. перев.

$l$  находится на расстоянии  $h$  от  $l$ , а  $r$  — на расстоянии  $\alpha h$ . Значения квадратного трехчлена (а) в этих точках равны

$$\begin{aligned}y(-h) &= y_l = Ah^2 - Bh + C, \\y(0) &= y_i = C, \\y(\alpha h) &= y_r = \alpha^2 Ah^2 + \alpha Bh + C.\end{aligned}$$

Исключив константы  $B$  и  $C$ , получаем следующее приближенное выражение  $y_i''$  через значения  $y_l$ ,  $y_i$ ,  $y_r$ :

$$y_i'' = \frac{1}{h^2} \frac{2}{\alpha(\alpha+1)} [\alpha y_l - (1+\alpha) y_i + y_r]. \quad (2.3)$$

В случае  $\alpha = 1$  последнее равенство совпадает с (2.1).

### § 3. РАЗЛОЖЕНИЯ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Очевидно, что погрешность, с которой вычисляются производные по формулам (2.1), (2.2), (2.3), стремится к нулю вместе с  $h$ . Для того чтобы выяснить, как именно величина этой погрешности зависит от  $h$ , удобно вывести эти формулы посредством разложения  $y$  в ряд Тейлора.

Ряд Тейлора для  $y(x+h)$  в окрестности точки  $x$  имеет следующий вид <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned}y(x+h) &= y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \\ &+ \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x),\end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $y^{(n)}(x)$  обозначает  $n$ -ю производную функции  $y(x)$ , а  $0! = 1$ .

Заменив  $h$  в равенстве (3.1) последовательно (см. фиг. 6) на  $\alpha h$  и на  $-h$ , найдем следующие выражения для значений  $y$  в точках  $x + \alpha h$  и  $x - h$ :

$$\begin{aligned}y_r &= y_i + \alpha h y_i' + \frac{\alpha^2 h^2}{2} y_i'' + \frac{\alpha^3 h^3}{6} y_i''' + \dots, \\ y_l &= y_i - h y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' - \frac{h^3}{6} y_i''' + \dots.\end{aligned} \quad (3.2)$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем

$$y_r - y_l = (\alpha + 1) h y_i' + (\alpha^2 - 1) \frac{h^2}{2} y_i'' + (\alpha^3 + 1) \frac{h^3}{6} y_i''' + \dots;$$

<sup>1)</sup> Хинчин, Краткий курс математического анализа, М.—Л., 1953, стр. 154—158 и 342—349. —Прим. перев.

из последнего соотношения находим значение  $y'_i$ :

$$y'_i = \frac{1}{(\alpha+1)h} (y_r - y_l) + (1-\alpha)\frac{h}{2} y''_i - \frac{1+\alpha^3 h^2}{1+\alpha} \frac{1}{6} y'''_i + \dots$$

Этот результат дает не только приближенное значение производной

$$y'_i = \frac{1}{(\alpha+1)h} (y_r - y_l), \quad (3.3)$$

но и значение погрешности, допускаемой при таком приближении:

$$(1-\alpha)\frac{h}{2} y''_i - \frac{1+\alpha^3 h^2}{1+\alpha} \frac{1}{6} y'''_i + \dots$$

Мы видим, таким образом, что погрешность стремится к нулю как  $h$ , если  $\alpha \neq 1$ , и как  $h^2$ , если  $\alpha = 1$  (т. е. если точки  $l, i, r$  — равноотстоящие).

Исключив из двух уравнений (3.2) величину  $y''_i$ , получим другое выражение для приближенного значения  $y'_i$ :

$$y'_i = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)h} [y_r - (1-\alpha^2)y_i - \alpha^2 y_l]. \quad (3.4)$$

Погрешность при вычислении  $y'_i$  по этой формуле стремится к нулю как  $h^2$  при любом  $\alpha$ . Заметим, что если  $\alpha = 1$ , то (3.4) совпадает с (3.3).

Исключив из двух уравнений (3.2) величину  $y'_i$ , получим следующее выражение для  $y''_i$ :

$$y''_i = \frac{1}{h^2} \frac{2}{\alpha(\alpha+1)} [\alpha y_l - (1+\alpha)y_i + y_r] + (1-\alpha)\frac{h}{3} y'''_i - \frac{1+\alpha^3 h^2}{1+\alpha} \frac{1}{12} y^{IV}_i + \dots \quad (3.5)$$

Это равенство показывает, что при вычислении  $y''_i$  по формуле (2.3) погрешность стремится к нулю как  $h$ , если  $\alpha \neq 1$ , и как  $h^2$ , если  $\alpha = 1$ .

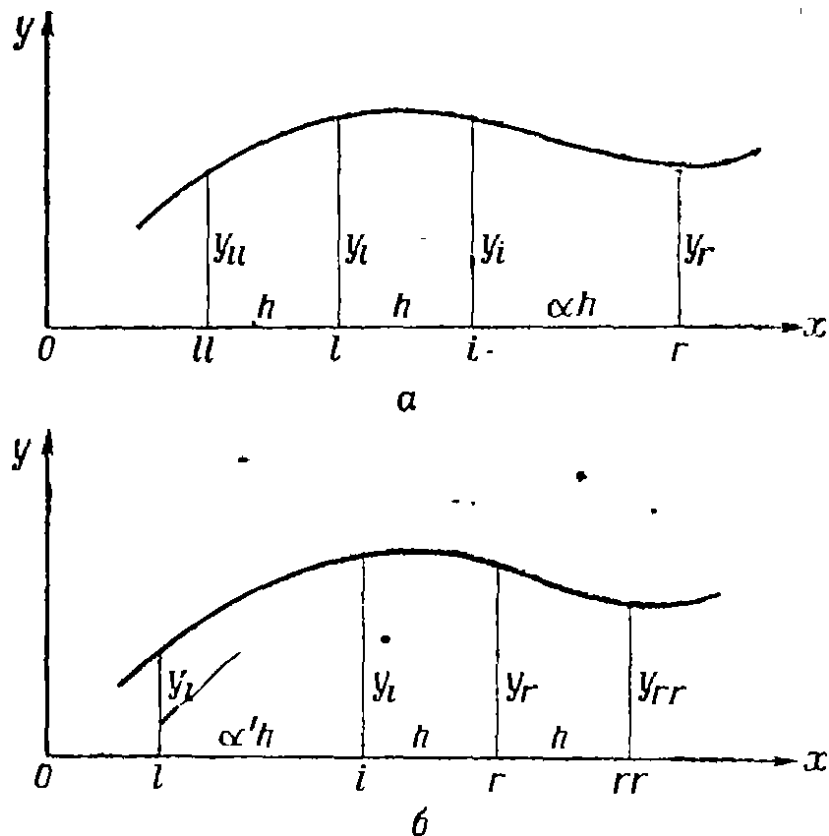
Описанным методом можно получить разнообразные формулы для приближенного вычисления производных с одновременной оценкой погрешностей. Так, например, читатель может без труда доказать, что приближенное значение  $y''_i$ , вычисленное по точкам, отмеченным на фиг. 7, а, выражается следующей формулой:

$$y''_i = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)h^2} [\alpha(\alpha^2-1)y_{II} - 2(\alpha^3-4\alpha)y_l + (\alpha^3-7\alpha-6)y_i + 6y_r]. \quad (3.6)$$

Допускаемая при этом погрешность стремится к нулю как  $h^2$ . Соответствующая формула (с погрешностью того же порядка) для точек фиг. 7,б имеет вид:

$$y_i'' = \frac{1}{\alpha'(\alpha'+1)(\alpha'+2)h^2} [6y_l + (\alpha'^3 - 7\alpha' - 6)y_i - 2(\alpha'^3 - 4\alpha')y_r + \alpha'(\alpha'^2 - 1)y_{rr}]. \quad (3.7)$$

Если узловые точки являются *равноотстоящими*, то можно воспользоваться техникой разложения в степенные ряды в символической форме (разложение операторов в степенные ряды). В сочетании с весьма



Фиг. 7. Неравноотстоящие узловые точки.

важным для численных методов понятием разности это дает возможность экономно получить приближенные выражения для производных и соответствующих погрешностей. Этим вопросам посвящены следующие параграфы.

### § 4. ЛЕВЫЕ РАЗНОСТИ

Рассмотрим значения

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, y_l, y_i, y_r, y_{rr}, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$$

функции  $y(x)$  в узлах сетки с постоянным шагом, расположенных в интервале определения этой функции. Шаг сетки (т. е. расстояние между двумя соседними узлами) обозначим через  $h$ . *Первой левой*

разностью (или первой разностью, взятой назад) в точке  $i$  мы назовем разность <sup>1)</sup>

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}. \quad (4.1)$$

Вторая левая разность  $y$  в точке  $i$  определяется как разность первых левых разностей:

$$\nabla(\nabla y_i) \equiv \nabla^2 y_i = (y_i - y_{i-1}) - (y_{i-1} - y_{i-2}) = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}. \quad (4.2)$$

Вообще,  $n$ -я левая разность есть, по определению, разность  $(n - 1)$ -х левых разностей:

$$\nabla^n y_i \equiv \nabla(\nabla^{n-1} y_i).$$

Легко проверить, что коэффициенты, с которыми узловые значения функции  $y$  входят в выражение для  $n$ -й разности, совпадают с коэффициентами разложения бинома  $(a - b)^n$ . Так, например:

$$\nabla^3 y_i = y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}; \quad (4.3)$$

$$\nabla^4 y_i = y_i - 4y_{i-1} + 6y_{i-2} - 4y_{i-3} + y_{i-4}. \quad (4.4)$$

Левые разности удобно записывать в форме следующей таблицы:

Таблица 13

Левые разности.

$i$	$y_i$	$\nabla y_i$	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$	$\nabla^5 y_i$
0	$y_0$					
1	$y_1$	$\nabla y_1$				
2	$y_2$	$\nabla y_2$	$\nabla^2 y_2$			
3	$y_3$	$\nabla y_3$	$\nabla^2 y_3$	$\nabla^3 y_3$		
4	$y_4$	$\nabla y_4$	$\nabla^2 y_4$	$\nabla^3 y_4$	$\nabla^4 y_4$	
5	$y_5$	$\nabla y_5$	$\nabla^2 y_5$	$\nabla^3 y_5$	$\nabla^4 y_5$	$\nabla^5 y_5$

Составление таких таблиц — один из простейших способов контроля правильности вычисленных значений функции. Например, рассмотрим

<sup>1)</sup> Обозначение  $\nabla$  („набла“) принимается для левых разностей; правые разности обозначаются буквой  $\Delta$  (греческая „дельта“ большая).



Таблица 14

$x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$e^x$	1,00000	1,10517	1,22140	1,34986	1,57182	1,64872	1,82212	2,01375
$\nabla e^x$		0,10517	0,11623	0,12846	0,22196	0,07690	0,17340	0,19163
$\nabla^2 e^x$			0,01106	0,01223				0,01823

табл. 14 значений функции  $e^x$  и их первых разностей; скачок  $\nabla e^x$  в точках  $x = 0,4$  и  $x = 0,5$  указывает на сомнительность значения  $e^x$  в точке  $x = 0,4$ . Для исправления этого значения вычислим вторую разность  $e^x$  при  $x = 0,3$  и  $x = 0,7$ ; предполагая  $\nabla^2 e^x$  линейной между этими двумя точками, найдем:

$$\nabla^2 e^{0,4} = 0,01373; \quad \nabla^2 e^{0,5} = 0,01523; \quad \nabla^2 e^{0,6} = 0,01673.$$

Пользуясь найденными значениями, исправим  $\nabla e^{0,4}$  и  $\nabla e^{0,5}$ :

$$\nabla e^{0,4} = \nabla e^{0,3} + \nabla^2 e^{0,4} = 0,14219;$$

$$\nabla e^{0,5} = \nabla e^{0,4} + \nabla^2 e^{0,5} = 0,15742.$$

Теперь можно определить два приближения для  $e^{0,4}$ :

$$e^{0,4} = e^{0,3} + \nabla e^{0,4} = 1,49205; \quad e^{0,4} = e^{0,5} - \nabla e^{0,5} = 1,49130.$$

Среднее арифметическое этих двух приближений, а именно 1,49168, отличается от истинного значения  $e^{0,4} = 1,49182$  лишь на 14 единиц последнего знака.

Хорошо известно<sup>1)</sup>, что оператор  $D = d/dx$  подчиняется основным алгебраическим законам. Поэтому его можно рассматривать как символическое число. А так как для оператора  $\nabla$  верны равенства

$$\nabla (y_i + y_j) = \nabla y_i + \nabla y_j = \nabla y_j + \nabla y_i,$$

$$\nabla (c y_i) = c \nabla y_i,$$

$$\nabla^m (\nabla^n y_i) = \nabla^{m+n} y_i,$$

то сказанное относится и к нему. Мы воспользуемся этими свойствами для того, чтобы разложить оператор  $D$  по степеням оператора  $\nabla$  и, наоборот,  $\nabla$  по степеням  $D$ .

<sup>1)</sup> См., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 2, М.—Л., 1953, стр. 116—119. — Прим. перев.

Для этой цели рассмотрим разложение функции  $y(x+h)$  в степенной ряд в окрестности точки  $x$ :

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \dots \quad (a)$$

Если записывать производную символом  $D$ , то предыдущее равенство примет следующий вид<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + \frac{h}{1!} D y(x) + \frac{h^2}{2!} D^2 y(x) + \frac{h^3}{3!} D^3 y(x) + \dots = \\ &= \left( 1 + \frac{h}{1!} D + \frac{h^2}{2!} D^2 + \frac{h^3}{3!} D^3 + \dots \right) y(x). \end{aligned} \quad (б)$$

Так как функция  $e^x$  разлагается в степенной ряд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

то оператор, стоящий в правой части равенства (б), можно записать в символической форме:

$$1 + \frac{hD}{1!} + \frac{h^2 D^2}{2!} + \frac{h^3 D^3}{3!} + \dots = e^{hD}. \quad (4.5)$$

Теперь равенство (б) принимает следующий вид:

$$y(x+h) = e^{hD} y(x). \quad (4.6)$$

Полагая  $x = x_i$  и обозначая, как и ранее,  $y(x_i)$  через  $y_i$ , а  $y(x_i+h)$  через  $y_r$ , получим

$$y_r = e^{hD} y_i. \quad (4.7)$$

Заменим в (4.6)  $h$  на  $-h$ :

$$y(x-h) = e^{-hD} y(x). \quad (4.8)$$

Полагая в этом равенстве  $y(x_i) = y_i$ ,  $y(x_i-h) = y_l$ , запишем его в следующем виде:

$$y_l = e^{-hD} y_i. \quad (4.9)$$

Первую левую разность  $\nabla y_i$ , определяемую соотношением (4.1), запишем, согласно (4.9), в виде

$$\nabla y_i = y_i - y_l = (1 - e^{-hD}) y_i, \quad (4.10)$$

<sup>1)</sup> Все выведенные в дальнейшем операторным методом формулы являются точными для многочленов произвольной степени. Если считать, что все операторы применяются только к многочленам, то бесконечные ряды будут обрываться на некотором члене, так что вопрос о сходимости этих рядов не возникает. — *Прим. ред.*

или, в силу равенства (4.5), в котором следует заменить  $h$  на  $-h$ . так:

$$\begin{aligned} \nabla y_i &= \left[ \frac{hD}{1!} - \frac{h^2 D^2}{2!} + \frac{h^3 D^3}{3!} - \frac{h^4 D^4}{4!} + \dots \right] y_i = \\ &= \left[ 1 - \frac{hD}{2!} + \frac{h^2 D^2}{3!} - \frac{h^3 D^3}{4!} + \dots \right] hD y_i. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Это и есть разложение оператора  $\nabla$  по степеням  $D$ . Зная функцию  $y$  и все ее производные в точке  $x_i$ , мы можем, согласно равенству (4.11), вычислить первую левую разность  $y_i$ . Для того чтобы получить аналогичные разложения для второй, третьей и т. д. разностей, запишем соотношение (4.10) в операторной форме:

$$\nabla = 1 - e^{-hD}. \quad (4.12)$$

Возведя последнее равенство в квадрат и воспользовавшись равенством (4.5) (в котором следует заменить  $h$  на  $-h$ ), мы получим разложение для второй разности  $\nabla^2$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= (1 - e^{-hD})^2 = 1 + e^{-2hD} - 2e^{-hD} = \\ &= 1 + \left( 1 - \frac{2hD}{1!} + \frac{4h^2 D^2}{2!} - \frac{8h^3 D^3}{3!} + \frac{16h^4 D^4}{4!} - \dots \right) - \\ &\quad - 2 \left( 1 - \frac{hD}{1!} + \frac{h^2 D^2}{2!} - \frac{h^3 D^3}{3!} + \frac{h^4 D^4}{4!} - \dots \right), \end{aligned}$$

или

$$\nabla^2 = h^2 D^2 - h^3 D^3 + \frac{7}{12} h^4 D^4 - \dots \quad (4.13)$$

Аналогично, возведя (4.12) в куб или умножив (4.12) на (4.13), найдем разложение  $\nabla^3$ :

$$\nabla^3 = h^3 D^3 - \frac{3}{2} h^4 D^4 + \frac{1}{4} h^5 D^5 - \dots \quad (4.14)$$

Чтобы получить разложение  $\nabla^n y_i$  в ряд по производным  $y$  в точке  $i$ , нужно возвести (4.12) в  $n$ -ю степень.

Теперь мы решим обратную задачу, а именно найдем разложение  $n$ -й производной  $y$  в точке  $i$  в ряд по левым разностям (т.е. разложение  $D^n$  по степеням оператора  $\nabla$ ). Для этого разрешим (4.12) относительно  $e^{-hD}$ :

$$e^{-hD} = 1 - \nabla, \quad (4.15)$$

и прологарифмируем полученное равенство<sup>1)</sup>:

$$\ln e^{-hD} = -hD = \ln(1 - \nabla) = - \left( \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots \right).$$

<sup>1)</sup> Как известно,

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \dots$$

Итак, первая производная  $y$  разлагается в следующий ряд по левым разностям:

$$hD = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots \quad (4.16)$$

Возводя равенство (4.16) в квадрат, куб и т. д., мы получим аналогичные разложения для высших производных:

$$\begin{aligned} h^2 D^2 &= \nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12} \nabla^4 + \frac{5}{6} \nabla^5 + \dots \\ h^3 D^3 &= \nabla^3 + \frac{3}{2} \nabla^4 + \frac{7}{4} \nabla^5 + \dots \\ h^4 D^4 &= \nabla^4 + 2\nabla^5 + \frac{17}{6} \nabla^6 + \dots \\ h^5 D^5 &= \nabla^5 + \frac{5}{2} \nabla^6 + \frac{25}{6} \nabla^7 + \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

Из равенств (4.11) — (4.14), (4.16) и (4.17) можно получить простые формулы для *одностороннего численного дифференцирования* с одновременной оценкой погрешности этих формул.

Так, например, разрешим (4.11), (4.13) и (4.14) относительно  $D$ ,  $D^2$  и  $D^3$  соответственно:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\nabla}{h} + \frac{hD^2}{2} - \frac{h^2 D^3}{6} + \frac{h^3 D^4}{24} - \dots, \\ D^2 &= \frac{\nabla^2}{h^2} + hD^3 - \frac{7h^2 D^4}{12} + \dots, \\ D^3 &= \frac{\nabla^3}{h^3} + \frac{3hD^4}{2} - \frac{h^2 D^5}{4} + \dots \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ограничиваясь в каждом из этих равенств первыми слагаемыми правых частей, получим следующие выражения для производных:

$$\begin{aligned} Dy_i &= \frac{1}{h} (y_i - y_l) + O(h), \\ D^2 y_i &= \frac{1}{h^2} (y_i - 2y_l + y_u) + O(h), \\ D^3 y_i &= \frac{1}{h^3} (y_i - 3y_l + 3y_u - y_{uu}) + O(h). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Здесь  $O(h)$ , как обычно, означает величину порядка  $h$ .)

Вообще, можно доказать, что  $n$ -я производная отличается от первого члена ее разложения по левым разностям на величину порядка  $h$ .

Для того чтобы получить формулы более высокого порядка точности (а именно с погрешностью порядка  $h^2$ ), следует учесть не только первые, но и вторые члены разложения.

Так, исключим  $h^2D^2$  из равенств (4.11) и (4.13):

$$\nabla + \frac{\nabla^2}{2} = hD + \frac{1}{3}h^3D^3 + \dots,$$

или, в силу (4.1) и (4.2),

$$Dy_i = \frac{1}{2h}(3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}) + O(h^2). \quad (4.20)$$

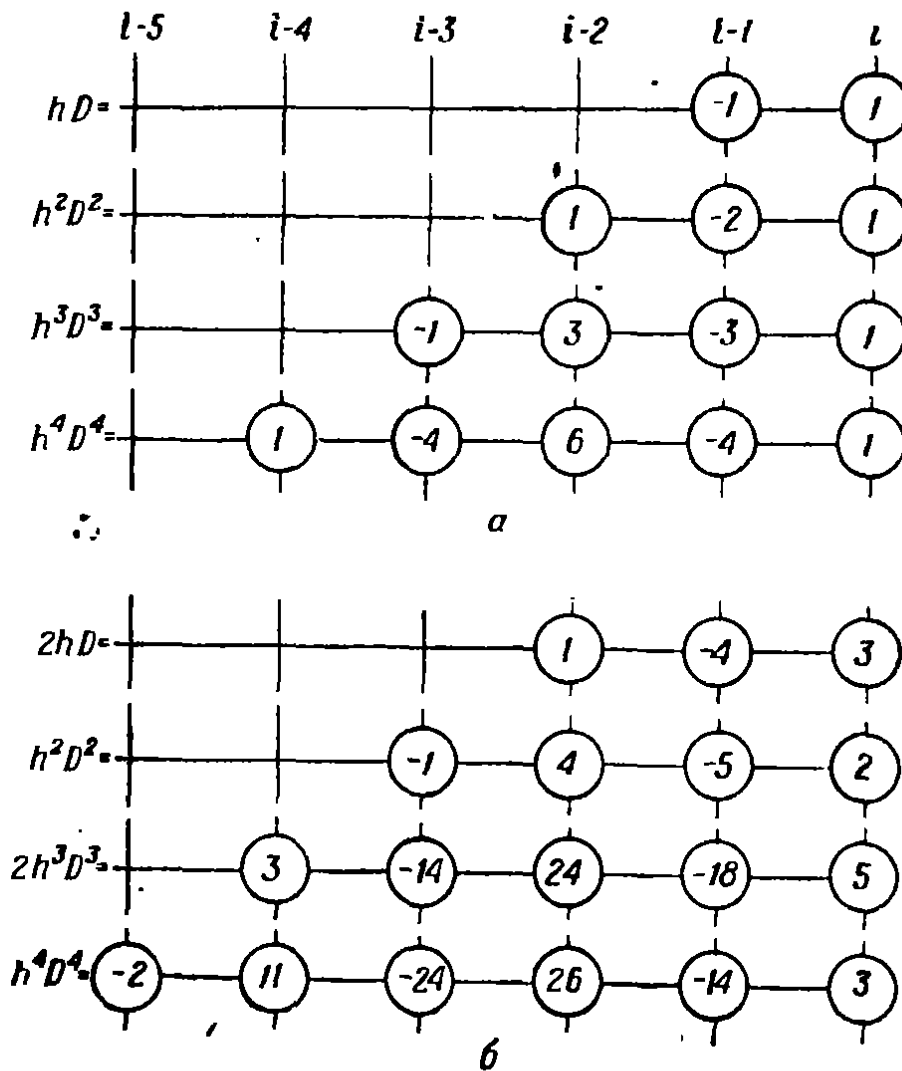
Аналогично, складывая (4.13) и (4.14), имеем

$$\nabla^2 + \nabla^3 = h^2D^2 - \frac{11}{12}h^4D^4 + \dots,$$

или, в силу (4.2) и (4.3),

$$D^2y_i = \frac{1}{h^2}(2y_i - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3}) + O(h^2). \quad (4.21)$$

Вообще, учитывая первые  $m$  членов разложения, получим формулы с погрешностью порядка  $h^m$ .



Фиг. 8. Левые разностные операторы.

На фиг. 8 указаны коэффициенты, с которыми значения функции в узловых точках входят в формулы вычисления производных по левым разностям. При вычислениях производных по первой группе формул погрешность есть  $O(h)$ , при вычислениях по второй —  $O(h^2)$ .

### § 5. ПРАВЫЕ РАЗНОСТИ

Если левые разности функции в точке  $i$  можно определить по ее значениям в точках, лежащих левее  $i$ , то *правые разности* определяются по значениям функции в точках, лежащих правее  $i$  (и в том и в другом случае  $y_i$  нужно знать).

Первой правой разностью (или первой разностью, взятой вперед) в точке  $i$  мы назовем разность

$$\Delta y_i \equiv y_r - y_i. \quad (5.1)$$

В силу (4.7), имеет место следующая символическая формула:

$$\Delta = e^{hD} - 1. \quad (5.2)$$

Вторая, третья и т. д. правые разности определяются равенствами

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_i &= y_{rr} - 2y_r + y_i, \\ \Delta^3 y_i &= y_{rrr} - 3y_{rr} + 3y_r - y_i \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Коэффициенты, с которыми узловые значения функции  $y$  входят в выражение для  $n$ -й разности, совпадают с коэффициентами разложения бинома  $(a - b)^n$ . Правые разности удобно записывать в форме следующей таблицы:

Таблица 15

Правые разности

$i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
1	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
2	$y_2$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
3	$y_3$	$\Delta y_3$	$\Delta^2 y_3$			
4	$y_4$	$\Delta y_4$				
5	$y_5$					

Для того чтобы найти разложение производной в ряд по правым разностям, разрешим уравнение (5.2) относительно  $e^{hD}$  и прологарифмируем полученное соотношение; при этом получим<sup>1)</sup>:

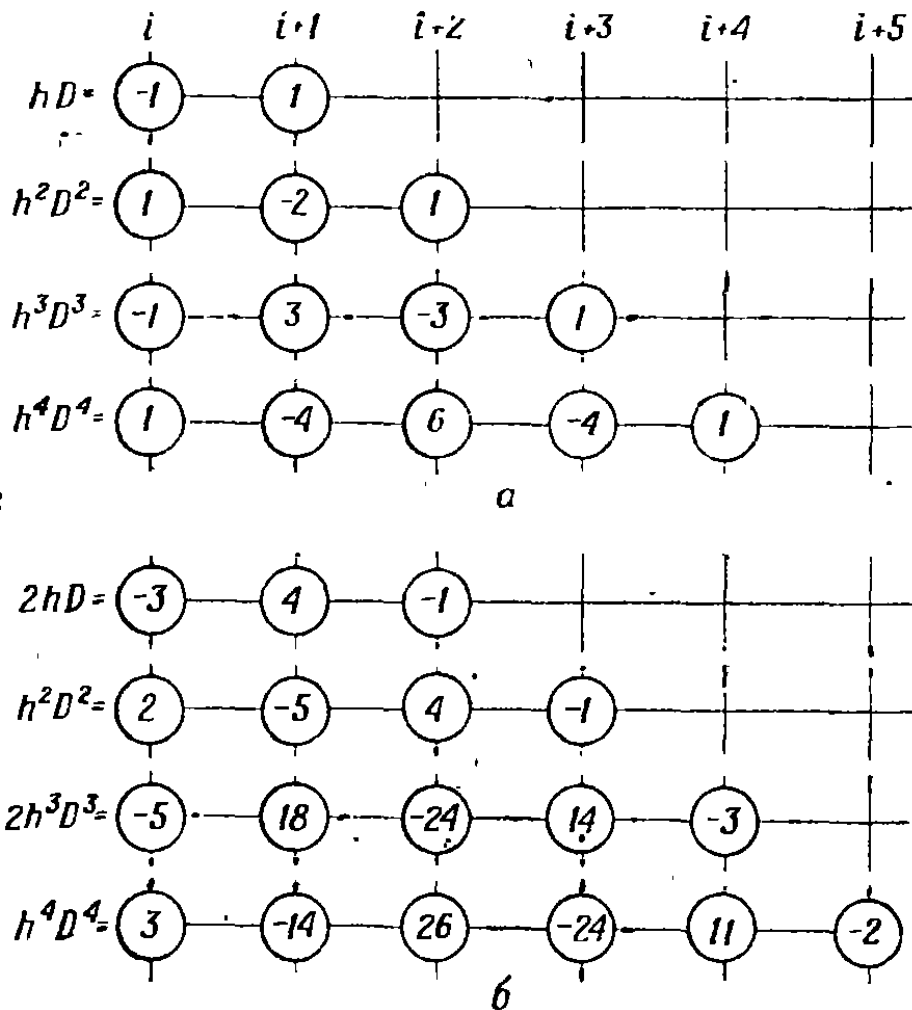
$$hD = \ln(1 + \Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots \quad (5.4)$$

Возводя полученное равенство в квадрат, куб и т. д., последовательно находим:

$$\begin{aligned} h^2 D^2 &= \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12} \Delta^4 - \frac{5}{6} \Delta^5 + \dots, \\ h^3 D^3 &= \Delta^3 - \frac{3}{2} \Delta^4 + \frac{7}{4} \Delta^5 - \dots, \\ h^4 D^4 &= \Delta^4 - 2\Delta^5 + \frac{17}{6} \Delta^6 - \dots, \\ h^5 D^5 &= \Delta^5 - \frac{5}{2} \Delta^6 + \frac{25}{6} \Delta^7 - \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

С другой стороны, разложение правой части равенства (5.2) по степеням  $hD$  дает:

$$\Delta = hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \frac{h^3 D^3}{3!} + \frac{h^4 D^4}{4!} + \dots \quad (5.6)$$



Фиг. 9. Правые разностные операторы.

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 59. — Прим. перев.

Для того чтобы получить разложения операторов  $\Delta^2$ ,  $\Delta^3$ , ... в ряды по производным, достаточно возвести последнее соотношение в квадрат, куб и т. д.:

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= h^2 D^2 + h^3 D^3 + \frac{7}{12} h^4 D^4 + \dots, \\ \Delta^3 &= h^3 D^3 + \frac{3}{2} h^4 D^4 + \frac{5}{4} h^5 D^5 + \dots, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}\tag{5.7}$$

Можно доказать, что, ограничиваясь в каждом из равенств (5.4) или (5.5) первыми  $m$  слагаемыми правой части, мы получим приближенное значение соответствующей производной с погрешностью порядка  $h^m$ .

На фиг. 9 указаны коэффициенты, с которыми значения функции в узловых точках входят в формулы вычисления производных по правым разностям. Погрешность будет иметь порядок  $h$  при вычислениях по первой группе формул и  $h^2$  — при вычислениях по второй.

## § 6. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА

Пользуясь понятием правых и левых разностей, можно легко вывести две важные интерполяционные формулы, часто используемые в вычислительной практике.

Предположим, что значения функции  $y(x)$  (разлагающейся в степенной ряд) известны в узлах сетки с постоянным шагом. Шаг этой сетки обозначим через  $h$ . Пусть, далее,  $a$  — абсцисса одного из узлов и  $a \pm xh$  (где  $x$  — действительное число) — абсцисса той точки, в которой мы собираемся вычислить приближенное значение функции. Напишем разложение  $y(a \pm xh)$  в ряд в окрестности точки  $a$ :

$$y(a \pm xh) = y(a) \pm xh y'(a) + \frac{x^2 h^2}{2} y''(a) \pm \frac{x^3 h^3}{6} y'''(a) + \dots \quad (a)$$

Формулу Ньютона для интерполяции вперед мы получим, заменив производные в разложении (a) для  $y(a + xh)$  их выражениями через правые разности согласно (5.4) и (5.5). Аналогичная замена производных левыми разностями [согласно (4.16) и (4.17)] в разложении (a) для  $y(a - xh)$  приведет нас к формуле Ньютона для интерполяции назад. Выкладки сильно упрощаются, если воспользоваться символической записью. Так, в силу (5.2),

$$e^{hD} = 1 + \Delta; \tag{б}$$

кроме того, заменив в (4.6)  $x$  на  $a$  и  $h$  на  $xh$ , мы получим

$$y(a + xh) = e^{xhD} y(a) = (e^{hD})^x y(a).$$

Последнее равенство вместе с (б) дает

$$y(a + xh) = (1 + \Delta)^x y(a).$$



Разложим бином в правой части последнего соотношения:

$$y(a + xh) = \left[ 1 + x\Delta + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 + \right. \\ \left. + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta^3 + \dots \right] y(a). \quad (6.1)$$

Это и есть формула для интерполяции вперед<sup>1)</sup>.

Для получения левой интерполяционной формулы воспользуемся равенством (4.12),

$$e^{-hD} = 1 - \nabla, \quad (в)$$

и равенством (4.8) (в котором  $x$  следует заменить на  $a$  и  $h$  на  $xh$ ):

$$y(a - xh) = e^{-xhD} y(a) = (e^{-hD})^x y(a).$$

Таким образом,

$$y(a - xh) = (1 - \nabla)^x y(a),$$

и формула для интерполяции назад имеет вид

$$y(a - xh) = \left[ 1 - x\nabla + \frac{x(x-1)}{2!} \nabla^2 - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \nabla^3 + \dots \right] y(a). \quad (6.2)$$

Пусть, например, нам даны значения функции  $y = \sin x$  для <sup>2)</sup>  $x = 10^\circ (1^\circ) 13^\circ$ . Воспользовавшись только что выведенными формулами, найдем приближенное значение  $\sin(10^\circ 20')$ .

Таблица 16

$i$	$x_i^\circ$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	10	0,17365	0,01716	-0,00006	0
1	11	0,19081	0,01710	-0,00006	
2	12	0,20791	0,01704		
3	13	0,22495			

1) См. примечание на стр. 58. Настоящий вывод справедлив для многочленов. Вопрос о разложении функции в бесконечный интерполяционный ряд выходит за рамки настоящей книги. См., например, Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М.—Л., 1954. — Прим. ред.

2) Запись  $x = a(h)b$  читается: „значения  $x$  на отрезке  $[a, b]$  с шагом  $h$ “.

Согласно формуле (6.1) (в которой следует положить  $a = 10^\circ$ ,  $x = \frac{20'}{1^\circ} = \frac{1}{3}$ ),

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ 20' &= 0,17365 + \frac{0,01716}{3} + \frac{\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}\right)}{2} (-0,00006) + \\ &+ \frac{\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{5}{3}\right)}{6} (0) = 0,17938 \end{aligned}$$

(значения нужных разностей приведены в табл. 16). То же самое значение получится и по формуле (6.2) при  $a = 13^\circ$ ,  $x = \frac{2^{\circ} 40'}{1^\circ} = \frac{8}{3}$  значения нужных разностей приведены в табл. 17):

Таблица 17<sup>1)</sup>

$i$	$x_i^\circ$	$y_i$	$\nabla y_i$	${}^2y_i$	$\nabla^3 y_i$
0	10	0,17365			
1	11	0,19081	0,01716		
2	12	0,20791	0,01710	-0,00006	
3	13	0,22495	0,01704	-0,00006	0

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ 20' &= 0,22495 - \frac{8(0,01704)}{3} + \frac{\left(\frac{8}{3}\right) \left(\frac{5}{3}\right)}{2} (-0,00006) - \\ &- \frac{\left(\frac{8}{3}\right) \left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)}{6} (0) = 0,17938. \end{aligned}$$

Истинное значение равно  $\sin 10^\circ 20' = 0,17937$ .

Формулами Ньютона можно воспользоваться и для экстраполяции функции на точки, лежащие вне интервала, в котором известны значения  $y$ . Так, по формуле (6.1) легко вычислить  $\sin 13^\circ 30'$ . Для этого

<sup>1)</sup> Эта таблица содержит те же числа, что и табл. 16, лишь иначе расположенные. — Прим. ред.

положим в (6.1)  $a = 10^\circ$ ,  $x (= 3^\circ 30') = 3,5^\circ$ , а нужные разности возьмем из табл. 16<sup>1)</sup>. Вычисления дают:

$$\begin{aligned} \sin 13^\circ 30' &= 0,17365 + (3,5)(0,01716) + \\ &+ \frac{(3,5)(2,5)}{2}(-0,00006) = 0,23345. \end{aligned}$$

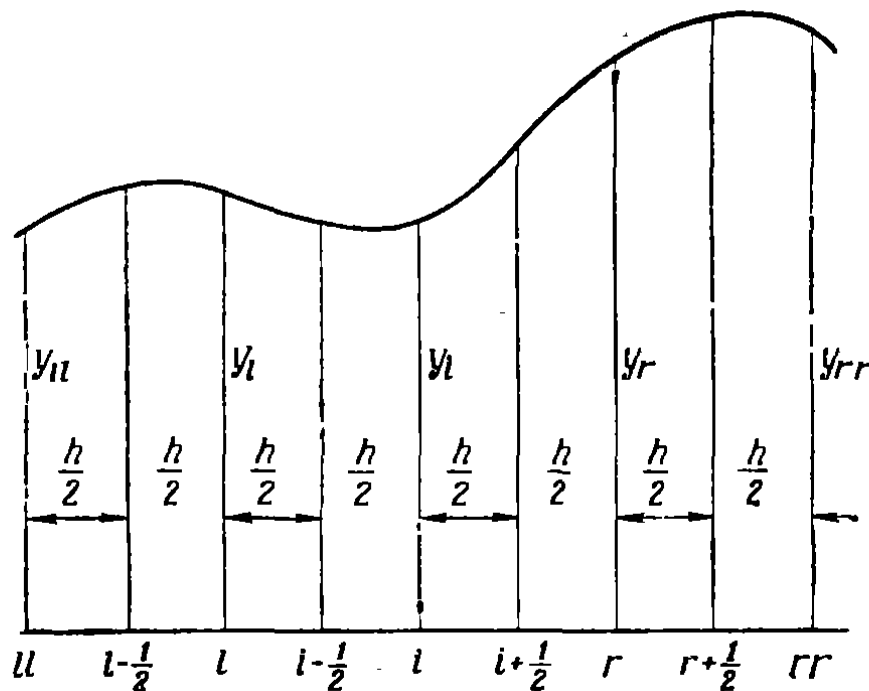
Это совпадает с истинным значением с точностью до последнего вычисленного знака.

## § 7. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ РАЗНОСТИ

Рассмотрение левых и правых разностей (§§ 4 и 5) привело нас к односторонним выражениям для производных функции  $y$ ; простейшая форма этих выражений позволяет вычислять производные с погрешностью порядка  $h$ .

*Центральные разности*, вычисляемые по узлам, расположенным симметрично относительно  $l$ , приводят к формулам, на порядок более точным; центральные разности часто оказываются полезными при решении краевых задач.

Пусть функция  $y(x)$  известна в узлах сетки с постоянным шагом  $h$ . Кроме того, вначале будем предполагать, что  $y(x)$  известна



Фиг. 10. Узловые точки в случае центральных разностей.

еще в центре каждого интервала, заключенного между двумя соседними узлами (фиг. 10). *Первая центральная разность* функции  $y(x)$

<sup>1)</sup> Экстраполяцию здесь удобнее проводить по формуле (6.2), полагая  $\alpha = 13^\circ$ ,  $x = -0,5$ . Вообще следует избегать пользоваться экстраполяцией более чем на один шаг. — *Прим. ред.*

в точке  $i$  определяется равенством

$$\delta y_i \equiv y\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - y\left(x_i - \frac{h}{2}\right) = y_{i+1/2} - y_{i-1/2}. \quad (7.1)$$

Вторая центральная разность есть разность первых, а именно:

$$\begin{aligned} \delta^2 y_i &\equiv \delta(\delta y_i) = [y_{(i+1/2)+1/2} - y_{(i-1/2)+1/2}] - [y_{(i+1/2)-1/2} - y_{(i-1/2)-1/2}] = \\ &= y_r - 2y_i + y_l. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Вообще, центральная разность порядка  $n$  определяется формулой

$$\delta^n y_i \equiv \delta(\delta^{n-1} y_i).$$

Это определение приводит к следующим соотношениям:

$$\delta^3 y_i = y_{r+1/2} - 3y_{i+1/2} + 3y_{i-1/2} - y_{l-1/2}, \quad (7.3)$$

$$\delta^4 y_i = y_{rr} - 4y_r + 6y_i - 4y_l + y_{ll}. \quad (7.4)$$

Коэффициенты, с которыми значения функции входят в выражение для  $n$ -й центральной разности, совпадают с коэффициентами разложения бинома  $(a-b)^n$ . Центральные разности удобно записывать в форме следующей таблицы.

Таблица 18

Центральные разности

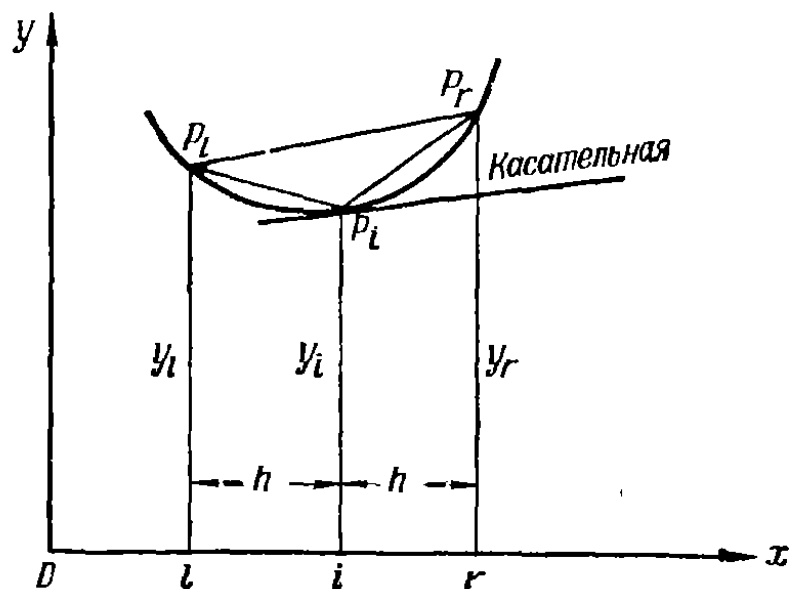
$l$	$y_l$	$\delta y_l$	$\delta^2 y_l$	$\delta^3 y_l$	$\delta^4 y_l$	$\mu \delta y_l$	$\mu \delta^3 y_l$
0	$y_0$	$\delta y_{1/2}$	$\delta^2 y_1$	$\delta^3 y_{3/2}$	$\delta^4 y_2$	$\mu \delta y_1$	$\mu \delta^3 y_2$
1	$y_1$						
2	$y_2$	$\delta y_{3/2}$	$\delta^2 y_2$	$\delta^3 y_{1/2}$	$\delta^4 y_3$	$\mu \delta y_2$	$\mu \delta^3 y_3$
3	$y_3$	$\delta y_{5/2}$	$\delta^2 y_3$	$\delta^3 y_{7/2}$		$\mu \delta y_3$	
4	$y_4$	$\delta y_{7/2}$	$\delta^2 y_4$			$\mu \delta y_4$	
5	$y_5$	$\delta y_{9/2}$					

В выражения для центральных разностей нечетных порядков входят значения  $y$  в промежуточных точках  $\dots, l - \frac{1}{2}, i \pm \frac{1}{2}, r + \frac{1}{2}, \dots$

Для того чтобы исключить эти значения, мы введем новое определение. А именно, *усредненной разностью* нечетного порядка в точке  $i$  назовем среднее арифметическое соответствующих разностей в точках  $i - \frac{1}{2}$  и  $i + \frac{1}{2}$ . Так, первая усредненная разность в точке  $i$  выражается следующим образом:

$$\frac{1}{2} (\delta y_{i+\frac{1}{2}} + \delta y_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} [(y_r - y_i) + (y_i - y_l)] = \frac{1}{2} (y_r - y_l). \quad (a)$$

Геометрический смысл усредненной разности состоит в том, что наклон кривой в точке  $P_i$  заменяется наклоном хорды  $P_r P_l$ , а не  $P_r P_i$  или  $P_i P_l$ , как это было в случае правых или левых разностей <sup>1)</sup> (фиг. 11).



Фиг. 11. Усредненные центральные разности.

Оператор усреднения, использованный нами при получении соотношения (a), будет в дальнейшем обозначаться через  $\mu$ ; этот оператор определяется равенством

$$\mu y_i = \frac{1}{2} (y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}}). \quad (7.5)$$

С помощью  $\mu$  первую усредненную разность можно записать так:

$$\mu \delta y_i = \frac{1}{2} [\delta y_{i+\frac{1}{2}} + \delta y_{i-\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2} (y_r - y_l). \quad (7.6)$$

Операторы  $\mu$  и  $\delta$  связаны простым соотношением, которое мы сейчас выведем. Для этого возведем  $\mu$  в квадрат:

$$\begin{aligned} \mu^2 y_i &= \mu \left[ \frac{1}{2} (y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}}) \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (y_r + y_i) + \frac{1}{2} (y_i + y_l) \right] = \\ &= \frac{1}{4} (y_r + 2y_i + y_l); \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Имеется в виду аппроксимация  $Du$  по формулам (4.19) и (7.16). — Прим. ред.

с другой стороны, применяя к  $y_i$  оператор  $(1 + \delta^2/4)$ , в силу (7.2) получим

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) y_i = y_i + \frac{1}{4} (y_r - 2y_i + y_l) = \frac{1}{4} (y_r + 2y_i + y_l).$$

Сравнение двух последних равенств дает

$$\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}. \quad (7.7)$$

Воспользовавшись равенствами (7.2), (7.6) и (7.7), можно написать разложение центральных разностей в ряд по производным и, наоборот, разложение производных в ряд по центральным разностям. Для этой цели перепишем соотношение (7.6), согласно (4.7) и (4.9), следующим образом<sup>1)</sup>:

$$\mu \delta y_i = \frac{1}{2} (y_r - y_l) = \frac{1}{2} e^{hD} y_i - \frac{1}{2} e^{-hD} y_i = \frac{e^{hD} - e^{-hD}}{2} y_i = \operatorname{sh}(hD) y_i,$$

или

$$\mu \delta = \operatorname{sh}(hD). \quad (7.8)$$

Так как

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

то разложение первой усредненной разности в ряд по производным имеет следующий вид:

$$\mu \delta = hD + \frac{h^3 D^3}{6} + \frac{h^5 D^5}{120} + \dots \quad (7.9)$$

Аналогично, воспользовавшись соотношениями (7.2), (4.7) и (4.9), найдем следующее выражение для второй центральной разности:

$$\delta^2 y_i = e^{hD} y_i - 2y_i + e^{-hD} y_i = 2 \left( \frac{e^{hD} + e^{-hD}}{2} - 1 \right) y_i = 2 [\operatorname{ch}(hD) - 1] y_i.$$

Так как

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

то

$$\delta^2 = h^2 D^2 + \frac{h^4 D^4}{12} + \frac{h^6 D^6}{360} + \dots \quad (7.10)$$

Последнее равенство можно получить иначе — разложением в ряд первой *неусредненной* центральной разности и возведением в квадрат

<sup>1)</sup> Легко видеть, что операторы  $\mu$  и  $\delta$  перестановочны, т. е.  $\delta\mu = \mu\delta$ . — Прим. перев.

полученного соотношения. Проведем соответствующую выкладку. В силу (7.1),

$$\begin{aligned} \delta y_i &= y_{i+1/2} - y_{i-1/2} = \left( e^{\frac{hD}{2}} - e^{-\frac{hD}{2}} \right) y_i = \\ &= 2 \operatorname{sh} \left( \frac{hD}{2} \right) y_i = \left( hD + \frac{h^3 D^3}{2^2 \cdot 3!} + \frac{h^5 D^5}{2^4 \cdot 5!} + \dots \right), \end{aligned}$$

откуда вообще

$$\delta^n = 2^n \operatorname{sh}^n \left( \frac{hD}{2} \right). \quad (7.11)$$

В частности, при  $n = 2$  получим (7.10). Разложение третьей усредненной разности получается перемножением (7.9) и (7.10):

$$\mu \delta^3 = h^3 D^3 + \frac{h^5 D^5}{4} + \frac{8h^7 D^7}{45} + \dots \quad (7.12)$$

Аналогично, возведя (7.10) в квадрат, получим разложение для четвертой центральной разности:

$$\delta^4 = h^4 D^4 + \frac{h^6 D^6}{6} + \frac{27h^8 D^8}{2160} + \dots \quad (7.13)$$

Для того чтобы найти разложение первой производной в ряд по центральным разностям, разрешим (7.8) относительно  $hD$ :

$$hD = \operatorname{Arsh}(\mu \delta).$$

Так как

$$\operatorname{Arsh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \dots,$$

то

$$hD = \mu \delta - \frac{\mu^3 \delta^3}{6} + \frac{3\mu^5 \delta^5}{40} - \dots$$

Воспользовавшись равенством (7.7) для исключения высших степеней  $\mu$ , получим окончательно

$$hD = \mu \left( \delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \dots \right). \quad (7.14)$$

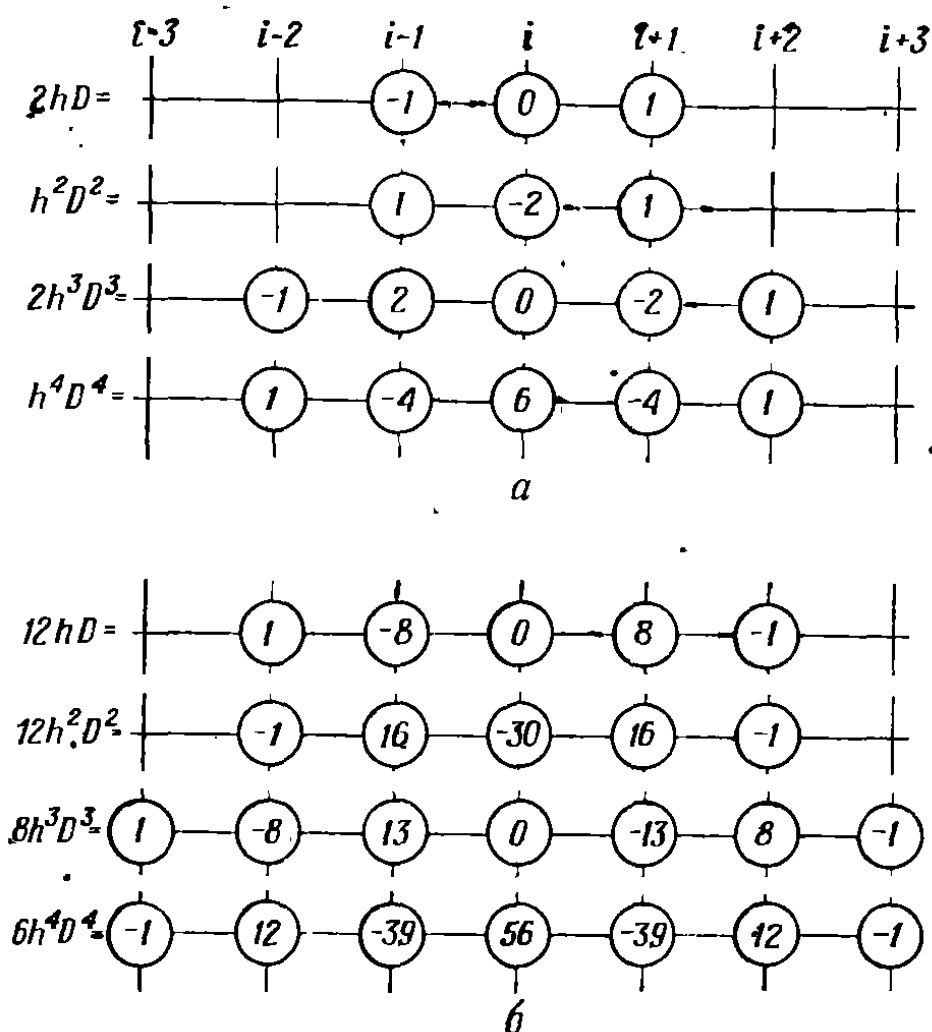
Возведя последнее равенство в квадрат, куб и т. д. и исключив затем высшие степени  $\mu$  [согласно (7.7)], мы найдем:

$$\begin{aligned} h^2 D^2 &= \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots, \\ h^3 D^3 &= \mu \left( \delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - \dots \right), \\ h^4 D^4 &= \delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - \dots \end{aligned} \quad (7.15)$$

Первые члены этих разложений дают следующие приближенные формулы для вычисления производных через центральные разности (погрешность  $e$  также записана в разностной форме):

$$\begin{aligned}
 2hDy_i &= (y_r - y_l) + e_1 \\
 \left[ e_1 &= \mu \left( -\frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \dots \right) y_i \right]; \\
 h^2 D^2 y_i &= y_r - 2y_i + y_l + e_2 \\
 \left[ e_2 &= \left( -\frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots \right) y_i \right]; \\
 2h^3 D^3 y_i &= (y_{rr} - 2y_r + 2y_l - y_{ll}) + e_3 \\
 \left[ e_3 &= \mu \left( -\frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - \dots \right) y_i \right]; \\
 h^4 D^4 y_i &= (y_{rr} - 4y_r + 6y_i - 4y_l + y_{ll}) + e_4 \\
 \left[ e_4 &= \left( -\frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - \dots \right) y_i \right].
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Из равенств (7.9)—(7.13) видно, что погрешность при вычислении производных по каждой из этих формул есть  $O(h^2)$ ; таким образом, вычисление производных через центральные разности на порядок



Фиг. 12. Центральные разностные операторы.

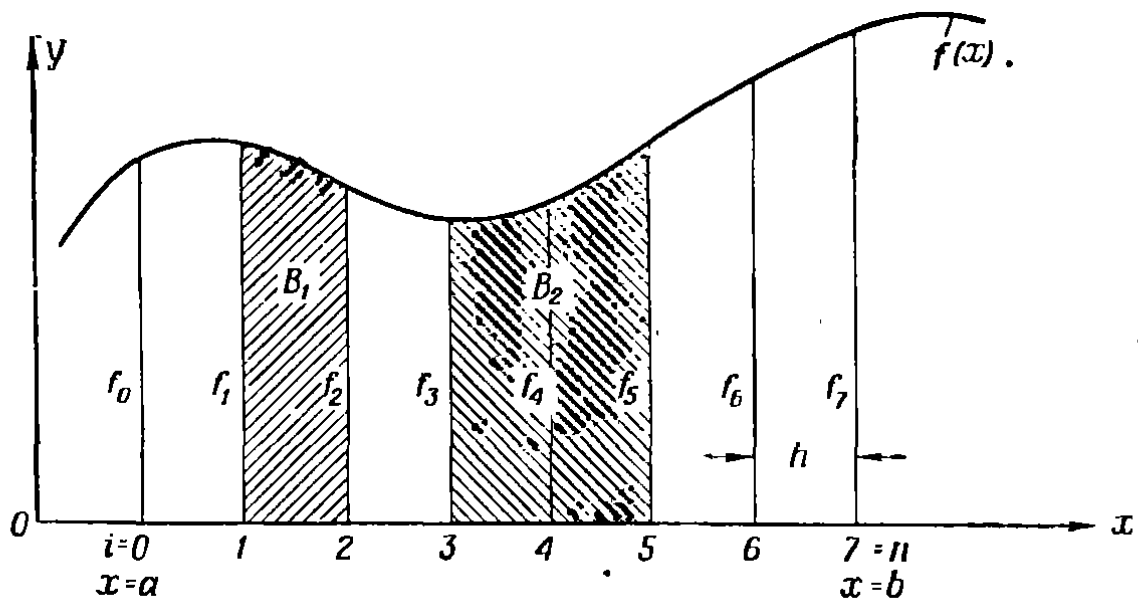


точнее, чем через левые или правые. Аналогичным путем можно доказать, что учет вторых членов разложений в каждом из равенств (7.14) и (7.15) приводит к формулам с погрешностью  $O(h^4)$ ; вообще, используя первые  $m$  членов этих разложений, мы получим формулы, погрешность которых есть  $O(h^{2m})$ .

На фиг. 12 указаны те коэффициенты, с которыми значения функции в узловых точках входят в формулы для вычисления производных через центральные разности; при вычислениях производных по первой группе формул погрешность есть  $O(h^2)$ , при вычислениях по второй группе —  $O(h^4)$ .

### § 8. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если функцию нельзя проинтегрировать аналитически или если аналитическое интегрирование слишком громоздко, следует воспользоваться численными методами. Из методов численного интегрирования



Фиг. 13. Численное интегрирование.

наиболее удобными и часто применяемыми являются *формула трапеций* и *формула Симпсона*. Сейчас мы выведем эти формулы.

#### [а] Формула трапеций

Рассмотрим интеграл

$$A = \int_a^b f(x) dx, \quad (a)$$

в котором функцию  $f(x)$  будем предполагать известной в узлах сетки с постоянным шагом  $h = (b - a)/n$  (фиг. 13).

Интеграл

$$B_1 = \int_x^{x+h} f(z) dz, \quad (б)$$

где  $x$  — один из узлов, представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком  $[x, x+h]$  оси абсцисс, двумя вертикальными прямыми, проходящими через концы этого отрезка, и, наконец, частью кривой  $f(z)$ , заключенной между этими прямыми. Одновременно рассмотрим следующий интеграл с переменным верхним пределом  $x$  (мы обозначим его через  $y(x)$ ):

$$y(x) = \int_a^x f(z) dz. \quad (B)$$

Очевидно,  $B_1$  выражается через  $y(x)$  следующим образом:

$$B_1 = y(x+h) - y(x).$$

Так как, кроме того,

$$y' = f(x), \quad y'' = f'(x), \quad \dots, \quad y^{(n)} = f^{(n-1)}(x),$$

то имеет место следующее разложение  $y(x+h)$  в степенной ряд [см. § 4, (a)]:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!} f(x) + \frac{h^2}{2!} f'(x) + \frac{h^3}{3!} f''(x) + \dots \quad (Г)$$

С другой стороны<sup>1)</sup>,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

Подставив в (Г) найденное из этого равенства значение  $hf'(x)$ , получим

$$\begin{aligned} B_1 &= y(x+h) - y(x) = hf(x) + \\ &+ \frac{h}{2} \left[ f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2} f''(x) - \dots \right] + \frac{h^3}{6} f''(x) + \dots = \\ &= \frac{h}{2} [f(x) + f(x+h)] - \frac{h^3}{12} f''(x) + \dots \quad (Д) \end{aligned}$$

Но интеграл  $A$  есть сумма  $n$  интегралов вида  $B_1$ . Поэтому (см. фиг. 13)

$$A = \int_a^b f(x) dx = h \left[ \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right] + e_T, \quad (8.1)$$

где  $f_i = f(a+ih)$ , а погрешность  $e_T$  вычисляется по формуле

$$e_T \cong \frac{h^3}{12} (f''_0 + f''_1 + f''_2 + \dots + f''_{n-1}) + \dots$$

<sup>1)</sup> В оригинале при выводе формулы трапеций допущена ошибка, исправленная в настоящем тексте. — Прим. перев.

По теореме о среднем,

$$e_T = -\frac{h^3}{12} n f''(\bar{x}_n),$$

где  $a \leq \bar{x}_n \leq b$ . Так как  $nh = b - a$ , то

$$e_T = -\frac{b-a}{12} f''(\bar{x}_n) h^2.$$

Если  $f''(\bar{x}_n)$  остается ограниченной при возрастании  $n$  [это имеет место для любой дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$ ], то из последнего равенства следует, что

$$e_T = O(h^2). \quad (8.2)$$

Этот факт будет использован в § 9 для улучшения точности формулы трапеций. Легко видеть, что приближенное значение интеграла, вычисленное по формуле трапеций, представляет собой площадь фигуры, ограниченной отрезком  $[a, b]$  оси абсцисс, двумя вертикальными прямыми, проходящими через концы этого отрезка, и ломаной линией, звеньями которой являются отрезки, соединяющие соседние узловые значения кривой  $f(x)$ . Коэффициенты, с которыми значения  $f(x)$  в узловых точках входят в формулу трапеций, представлены на фиг. 14, а.

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right] + O(h^2)$$

а. Формула трапеций

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[ 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \right] + O(h^4)$$

б. Формула Симпсона

Фиг. 14.

В табл. 19 приводится вычисление приближенного значения интеграла

$$A = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2 \quad (e)$$

по формуле трапеций для  $n = 2; 4; 6$ . Соответствующие погрешности получаются сравнением найденных чисел с истинным значением  $A = 2$ .

Таблица 19

Численное интегрирование по формуле трапеций<sup>1)</sup>

		$n = 2$ $h = \pi/2$		$n = 4$ $h = \pi/4$	
$x$	$\sin x$	$M$	$M \sin x$	$M$	$M \sin x$
0	0	1/2	0	1/2	0
$\pi/4$	0,707			1	0,707
$\pi/2$	1,000	1	1,000	1	1,000
$3\pi/4$	0,707			1	0,707
$\pi$	0	1/2	0	1/2	0
		$\Sigma_2 =$	1,000	$\Sigma_4 =$	2,414

$n = 6$ $h = \pi/6$			
$x$	$\sin x$	$M$	$M \sin x$
0	0	1/2	0
$\pi/6$	0,500	1	0,500
$\pi/3$	0,866	1	0,866
$\pi/2$	1,000	1	1,000
$2\pi/3$	0,866	1	0,866
$5\pi/6$	0,500	1	0,500
$\pi$	0	1/2	0
		$\Sigma_6 =$	3,732

$$A_2 = \frac{\pi}{2} \cdot 1,000 = 1,571; \quad e_2 = \frac{2 - 1,571}{2} \cdot 100 = 21\%$$

$$A_4 = \frac{\pi}{4} \cdot 2,414 = 1,896; \quad e_4 = \frac{2 - 1,896}{2} \cdot 100 = 5,2\%$$

$$A_6 = \frac{\pi}{6} \cdot 3,732 = 1,954; \quad e_6 = \frac{2 - 1,954}{2} \cdot 100 = 2,3\%$$

<sup>1)</sup> Через  $M$  обозначен коэффициент, с которым значение интегрируемой функции входит в формулу трапеций. — Прим. перев.

## [6] Формула Симпсона

Для вывода этой формулы мы снова воспользуемся равенством (в), но вместо интеграла  $B_1$  рассмотрим интеграл

$$B_2 = \int_{x-h}^{x+h} f(z) dz = y(x+h) - y(x-h), \quad (\text{ж})$$

где  $x$ , как и ранее, — одна из узловых точек. Написанный интеграл представляет собой ту часть искомой площади  $A$ , которая лежит в двух соседних вертикальных полосах, шириной  $h$  каждая. Заменяя в (г)  $h$  на  $-h$ , получим

$$y(x-h) = y(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (\text{з})$$

Вычтем теперь (з) из (г):

$$B_2 = y(x+h) - y(x-h) = 2hf(x) + \frac{h^3}{3} f'''(x) + \frac{h^5}{60} f^{(5)}(x) + \dots$$

Заменим в последнем равенстве величину  $h^2 f''(x)$  ее приближенным значением, вычисленным через центральные разности согласно (7.10):

$$\begin{aligned} h^2 D^2 f(x) &= \left( \delta^2 - \frac{h^4 D^4}{12} - \frac{h^6 D^6}{360} - \dots \right) f(x) = \\ &= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) - \left( \frac{h^4 D^4}{12} + \frac{h^6 D^6}{360} + \dots \right) f(x). \end{aligned}$$

При этом мы получим

$$\begin{aligned} B_2 &= 2hf(x) + \frac{h}{3} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] - \frac{h^5 f^{(5)}}{36} + \frac{h^5 f^{(5)}}{60} - \dots = \\ &= \frac{h}{3} [f(x+h) + 4f(x) + f(x-h)] - \frac{h^5 f^{(5)}(x)}{90} + \dots \end{aligned}$$

Разделим всю площадь  $A$  на четное число  $n$  частей, шириной  $h$  каждая. Тогда  $A$  можно записать как сумму  $n/2$  интегралов вида  $B_2$ :

$$A = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n] + e_c, \quad (8.3)$$

причем погрешность  $e_c$ , в силу теоремы о среднем, оценивается при  $nh = b - a$  следующим образом:

$$\begin{aligned} e_c &= -\frac{h^5}{90} (f_1^{(5)} + f_3^{(5)} + \dots + f_{n-1}^{(5)}) + \dots \cong \\ &\cong -\frac{h^5}{90} \frac{n}{2} f^{(5)}(\bar{x}_n) = -\left( \frac{b-a}{180} \right) f^{(5)}(\bar{x}_n) h^4 + \dots = O(h^4). \quad (8.4) \end{aligned}$$

Итак, погрешность, с которой интеграл вычисляется по формуле Симпсона, есть  $O(h^4)$ . Это обстоятельство используется в § 9 для улучшения точности этой формулы.

При интегрировании по формуле трапеций кривая  $f(x)$  заменялась на каждом участке, заключенном между двумя соседними узловыми точками, прямолинейным отрезком. Легко показать, что при интегрировании по формуле Симпсона происходит замена функции  $f(x)$  на участках, заключенных между каждыми двумя соседними четными узловыми точками, квадратными многочленами (эти многочлены принимают те же значения, что и  $f(x)$ , на концах каждого участка и в центре его, т. е. в соответствующей нечетной узловой точке). Аналогичные формулы можно получить, используя параболы высших степеней (проходящие соответственно через большее число узловых значений  $f$ ). Однако формулы эти практически не точнее, чем формула Симпсона. Коэффициенты, с которыми узловые значения функции входят в формулу Симпсона, приведены на фиг. 14, б.

В табл. 20 по формуле Симпсона вычисляются приближенные значения интеграла (е) для  $n = 2$  и  $n = 4$ .

Таблица 20

## Численное интегрирование по формуле Симпсона

		$n = 2$ $h = \pi/2$		$n = 4$ $h = \pi/4$	
$x$	$\sin x$	$M$	$M \sin x$	$M$	$M \sin x$
0	0	1	0	1	0
$\pi/4$	0,707			4	2,828
$\pi/2$	1,000	4	4	2	2,000
$3\pi/4$	0,707			4	2,828
$\pi$	0	1	0	1	0
		$\Sigma_2 =$	4	$\Sigma_4 =$	7,656

$$A_2 = \frac{\pi/2}{3} \cdot 4 = 2,094; \quad e_2 = 4,7\%$$

$$A_4 = \frac{\pi/4}{3} \cdot 7,656 = 2,004; \quad e_4 = 0,2\%$$

Если число участков, на которые разбит отрезок  $[a, b]$ , нечетно (т. е.  $n = 2m + 1$ ), то можно вычислить интеграл на участке  $[a, b-h]$  по формуле Симпсона, а на участке  $[b-h, b]$  — по формуле трапеций. Если мы хотим добиться большей точности, то можно проинтерполировать  $f(x)$  на точку  $x = b - h/2$  (см. § 6). После этого интегрирование на последнем участке можно выполнить также по формуле Симпсона (с шагом  $h/2$ ).

### § 9. ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ПО РИЧАРДСОНУ

Мы уже неоднократно видели, что погрешность разностных формул для дифференцирования и интегрирования зависит от расстояния  $h$  между соседними узлами; в приближенных формулах хорошей точности эта погрешность есть  $O(h^2)$  или  $O(h^4)$ .

Так, вычисляя значения производных через центральные разности с учетом первых членов разложения или интегрируя по формуле трапеций, мы допускаем погрешность порядка  $h^2$ . Учет вторых членов разложения при вычислении производных и интегрирование по формуле Симпсона позволяет снизить величину погрешности до  $O(h^4)$ .

Порядок погрешности и в том и в другом случае определяется главным из отброшенных членов разложения. Сама же погрешность, как легко видеть, может быть представлена рядом<sup>1)</sup>

$$e(x) = f_1(x)h^2 + f_2(x)h^4 + f_3(x)h^6 + \dots \quad (9.1)$$

Если погрешность есть  $O(h^4)$ , то  $f_1(x) \equiv 0$ .

Если мы вычисляем разностным методом какое-либо выражение, не зависящее от  $x$  (например, определенный интеграл), то коэффициенты разложения (9.1) будут, очевидно, постоянны, и оно принимает следующий вид:

$$e = c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \dots \quad (9.2)$$

Сказанное относится и к случаю, когда вычисления ведутся при различных значениях  $h$ , но в одной и той же точке  $x$ .

В этом параграфе мы покажем, как, зная форму ряда, в который разлагается погрешность, можно улучшить точность вычислений, затратив немного дополнительного труда.

Предположим, например, что значение некоторого интеграла  $A$  вычислено по формуле трапеций при двух различных шагах:

$$h_1 = \frac{b-a}{n_1}, \quad h_2 = \frac{b-a}{n_2},$$

<sup>1)</sup> Погрешность выражается через четные степени  $h$ , если приближенная формула имеет симметричный характер. Для несимметричных формул, как, например (4.20) и (4.21), вместо ряда (9.1) должен быть написан ряд, содержащий и нечетные степени  $h$ . Применение метода экстраполяции в этих случаях (с соответствующим изменением формул) также оказывается возможным. — *Прим. ред.*

где  $n_1, n_2$  — числа интервалов. Полученные приближенные значения обозначим соответственно через  $A_{n_1}$  и  $A_{n_2}$ . Если  $h_1$  и  $h_2$  малы настолько, что можно пренебречь всеми членами разложения (9.2), кроме первого, то

$$e_1 = A - A_{n_1} \cong c_1 \frac{(b-a)^2}{n_1^2}; \quad e_2 = A - A_{n_2} \cong c_1 \frac{(b-a)^2}{n_2^2}.$$

Исключив из этих соотношений неизвестную нам константу  $c_1(b-a)^2$ , получим так называемую *экстраполяционную формулу порядка  $h^2$* :

$$A_{n_1, n_2} = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} A_{n_2} - \frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2} A_{n_1} = \alpha_1 A_{n_1} + \alpha_2 A_{n_2}. \quad (9.3)$$

Если отброшенные члены разложения (9.2) малы, то эта формула дает значительное повышение точности<sup>1)</sup>.

Так, например, взяв приближенные значения  $A_2 = 1,571$  и  $A_4 = 1,896$  интеграла (e), вычисленные в § 8 (табл. 19), по формуле (9.3) найдем:

$$A_{2,4} = \frac{4^2}{4^2 - 2^2} 1,896 - \frac{2^2}{4^2 - 2^2} 1,571 = \frac{4}{3} \cdot 1,896 - \frac{1}{3} \cdot 1,571 = 2,004.$$

Погрешность значения  $A_{2,4}$  составляет  $0,2\%$  вместо  $21\%$  и  $5,2\%$  в  $A_2$  и  $A_4$  соответственно. При  $n=4$  и  $n=6$  получим аналогичным образом:

$$A_{4,6} = \frac{6^2}{6^2 - 4^2} \cdot 1,954 - \frac{4^2}{6^2 - 4^2} \cdot 1,896 = 2,0004$$

с погрешностью  $0,02\%$ . Коэффициенты

$$\alpha_1 = -\frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} \quad (9.4)$$

формулы (9.3) зависят, как легко видеть, только от отношения  $n_2/n_1$ . Значения этих коэффициентов приведены в табл. 21.

Зная три приближенных значения  $A_{n_1}, A_{n_2}, A_{n_3}$  величины  $A$ , вычисленные с шагами  $h_1, h_2, h_3$ , обратно пропорциональными  $n_1, n_2, n_3$ , мы можем учесть два первых члена разложения (9.2). Для этого напишем

$$e_1 \equiv A - A_{n_1} = \frac{c_1(b-a)^2}{n_1^2} + \frac{c_2(b-a)^4}{n_1^4},$$

$$e_2 \equiv A - A_{n_2} = \frac{c_1(b-a)^2}{n_2^2} + \frac{c_2(b-a)^4}{n_2^4},$$

$$e_3 \equiv A - A_{n_3} = \frac{c_1(b-a)^2}{n_3^2} + \frac{c_2(b-a)^4}{n_3^4}.$$

1) Независимо от малости коэффициента  $c_2$  погрешность приближенного значения, вычисленного по формуле (9.3), будет порядка  $h^4$ . — Прим. ред.



Таблица 21

Экстраполяционные коэффициенты порядка  $h^2$ 

$n_2/n_1$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
2/1	— 0,3333333333	1,3333333333
3/2	— 0,8	1,8
4/3	— 1,2857142857	2,2857142857
5/4	— 1,7777777778	2,7777777778
6/5	— 2,2727272727	3,2727272727
7/6	— 2,7692307692	3,7692307692
8/7	— 3,2666666667	4,2666666667
3/1	— 0,125	1,125
5/3	— 0,5625	1,5625
7/5	— 1,0416666667	2,0416666667

Исключив из этих соотношений неизвестные константы  $c_1(b-a)^2$  и  $c_2(b-a)^4$ , получим экстраполяционную формулу порядка  $(h^2, h^4)$ :

$$A_{n_1, n_2, n_3} = \frac{n_1^4}{(n_2^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_1^2)} A_{n_1} - \frac{n_2^4}{(n_2^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_2^2)} A_{n_2} + \\ + \frac{n_3^4}{(n_3^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_2^2)} A_{n_3} = \beta_1 A_{n_1} + \beta_2 A_{n_2} + \beta_3 A_{n_3}. \quad (9.5)$$

Коэффициенты  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , соответствующие различным отношениям  $n_3/n_2/n_1$ , приведены в табл. 22.

Таблица 22

Экстраполяционные коэффициенты порядка  $(h^2, h^4)$ 

$n_3/n_2/n_1$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
3/2/1	0,0416666667	— 1,0666666667	2,025
4/2/1	0,0222222222	— 0,4444444444	1,4222222222
4/3/2	0,2666666667	— 2,3142857143	3,0476190476
5/4/2	0,6349206349	— 2,3703703704	3,3068783069
5/4/3	0,7232142857	— 4,0634920635	4,3402777778
6/5/4	1,4222222222	— 6,3131313131	5,8909090909
7/6/5	2,3674242424	— 9,0629370629	7,6955128205
8/7/6	3,5604395604	— 12,3128205128	9,7523809524
5/3/1	0,0052083333	— 0,6328125	1,6276041667
7/5/3	0,1265625	— 1,6276041667	2,5010416667

Взяв приближенные значения  $A_2, A_4, A_6$  интеграла (e) из табл. 19 (§ 8) и выбрав коэффициенты  $\beta$ , соответствующие отношению  $6/4/2 = 3/2/1$ , из табл. 22 найдем

$$A_{2, 4, 6} = 0,04167 \cdot 1,571 - 1,06667 \cdot 1,896 + 2,025 \cdot 1,954 = 1,99991.$$

Погрешность составляет 0,005%.

Предположим теперь, что погрешность разностной формулы есть  $O(h^4)$ . Тогда в разложении (9.2) коэффициент  $c_1 = 0$ . В этом случае погрешности двух различных приближенных значений (при  $n = n_1$  и  $n = n_2$ ) равны:

$$e_1 \equiv A - A_{n_1} = \frac{c_2 (b-a)^4}{n_1^4} + \frac{c_3 (b-a)^6}{n_1^6} + \dots,$$

$$e_2 \equiv A - A_{n_2} = \frac{c_2 (b-a)^4}{n_2^4} + \frac{c_3 (b-a)^6}{n_2^6} + \dots$$

Пренебрегая всеми членами правой части, кроме первого, найдем, как и ранее,

$$A_{n_1, n_2} = \frac{n_2^4}{n_2^4 - n_1^4} A_{n_2} - \frac{n_1^4}{n_2^4 - n_1^4} A_{n_1} = \gamma_1 A_{n_1} + \gamma_2 A_{n_2}. \quad (9.6)$$

Это — экстраполяционная формула порядка  $h^4$ . Коэффициенты  $\gamma$  приведены в табл. 23.

Таблица 23

Экстраполяционные коэффициенты порядка  $h^4$

$n_2/n_1$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
2/1	— 0,0666666667	1,0666666667
3/2	— 0,2461538462	1,2461538462
4/3	— 0,4628571429	1,4628571429
5/4	— 0,6937669377	1,6937669377
6/5	— 0,9314456036	1,9314456036
7/6	— 1,1728506787	2,1728506787
8/7	— 1,4165191740	2,4165191740
3/1	— 0,0125	1,0125
5/3	— 0,1488970588	1,1488970588
7/5	— 0,3519144144	1,3519144144

Применим выведенную формулу для уточнения приближенных значений  $A_2$  и  $A_4$  интеграла (е), найденных в § 8 по формуле Симпсона, т. е. с погрешностью порядка  $h^4$  (см. табл. 20). Взяв из табл. 23 коэффициенты для случая  $n_2/n_1 = 2/1$ , по формуле (9.6) найдем:

$$A_{2,4} = -0,06667 \cdot 2,094 + 1,06667 \cdot 2,004 = 1,998$$

с погрешностью  $0,1\%$ .

Еще один пример: найдем приближенные значения производной функции Бесселя  $J_{1/4}(x)$  в точке  $x = 0,5$  с помощью центрального разностного оператора (7.16)

$$J'_{1/4}(0,5) \cong \frac{1}{2h} [J_{1/4}(0,5 + h) - J_{1/4}(0,5 - h)]$$

при  $h = 0,4; 0,2; 0,1; 0,05$ . Эти значения выписаны в третьем столбце табл. 24. Рядом приведены соответствующие погрешности [истинное значение  $J'_{1/4}(0,5) = 0,21909$ ]. Так как при вычислении производной через центральные разности погрешность разлагается в ряд вида (9.1), то для увеличения точности (при фиксированном  $x$ ) можно воспользоваться экстраполяционными формулами порядка  $h^2$  или ( $h^2, h^4$ ). Выбирая значения коэффициентов соответственно для  $n_2/n_1 = 2/1$  и  $n_3/n_2/n_1 = 4/2/1$  из табл. 21 и 22, получим результаты, приведенные в табл. 24. Там же выписаны соответствующие погрешности (в % к истинному значению 0,21909).

Таблица 24

Вычисленное значение				Экстраполяция порядка $h^2$		
$h$	$n$	$J'_{1/4}(0,5)$	$e$ (%)	$n$	$J'_{1/4}(0,5)$	$e$ (%)
0,4	1	0,30377	+ 38,6	2/1	0,20994	- 4,2
0,2	2	0,23340	+ 6,5	4/2	0,21873	- 1,6
0,1	4	0,22240	+ 1,5	8/4	0,21906	- 0,013
0,05	8	0,21990	+ 0,37	...	...	...

Экстраполяция порядка ( $h^2, h^4$ )		
$n$	$J'_{1/4}(0,5)$	$e$ (%)
4/2/1	0,21931	+ 0,10
8/4/2	0,21908	- 0,004

Экстраполяциями, описанными в настоящем параграфе, можно пользоваться лишь в том случае, когда вычисленные значения

приближаются к истинному монотонно (по  $h$ ). В противном случае нельзя пренебрегать высшими членами разложения (9.1)<sup>1</sup>).

### Задачи

1. Даны равноотстоящие узловые значения:  $y_0, y_1, y_2$ . Воспользовавшись интерполяционными многочленами, выразить через эти значения первую и вторую производные в точках: (а) 0; (б) 1; (в) 2.

О т в е т:

$$(а) y'_0 = \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2); \quad (б) y'_1 = \frac{1}{2h} (-y_0 + y_2);$$

$$(в) y'_2 = \frac{1}{2h} (y_0 - 4y_1 + 3y_2), \quad y''_{0, 1, 2} = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2}.$$

2. Даны равноотстоящие узловые значения:  $y_0, y_1, y_2, y_3$ . Воспользовавшись интерполяционными многочленами, выразить через эти значения следующие производные:

$$(а) y'_2; \quad (б) y'_1; \quad (в) y'_0; \quad (г) y''_0; \quad (д) y''_2; \quad (е) y''_3.$$

О т в е т:

$$(б) y'_1 = (1/6h) (-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3);$$

$$(г) y''_0 = (1/h^2) (2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3);$$

$$(е) y''_3 = (1/h^2) (-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3).$$

3. Найти приближенное выражение для  $y'_i$ , воспользовавшись интерполяционным многочленом, проходящим через точки фиг. 6.

О т в е т:

$$y'_i = \frac{y_r - (1 - \alpha^2) y_i - \alpha^2 y_l}{h\alpha(1 + \alpha)}.$$

4. Найти приближенное выражение для  $y'''_i$ , воспользовавшись интерполяционным многочленом, проходящим через точки фиг. 7, а.

5. Даны равноотстоящие узловые значения:  $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$ . Методом степенных рядов выразить через эти значения следующие производные

<sup>1</sup>) Если погрешность приближенного метода может быть выражена в виде (9.1) или (9.2), то применение экстраполяции всегда исключает один или два первых члена ряда. Поэтому применение экстраполяции, в особенности трехчленной, может оказаться полезным и в том случае, если при рассматриваемых значениях  $h$  второй и первый члены сравнимы по величине и имеют противоположные знаки, что и проявляется в немонотонности приближения. Успешность экстраполяции определяется малостью оставшихся неисключенными членов. — Прим. ред.

(с указанной точностью):

- (а)  $y'_0, e = O(h^2)$ ;      (б)  $y'_1, e = O(h^2)$ ;  
 (в)  $y'_2, e = O(h^2)$ ;      (г)  $y''_0, e = O(h)$ ;  
 (д)  $y''_1, e = O(h^2)$ ;      (е)  $y'_2, e = O(h^3)$ ;  
 (ж)  $y'_1, e = O(h^3)$ ;      (з)  $y', e = O(h^3)$ ;  
 (и)  $y''_0, e = O(h^2)$ ;      (к)  $y''_3, e = O(h^2)$ .

В каждом случае определить главный член погрешности.

О т в е т:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad y'_0 &= \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}, & e &\cong \frac{h^2 y_0'''}{3}; \\ \text{(в)} \quad y'_2 &= \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}, & e &\cong \frac{h^2 y_2'''}{3}; \\ \text{(д)} \quad y''_1 &= \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2}, & e &\cong \frac{h^2 y_1^{IV}}{12}; \\ \text{(ж)} \quad y'_1 &= \frac{-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3}{6h}, & e &\cong \frac{h^3 y_1^{IV}}{12}; \\ \text{(и)} \quad y''_0 &= \frac{2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{h^2}, & e &\cong \frac{11h^2 y_0^{IV}}{12}. \end{aligned}$$

6. Даны пять равноотстоящих узловых значений:  $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$ . Методом степенных рядов выразить через эти значения следующие производные (с указанной точностью):

- (а)  $y'_1, e = O(h^4)$ ;      (б)  $y''_2, e = O(h^4)$ ;  
 (в)  $y_0''', e = O(h^2)$ ;      (г)  $y_0'', e = O(h^3)$ ;  
 (д)  $y_2''', e = O(h^2)$ .

В каждом случае определить главный член погрешности.

О т в е т:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad y'_1 &= \frac{1}{24h} (-6y_0 - 20y_1 + 36y_2 - 12y_3 + 2y_4), \\ e &\cong -\frac{1}{20} h^4 y_1^V; \\ \text{(в)} \quad y_0''' &= \frac{1}{4h^3} (-10y_0 + 36y_1 - 48y_2 + 28y_3 - 6y_4), \\ e &\cong \frac{21}{12} h^2 y_0^V; \\ \text{(д)} \quad y_2''' &= \frac{1}{4h^3} (-2y_0 + 4y_1 - 4y_3 + 2y_4), \\ e &\cong -\frac{1}{4} h^2 y_2^V. \end{aligned}$$

7. Даны шесть равноотстоящих узловых значений:  $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ . Методом степенных рядов выразить через эти значения следующие производные (с указанной точностью):

$$(a) y_4'', \quad e = O(h^4);$$

$$(б) y_3^{IV}, \quad e = O(h^2);$$

$$(в) y_2', \quad e = O(h^5).$$

В каждом случае определить главный член погрешности.

О т в е т:

$$(a) y_4'' = \frac{1}{60h^2} (5y_0 - 30y_1 + 70y_2 - 20y_3 - 75y_4 + 50y_5),$$

$$e \cong -\frac{13}{180} h^4 y_4^{IV};$$

$$(б) y_3^{IV} = \frac{1}{5h^4} (5y_1 - 20y_2 + 30y_3 - 20y_4 + 5y_5),$$

$$e \cong -\frac{1}{6} h^2 y_3^{VI};$$

$$(в) y_2' = \frac{1}{120h} (6y_0 - 60y_1 - 40y_2 + 120y_3 - 30y_4 + 4y_5),$$

$$e \cong -\frac{1}{60} h^5 y_2^{VI}.$$

8. Вывести равенство (3.6) § 3 методом степенных рядов. Доказать, что погрешность есть  $O(h^2)$  (воспользоваться точками фиг. 7, а).

9. Вывести равенство (3.7) § 3 методом степенных рядов. Доказать, что погрешность есть  $O(h^2)$  (воспользоваться точками фиг. 7, б).

10. Вывести методом степенных рядов четырехточечную формулу для вычисления  $y_i'''$  при расположении точек фиг. 7, а. Найти главный член погрешности.

О т в е т:

$$y_i''' = \frac{6y_r + 6\alpha(2+\alpha)y_l - 3\alpha(1+\alpha)y_{II} - 3(1+\alpha)(2+\alpha)y_i}{h^3\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)},$$

$$e \cong \frac{7(1+\alpha) - (1+\alpha^3)}{4\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)} h y_i^{IV}.$$

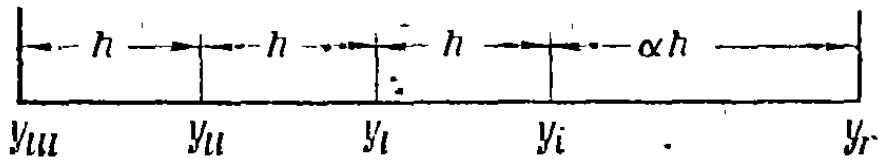
11. Вывести методом степенных рядов пятиточечную формулу для вычисления  $y_i'''$  при расположении точек фиг. 15. Найти главный член погрешности.

О т в е т:

$$y_i''' = [36y_r + (\alpha^4 - 25\alpha^2 - 60\alpha - 36)y_i + (-3\alpha^4 + 57\alpha^2 + 90\alpha)y_l + (3\alpha^4 - 39\alpha^2 - 36\alpha)y_{II} + (-\alpha^4 + 7\alpha^2 + 6\alpha)y_{III}] / h^3 (\alpha^4 + 18\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha),$$

$$e \cong \frac{h^2 (12\alpha^5 + 50\alpha^4 - 170\alpha^2 - 132\alpha) y_i^V}{40(\alpha^4 + 18\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha)}.$$

12. Вывести методом степенных рядов пятиточечную формулу для вычисления  $y_i^{IV}$  при расположении точек фиг. 15. Найти главный член погрешности.



Фиг. 15.

Ответ:

$$y_i^{IV} = [24y_r - (12\alpha^3 + 24\alpha^2 + 36\alpha + 24)y_i + (36\alpha^3 + 60\alpha^2 + 48\alpha)y_{II} - (36\alpha^3 + 48\alpha^2 + 12\alpha)y_{III} + (12\alpha^3 + 12\alpha^2)y_{III}] / h^4 (\alpha^4 + 18\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha),$$

$$e \cong \frac{h(-12\alpha^5 + 900\alpha^3 + 720\alpha^2 - 168\alpha)y_i^V}{6(\alpha^4 + 18\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha)}.$$

13. Даны равноотстоящие узловые значения  $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots$ . Выразить через эти значения с погрешностью порядка  $h$ : (а)  $y_i'''$ ; (б)  $y_i^{IV}$ ; (в)  $y_i^V$ , исходя из:

- (1) разложений в ряды по левым разностям;
- (2) интерполяционных полиномов, проходящих соответственно через 4, 5 и 6 точек, соседних (слева) с  $i$ ;
- (3) разложений в степенные ряды.

Там, где возможно, определить главный член погрешности.

Ответ:

$$(а) y_i''' = \frac{1}{h^3} (y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3});$$

$$(б) y_i^{IV} = \frac{1}{h^4} (y_i - 4y_{i-1} + 6y_{i-2} - 4y_{i-3} + y_{i-4});$$

$$(в) y_i^V = \frac{1}{h^5} (y_i - 5y_{i-1} + 10y_{i-2} - 10y_{i-3} + 5y_{i-4} - y_{i-5}).$$

14. Используя два первых члена разложений в ряды по левым разностям, найти приближенные выражения для следующих производных:

$$(а) y_i'; (б) y_i''; (в) y_i'''; (г) y_i^{IV}.$$

В каждом случае вычислить главный член погрешности.

Ответ:

$$(б) y_i'' = \frac{1}{h^2} (2y_i - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3}), \quad e \cong \frac{11}{12} h^2 y_i^{IV};$$

$$(г) y_i^{IV} = \frac{1}{h^4} (3y_i - 14y_{i-1} + 26y_{i-2} - 24y_{i-3} + 11y_{i-4} - 2y_{i-5}), \quad e \cong \frac{34}{12} h^2 y_i^{VI}.$$

15. Найти ошибку в таблице:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$y_i$	0,01746	0,03492	0,05241	0,07154	0,08749	0,10510

7	8	9
0,12278	0,14054	0,15838

Исправить эту ошибку, воспользовавшись линейной интерполяцией первых левых разностей.

Ответ:  $y_4 = 0,06993$ .

16. Найти ошибку в следующей таблице:

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i$	1,733	1,822	1,916	2,100	2,117	2,226	2,340	2,460

Исправить эту ошибку, воспользовавшись линейной интерполяцией вторых левых разностей.

17. Даны равноотстоящие узловые значения  $y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots$ . Выразить через эти значения с погрешностью порядка  $h$ : (а)  $y_i'''$ ; (б)  $y_i^{IV}$ ; (в)  $y_i^V$ , исходя из:

- (1) разложений в ряды по правым разностям;
- (2) интерполяционных многочленов, проходящих соответственно через 4, 5 и 6 точек, соседних (справа) с  $i$ ;
- (3) разложений в степенные ряды.

Там, где возможно, определить главный член погрешности.

Ответ:

$$(a) y_i''' = \frac{1}{h^3} (y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i);$$

$$(б) y_i^{IV} = \frac{1}{h^4} (y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i);$$

$$(в) y_i^V = \frac{1}{h^5} (y_{i+5} - 5y_{i+4} + 10y_{i+3} - 10y_{i+2} + 5y_{i+1} - y_i).$$



18. Используя два первых члена разложений в ряды по правым разностям, найти приближенные выражения для следующих производных:

(а)  $y'_i$ ; (б)  $y''_i$ ; (в)  $y'''_i$ ; (г)  $y^{IV}_i$ .

В каждом случае вычислить главный член погрешности.

О т в е т:

(б)  $y''_i = \frac{1}{h^2} (2y_i - 5y_{i+1} + 4y_{i+2} - y_{i+3}); e \cong \frac{11}{12} h^2 y^{IV}_i$ .

(г)  $y^{IV}_i = \frac{1}{h^4} (3y_i - 14y_{i+1} + 26y_{i+2} - 24y_{i+3} + 11y_{i+4} - 2y_{i+5}); e \cong \frac{17}{6} h^2 y^{VI}_i$ .

19. Вывести формулы Ньютона для интерполяции вперед или назад непосредственной подстановкой разностных разложений в степенной ряд § 6 (а).

20. Даны значения  $\operatorname{tg} x$  для  $x = 23^\circ (1^\circ) 28^\circ$ . Вычислить с пятью знаками по формулам Ньютона для интерполяции вперед или назад:

(а)  $\operatorname{tg} 23^\circ 15'$ ; (б)  $\operatorname{tg} 27^\circ 13'$ .

О т в е т: (а)  $\operatorname{tg} 23^\circ 15' = 0,42963$  (вперед);

(б)  $\operatorname{tg} 27^\circ 13' = 0,51433$  (назад).

З а м е ч а н и е. Запись  $x = a(h)b$  читается: значения  $x$  на отрезке  $[a; b]$  с шагом  $h$ .

21. Значения функции  $f(x)$  заданы таблицей:

$x_i$	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	1,00	1,50	2,20	3,10	4,60

Определить с тремя знаками:

(а)  $f(3,8)$  — по формуле Ньютона для интерполяции назад;

(б)  $f(1,2)$  — по формуле Ньютона для интерполяции вперед;

(в)  $f(5,12)$  — по формуле Ньютона для интерполяции вперед.

О т в е т: (б) 1,63.

22. Даны значения  $\sin x$  для  $x = 5^\circ (5^\circ) 30^\circ$ . Вычислить с пятью знаками посредством интерполяций:

(а)  $\sin 5^\circ 14'$ ; (б)  $\sin 25^\circ 25'$ ; (в)  $\sin 17^\circ 30'$ .

О т в е т: (б) 0,42917.

23. Даны значения  $x^3$  для  $x = 1 (1) 5$ . Вычислить посредством интерполяций кубы следующих чисел:

(а) 4,37; (б) 1,35; (в) 3,46.

О т в е т: (а)  $(4,37)^3 = 83,45$  (назад); (в)  $(3,46)^3 = 41,42$  (вперед и назад).

24. Даны равноотстоящие узловые значения ...  $u_{11}, u_1, u_i, u_r, u_{rr}, \dots$ . Найти с погрешностью порядка  $h^2$  выражения для: (а)  $y_i''$ ; (б)  $y_i'''$ ; (в)  $y_i^{IV}$ ; (г)  $y_i^V$ , воспользовавшись при этом:

(1) разложениями в ряды по центральным разностям (усредненным и неусредненным);

(2) интерполяционными полиномами, проходящими через узловые значения в точках, расположенных симметрично относительно  $i$ ;

(3) разложениями в степенные ряды.

Ответ: см. фиг. 12, а.

25. Воспользовавшись первыми двумя членами разложения в ряд по центральным разностям, найти приближенные значения следующих производных:

(а)  $y_i'$ ; (б)  $y_i''$ ; (в)  $y_i'''$ ; (г)  $y_i^{IV}$ .

Ответ: см. фиг. 12, б.

26. Составить таблицы правых, левых и центральных разностей для следующих функций:

(а)  $\operatorname{tg} x$ ;  $x = 1^\circ (1^\circ) 6^\circ$ .

(б)  $\operatorname{ch} x$ ;  $x = 0,1 (0,1) 0,7$ .

(в)  $e^x$ ;  $x = 0 (0,5) 3,0$ .

(г)  $J_0(x)$ ;  $x = 0 (0,1) 1,0$ .

(д)  $x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ ;  $x = 0 (1) 4$ .

(е)  $\ln \sin x$ ;  $x = 5^\circ (5^\circ) 25^\circ$ .

(ж)  $e^{-x}$ ;  $x = 0 (0,5) 3,0$ .

(з)  $\operatorname{th} x$ ;  $x = 0,1 (0,1) 0,7$ .

27. Значения функции Бесселя  $J_0(x)$  заданы таблицей:

$x$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
$J_0(x)$	1,0000	0,9975	0,9900	0,9776	0,9604

Воспользовавшись первым членом разложения каждой из указанных производных в ряд по левым, правым или центральным разностям, вычислить с заданной точностью:

(а)  $\left. \frac{dJ_0}{dx} \right|_{x=0,1}$ ,  $e = O(h^2)$ ; (б)  $\left. \frac{d^2J_0}{dx^2} \right|_{x=0,1}$ ,  $e = O(h)$ ;

(в)  $\left. \frac{d^2J_0}{dx^2} \right|_{x=,1}$ ,  $e = O(h^2)$ ; (г)  $\left. \frac{d^4J_0}{dx^4} \right|_{x=0,2}$ ,  $e = O(h^2)$ ;

(д)  $\left. \frac{d^8J_0}{dx^8} \right|_{x=0}$ ,  $e = O(h)$ ; (е)  $\left. \frac{d^2J_0}{dx^2} \right|_{x=0,4}$ ,  $e = O(h)$ ;

(ж)  $\left. \frac{dJ_0}{dx} \right|_{x=0,4}$ ,  $e = O(h)$ .

Ответ: (а) — 0,0500; (в) — 0,5000; (д) — 0,1000; (ж) — 0,1720.

28. Значения функции Бесселя  $Y_1(x)$  заданы таблицей:

$x$	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4
$Y_1(x)$	-0,1750	-0,1998	-0,2223	-0,2422	-0,2596

Воспользовавшись первым членом разложения каждой из указанных производных в ряд по левым, правым или центральным разностям, вычислить с заданной точностью:

- (а)  $\left. \frac{d^4 Y_1}{dx^4} \right|_{x=6,2}$ ,  $e = O(h^3)$ ; (б)  $\left. \frac{dY_1}{dx} \right|_{x=6,0}$ ,  $e = O(h)$ ;  
 (в)  $\left. \frac{d^3 Y_1}{dx^3} \right|_{x=6,3}$ ,  $e = O(h)$ ; (г)  $\left. \frac{d^2 Y_1}{dx^2} \right|_{x=6,3}$ ,  $e = O(h^2)$ .  
 (д)  $\left. \frac{dY_1}{dx} \right|_{x=6,4}$ ,  $e = O(h)$ .

О т в е т: (б) - 0,2480, (г) 0,2500.

29. Найти неправильное значение  $e^{-x}$  в следующей таблице:

$x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$e^{-x}$	1,000	0,905	0,819	0,741	0,640	0,607	0,549	0,497

Исправить это значение с помощью линейной интерполяции вторых разностей.

О т в е т:  $e^{-0,4} = 0,671$ .

30. Дана таблица значений функции  $y$ :

$x$	0,0	1,2	2,4	3,9
$y$	3,41	2,68	1,37	-1,48

Воспользовавшись формулами для неравноотстоящих узлов, вычислить с указанной точностью следующие производные:

- (а)  $y'|_{x=2,4}$ ,  $e = O(h)$ ; (б)  $y'|_{x=2,4}$ ,  $e = O(h^2)$ ;  
 (в)  $y'|_{x=1,2}$ ,  $e = O(h^2)$ ; (г)  $y''|_{x=2,4}$ ,  $e = O(h)$ ;  
 (д)  $y''|_{x=2,4}$ ,  $e = O(h^2)$ .

О т в е т: (б) - 1,451; (г) - 0,5988.

31. Дана таблица значений функции  $J_0(x)$ :

$x$	0,0	0,1	0,2	0,4
$J_0(x)$	1,0000	0,9975	0,9900	0,9604

Воспользовавшись формулами для неравноотстоящих узлов, вычислить с указанной точностью следующие производные:

- (а)  $\left. \frac{dJ_0}{dx} \right]_{x=0,2}$ ,  $e \cong O(h^2)$ ; (б)  $\left. \frac{dJ_0}{dx} \right]_{x=0,2}$ ,  $e = O(h)$ ;  
 (в)  $\left. \frac{d^2J_0}{dx^2} \right]_{x=0,2}$ ,  $e = O(h^2)$ ; (г)  $\left. \frac{d^2J_0}{dx^2} \right]_{x=0,2}$ ,  $e = O(h)$ ;  
 (д)  $\left. \frac{d^2J_0}{dx^2} \right]_{x=0,1}$ ,  $e = O(h^2)$ .

О т в е т: (а) — 0,0993; (в) — 0,4900; (д) — 0,5000.

32. Если вычисления велись по формуле с погрешностью  $h^4$  и если в разложении погрешности по степеням  $h$  можно ограничиться двумя членами:

$$e \cong c_2 h^4 + c_3 h^6,$$

то допустима экстраполяция порядка  $(h^4, h^6)$ . Найти формулу для коэффициентов этой экстраполяции. Вычислить значения коэффициентов, если значения  $h$  обратно пропорциональны:

(а) 3, 2, 1; (б) 4, 3, 2; (в) 5, 4, 3.

О т в е т:

$$K_{ijk} = \frac{n_k^6 (n_j^2 - n_i^2) k_k - n_j^6 (n_k^2 - n_i^2) k_j + n_i^6 (n_k^2 - n_j^2) k_i}{n_k^6 (n_j^2 - n_i^2) - n_j^6 (n_k^2 - n_i^2) + n_i^6 (n_k^2 - n_j^2)}.$$

(а) 1,301786; — 0,304762; 0,002976. (б) 1,681445; — 0,718227; 0,036782.  
 (в) 2,170139; 1,300317; 0,130179.

33. Воспользовавшись таблицей задачи 26, (г), вычислить вторую производную функции  $J_0(x)$  с помощью центрально-разностной формулы с погрешностью порядка  $h^2$ , с шагом  $h = 0,1$  и  $h = 0,2$ , в точках: (а)  $x = 0,2$  и (б)  $x = 0,5$ . Прокстраполировать полученные значения и сравнить результат со значениями, найденными по формуле порядка  $h^4$  с шагом  $h = 0,1$ .

О т в е т: (б)  $h = 0,2$ ;  $J_0''(0,5) = -0,4550$ .  $h = 0,1$ ;  $J_0''(0,5) = -0,4600$ .  
 $J_0''(0,5)_{0,1; 0,2} = -0,4617$ .

34. (а) Вычислить вторую производную  $\sin x$  в точке  $x = \pi/4$  по центрально-разностным формулам с погрешностью: (1) порядка  $h^2$ ; (2) порядка  $h^4$ . Вычисления провести с шагами:  $h = \pi/4$ ;  $h = \pi/8$ ;  $h = \pi/16$ . Прокстраполировать полученные результаты и сравнить с истинным значением.

(б) Вычислить первую производную  $\sin x$  в точке  $x = \pi/4$  с погрешностями, указанными в (а), с шагом  $h = \pi/8$  и  $h = \pi/16$ .

О т в е т:

$$(a) e = O(h^2); \quad h = \frac{\pi}{4}; \quad y'' = -0,67151.$$

$$h = \frac{\pi}{8}; \quad y'' = -0,69813.$$

$$h = \frac{\pi}{16}; \quad y'' = -0,70500.$$

$$e = O(h^4); \quad h = \frac{\pi}{8}; \quad y'' = -0,70702.$$

$$h = \frac{\pi}{16}; \quad y'' = -0,70729.$$

$$(б) e = O(h^3); \quad h = \frac{\pi}{4}; \quad y' = 0,63662.$$

$$h = \frac{\pi}{8}; \quad y' = 0,68908.$$

$$h = \frac{\pi}{16}; \quad y' = 0,70257.$$

$$e = O(h^4); \quad h = \frac{\pi}{8}; \quad y' = 0,70656.$$

$$h = \frac{\pi}{16}; \quad y' = 0,70707.$$

35. Вычислить по формуле трапеций с указанными значениями  $n$  следующие интегралы:

$$(a) \int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx \quad (n = 2, 4, 6).$$

$$(б) \int_0^2 \sqrt{4x - x^2} \, dx \quad (n = 2, 4).$$

$$(в) \int_0^2 e^{-x^2} \, dx \quad (n = 2, 4).$$

Результаты проэкстраполировать.

О т в е т: (а)  $n = 2$ ; 1,571.  $n = 4$ ; 1,342.  $n = 6$ ; 1,335.  $n = 2,4$ ; 1,266.  $n = 4,6$ ; 1,330. Истинное значение = 1,333. (в)  $n = 2$ ; 0,877.  $n = 4$ ; 0,881.  $n = 2,4$ ; 0,8823. Истинное значение = 0,8821.

<sup>1)</sup> См. сноску на след. стр. — Прим. ред.

36. Вычислить по формуле Симпсона с указанными значениями  $n$  следующие интегралы:

$$(a) \int_0^2 \sqrt{4x - x^2} dx \quad (n = 2, 4), \quad (б) \int_2^6 x \sqrt{3 + 4x} dx \quad (n = 2, 4).$$

$$(в) \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx \quad (n = 2, 4), \quad (г) \int_1^3 x^2 \operatorname{sh} x dx \quad (n = 2, 4).$$

$$(д) \int_1^5 \frac{dx}{x} \quad (n = 2, 4, 6), \quad (е) \int_0^\pi \sin^3 x dx \quad (n = 2, 4, 6).$$

$$(ж) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{25 + x^2}} \quad (n = 2, 4), \quad (з) \int_0^4 \frac{dx}{(25 - x^2)^{3/2}} \quad (n = 2, 4).$$

Результаты проэкстраполировать.

О т в е т:

(б) $A_2 = 71,702.$	(г) $A_2 = 49,796.$
$A_4 = 71,691.$	$A_4 = 48,464.$
$A_{2,4} = 71,690.$	$A_{2,4} = 48,375.$
$A = 71,693.$	$A = 48,371.$
(е) $A_2 = 2,094.$	(з) $A_2 = 0,0577.$
$A_4 = 1,268.$	$A_4 = 0,0541.$
$A_6 = 1,330.$	$A_{2,4} = 0,0538.$
$A_{2,6} = 1,3205.$	$A = 0,05333.$
$A = 1,333.$	

37. Разбив интервал интегрирования на две и на четыре части, вычислить по формуле трапеций следующие интегралы:

$$(a) \int_0^{\pi/2} \cos x dx; \quad (б) \int_3^7 x^2 \ln x dx;$$

$$(в) \int_1^{11} \sqrt{1 + x^2} dx; \quad (г) \int_{..}^{0,8} \operatorname{ch} x^2 dx;$$

$$(д) \int_3^7 \ln x dx; \quad (е) \int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{16x - x^2}};$$

1) Производная подинтегральной функции на одном из концов интервала интегрирования обращается в бесконечность. Поэтому применение интерполяционных методов здесь дает заметно большую погрешность, чем в других примерах. — Прим. ред.

$$(ж) \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$(з) \int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}};$$

$$(и) 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Результаты проэкстраполировать.

Ответ: (б)  $A_2 = 185,7090$ ;  $A_4 = 179,5385$ ;

$$A_{2,4} = 177,4819; A = 177,4836.$$

(г)  $A_2 = 0,848$ ;  $A_4 = 0,837$ ;  $A_{2,4} = 0,834$ .

(е)  $A_2 = 0,5275$ ;  $A_4 = 0,5244$ ;  $A_{2,4} = 0,5234$ ;

$$A = 0,5236.$$

(з)  $A_2 = 0,9695$ ;  $A_4 = 0,9389$ ;  $A_{2,4} = 0,9286$ ;

$$A = 0,9267.$$

38. То же по формуле Симпсона.

Ответ: (б)  $A_2 = 177,454$ ;  $A_4 = 177,481$ ;  $A_{2,4} = 177,483$ .

(г)  $A_2 = 0,835$ ;  $A_4 = 0,834$ ;  $A_{2,4} = 0,834$ ;

(е)  $A_2 = 0,5238$ ;  $A_4 = 0,5234$ ;  $A_{2,4} = 0,5234$ .

(з)  $A_2 = 0,9372$ ;  $A_4 = 0,9286$ ;  $A_{2,4} = 0,9280$ .

(и)  $A_2 = 3,1333$ ;  $A_4 = 3,1413$ ;  $A_{2,4} = 3,1419$ ;

$$A = \pi.$$

## Г Л А В А III

### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

#### § 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.2)$$

Численное решение этой задачи <sup>1)</sup> состоит в определении значений функции  $y(x)$  в узлах некоторой сетки с постоянным шагом. Указанные узловые значения вычисляют последовательно друг за другом, отправляясь от начальной точки [начальную точку  $x = 0$  можно обычно принять за начало отсчета, как это сделано, в частности, в (1.2)].

Для определения значения  $y$  в точке  $x_i = ih$  ( $i$  целое) по значениям в предыдущих точках  $x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}, \dots$  составляются рекуррентные соотношения. Так как этими соотношениями можно воспользоваться лишь тогда, когда в нескольких первых (от 1 до 4) точках функция  $y$  уже известна, то эти первые значения приходится вычислять иным путем, обычно разложением в степенной ряд.

#### § 2. НАЧАЛО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Начало интегрирования дифференциального уравнения первого порядка методом степенных рядов мы продемонстрируем прежде всего на примере *линейного* уравнения с переменными коэффициентами.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть (1) температура атмосферы не зависит от высоты над поверхностью земли; (2) воздух есть идеальный газ; (3) гравитационные силы подчиняются закону Ньютона (т. е. обратно пропорциональны квадратам расстояний). Тогда можно доказать, что давление атмосферы  $p$  на расстоянии  $x$  от центра земли (фиг. 16) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dp}{dx} + \frac{K}{x^2} p = 0, \quad (2.1)$$

<sup>1)</sup> Задача нахождения функции  $y$ , удовлетворяющей уравнению (1.1) и условиям (1.2), называется задачей Коши. — Прим. перев.



причем на поверхности земли

$$p(R) = p_0 = 1 \text{ атм.} \quad (2.2)$$

Здесь  $R$  — радиус земли, а  $K = kM/cg$  ( $k$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса земли,  $c$  — термодинамическая постоянная,  $g$  — ускорение силы тяжести) имеет размерность длины.

Подлежащее интегрированию уравнение удобно привести к безразмерной форме. Для этого обозначим через  $h$  высоту над поверхностью земли ( $x = h + R$ ) и положим

$$z = \frac{h}{R};$$

тогда  $x = R(1 + z)$ ;  $dx = R dz$ .

Пусть, кроме того,

$$p(x) = p[R(1 + z)] = p_0 y(z). \quad (2.3)$$

В указанных обозначениях уравнение (2.1) переходит в

$$\frac{dy}{dz} + \frac{K}{R} \frac{1}{(1 + z)^2} y = 0.$$

Так как  $z \ll 1$ <sup>1)</sup>, то можно пренебречь величиной  $z^2$ . Тогда уравнение примет следующий вид:

$$\frac{dy}{dz} + \frac{K}{R} \frac{1}{1 + 2z} y = 0.$$

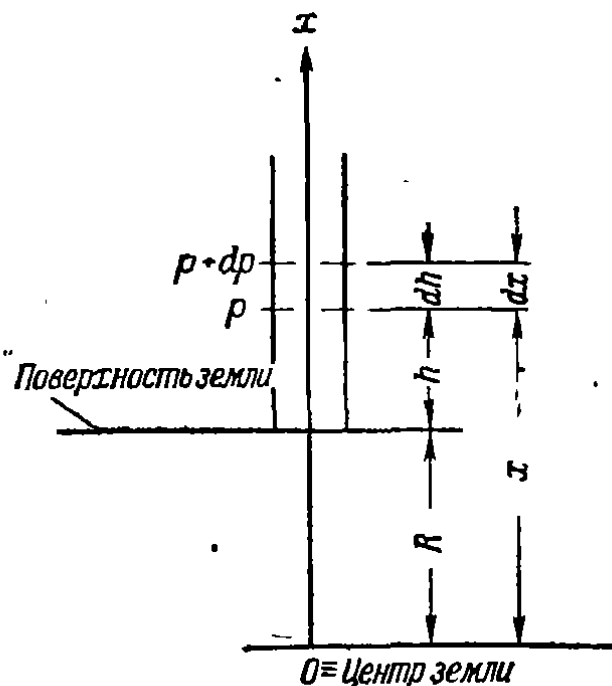
Если значения  $K$ ,  $M$ ,  $c$ ,  $R$ ,  $g$  выбраны в согласованной системе единиц, то безразмерное отношение  $K/R$  равно 0,9. Таким образом,

$$y' = -\frac{0,9}{1 + 2z} y, \quad (2.4)$$

а начальное условие, в силу (2.2) и (2.3), оказывается следующим:

$$y(0) = y_0 = 1. \quad (2.5)$$

Для решения задачи Коши (2.4), (2.5) методом степенных рядов вычисляем прежде всего первую, вторую и т. д. производные функции  $y$  в точке  $z = 0$ . Это можно сделать последовательным диффе-



Фиг. 16.

<sup>1)</sup> Вблизи поверхности земли. — Прим. перев.

ренцированием уравнения (2.4), используя при этом равенство (2.5):

$$y'(0) = -0,9 [(1+2z)^{-1} y]_{z=0} = -0,9,$$

$$y''(0) = -0,9 [(1+2z)^{-1} y' - 2(1+2z)^{-2} y]_{z=0} = \\ = -0,9 (y'_0 - 2y_0) = +2,610,$$

$$y'''(0) = -0,9 [(1+2z)^{-1} y'' - 4(1+2z)^{-2} y' + 8(1+2z)^{-3} y]_{z=0} = \\ = -0,9 (y''_0 - 4y'_0 + 8y_0) = -12,79,$$

$$y^{IV}(0) = -0,9 [(1+2z)^{-1} y''' - 6(1+2z)^{-2} y'' + 24(1+2z)^{-3} y' - \\ - 48(1+2z)^{-4} y]_{z=0} = \\ = -0,9 (y'''_0 - 6y''_0 + 24y'_0 - 48y_0) = +88,24.$$

Таким образом, ограничиваясь первыми пятью членами разложения, получаем в окрестности точки  $z=0$  следующее приближение функции  $y(z)$ :

Таблица 25

$z$	$y_T(z)$	$y(z)$
0	1,0000	1,0000
0,02	0,9825	0,9825
0,04	0,9660	0,9660
0,06	0,9503	0,9503
0,08	0,9354	0,9354
0,10	0,9213	0,9212
0,20	0,8610	0,8595
0,30	0,8197	0,8094

$$y_T(z) = y_0 + \frac{y'_0}{1!} z + \frac{y''_0}{2!} z^2 + \\ + \frac{y'''_0}{3!} z^3 + \frac{y^{IV}_0}{4!} z^4 = 1 - 0,9z + \\ + 1,305z^2 - 2,132z^3 + 3,677z^4.$$

В табл. 25 приведены значения  $y_T(z)$  для  $z = 0(0,02)0,10$ , а также для  $z = 0,20$  и  $z = 0,30$ . Рядом выписаны точные значения  $y(z)$  для соответствующих  $z$ . Эти точные значения можно получить, проинтегрировав уравнение (2.4) аналитически (разделением переменных<sup>1)</sup>):

$$\frac{dy}{y} = -0,9 \frac{dz}{1+2z},$$

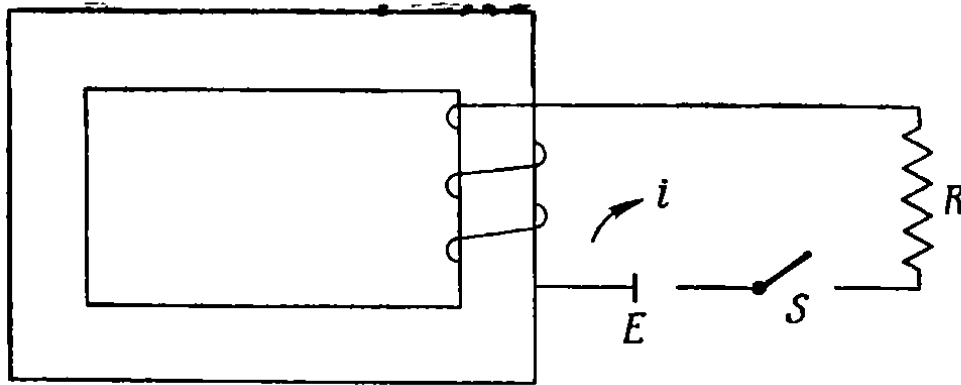
$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \ln \frac{y}{y_0} = -0,9 \int \frac{dz}{1+2z} = \\ = -0,45 \ln(1+2z),$$

$$y(z) = (1+2z)^{-0,45}.$$

Погрешность  $y_T(0,3)$  составляет  $-1,27\%$ .

<sup>1)</sup> Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, М.—Л., 1953, стр. 12. — Прим. перев.

Проиллюстрируем теперь методику интегрирования при помощи степенных рядов для *нелинейного* дифференциального уравнения первого порядка на следующем примере. Рассмотрим электрическую



Фиг. 17.

цепь, изображенную на фиг. 17. Эта цепь содержит железный сердечник, кривая намагничивания которого задается формулой

$$N \cdot i = 0,6 \cdot 10^5 \varphi + 0,0033 \cdot 10^{15} \varphi^3, \quad (a)$$

где  $\varphi$  — магнитный поток в веберах,  $N$  — число витков катушки,  $i$  — сила тока в амперах.

В применении к этой цепи закон Кирхгофа<sup>1)</sup> гласит:

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} = Ri + N \frac{d\varphi}{dt},$$

где время  $t$  выражено в секундах. Воспользовавшись соотношением (a), получим:

$$E = \frac{R}{N} (0,6 \cdot 10^5 \varphi + 0,0033 \cdot 10^{15} \varphi^3) + N \frac{d\varphi}{dt}.$$

Если мы будем измерять время в миллисекундах ( $\tau = 10^3 t$ ), а магнитный поток в  $10^{-5}$  веберов ( $\Phi = 10^5 \varphi$ ), то для частного случая  $E = 18$  в,  $N = 100$ ,  $R = 3000$  ом получим следующее *нелинейное* дифференциальное уравнение первого порядка<sup>2)</sup>:

$$\frac{d\Phi}{dt} + 1,8\Phi + 0,01\Phi^3 = 18. \quad (2.6)$$

Если ключ  $S$  замкнут в момент  $t = 0$ , то начальное условие есть

$$\Phi(0) = 0. \quad (2.7)$$

При  $t \rightarrow \infty$  поток  $\Phi$  стремится к своему максимальному значению  $\Phi_m$ . Ясно, что это значение можно определить из уравнения (2.6), положив

<sup>1)</sup> Нейман Л. Р. и Калантаров П. Л., Теоретические основы электротехники, ч. II, М., 1954, стр. 245 и след. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> В дальнейшем мы будем вместо  $\tau$  писать  $t$ . — *Прим. перев.*

в нем  $d\Phi/dt = 0$ . Таким образом,  $\Phi_m$  является корнем следующего кубического уравнения:

$$0,01\Phi^3 + 1,8\Phi - 18 = 0.$$

Так как единственный действительный корень этого уравнения равен 7,5802, то  $\Phi_m = 7,5802$ .

Для приведения уравнения (2.6) к безразмерной форме положим

$$\Phi(t) = \Phi_m y(t). \quad (2.8)$$

Тогда для безразмерной функции  $y(t)$  получим дифференциальное уравнение

$$\Phi_m \dot{y} = 18 - 1,8\Phi_m y - 0,01\Phi_m^3 y^3,$$

в котором  $\dot{y}$  обозначает  $dy/dt$ . Так как  $\Phi_m = 7,5802$ , то окончательно <sup>1)</sup>

$$\dot{y} = 2,3746 - 1,8y - 0,5746y^3, \quad (2.9)$$

причем из начального условия (2.7) следует, что

$$y(0) = 0. \quad (2.10)$$

Для решения задачи (2.9), (2.10) методом степенных рядов найдем прежде всего последовательным дифференцированием равенства (2.9) производные функции  $y$  в точке  $t = 0$ :

$$\dot{y}_0 = 2,3746;$$

$$\ddot{y}_0 = -1,8\dot{y}_0 - 0,5746 \cdot 3y_0^2 \dot{y}_0 = -4,2743;$$

$$\dddot{y}_0 = (-1,8 - 0,5746 \cdot 3y_0^2) \ddot{y}_0 - 0,5746 \cdot 6y_0 \dot{y}_0^2 = 7,6937;$$

$$y_0^{IV} = (-1,8 - 0,5746 \cdot 3y_0^2) \ddot{y}_0 - 0,5746 \cdot 6(3y_0 \ddot{y}_0 + \dot{y}_0^2) \dot{y}_0 = \\ = -60,011;$$

$$y_0^V = (-1,8 - 0,5746 \cdot 3y_0^2) y_0^{IV} - 0,5746 \cdot 6(4y_0 \dot{y}_0 \ddot{y}_0 + \\ + 3y_0 \ddot{y}_0^2 + 6\dot{y}_0^2 \ddot{y}_0) = \\ = 606,58.$$

При этих значениях производных первые пять членов разложения  $y(t)$  в степенной ряд в окрестности точки  $t = 0$  таковы:

$$y(t) = 2,3746t - 2,1372t^2 + 1,2823t^3 - 2,5005t^4 + 5,0548t^5.$$

<sup>1)</sup> Полученное уравнение нельзя назвать безразмерным, так как его коэффициенты не безразмерны и в уравнение входит время (через  $\dot{y}$ ). — Прим. ред.

Значения  $y(t)$ , вычисленные согласно этому разложению для  $t = 0, 0,05, 0,20$  и  $t = 0,30$ , приведены во втором столбце табл. 26. В третьем столбце этой таблицы выписаны приближенные значения  $y_L(t)$  функции  $y(t)$ , полученные линеаризацией уравнения (2.9): если в этом уравнении отбросить член, содержащий  $y^3$ , то решение можно найти аналитически. Оно имеет следующий вид:

$$y_L(t) = 1,3192(1 - e^{-1,8t}).$$

Задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка всегда можно решить описанным выше методом. При этом число членов разложения следует выбирать в каждом отдельном случае в зависимости от требуемой точности и характера задачи.

Таблица 26

$t$	$y(t)$	$y_L(t)$
0	0	0
0,05	0,1135	0,1136
0,10	0,2172	0,2173
0,15	0,3116	0,3121
0,20	0,3973	0,3988
0,30	0,5476	0,5505

### § 3. НАЧАЛО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

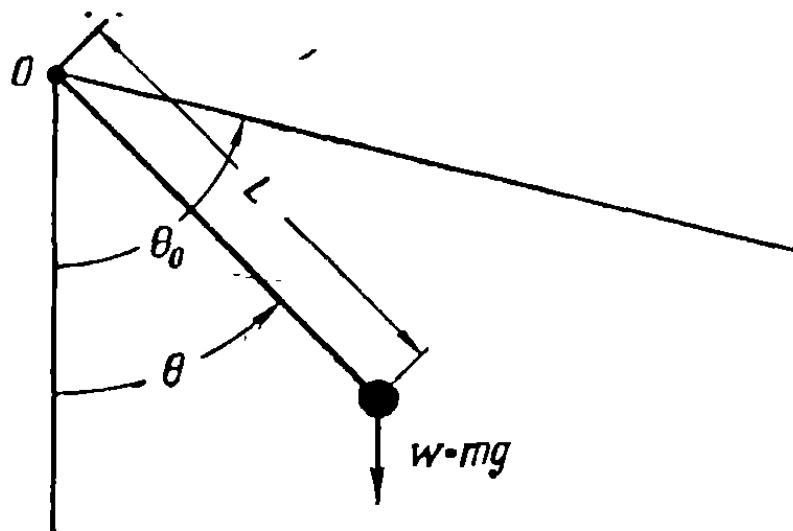
Колебания (в пустоте) математического маятника, отклоненного в момент  $t = 0$  от положения равновесия на угол  $\theta_0$ , удовлетворяют хорошо известному нелинейному дифференциальному уравнению <sup>1)</sup>

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (3.1)$$

и начальным условиям

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad (3.2)$$

где  $\theta$  — угол между нитью и вертикалью,  $t$  — время,  $g$  — ускорение силы тяжести и  $L$  — длина нити (фиг. 18).



Фиг. 18.

Точное решение задачи (3.1), (3.2) не выражается через элементарные функции, но может быть найдено в форме так называемых

<sup>1)</sup> Хайкин С. Э., Механика, М.—Л., 1948, стр. 149. — Прим. перев.

эллиптических интегралов<sup>1)</sup>. В частности, период колебания маятника равен

$$T = 4K\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (a)$$

где  $K$  — полный эллиптический интеграл первого рода<sup>2)</sup>. Для  $\theta_0 = 120^\circ$   $K(\theta_0/2) = 2,1565$ . Поэтому при  $g = 9,8$  м/сек<sup>2</sup>,  $L = 0,98$  м период  $T = 2,7276$  сек.

Для приближенного решения задачи приведем ее к безразмерной форме, положив

$$t = \frac{T}{4} \tau, \quad dt = \frac{T}{4} d\tau.$$

Тогда

$$(dt)^2 = \left(\frac{T}{4}\right)^2 (d\tau)^2 = (0,6819)^2 (d\tau)^2 = 0,46499 d\tau^2. \quad (б)$$

Уравнение (3.1) при  $g/L = 10$  сек<sup>-2</sup> примет вид

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} \equiv \ddot{\theta} = -4,6499 \sin \theta, \quad (3.3)$$

а начальные условия (3.2) перейдут в следующие:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \theta_0 = 120^\circ = 2,0944 \text{ радианов}, \\ \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

(точка обозначает дифференцирование по  $\tau$ ). Из (3.3) и (3.4) получим

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_0 &= -4,6499 \sin \theta_0 = -4,0268, \\ \ddot{\theta}_0 &= -4,6499 \cos \theta_0 \cdot \dot{\theta}_0 = 0, \\ \theta_0^{IV} &= -4,6499 (\cos \theta_0 \cdot \ddot{\theta}_0 - \sin \theta_0 \cdot \dot{\theta}^2) = -9,3623. \end{aligned}$$

Поэтому имеет место следующее разложение функции  $\theta(\tau)$  в степенной ряд:

$$\theta(\tau) \cong 2,0944 - 2,0134\tau^2 - 0,3901\tau^4. \quad (3.5)$$

В табл. 27 приведены значения  $\theta$ , вычисленные согласно этому разложению для  $\tau = 0(0,1)0,4$ .

Если  $\theta$  столь мало, что можно считать  $\sin \theta \cong \theta$ , то (3.3) перейдет в уравнение

$$\ddot{\theta} = -4,6499\theta,$$

<sup>1)</sup> Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, М. — Л., 1950, стр. 591. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Он затабулирован, например, в справочнике Б. И. Сегала и К. А. Семендяева „Пятизначные математические таблицы“, М. — Л., 1948. — Прим. перев.

решение которого есть

$$\theta_L = 2,0944 \cos(2,1564\tau). \quad (в)$$

Значения  $\theta_L$  приведены для сравнения в третьем столбце табл. 27.

Задача о колебаниях маятника в вязкой среде не может быть решена с помощью эллиптических интегралов; решение же ее методом степенных рядов не вызывает дополнительных затруднений.

Таблица 27

$\tau = t/0,6819$	$\theta$	$\theta_L$
0	2,0944	2,0944
0,1	2,0742	2,0458
0,2	2,0132	1,9026
0,3	1,9100	1,6713
0,4	1,7623	1,3624

Дифференциальное уравнение содержит в этом случае добавочное слагаемое  $\mu \frac{d\theta}{dt}$ , где  $\mu$  — коэффициент сопротивления. Если  $\mu = 0,5875 \text{ сек.}^{-1}$  и  $g/L = 10 \text{ сек.}^{-2}$ , то (3.1) переходит в уравнение<sup>1)</sup>

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 0,5875 \frac{d\theta}{dt} + 10 \sin \theta = 0. \quad (3.6)$$

Мы снова положим  $t = \frac{T}{4} \tau = 0,6819\tau$  (где  $T$  — период незатухающих колебаний), и тогда уравнение примет следующий вид:

$$\ddot{\theta} + 0,4 \dot{\theta} + 4,6499 \sin \theta = 0 \quad (3.7)$$

(точка обозначает дифференцирование по  $\tau$ ). Начальные условия (3.4), очевидно, остаются прежними. Из уравнения (3.7) и его производных находим:

$$\ddot{\theta}_0 = -0,4 \dot{\theta}_0 - 4,6499 \sin \theta_0 = -4,0268,$$

$$\ddot{\theta}_0 = -0,4 \ddot{\theta}_0 - 4,6499 \cos \theta_0 \cdot \dot{\theta}_0 = 1,6107,$$

$$\theta^{IV} = -0,4 \ddot{\theta}_0 - 4,6499 \cos \theta_0 \cdot \ddot{\theta}_0 + 4,6499 \sin \theta_0 \cdot \dot{\theta}_0^2 = -10,006.$$

Таким образом, имеет место разложение

$$\theta(\tau) = 2,0944 - 2,0134\tau^2 + 0,2685\tau^3 - 0,4169\tau^4, \quad (3.8)$$

которое затабулировано в табл. 28 для  $\tau = 0(0,1)0,4$ .

Решение соответствующего линеаризованного уравнения, т. е. уравнения

$$\ddot{\theta} + 0,4 \dot{\theta} + 4,6499\theta = 0$$

<sup>1)</sup> Хайкин С. Э., Механика, М. — Л., 1948, стр. 401—406. — Прим. перев.

(характеристические корни равны  $-0,2 \pm 2,1471i$ ), дается формулой

$$\theta_L(\tau) = e^{-0,2\tau} (2,0944 \cos 2,1471\tau + 0,1951 \sin 2,1471\tau) \quad (г)$$

и затабулировано для сравнения в третьем столбце табл. 28.

Таблица 28

$\tau$	$\theta$	$\theta_L$	$\dot{\theta}$
0	2,0944	2,0944	0
0,1	2,0745	2,0465	-0,3963
0,2	2,0153	1,9076	-0,7865
0,3	1,9171	1,6875	-1,1806
0,4	1,7788	1,3994	-1,5886

Четвертый столбец этой таблицы содержит значения  $\dot{\theta}$ , полученные дифференцированием равенства (3.8):

$$\dot{\theta} = -4,0268\tau + 0,8054\tau^2 - 1,6677\tau^3.$$

Эти значения понадобятся нам в дальнейшем.

Описанный выше метод годится для уравнений любого порядка; практическое его значение состоит в том, что он позволяет найти решение в окрестности начальной точки. Увеличение расстояния от начальной точки приводит, очевидно, к увеличению погрешности.

Поэтому для получения заданной точности приходится учитывать большое число членов ряда, а от этого сильно возрастает объем работы. Вследствие сказанного более удобно продолжать решение другими методами. Некоторые из них описываются ниже.

#### § 4. МЕТОД АДАМСА

Предположим, что решение уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad (4.1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(0) = y_0, \quad (4.2)$$

найденно в окрестности начальной точки методом степенных рядов<sup>1)</sup> (см. § 2). Для отыскания решения в остальных узлах сетки можно воспользоваться формулой Адамса, выражающей  $y$  через левые разности функции  $f$  — правой части уравнения (4.1).

<sup>1)</sup> Для получения нескольких первых точек интегральной кривой, необходимых для дальнейшего применения формулы Адамса и других аналогичных формул, кроме разложения в ряд Тейлора, часто пользуются специально для этого разработанным методом последовательных приближений. См., например, Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, М. — Л., 1954. — Прим. ред.



Для вывода этой формулы разложим  $y(x+h)$  в окрестности точки  $x$  в степенной ряд:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \\ + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x) + \frac{h^5}{120} y^V(x) + \frac{h^6}{720} y^{VI}(x) + \dots$$

и подставим в правую часть этого разложения вместо  $y^{(n)}$  ее значение  $d^{(n-1)}f/dx^{n-1} = f^{(n-1)}(x, y)$ , найденное из (4.1):

$$y(x+h) = y(x) + h \left[ f(x, y) + \frac{h}{2} f'(x, y) + \frac{h^2}{6} f''(x, y) + \right. \\ \left. + \frac{h^3}{24} f'''(x, y) + \frac{h^4}{120} f^{IV}(x, y) + \frac{h^5}{720} f^V(x, y) + \dots \right].$$

Каждую входящую в последнее равенство полную производную функции  $f(x, y)$  по  $x$  заменим ее разложением в ряд по левым разностям, согласно соотношениям (4.16) и (4.17) гл. II. Если положить

$$x = ih, \quad y(x) = y_i, \quad y(x+h) = y_{i+1}, \quad f(x_i, y_i) = f_i,$$

то после указанной замены наше равенство примет следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + h \left[ f_i + \frac{1}{2} \left( \nabla + \frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{3} \nabla^3 + \frac{1}{4} \nabla^4 + \frac{1}{5} \nabla^5 + \dots \right) f_i + \right. \\ + \frac{1}{6} \left( \nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12} \nabla^4 + \frac{5}{6} \nabla^5 + \dots \right) f_i + \\ + \frac{1}{24} \left( \nabla^3 + \frac{3}{2} \nabla^4 + \frac{7}{4} \nabla^5 + \dots \right) f_i + \frac{1}{120} \left( \nabla^4 + 2\nabla^5 + \dots \right) f_i + \\ \left. + \frac{1}{720} \left( \nabla^5 + \dots \right) f_i + \dots \right].$$

Собрав слагаемые с одинаковыми степенями  $\nabla$ , придем к рекуррентной формуле Адамса

$$y_{i+1} = y_i + h \left[ 1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \frac{3}{8} \nabla^3 + \frac{251}{720} \nabla^4 + \right. \\ \left. + \frac{95}{288} \nabla^5 + \dots \right] f_i. \quad (4.3)$$

Число членов, которым следует ограничиться при решении задачи, зависит от требуемой точности и, кроме того, от числа значений, найденных в окрестности начальной точки методом степенных рядов.

В табл. 29 формула Адамса использована для решения нелинейной задачи из § 2 [равенства (2.9) и (2.10)]:

$$\dot{y} = f(y) = 2,3746 - 1,8y - 0,5746y^3, \quad (a) \\ y(0) = 0.$$

Таблица 29

$t$	$t$	$y_i$	$y_i^3$	$f_i$	$\nabla f_i$	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$y_L$
0	0	0	0	2,3746				0
1	0,1	0,2172	0,0103	1,9777	-0,3969			0,2173
2	0,2	0,3973	0,0627	1,6234	-0,3543	0,0426		0,3988
3	0,3	0,5476	0,1642	1,2946	-0,3288	0,0255	-0,0171	0,5505
4	0,4	0,6610	0,2888	1,0189	-0,2757	0,0531	0,0276	0,6770
5	0,5	0,7523	0,4258	0,7758	-0,2431	0,0326	-0,0205	0,7828
6	0,6	0,8183	0,5479	0,5868	-0,1890	0,0541	0,0215	0,8712
7	0,7	0,8706	0,6598	0,4284	-0,1584	0,0306	-0,0235	0,9449
8	0,8	0,9059	0,7435	0,3168	-0,1116	0,0468	0,0162	1,0067
9	0,9	0,9346	0,8164	0,2232	-0,0936	0,0180	-0,0288	1,0581
10	1,0	0,9519						1,1011
	$\infty$	1,0000						1,3192

В первых четырех строках этой таблицы содержатся: а) найденные методом степенных рядов значения  $y$  и  $y^3$  в точках  $t = 0; 0,1; 0,2; 0,3$  (см. табл. 26); б) вычисленные в тех же точках, согласно равенству (а), значения  $y = f(y)^1$ ; в) значения первых трех левых разностей  $f(y)$ .

<sup>1)</sup> В нашем случае независимое переменное не входит в правую часть, и уравнение (4.1) имеет более простой вид  $y' = f(y)$ .

Ограничиваясь первыми четырьмя членами формулы Адамса, получим при  $h = 0,1$ :

$$y_{i+1} = y_i + 0,1 \left[ f_i + \frac{1}{2} \nabla f_i + \frac{5}{12} \nabla^2 f_i + \frac{3}{8} \nabla^3 f_i \right]. \quad (6)$$

Это равенство позволяет вычислить  $y_4$  (т. е.  $y$  при  $t = 0,4$ ) по значениям  $y$ ,  $f$  и левых разностей  $f$  в точке  $0,3$ . Найдя  $y_4$ , определяем из уравнения (а)  $f_4$ , после чего составляем нужные разности. Теперь пользуемся равенством (б) для отыскания  $y_5$  и т. д. Полученные этим путем узловые значения функции  $y$  (до  $y_{10}$ ) выписаны в табл. 29.

В этой же таблице (в столбце  $y_L$ ) для сравнения приведены значения решения соответствующего линеаризованного уравнения:

$$\dot{y} = f(y) = 2,3746 - 1,8y.$$

Эти значения вычислялись по формуле (б) из § 2.

Проинтегрировав уравнение (а) настоящего параграфа методом разделения переменных<sup>1)</sup>, мы найдем  $t$  как функцию  $y$ :

$$t = 0,2838 \left[ -\ln(1-y) + \frac{1}{2} \ln \frac{y^2 + y + 4,1326}{4,1326} + \right. \\ \left. + 0,7613 \left( \operatorname{arctg} \frac{2y+1}{3,9409} - \operatorname{arctg} 0,2537 \right) \right]. \quad (в)$$

Согласно этой формуле, при  $y = 0,7523$  значение  $t$  равно  $0,5040$ , т. е. отличается от значения  $0,5$ , указанного в табл. 29; аналогично, при  $y = 0,9519$  значение  $t$  равно  $0,9974$ , а не  $1,0000$ .

Таблица 30

Для того чтобы определить погрешность нашего приближенного решения, проинтерполируем значения  $y$ , взятые из табл. 29, на  $t = 0,5040$  и  $t = 0,9974$ . Результаты интерполяции [проведенной по формуле (6.1) гл. II] приведены в табл. 30, где  $y$  — истинное значение,  $y_i$  — интерполированное значение,  $\epsilon$  — погрешность в  $\%$ .

$t$	0,5040	0,9974
$y_i$	0,7552	0,9513
$y$	0,7523	0,9519
$\epsilon$ (%)	0,38	0,06

Эти результаты говорят не только о малой величине погрешности, но и о том, что даже в тех случаях, когда дифференциальное уравнение можно решить аналитически, более экономным

<sup>1)</sup> Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, М.—Л., 1953, стр. 12. — Прим. перев.

часто оказывается численное интегрирование<sup>1)</sup>. Например, в рассматриваемом случае путь аналитического отыскания формулы (в) и определения по этой формуле численных значений  $y$  более громоздок, нежели методика табл. 29, тем более, что этот путь требует дополнительных интерполяций (для отыскания  $y$  в точках сетки).

### § 5. МЕТОД РУНГЕ — ФОКСА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сейчас мы рассмотрим простой и изящный метод численного интегрирования, принадлежащий Фоксу и основанный на классической формуле Рунге. Этим методом можно интегрировать линейные дифференциальные уравнения первого порядка без предварительного определения  $y$  в окрестности начальной точки методом степенных рядов.

Рассмотрим разложения функций  $y(x+h)$  и  $y'(x+h)$  в степенные ряды в окрестности точки  $x$ :

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \\ + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x) + \frac{h^5}{120} y^V(x) + \dots, \quad (5.1)$$

$$y'(x+h) = y'(x) + hy''(x) + \frac{h^2}{2} y'''(x) + \\ + \frac{h^3}{6} y^{IV}(x) + \frac{h^4}{24} y^V(x) + \dots \quad (5.2)$$

Исключим из этих двух соотношений  $y''(x)$ . Для этого умножим (5.2) на  $h/2$  и вычтем результат из (5.1):

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} [y'(x) + y'(x+h)] - \frac{h^3}{12} y'''(x) - \\ - \frac{h^4}{24} y^{IV}(x) - \frac{h^5}{80} y^V(x) - \dots$$

<sup>1)</sup> При проведении численного решения дифференциальных уравнений чрезвычайно важно надлежащим образом выбрать шаг и порядок точности применяемой формулы. Автор на этом вопросе не останавливается и зачастую решает его крайне неудачно (см. пример на стр. 116). Выбор шага зависит от требуемой точности. Следует добиваться того, чтобы отбрасываемые члены формулы не влияли на получаемые результаты. Уменьшение шага позволяет пользоваться более простыми формулами, однако это не всегда приводит к уменьшению вычислительной работы из-за увеличения числа шагов. К тому же при этом усиливается влияние погрешностей округления. — Прим. ред.

Полагая в этой формуле  $x = lh$ ,  $y(x) = y(lh) = y_i$ , приходим к формуле Рунге — Кутты второго порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [y'_i + y'_{i+1}] + \varepsilon_{i+1}, \quad (5.3)$$

где 
$$\varepsilon_{i+1} = - \left( \frac{1}{12} h^3 y_i''' + \frac{1}{24} h^4 y_i^{IV} + \frac{1}{80} h^5 y_i^V + \dots \right). \quad (a)$$

Погрешность  $\varepsilon_{i+1}$  можно следующим образом выразить через неусредненные центральные разности <sup>1)</sup>:

$$\varepsilon_{i+1}^{(n)} = - \left( \frac{1}{12} \delta^3 - \frac{1}{120} \delta^5 + \frac{1}{840} \delta^7 - \dots \right) y_{i+1/2}^{(n) 2)}. \quad (5.4)$$

<sup>1)</sup> Для доказательства заметим, что имеет место равенство

$$\delta^{2n+1} y_{i+1/2} = \Delta (\delta^{2n} y_i), \quad (6)$$

т. е. что неусредненная центральная разность нечетного порядка  $2n+1$  в точке  $l+1/2$  есть в то же время правая разность в точке  $l$  от центральной разности порядка  $2n$ . Например,

$$\delta^3 y_{i+1/2} = \delta (\delta^2 y_{i+1/2}) = \delta^2 y_{i+1} - \delta^2 y_i = \Delta \delta^2 y_i.$$

Если в правую часть (6) подставить символические выражения для  $\Delta$  и  $\delta$  [гл. II, равенства (5.2) и (7.11)]:

$$\Delta = (e^{hD} - 1),$$

$$\delta^{2n} = 2^{2n} \operatorname{sh}^{2n} \left( \frac{hD}{2} \right),$$

то (6) примет вид

$$\delta^{2n+1} y_{i+1/2} = 2^{2n} (e^{hD} - 1) \operatorname{sh}^{2n} \left( \frac{hD}{2} \right) y_i.$$

Подстановка этого выражения в (5.4) сводит его к форме (a). Например,

$$\begin{aligned} \delta^3 y_{i+1/2} &= \left[ 2^2 (e^{hD} - 1) \operatorname{sh}^2 \left( \frac{hD}{2} \right) \right] y_i = \\ &= 2^2 \left[ hD + \frac{h^3 D^3}{2!} + \frac{h^3 D^3}{3!} + \dots \right] \left[ \frac{h^2 D^2}{4} + \frac{h^4 D^4}{48} + \dots \right] y_i = \\ &= \left[ h^3 D^3 + \frac{h^4 D^4}{2} + \frac{h^5 D^5}{4} + \dots \right] y_i, \end{aligned}$$

$$\delta^5 y_{i+1/2} = \left[ h^5 D^5 + \frac{h^6 D^6}{2} + \dots \right] y_i,$$

откуда, в силу (5.4),

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} &= - \left[ \frac{1}{12} \left( h^3 D^3 + \frac{h^4 D^4}{2} + \frac{h^5 D^5}{4} + \dots \right) - \frac{1}{120} (h^5 D^5 + \dots) + \dots \right] y_i = \\ &= - \left( \frac{1}{12} h^3 D^3 + \frac{1}{24} h^4 D^4 + \frac{1}{80} h^5 D^5 + \dots \right) y_i. \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Здесь и в дальнейшем  $y_i^{(n)}$  обозначает  $n$ -е приближение  $y$  в точке  $l$ .

Последнее выражение представляет собой поправку Фокса к формуле Рунге (5.3).

Воспользовавшись формулой Рунге — Кутта с поправкой Фокса, мы выведем рекуррентное соотношение для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Рассмотрим *линейное* дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x)y + g(x) \quad (5.5)$$

с начальным условием

$$y(0) = y_0. \quad (5.6)$$

Пусть

$$x = ih; \quad f(x) = f_i; \quad f(x+h) = f_{i+1};$$

$$g(x) = g_i; \quad g(x+h) = g_{i+1}.$$

Подставив в (5.3) значение  $y'$  из уравнения (5.5), получим

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f_i y_i + g_i + f_{i+1} y_{i+1} + g_{i+1}) + \varepsilon_{i+1}.$$

Разрешая последнее равенство относительно  $y_{i+1}$ , приходим к рекуррентному соотношению Рунге — Фокса:

$$y_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} f_{i+1}} \left[ \left( 1 + \frac{h}{2} f_i \right) y_i^{(n)} + \frac{h}{2} (g_i + g_{i+1}) + \varepsilon_{i+1}^{(n-1)} \right], \quad (5.7)$$

в котором погрешность  $\varepsilon_{i+1}^{(n-1)}$ , вычисляемая по формуле (5.4), имеет порядок  $h^3$ .

Применим только что полученную формулу к решению задачи об атмосферном давлении (см. § 2), а именно уравнения (2.4)

$$y' = -\frac{0,9}{1+2z} y \quad (B)$$

с начальным условием

$$y(0) = 1. \quad (Г)$$

В этом случае  $f(z) = -0,9/(1+2z)$ ,  $g(z) = 0$ , и формула (5.7) принимает при  $h = 0,1$  следующий вид:

$$y_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{1 - 0,05 f_{i+1}} [(1 + 0,05 f_i) y_i^{(n)} + \varepsilon_{i+1}^{(n-1)}]. \quad (Д)$$

Так как мы знаем, что  $y_0 = 1$ , то, положив в формуле (д)  $\varepsilon_{i+1}^{(0)} = 0$ , можно последовательно вычислить  $y_1^{(1)}$ ,  $y_2^{(1)}$ , ...,  $y_i^{(1)}$ , .... Эти значения выписаны в третьем столбце табл. 31. Погрешность в точке  $z = 0,3$  составляет 0,16% (истинное значение см. в табл. 25).

Следующие столбцы табл. 31 содержат центральные неусредненные разности  $y_{i+1/2}$ , поправку  $\varepsilon_{i+1}^{(1)}$  и второе приближение  $y_i^{(2)}$  функ-

ции  $y$ . Это второе приближение вычислено по формуле (д) с учетом поправки  $\varepsilon_{i+1}^{(1)}$ . Так как значение  $\delta^3 y_{i+1/2}$  можно вычислить лишь в единственной точке  $z = 0,15$ , то третья разность бралась одинаковой во всех точках  $i + 1/2$ , равной  $-0,0056$ . Следовательно,

$$\varepsilon_{i+1/2}^{(1)} \cong -\frac{1}{12} \delta^3 y_{i+1/2} = -\frac{1}{12} (-0,0056) = 0,0005$$

при любом  $i$ . Значение  $y^{(2)}(0,3)$  имеет погрешность  $0,02\%$ .

Таблица 31

$z$	$f_i$	$y_i^{(1)}$	$\delta y_{i+1/2}$	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_{i+1/2}$	$\frac{\varepsilon_{i+1}^{(1)}}{1-0,05f_{i+1}}$	$y_i^{(2)}$
0	-0,9000	1,0000					1,0000
			-0,0795		(-0,0056)	+0,0005	
0,1	-0,7500	0,9205		0,0174			0,9210
			-0,0621		-0,0056	+0,0005	
0,2	-0,6428	0,8584		0,0118			0,8594
			-0,0503		(-0,0056)	+0,0005	
0,3	-0,5625	0,8081					0,8096

Сравнительно с методом степенных рядов, формула Рунге — Фокса дает большую точность при равных шагах или одинаковую точность при большем шаге. Поэтому и объем работы при решении уравнения методом Рунге — Фокса значительно меньше.

## § 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Формулу Адамса (4.3) можно с успехом использовать для решения систем уравнений первого порядка. Рассмотрим простой случай системы двух уравнений

$$y' = f(x, y, z), \quad z' = \varphi(x, y, z) \quad (6.1)$$

(где  $y, z$  — функции одного и того же независимого переменного  $x$ ) при следующих начальных условиях:

$$y(0) = y_0; \quad z(0) = z_0. \quad (6.2)$$

Применяя формулу Адамса к каждому из этих уравнений, получим следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \left[ 1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \dots \right] f_i, \\ z_{i+1} &= z_i + h \left[ 1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \dots \right] \varphi_i. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Эти соотношения можно использовать лишь после того, как значения  $y$  и  $z$  определены в окрестности начальной точки методом степенных рядов.

В качестве примера решим простую систему

$$y' = f(x, y, z) = z, \quad z' = \varphi(x, y, z) = y \quad (a)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0 = 1, \quad z(0) = z_0 = 2. \quad (б)$$

Посредством дифференцирования равенств (a) найдем:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, & z_0 &= 2, \\ y'_0 &= z_0 = 2, & z'_0 &= y_0 = 1, \\ y''_0 &= z'_0 = 1, & z''_0 &= y'_0 = 2. \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

Следовательно, имеют место разложения

$$y = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \dots, \quad z = 2 + x + x^2 + \dots$$

В первых трех строках табл. 32 выписаны значения  $y$ ,  $z$ ,  $\nabla y$ ,  $\nabla z$ ,  $\nabla^2 y$ ,  $\nabla^2 z$  при  $x = 0; 0,1; 0,2$ , определенные из этих разложений.

Таблица 32

$x$	$y$	$\nabla f$	$\nabla^2 f$	$z$	$\nabla \varphi$	$\nabla^2 \varphi$
0	1	.		2		.
0,1	1,205	0,205		2,110	0,110	
0,2	1,420	0,215	0,010	2,240	0,130	0,020
0,3	1,651	0,231	0,016	2,393	0,153	0,023
0,4	1,899	0,248	0,017	2,570	0,177	0,024



В последующих двух строках этой таблицы содержатся значения функций  $y$ ,  $z$  при  $x = 0,3$  и  $x = 0,4$ , вычисленные по формулам (6.3), в которых положено  $h = 0,1$ ,  $f = z$  и  $\varphi = y$ . Истинные значения  $y$  и  $z$  в точке 0,4 равны соответственно 1,903 и 2,573.

Этот метод можно, конечно, использовать и для решения систем большего числа уравнений.

Аналогичным образом можно воспользоваться для решения систем линейных уравнений методом Рунге — Фокса. Читатель без труда выведет соответствующие рекуррентные формулы (см. задачу 17 в конце главы).

## § 7. МЕТОД АДАМСА — ШТЁРМЕРА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### [а] Полное уравнение

Уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \quad (7.1)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \quad (7.2)$$

можно, как известно, свести к системе двух уравнений первого порядка посредством введения новой неизвестной функции

$$y' = z(x, y); \quad (7.3)$$

в этом случае уравнение (7.1) принимает вид

$$y'' = z' = f(x, y, z). \quad (7.4)$$

Формула Адамса (4.3) дает для двух уравнений первого порядка (7.3) и (7.4) следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= z_i + h \left[ 1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \dots \right] f_i, \\ y_{i+1} &= y_i + h \left[ 1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \dots \right] z_i. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Процесс интегрирования начинается, как обычно, с разложения в степенной ряд. Величины, вычисляемые согласно этому разложению, выписаны выше двойной черты табл. 33. Дальнейшие строки этой таблицы содержат  $y$  и  $z$ , вычисленные по формулам (7.5), функцию  $f$  и нужные для вычислений левые разности.

Если значения  $y'$  нам не нужны, то из уравнений (7.5) можно исключить  $z$ . Это упростит вычисления, так как избавит от

Таблица 33

$i$	$x$	$y$	$z$	$\nabla z$	$\nabla^2 z$	$\dots$	$f$	$\nabla f$	$\nabla^2 f$	$\dots$
$i-2$	$x_{i-2}$	$y_{i-2}$	$z_{i-2}$				$f_{i-2}$			
$i-1$	$x_{i-1}$	$y_{i-1}$	$z_{i-1}$	$\nabla z_{i-1}$			$f_{i-1}$	$\nabla f_{i-1}$		
$i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$\nabla z_i$	$\nabla^2 z_i$	$\dots$	$f_i$	$\nabla f_i$	$\nabla^2 f_i$	$\dots$
$i+1$	$x_{i+1}$	$y_{i+1}$	$z_{i+1}$	$\nabla z_{i+1}$	$\nabla^2 z_{i+1}$	$\dots$	$f_{i+1}$	$\nabla f_{i+1}$	$\nabla^2 f_{i+1}$	$\dots$
$i+2$	$x_{i+2}$	$y_{i+2}$	$z_{i+2}$	$\nabla z_{i+2}$	$\nabla^2 z_{i+2}$	$\dots$	$f_{i+2}$	$\nabla f_{i+2}$	$\nabla^2 f_{i+2}$	$\dots$

необходимости вычислять разности  $z$ . Для исключения  $z$  запишем второе из уравнений (7.5) применительно к точкам  $y_{i+1}$  и  $y_i$ :

$$y_{i+1} - y_i = h \left[ 1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \dots \right] z_i,$$

$$y_i - y_{i-1} = h \left[ 1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \dots \right] z_{i-1}.$$

Вычитая второе из первого, получим

$$\begin{aligned} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} &= h \left[ 1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \dots \right] (z_i - z_{i-1}) = \\ &= h \left[ 1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \dots \right] \nabla z_i. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Но в силу равенства (7.4) настоящей главы и равенства (4.11) гл. II,

$$\begin{aligned} \nabla z_i &= \left[ 1 - \frac{1}{2} hD + \frac{1}{6} h^2 D^2 + \dots \right] hDz_i = \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{2} hD + \frac{1}{6} h^2 D^2 + \dots \right] hf_i. \end{aligned}$$

Заменив, согласно равенствам (4.16) и (4.17) гл. II, стоящие в скобках степени  $hD$  их разложениями в ряд по левым разностям, получим

$$\nabla z_i = \left[ 1 - \frac{1}{2} \nabla - \frac{1}{12} \nabla^2 - \dots \right] hf_i.$$

Подставив это значение  $\nabla z_i$  в (7.6), приходим к следующей рекуррентной формуле Адамса — Штёрмера:

$$y_{i+1} = -y_{i-1} + 2y_i + h^2 \left[ 1 + \frac{1}{12} \nabla^2 + \frac{1}{12} \nabla^3 + \right. \\ \left. + \frac{19}{240} \nabla^4 + \frac{3}{40} \nabla^5 + \dots \right] f_i. \quad (7.7)$$

### [б]. Неполное уравнение

Если правая часть (7.1) не зависит явно от  $y'$ , то при интегрировании нужна только формула (7.7) [в противном случае этой формулой придется пользоваться совместно с первым из равенств (7.5)].

Мы воспользуемся этой формулой для решения задачи о колебаниях математического маятника, заданных уравнением (3.3) настоящей главы

$$\ddot{\theta} = -4,6499 \sin \theta \quad (a)$$

и начальными условиями

$$\theta_0 = 2,0944, \quad \dot{\theta}_0 = 0. \quad (б)$$

Значения  $\theta$  в окрестности начальной точки мы определили в § 3 (см. табл. 27). В нашем случае

$$\ddot{\theta} = f(\theta) = -4,6499 \sin \theta,$$

т. е. правая часть не зависит явно ни от  $\dot{\theta}$ , ни от  $\tau$ . Следовательно, при интегрировании мы можем обойтись лишь формулой (7.7). В табл. 34 приведен результат интегрирования с шагом  $h = 0,1$ . Интегрирование было начато с трех известных значений  $\theta$ ; в правой части формулы (7.7) все члены, содержащие третью, четвертую и т. д. разности  $f$ , были отброшены<sup>1)</sup>. Линейно интерполируя значения табл. 34, мы найдем, что  $\theta = 0$  при  $\tau = 0,9978$ . Таким образом, в величине периода колебаний допущена погрешность 0,2% (точное значение периода можно найти из эллиптических интегралов, как указывалось в § 3).

Совместное использование формулы (7.7) и первой из формул (7.5) иллюстрируется табл. 35: здесь приведено решение задачи о колебаниях маятника в вязкой среде, описываемых уравнением (3.7)

$$\ddot{\theta} + 0,4\dot{\theta} + 4,6499 \sin \theta = 0 \quad (в)$$

1) Из табл. 34 видно, что отброшенные разности совсем не малы. Здесь следовало бы или уменьшить шаг, или ввести разности более высокого порядка. Эти же обстоятельства имеют место и в следующем примере. — Прим. ред.

Таблица 34

$\tau$	$\theta_i$	$f_i$	$\nabla f_i$	$\nabla^2 f_i$
0	2,0944	-4,0268		
0,1	2,0742	-4,0728	-0,0460	
0,2	2,0132	-4,2021	-0,1293	-0,0833
0,3	1,9101	-4,3849	-0,1828	-0,0535
0,4	1,7631	-4,5643	-0,1794	+0,0034
0,5	1,5705	-4,6499	-0,0856	0,0938
0,6	1,3313	-4,5174	+0,1325	0,2181
0,7	1,0467	-4,0259	0,4915	0,3590
0,8	0,7215	-3,0713	0,9546	0,4631
0,9	0,3652	-1,6605	1,4108	0,4562
1,0	-0,0081			

и прежними начальными условиями (б); три первых значения получены методом степенных рядов (см. табл. 28); шаг  $h = 0,1$ . В нашем случае

$$\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}) = -0,4\dot{\theta} - 4,6499 \sin \theta,$$

и рекуррентные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{i+1} &= \dot{\theta}_i + 0,1 [1 + 0,5\nabla + 0,4167\nabla^2] f_i, \\ \theta_{i+1} &= -\theta_{i-1} + 2\theta_i + 0,01 [1 + 0,0833\nabla^2] f_i. \end{aligned} \quad (г)$$

Вычисленное путем линейной интерполяции по точкам  $\tau = 1,0$  и  $\tau = 1,1$  время прохождения маятника через вертикальное положение

Таблица 35

$\tau$	$\theta_i$	$\dot{\theta}_i$	$f_i$	$\nabla f_i$	$\nabla^2 f_i$
0	2,0944	0	-4,0268		
0,1	2,0745	-0,3963	-3,9139	0,1129	
0,2	2,0153	-0,7865	-3,8833	+0,0306	-0,0823
0,3	1,9172	-1,1767	-3,9030	-0,0197	-0,0503
0,4	1,7800	-1,5701	-3,9205	-0,0175	+0,0022
0,5	1,6036	-1,9629	-3,8624	+0,0581	0,0756
0,6	1,3886	-2,3431	-3,6355	0,2269	0,1688
0,7	1,1374	-2,6883	-3,1445	0,4910	0,2641
0,8	0,8550	-2,9672	-2,3219	0,8226	0,3316
0,9	0,5497	-3,1444	-1,1713	1,1506	0,3280
1,0	0,2330	-3,1903	0,2025	1,3738	0,2232
1,1	-0,0815	-3,0921			

оказывается равным  $\tau = 1,0741$ . Оно отличается, таким образом, от соответствующего времени для свободного маятника на 7,41%.

## § 8. МЕТОД ФОКСА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### [а] Полное уравнение

Фоксу принадлежит простая формула численного интегрирования уравнения.

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = F(x) \quad (8.1)$$

при начальных условиях

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \quad (8.2)$$

Для вывода этой формулы умножим (8.1) на  $h^2$ :

$$h^2 y'' + hf(x)(hy') + h^2 g(x)y = h^2 F(x)$$

и заменим после этого величины  $h^2 y''$  и  $hy'$  их разложениями в ряд по *центральных* разностям, согласно равенствам (7.16) гл. II. Полагая при этом  $x \equiv lh$  и обозначая через  $y_i, f_i, g_i, F_i$  значения в точке  $x$  соответственно величин  $y, f, g, F$ , получим

$$\begin{aligned} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \frac{h}{2} f_i (y_{i+1} - y_{i-1}) + h^2 g_i y_i = \\ = h^2 F_i + \left( \frac{\delta^4}{12} - \frac{\delta^6}{90} + \dots \right) y_i + hf_i \mu \left( \frac{\delta^3}{6} - \frac{\delta^5}{30} + \dots \right) y_i. \end{aligned}$$

Решив последнее уравнение относительно  $y_{i+1}$ , приходим к формуле Фокса для линейного уравнения второго порядка:

$$y_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{1 + \frac{h}{2} f_i} \left[ - \left( 1 - \frac{h}{2} f_i \right) y_{i-1}^{(n)} + (2 - h^2 g_i) y_i^{(n)} + \right. \\ \left. + h^2 F_i + \varepsilon_{i+1}^{(n-1)} \right], \quad (8.3)$$

в которой  $\varepsilon_{i+1}^{(n-1)}$  есть  $O(h^4)$  и выражается следующим образом:

$$\varepsilon_{i+1}^{(n-1)} = \left( \frac{\delta^4}{12} - \frac{\delta^6}{90} + \dots \right) y_i^{(n-1)} + hf_i \mu \left( \frac{\delta^3}{6} - \frac{\delta^5}{30} + \dots \right) y_i^{(n-1)}. \quad (8.4)$$

Сначала надлежит определить значение  $y_1$  методом степенных рядов<sup>1)</sup>. После этого, полагая в формуле (8.3)  $\varepsilon^{(0)} \equiv 0$ , можно найти первое приближение  $y^{(1)}$ . По разностям первого приближения вычисляется  $\varepsilon^{(1)}$ . Затем, снова воспользовавшись формулой (8.3), в которую представлены найденные значения  $\varepsilon^{(1)}$ , можно вычислить второе приближение  $y^{(2)}$ . Процесс продолжается до тех пор, пока поправки  $\varepsilon^{(m)}$  и  $\varepsilon^{(m+1)}$ , вычисленные по двум последовательным приближениям, не окажутся равными.

Для иллюстрации метода рассмотрим электрическую цепь фиг. 19. В эту цепь параллельно включены катушка  $L$ , переменная проводимость  $G(t)$  и конденсатор  $C$ . Пусть  $G(t)$  изменяется во времени по следующей формуле:

$$G(t) = G_0 (1 + a \sin 10^8 t). \quad (a)$$

1) Относительно решения без предварительного разложения в степенной ряд см. задачу 36 в конце главы.

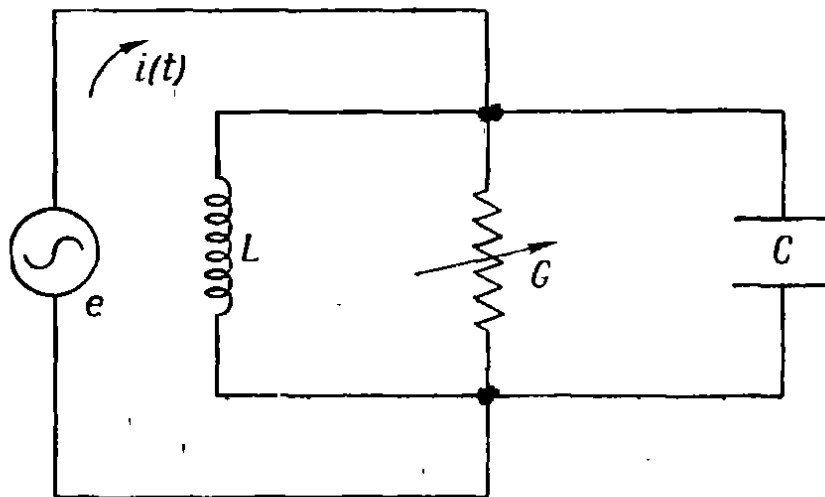
Второй закон Кирхгофа<sup>1)</sup> дает для потенциала  $e$  следующее уравнение:

$$C \frac{de}{dt} + G(t) e + \frac{1}{L} \int e dt = i,$$

или, после дифференцирования по  $t$  и деления на  $C$ ,

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{G(t)}{C} \frac{de}{dt} + \left( \frac{1}{LC} + \frac{1}{C} \frac{dG(t)}{dt} \right) e = \frac{1}{C} \frac{di}{dt}.$$

Пусть  $C = 1$  мкф,  $L = 0,02778$  гн,  $G_0 = 0,007$  ом<sup>-1</sup>,  $a = 0,5$ ,  $i = (10^{-9}/6) \sin 6 \cdot 10^3 t$ . Тогда, пренебрегая зависящим от  $t$  членом



Фиг. 19.

$(1/C) dG/dt = 3,5 \cdot 10^6 \cos 10^3 t$  сравнительно с постоянным членом  $1/LC = 36 \cdot 10^6$ <sup>2)</sup>, мы получим:

$$\frac{d^2e}{dt^2} + 7000 (1 + 0,5 \sin 10^3 t) \frac{de}{dt} + 36 \cdot 10^6 e = 10^6 \cos 6 \cdot 10^3 t.$$

Измеряя время в миллисекундах ( $\tau = 10^3 t$ ), приведем уравнение к виду

$$\ddot{e} + 7 (1 + 0,5 \sin \tau) \dot{e} + 36e = \cos 6\tau, \quad (6)$$

где точкой обозначено дифференцирование по  $\tau$ . В качестве начальных условий выберем условия покоя:

$$e(0) = e_0 = 0, \quad \dot{e}(0) = \dot{e}_0 = 0. \quad (7)$$

1) Нейман Л. Р. и Калаитаров П. Л., Теоретические основы электротехники, ч. II, М., 1954, стр. 42. — Прим. перев.

2) Если пренебрежение этим членом нежелательно, можно положить  $e = dv/dt$  и записать основное уравнение относительно переменной  $v$ :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{G(t)}{C} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = i.$$

Решив последнее уравнение, находим затем  $e$  численным дифференцированием.

В окрестности начальной точки решение будем искать методом степенных рядов. Для этого запишем

$$\ddot{e} = -7(1 + 0,5 \sin \tau) \dot{e} - 36e + \cos 6\tau; \quad \ddot{e}_0 = 1.$$

Дифференцируя это соотношение, найдем последовательно

$$\begin{aligned} \ddot{e} &= -7(1 + 0,5 \sin \tau) \ddot{e} - (3,5 \cos \tau + 36) \dot{e} - 6 \sin 6\tau; \quad \ddot{e}_0 = -7; \\ e^{IV} &= -7(1 + 0,5 \sin \tau) \ddot{e} - (7 \cos \tau + 36) \ddot{e} + (3,5 \sin \tau) \dot{e} - \\ &\quad - 36 \cos 6\tau; \quad e_0^{IV} = -30. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место разложение

$$e(\tau) = \frac{1}{2} \tau^2 - \frac{7}{6} \tau^3 - \frac{30}{24} \tau^4 = 0,5\tau^2 - 1,1667\tau^3 - 1,25\tau^4.$$

Отсюда находим:

$$e(0,05) = 0,00110, \quad e(0,10) = 0,00371.$$

В случае задачи (б), (в) при

$$h = 0,1, \quad f(\tau) = 7(1 + 0,5 \sin \tau), \quad g(\tau) = 36, \quad F(\tau) = \cos 6\tau$$

формула (8.3) дает для отыскания первого приближения  $e^{(1)}$  функции  $e$  следующее соотношение:

$$e_{i+1}^{(1)} = \frac{1}{1 + 0,05f_i} [-(1 - 0,05f_i) e_{i-1}^{(1)} + 1,64e_i^{(1)} + 0,01F_i], \quad (г)$$

в котором положено  $e^{(0)} = 0$ . Отправляясь от  $e^{(1)} = 0$ ,  $e_1^{(1)} = 0,00371$ , получим по формуле (г) результаты, приведенные в табл. 36.

Для вычисления второго приближения составляем разности величины  $e_i^{(1)}$  и по ним вычисляем поправку  $\varepsilon_i^{(1)}$ , ограничиваясь первыми двумя членами:

$$\varepsilon_{i+1}^{(1)} = \left( \frac{\delta^4}{12} + hf_i \frac{\mu\delta^3}{6} \right) e_i^{(1)} = (0,08333\delta^4 + 0,01667f_i\mu\delta^3) e_i^{(1)}. \quad (д)$$

Результаты вычислений приведены в табл. 37. При этом значения  $\mu\delta^3$  и  $\delta^4$  для  $\tau = 0,1, 1,0$  и  $1,1$  были получены экстраполяциями. Значения  $\mu\delta^3$  для  $\tau$  от  $0,2$  до  $0,9$  являются средними арифметическими соответствующих  $\delta^3$ . Второе приближение  $e_i^{(2)}$  вычислено по рекуррентной формуле:

$$e_{i+1}^{(2)} = \frac{1}{1 + 0,05f_i} [-(1 - 0,05f_i) e_{i-1}^{(2)} + 1,64e_i^{(2)} + 0,01F_i + \varepsilon_{i+1}^{(1)}], \quad (е)$$

в которой  $\varepsilon_{i+1}^{(1)}$  взято из табл. 37. Далее, следует составить разности  $e_i^{(2)}$ , вычислить по ним новые поправки  $\varepsilon_i^{(2)}$ , а затем найти



Таблица 36

$\tau$	$f_i$	$1 + 0,05f_i$	$1 - 0,05f_i$	$0,01F_i$	$e_i^{(1)}$
0	7,00000				0
0,1	7,34944	1,36747	0,63253	0,00825	0,00371
0,2	7,69534	1,38477	0,61523	+ 0,00362	0,01048
0,3	8,03432	1,40172	0,59828	- 0,00227	0,01337
0,4	8,36297	1,41815	0,58185	- 0,00737	0,00955
0,5	8,67801	1,43390	0,56610	- 0,00990	+ 0,00036
0,6	8,97624	1,44881	0,55119	- 0,00897	- 0,01026
0,7	9,25477	1,46274	0,53726	- 0,00490	- 0,01794
0,8	9,51076	1,47554	0,52446	+ 0,00087	- 0,01969
0,9	9,74166	1,48708	0,51292	0,00635	- 0,01491
1,0	9,94514	1,49726	0,50274	0,00960	- 0,00538
1,1	10,11924	1,50596	0,49404		+ 0,00552

третье приближение  $e_i^{(3)}$ . Значения  $e_i^{(3)}$  содержатся в последнем столбце табл. 37. Сравнивая разности этих значений с разностями второго приближения, можно убедиться в том, что  $e_i^{(2)}$  совпадает с  $e_i^{(3)}$ . Таким образом, на этом шаге процесс закончен.

### [б] Неполное уравнение (метод Нумерова)

Если *линейное* дифференциальное уравнение второго порядка не содержит члена с первой производной, т. е. если оно имеет вид

$$v'' + f(x)y = F(x), \quad (8.5)$$

Таблица 37

$\tau$	$e_i^{(1)}$	$10^5 \delta e_{i+1/2}^{(1)}$	$10^5 \delta^2 e_i^{(1)}$	$10^5 \delta^3 e_i^{(1)}$ H $10^5 \mu \delta^3 e_i^{(1)}$	$10^5 \delta^4 e_i^{(1)}$	$\epsilon_{i+1}$	$e_i^{(2)}$	$e_i^{(3)}$
0	0						0	0
		371						
0,1	0,00371		+ 306	(- 250)	(250)	-0,00010	0,00371	0,00371
		677		- 694				
0,2	0,01048		- 388	(- 488)	411	-0,00028	0,01040	0,01040
		+ 289		- 283				
0,3	0,01337		- 671	(- 75)	417	+0,00025	0,01308	0,01305
		- 382		+ 134				
0,4	0,00955		- 537	(264)	260	0,00058	0,00942	0,00938
		- 919		394				
0,5	+0,00036		- 143	(415)	+ 43	0,00064	+0,00073	+0,00096
		- 1062		437				
0,6	-0,01026		+ 294	(368)	- 138	0,00044	-0,00934	-0,00909
		- 768		299				
0,7	-0,01794		593	(180)	- 239	+0,00008	-0,01673	-0,01656
		- 175		+ 60				
0,8	-0,01969		653	(- 59)	- 238	-0,00029	-0,01862	-0,01851
		+ 478		- 178				
0,9	-0,01491		475	(- 258)	- 160	-0,00055	-0,01435	-0,01468
		953		- 338				
1,0	-0,00538		137	(- 400)	(0)	-0,00066	-0,00550	-0,00588
		1090						
1,1	+0,00552			(- 250)	(200)	-0,00026	+0,00476	+0,00445

то его можно проинтегрировать другим весьма удобным способом, принадлежащим Нумерову и Фоксу. Умножив (8.5) на  $h^2$  и заменив вторую производную ее разложением в ряд по центральным разностям [гл. II, (7.15)], получим:

$$\left( \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} + \dots \right) y_i + h^2 f_i y_i = h^2 F_i.$$

Если к обеим частям этого равенства применить оператор  $\left( 1 + \frac{\delta^2}{12} \right)$ , то член, содержащий  $\delta^4$ , уничтожается и равенство принимает

следующий вид:

$$\left(\delta^2 + \frac{\delta^6}{240} - \frac{13\delta^8}{15120} + \dots\right) y_i + h^2 f_i y_i + \frac{h^2 \delta^2}{12} (f_i y_i) = h^2 F_i + \frac{h^2 \delta^2}{12} F_i,$$

или

$$\begin{aligned} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + h^2 f_i y_i + \frac{h^2}{12} (f_{i+1} y_{i+1} - 2f_i y_i + f_{i-1} y_{i-1}) = \\ = h^2 F_i + \frac{h^2}{12} (F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}) - \left(\frac{\delta^6}{240} - \frac{13\delta^8}{15120} + \dots\right) y_i. \end{aligned}$$

Разрешая последнее уравнение относительно  $y_{i+1}$ , получим рекуррентную формулу Нумерова — Фокса:

$$y_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{12} f_{i+1}} \left[ -\left(1 + \frac{h^2}{12} f_{i-1}\right) y_{i-1}^{(n)} + \left(2 - \frac{5h^2}{6} f_i\right) y_i^{(n)} + \frac{h^2}{12} (F_{i+1} + 10F_i + F_{i-1}) + \varepsilon_{i+1}^{(n-1)} \right], \quad (8.6)$$

где

$$\varepsilon_{i+1}^{(n-1)} = -\left(\frac{\delta^6}{240} - \frac{13\delta^8}{15120} + \dots\right) y_i^{(n-1)}. \quad (8.7)$$

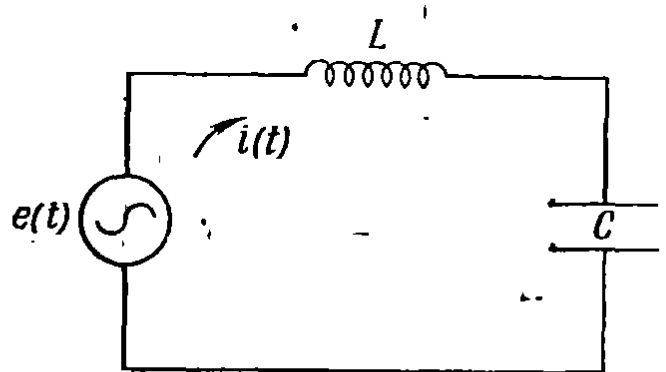
Формулу можно применять, если известны лишь два значения  $y$ :  $y_0$  и  $y_1$ . Так как поправка  $\varepsilon$  есть  $O(h^6)$ , то допустим весьма крупный шаг  $h$ .

Проиллюстрируем метод на примере электрической цепи, изображенной на фиг. 20. В цепь последовательно включены переменный конденсатор и катушка. Емкость конденсатора определим формулой

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} (1 + a \cos 10^3 t). \quad (\text{ж})$$

Как известно<sup>1)</sup>, заряд конденсатора  $q(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = \frac{1}{L} e(t).$$



Фиг. 20.

Если  $a = 0,4$  и, как в предыдущем примере,  $1/(LC_0) = 36 \cdot 10^6$ , то

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 36 \cdot 10^6 (1 + 0,4 \cos 10^3 t) q = 10^6 \cos 6 \cdot 10^3 t,$$

или, при  $\tau = 10^3 t$ ,

$$\ddot{q} + 36 (1 + 0,4 \cos \tau) q = \cos 6\tau, \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Нейман Л. Р. и Калантаров П. Л., Теоретические основы электротехники, ч. II, М., 1954, стр. 35. — Прим. перев.

где точкой обозначено дифференцирование по  $\tau$ . Начальные условия покоя выражаются равенствами

$$q(0) = q_0 = 0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 = \dot{i}(0) = 0. \quad (\text{и})$$

Для определения  $q$  в окрестности начальной точки воспользуемся, как обычно, методом степенных рядов. Дифференцируя равенство (з), найдем

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= -36(1 + 0,4 \cos \tau)q + \cos 6\tau; & \ddot{q}_0 &= 1; \\ \ddot{\dot{q}} &= -36(1 + 0,4 \cos \tau)\dot{q} + 14,4(\sin \tau)q - 6 \sin 6\tau; & \ddot{\dot{q}}_0 &= 0; \\ q^{\text{IV}} &= -36(1 + 0,4 \cos \tau)\ddot{q} + 28,8(\sin \tau)\dot{q} + 14,4(\cos \tau)q - \\ & & & - 36 \cos 6\tau; & q_0^{\text{IV}} &= -86,4. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место разложение

$$q(\tau) = \frac{\tau^2}{2} - \frac{86,4}{24} \tau^4 = 0,5\tau^2 - 3,6\tau^4.$$

Из этого разложения мы найдем  $q(0,1) = q_1 = 0,00464$ <sup>1)</sup>. В применении к задаче (з), (и) соотношение (8.6) при

$$\varepsilon_{i+1}^{(0)} = 0, \quad h = 0,1, \quad f(\tau) = 36(1 + 0,4 \cos \tau), \quad F(\tau) = \cos 6\tau$$

приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} q_{i+1}^{(1)} &= \frac{1}{1 + \frac{0,01}{12} f_{i+1}} \left[ - \left( 1 + \frac{0,01}{12} f_{i-1} \right) q_{i-1}^{(1)} + \right. \\ & \left. + \left( 2 - \frac{5}{6} 0,01 f_i \right) q_i^{(1)} + \frac{0,01}{12} (F_{i-1} + 10F_i + F_{i+1}) \right]. \quad (\text{к}) \end{aligned}$$

По этой формуле можно, отправляясь от  $q_0 = 0$ ,  $\dot{q}_1 = 0,00464$ , вычислить  $q_i^{(1)}$ . Результаты вычислений приведены в табл. 38. В этой же таблице содержатся значения функции  $q_c$  — решения соответствующего уравнения с постоянными коэффициентами, а именно,

$$\ddot{q} + 36q = \cos 6\tau.$$

При начальных условиях (и) это решение имеет вид

$$q_c = \frac{\tau}{12} \sin 6\tau.$$

Заметим, что поправкой  $\varepsilon$  [формула (8.7)] можно пренебречь, так как она изменяет результат, лишь на одну или две единицы последнего знака.

<sup>1)</sup> Относительно решения без предварительного разложения в степенной ряд см. задачу 36 в конце главы.

Таблица 38

$\tau$	$f_i$	$1 + \frac{0,01}{12} f_i$	$2 - \frac{5}{6} \cdot 0,01 f_i$	$\frac{0,01}{12} (F_{i-1} + 10F_i + F_{i+1})$	$q$	$q_c$
0	50,4	1,04200	1,58002		0	0
0,1	50,328	1,04194	1,58062		0,00464	0,00471
0,2	50,11308	1,04176	1,58241	0,00801	0,01475	0,01553
0,3	49,75704	1,04146	1,58537	+ 0,00352	0,02115	0,02435
0,4	49,26312	1,04105	1,58949	- 0,00221	+ 0,01532	0,02252
0,5	48,63708	1,04053	1,59471	- 0,00716	- 0,00465	+ 0,00588
0,6	47,88504	1,03990	1,60097	- 0,00961	- 0,03171	- 0,00221
0,7	47,01384	1,03918	1,60823	- 0,00871	- 0,05258	- 0,05084
0,8	46,03248	1,03836	1,61641	- 0,00476	- 0,05426	+ 0,06641
0,9	44,95104	1,03746	1,62542	+ 0,00085	- 0,03105	- 0,05796
1,0	43,78032	1,03648	1,63518	0,00616	+ 0,01161	- 0,00233
1,1	42,53184	1,03544		0,00932	0,05845	+ 0,02856

### § 9. НАКОПЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ

Вычислявшиеся в предыдущих параграфах поправки относились к погрешностям, возникающим в результате одного шага численного интегрирования. Такие погрешности носят название *локальных*. Естественно ожидать, что от шага к шагу локальные погрешности накапливаются и что вследствие этого близкие к начальной точке значения вычисляются более точно, нежели далекие. Как локальная,

так и накопленная погрешности существенно зависят от шага  $h$ . В этом параграфе мы изучим процесс накопления погрешности от шага к шагу. Для этой цели найдем точное решение разностной системы уравнений, соответствующей простому дифференциальному.

А именно, рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega^2 y &= 0, \\ y_0 &= 1, \quad \dot{y}_0 = 0, \end{aligned} \quad (9.1)$$

точное решение которой равно

$$y = \cos \omega t. \quad (9.2)$$

Приближенное ее решение получим методом Нумерова—Фокса [формулы (8.6) и (8.7)].

Для этого умножим (9.1) на  $h^2$ , заменим  $h^2 \ddot{y}$  приближенным выражением <sup>1)</sup>  $(\delta^2 - \delta^4/12)y_n$  и применим после этого к обеим частям равенства оператор  $(1 + \delta^2/12)$ . В результате получим следующую систему разностных уравнений:

$$\delta^2 y_n + \frac{\omega^2 h^2}{12} (12 + \delta^2) y_n = 0,$$

Вспомнив, что

$$\delta^2 y_n = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1},$$

и положив

$$2c = \frac{\frac{5}{6} \omega^2 h^2 - 2}{1 + \frac{1}{12} \omega^2 h^2}, \quad (a)$$

приведем эту систему разностных уравнений к следующему виду:

$$y_{n+1} + 2c y_n + y_{n-1} = 0. \quad (9.3)$$

Точное решение последней системы можно получить подстановкой

$$y_n = A x^n, \quad (9.4)$$

где  $x$  пока не определено. В силу этой подстановки,

$$A x^{n-1} (x^2 + 2c x + 1) = 0. \quad (6)$$

Если (9.4) есть решение системы (9.3), то равенство (6) должно удовлетворяться при любом  $n$ . Поэтому  $x$  является корнем квадратного уравнения <sup>2)</sup>

$$x^2 + 2c x + 1 = 0.$$

<sup>1)</sup> Мы будем вместо индекса  $l$  писать  $n$ , чтобы не путать его с мнимой единицей  $l = \sqrt{-1}$ .

<sup>2)</sup> Если  $x = 0$ , то получим тривиальное решение  $y_n = 0$ . — Прим. перев.

Находим оба значения  $x$ :

$$x_{1,2} = -c \pm \sqrt{c^2 - 1}. \quad (9.5)$$

Для сравнения точного решения (9.2) уравнения (9.1) с решением разностной системы (9.3) рассмотрим отдельно четыре случая:  $c > 1$ ;  $c = 1$ ;  $c = 0$ ;  $c = -1$ .

В первом случае ( $c > 1$ ) оба корня действительны и отрицательны, причем один из них больше, а другой меньше единицы по абсолютной величине. Пусть, например,  $|x_2| > 1$ ,  $|x_1| < 1$ . Тогда можно положить

$$x_1 = -e^{-r_1}, \quad x_2 = -e^{r_2},$$

где  $r_1 > 0$ ,  $r_2 > 0$ . Согласно (9.4), общее решение системы (9.3) имеет вид

$$y_n = C_1 (-1)^n e^{-r_1 n} + C_2 (-1)^n e^{r_2 n}. \quad (9.6)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  следует определить из начальных условий (9.1). Согласно этим условиям,

$$C_1 + C_2 = 1, \quad -r_1 C_1 + r_2 C_2 = 0$$

и, следовательно,

$$C_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \quad C_2 = \frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$

При этих значениях констант

$$y_n = \frac{(-1)^n}{r_1 + r_2} (r_2 e^{-r_1 n} + r_1 e^{r_2 n}). \quad (9.7)$$

Наличие экспоненты  $e^{r_2 n}$  в последнем равенстве показывает, что при  $c > 1$  приближенное решение уравнения (9.1), полученное методом Нумерова—Фокса, бесконечно возрастает вместе с  $n$ . А так как точное решение (9.2) является осциллирующей функцией, то найденное приближение оказывается неудовлетворительным уже после нескольких шагов. Согласно (а), неравенство  $c > 1$  означает, что

$$\frac{\frac{5}{6} \omega^2 h^2 - 2}{1 + \frac{1}{12} \omega^2 h^2} > 2,$$

т. е. что

$$\omega^2 h^2 > 6.$$

Если  $c = 1$ , то  $x_1 = x_2 = -1 = e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi$ . В этом случае частное решение системы (9.3), удовлетворяющее начальным условиям (9.1), есть, в силу (9.4),

$$y_n = \cos n\pi.$$

Эта функция осциллирует, как и истинное решение уравнения (9.1), причем амплитуда ее также равна единице. Сравним частоты истинного и приближенного решений. Для второго из них подстановкой  $t = nh$  получим

$$y_n = \cos \frac{\pi}{h} t = \cos \left( \frac{\pi}{\omega h} \right) \omega t.$$

Но так как при  $c = 1$ , в силу (а),  $\omega^2 h^2 = 6$ , то частота приближенного решения равна

$$\frac{\pi}{\sqrt{6}} \omega = 1,28\omega.$$

Если  $c = 0$ , то  $x_{1,2} = \pm i = \cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2}$ . Так как при  $c = 0$ , в силу (а),  $\omega^2 h^2 = 12/5$ , то частота приближенного решения в этом случае равна

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\frac{12}{5}}} \omega = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{\pi}{4} \omega = 1,01\omega.$$

Если  $c = -1$ , то из (а) найдем, что  $h = 0$ . Отсюда, легко заключить, что в пределе при  $h \rightarrow 0$  приближенное решение совпадает с истинным <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Из (а) следует, что

$$\omega^2 h^2 = \frac{12(c+1)}{5-c}.$$

Это равенство показывает, что если  $h \rightarrow 0$ , то  $c \rightarrow -1$ . Так как слева стоит положительная величина, то  $c > -1$ . Положим  $c = -1 + \epsilon$ , где  $\epsilon > 0$ . Тогда

$$\omega h = \sqrt{\omega^2 h^2} = \sqrt{\frac{12\epsilon}{6-\epsilon}} = \sqrt{2\epsilon + O(\epsilon^2)} = \sqrt{2\epsilon} + O(\epsilon). \quad (в)$$

Но

$$x_{1,2} = +1 - \epsilon \pm \sqrt{(-1 + \epsilon)^2 - 1} = +1 \pm i \sqrt{2\epsilon} + O(\epsilon).$$

В силу (9.4),

$$y_n = c_1 (1 + i \sqrt{2\epsilon} + O(\epsilon))^n + c_2 (1 - i \sqrt{2\epsilon} + O(\epsilon))^n.$$

Полагая  $t = nh$ , получим, в силу (в),

$$y_n = y(nh) = y(t) = c_1 (1 + i \sqrt{2\epsilon} + O(\epsilon))^{\frac{\omega t}{\sqrt{2\epsilon + O(\epsilon)}}} + \\ + c_2 (1 - i \sqrt{2\epsilon} + O(\epsilon))^{\frac{\omega t}{\sqrt{2\epsilon + O(\epsilon)}}}.$$

Устремим теперь  $\epsilon$  к нулю. Тогда получим

$$y(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t},$$

что является общим решением уравнения (9.1). — Прим. перев.



Сделаем заключения из проведенного анализа. В случае нашей простой задачи при  $\omega^2 h^2 > 6$ , т. е. при

$$h > \frac{\sqrt{6}}{\omega} = \frac{\sqrt{6}}{2\pi} T = \frac{T}{2,56},$$

где  $T$  — период осцилляций, метод Нумерова—Фокса неприменим. Метод приемлем при  $h < T/2,56$ . Хорошие результаты получатся, если

$$\omega^2 h^2 < \frac{12}{5},$$

т. е. если

$$h < 2 \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{T}{\pi} = \frac{T}{4,05}.$$

Итак, метод Нумерова—Фокса весьма точен при шаге меньше одной четверти периода.

Этот метод часто применяется для отыскания нескольких первых тонов системы в задачах о сложных колебаниях. При этом следует помнить, что шаг  $h$  должен быть меньше четверти наиболее короткого из рассматриваемых периодов.

Аналогичные результаты можно получить и для более сложных задач.

### Задачи

1. Найти методом степенных рядов значения  $y(x)$  при

(а)  $x = 0,1$  (0,1) 0,3 (с тремя знаками),

(б)  $x = 1,0$  и  $x = 1,1$  (с четырьмя знаками) для следующей задачи:

$$y' - 2y = 3e^x, \quad y(0) = 0.$$

Ответ: (а)  $y(0,1) = 0,348$ ;  $y(0,2) = 0,811$ ;  $y(0,3) = 1,415$ ;

(б)  $y(1) = 13,91$ ;  $y(1,1) = 17,87$ .

2. Найти методом степенных рядов значения  $y(x)$  с четырьмя знаками при  $x = 2,1$  и  $x = 2,2$  для следующей задачи:

$$y' + \frac{1}{x} y^2 = 0, \quad y(2) = 1,442.$$

3. Найти методом степенных рядов значения  $y(x)$  с четырьмя знаками при  $x = 0,1$  (0,1) 0,3 для следующих задач:

(а)  $y'' = -xy$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0,5$ ;

(б)  $y'' + yy' = x^2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

Ответ: (а)  $y(0,1) = 1,050$ ;  $y(0,2) = 1,099$ ;  $y(0,3) = 1,145$ ;

(б)  $y(0,1) = 1,095$ ;  $y(0,2) = 1,180$ ;  $y(0,3) = 1,257$ .

4. Найти методом степенных рядов значения  $y(x)$  с четырьмя знаками при  $x = 0,2$  и  $x = 0,4$  для следующей задачи:

$$y''y^2 + 1 = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

5. Найти методом степенных рядов значения  $y(x)$  с тремя знаками при  $x = 1,1$  (0,1) 1,3 для следующей задачи:

$$y'' + y^2y' = x^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

Ответ:  $y(1,1) = 1,100$ ;  $y(1,2) = 1,201$ ;  $y(1,3) = 1,306$ .

6. Математический маятник длины  $L$  (см. фиг. 18) отпущен из состояния покоя под углом  $\theta = 160^\circ$  к вертикали и колеблется в вязкой среде, коэффициент сопротивления которой равен  $\mu = 1,2 \text{ сек}^{-1}$  на единицу массы. Определить методом степенных рядов значения  $\theta(t)$  при  $t = 0$  (0,1) 0,2.

7. Ограничиваясь в формуле Адамса третьими разностями, найти с тремя знаками значения  $y(x)$  из задачи 1 при  $x = 0,4$  (0,1) 0,6. Для начала интегрирования воспользоваться решением задачи 1.

Ответ:  $y(0,4) = 2,20$ ;  $y(0,5) = 3,20$ ;  $y(0,6) = 4,49$ .

8. Ограничиваясь в формуле Адамса третьими разностями, найти с тремя знаками значения  $y(x)$  при  $x = 1,0$  (0,1) 1,6 для следующей задачи:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}, \quad y(1) = 1.$$

Начать интегрирование методом степенных рядов.

9. Ограничиваясь в формуле Адамса третьими разностями, найти с тремя знаками значения  $y(x)$  из задачи 2 при  $x = 2,4$  (0,1) 2,8.

Ответ:  $y(2,4) = 1,14$ ;  $y(2,5) = 1,09$ ;  $y(2,6) = 1,04$ ;  $y(2,7) = 1,00$ ;  
 $y(2,8) = 0,97$ .

10. Ограничиваясь в формуле Адамса третьими разностями, найти с четырьмя знаками значения  $y(x)$  при  $x = 0$  (0,1) 0,6 для следующей задачи:

$$y' + y^2 = e^x, \quad y(0) = 1.$$

Начать интегрировать методом степенных рядов.

11. Твердое тело, падая в воздухе, достигает предельной скорости  $150 \text{ м/сек}$ . Ограничиваясь в формуле Адамса вторыми разностями, найти скорость этого тела  $v(t)$  при  $t = 0$  (1) 6 сек., если  $v(0) = 60 \text{ м/сек}$ , а сопротивление воздуха пропорционально  $v^2$ . (Указание: уравнение движения имеет вид  $m\ddot{x} + \mu\dot{x}^2 = mg$ , где  $m$  — масса.) При достижении предельной скорости  $\ddot{x}$  оказывается равным нулю, т. е.

$$\dot{x}_{\text{пр.}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}.$$

Ответ:

$t$	0	1	2	3	4	5	6
$v$	60	67,8	75,3	82,2	88,8	94,8	100,2

12. Тело спускается при помощи парашюта, причем его предельная скорость равна  $10 \text{ м/сек}$ . Ограничиваясь в формуле Адамса первой разностью, определить скорость  $v(t)$  при  $t = 0, 0,1, 0,5$ , если  $v(0) = 6,67 \text{ м/сек}$  и сопротивление воздуха пропорционально  $v^{3/2}$ .

13. Обмотка электромагнита мотора постоянного тока, имеющая индуктивность  $L = 200 \text{ гн}$ , включена последовательно с сопротивлением  $R$ . Сопротивление  $R$  возрастает вместе с силой тока по линейному закону  $R = R_0 + rI$ , где  $R_0 = 100 \text{ ом}$ ,  $r = 10 \text{ ом/а}$  и  $I$  — сила тока в амперах. Напряжение в цепи после замыкания ключа сохраняет значение  $E = 120 \text{ в}$ . Найти методом Адамса  $I(t)$  при  $t = 0, 0,5, 2,5$  сек. Сравнить результат с силой тока, получающейся в случае, когда сопротивление  $R$  не зависит от  $I$  и равно  $106 \text{ ом}$ , а  $I(0) = 1,2 \text{ а}$ .

Ответ:

$t$	1,5	2,0	2,5
$I$	1,129	1,117	1,108

14. Найти с тремя знаками методом Рунге — Фокса первое приближение  $y(x)$  при  $x = 1,1, 0,1, 1,3$  для следующей задачи:

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}; \quad y(1) = 1.$$

Ответ:  $y(1,1) = 0,996$ ;  $y(1,2) = 0,986$ ;  $y(1,3) = 0,971$ .

15. Найти с тремя знаками методом Рунге — Фокса первое и второе приближения  $y(x)$  при  $x = 0,1, 0,1, 0,4$  для следующей задачи:

$$y' - 2y = 3e^x, \quad y(0) = 0.$$

(Воспользоваться поправкой Фокса.)

16. Найти с тремя знаками методом Рунге — Фокса первое и второе приближения  $y(x)$  при  $x = 1,1, 0,1, 1,3$  для задачи

$$y' - x^2 y = x^2, \quad y(1) = 1.$$

(Воспользоваться поправкой Фокса.)

Ответ:  $y(1,1) = 1,24$ ;  $y(1,2) = 1,58$ ;  $y(1,3) = 2,10$ .

17. Вывести рекуррентные соотношения типа Рунге — Фокса (см. § 5 и § 6) для следующей системы:

$$\begin{aligned} y' &= y + z, & z' &= z - y, \\ y_0 &= 0,1, & z_0 &= 0,2. \end{aligned}$$

Воспользоваться выведенными формулами для отыскания  $y(x)$  при  $x = 0, 0,1, 0,3$ ; поправкой пренебречь.

Ответ:  $y_1 = 0,1326$ ;  $y_2 = 0,1696$ ;  $y_3 = 0,2112$ ;  
 $z_1 = 0,2088$ ;  $z_2 = 0,2149$ ;  $z_3 = 0,2176$ .

18. Найти с тремя знаками методом Адамса — Штёрмера (ограничившись вторыми разностями) значения функций  $y(x)$  и  $z(x)$  при  $x = 0(0,1)0,4$  для следующих задач:

$$(a) y' = 2z^2 - y, \quad y(0) = 1, \quad z' = zy, \quad z(0) = 1;$$

$$(б) y' = z - y^2, \quad y(0) = 1, \quad z' = zy, \quad z(0) = 1.$$

Начать интегрирование методом степенных рядов.

$$\text{О т в е т: (a) } y(0,3) = 1,492; \quad y(0,4) = 1,803; \quad z(0,3) = 1,434; \quad z(0,4) = 1,683.$$

$$(б) y(0,3) = 1,041; \quad y(0,4) = 1,072; \quad z(0,3) = 1,355; \quad z(0,4) = 1,506.$$

19. Ограничиваясь вторыми разностями в формуле Адамса — Штёрмера, вычислить с тремя знаками  $y(x)$  при  $x = 0(0,2)1,0$  для следующей задачи:

$$xy'' + y' + xy = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

Начать интегрирование методом степенных рядов.

$$\text{О т в е т: } y(0,6) = 0,912; \quad y(0,8) = 0,847; \quad y(1,0) = 0,766.$$

20. Ограничиваясь вторыми разностями в формуле Адамса — Штёрмера, найти с четырьмя знаками  $y(x)$  при  $x = 1,0(0,1)1,5$  для следующей задачи:

$$y'' + 3xy' + x^2y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Начать интегрирование методом степенных рядов.

21. Ограничиваясь в формуле Адамса — Штёрмера вторыми разностями, найти с четырьмя знаками  $y(x)$  при  $x = 0(0,1)0,6$  для следующей задачи:

$$y'' + yy' = x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Начать интегрирование методом степенных рядов.

22. Ограничиваясь в формуле Адамса — Штёрмера вторыми разностями, найти с четырьмя знаками  $y(x)$  при  $x = 1,0(0,1)1,5$  для следующей задачи:

$$y'' + y^2y' = x^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

Начать интегрирование методом степенных рядов.

$$\text{О т в е т: } y(1,3) = 1,3053; \quad y(1,4) = 1,4132; \quad y(1,5) = 1,5266.$$

23. Вычислить с четырьмя знаками значения  $y(x)$  при  $x = 0(0,1)0,5$  для задачи

$$y'' + 2xy = 3x^3 + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

следующими методами:

(а) по общим формулам Адамса — Штёрмера, ограничиваясь вторыми разностями;

(б) по формулам Адамса — Штёрмера, выведенным для того случая, когда  $y'$  в уравнение явно не входит, также ограничиваясь вторыми разностями.

Начать интегрирование и в том и в другом случае методом степенных рядов.

24. Вычислить с четырьмя знаками значения  $y(x)$  при  $x = 0(0,1)0,5$  для задачи

$$y'' + x^2y = 3e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

следующими методами:

(а) по общим формулам Адамса — Штёрмера, ограничиваясь вторыми разностями;

(б) по формулам Адамса — Штёрмера, выведенным для того случая, когда  $y'$  в уравнение явно не входит (тоже ограничиваясь вторыми разностями).

Отвѣт: (а)  $y(0,3) = 1,1488$ ;  $y(0,4) = 1,2730$ ;  $y(0,5) = 1,4400$ .  
(б)  $1,1489$ ;  $1,2731$ ;  $1,4400$ .

25. Упругая сфера массы 1, лежащая на твердой горизонтальной плоскости, слегка сжата в вертикальном направлении. В момент  $t = 0$  сжимающие силы удаляются. Требуется найти зависимость смещения  $\alpha$  точки сферы по вертикали от времени. Уравнение движения имеет вид<sup>1)</sup>  $m\ddot{\alpha} + k\alpha^{3/2} = 0$ , где  $k$  — коэффициент упругости. Начальные условия

$$\alpha(0) = \alpha_0; \quad \dot{\alpha}(0) = 0.$$

В предположении  $k = 10$ ,  $\alpha_0 = 1$  найти методом степенных рядов  $\alpha$  при  $t = 0,1$  и  $t = 0,2$ , а затем продолжить решение до момента  $t = 0,5$  методом Адамса — Штёрмера.

26. Материальная точка массы  $M$  брошена вертикально вверх от поверхности земли ( $x = R$ ) с начальной скоростью  $v_0$ . Ограничиваясь в формулах Адамса — Штёрмера разностями первого порядка и предполагая сопротивление воздуха пропорциональным скорости, определить  $x(t)$  при  $t = 0(1)6$ , если в согласованной системе единиц

$$R = 10, \quad v_0 = 5, \quad \mu = 0,1, \quad k = 1$$

(здесь  $\mu$  — коэффициент сопротивления на единицу массы и  $k$  — гравитационная постоянная). Уравнение, описывающее движение, имеет вид<sup>2)</sup>

$$M\ddot{x} + \mu M\dot{x} + Mk/x^2 = 0.$$

Отвѣт:

$t$	0	1	2	3	4	5	6
$x$	10,00	14,75	19,03	22,90	26,41	29,58	32,45

27. Ограничиваясь в формуле Адамса — Штёрмера вторыми разностями, продолжить решение задачи 6 для  $t = 0,2(0,1)0,5$ .

<sup>1)</sup> Тимошенко С. П., Теория упругости, М. — Л., 1934, стр. 384.

<sup>2)</sup> Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, ч. I, М. — Л., 1939, стр. 266—276. — Прим. перев.

28. Тело массы  $M$ , находящееся на гладкой горизонтальной плоскости, колеблется (без трения) под действием пружины, коэффициент упругости которой равен  $k_0 + rx^2$ . Тело проходит через точку  $x = 0$  со скоростью  $v_0$ . Ограничиваясь в формуле Адамса — Штёрмера вторыми разностями, определить  $x(t)$  при  $t = 0(0,5)3$ , если в согласованной системе единиц

$$M = 1, \quad k_0 = 1, \quad r = \frac{1}{2}, \quad v_0 = 1.$$

Указание: уравнение движения есть  $M\ddot{x} + (k_0 + rx^2)x = 0$ .

Ответ:

$t$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$x$	0	0,478	0,823	0,892	0,658	0,236	-0,244

29. Тело задачи 28 колеблется под действием пружины, коэффициент упругости которой равен  $k_0 - rx^2$ , где  $k_0 = 1$ ,  $r = 1/2$ . При  $x = 1$  скорость равна нулю. Ограничиваясь в формуле Адамса — Штёрмера вторыми разностями, определить  $x$  при  $t = 0(1)4$ .

30. Уравнение движения электрона в электростатическом поле, образованном бесконечно длинной положительно заряженной проволокой, имеет вид

$$m\ddot{x} + \frac{k}{x} = 0,$$

где  $x$  — расстояние от проволоки до электрона. Ограничиваясь в формуле Адамса — Штёрмера вторыми разностями, определить  $x(t)$  при  $t = 0(2)6$ , если  $k/m = 2$  и в момент  $t = 0$  электрон начинает двигаться из состояния покоя на расстоянии 8 единиц от проволоки.

Ответ:

$t$	0	2	4	6
$x$	8,000	7,496	5,943	3,026

31. Вычислить с тремя знаками методом Фокса первое и второе приближения  $y(x)$  при  $x = 0(0,2)1,0$  для следующей задачи:

$$xy'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

В выражении для поправки учесть два первых члена.

Ответ:  $y(0,4) = 0,960$ ;  $y(0,6) = 0,912$ ;

$y(0,8) = 0,847$ ;  $y(1,0) = 0,766$ ;

32. Найти с четырьмя знаками значения  $y(x)$  при  $x = 0(0,2)1,0$  методом Фокса для следующей задачи:

$$y'' + 3xy' + x^2y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

33. Вычислить с тремя знаками первое и второе приближения  $y(x)$  при  $x = 0(0,4)2,0$  методом Фокса для следующей задачи:

$$xy'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

В выражении для поправки учесть первые два члена.

О т в е т:  $y(0,8) = 0,846; \quad y(1,2) = 0,671;$

$y(1,6) = 0,456; \quad y(2,0) = 0,224.$

34. Воспользовавшись рекуррентной формулой Нумерова — Фокса, вычислить с тремя знаками значения  $y(x)$  при  $x = 0(0,1)0,5$  для следующей задачи:

$$y'' + x^2y = 3e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Значение  $y(0,1)$  найти методом степенных рядов.

35. Воспользовавшись рекуррентной формулой Нумерова — Фокса, вычислить с четырьмя знаками значения  $y(x)$  при  $x = 0(0,1)0,5$  для следующей задачи:

$$y'' + 2xy = 3x^3 + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

О т в е т:  $y(0) = 1; \quad y(0,1) = 1,105$  (из разложения в степенной ряд)

$y(0,2) = 1,217; \quad y(0,3) = 1,335; \quad y(0,4) = 1,456; \quad y(0,5) = 1,577.$

36. Математический маятник длины  $L$  (см. фиг. 18) проходит в момент  $t = 0$  через точку  $\theta = 0$  с угловой скоростью  $\dot{\theta} = 1$  рад/сек. Считая величину отклонения малой, определить  $\theta(t)$  при  $t = 0(0,1)0,5$  методом Нумерова — Фокса, если  $g/L = 20$  сек.<sup>-2</sup>

(а) Получить значения  $\theta(t)$  при  $t = 0,1$  и  $t = 0,2$ , заменив приближенно  $\dot{\theta}_0$  значением  $^1) \mu \left( \delta - \frac{\delta^3}{6} \right) \theta_0$  и рассмотрев разностное уравнение (8.6) при  $t = -0,1, t = 0$  и  $t = 0,1$ .

(б) Получить значение  $\theta(0,1)$  методом степенных рядов.

37. Маятник задачи 36 колеблется в вязкой среде, причем  $\mu = 1,2$ . Найти  $\theta(t)$  при  $t = 0(0,1)0,5$  методом Фокса.

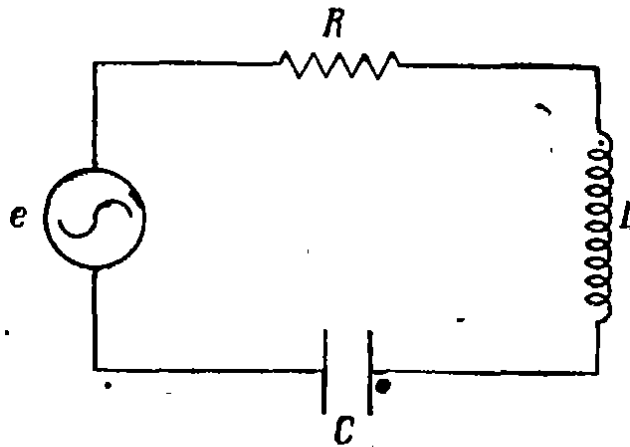
У к а з а н и е: значение  $\theta(0,1)$  найти методом степенных рядов.

О т в е т:

$t$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\theta$	0,091	0,155	0,182	0,171	0,130	0,068

<sup>1)</sup>  $\mu$  — оператор усреднения (см. гл. 11, § 7). — Прим. перев.

38. Электрическая цепь фиг. 21 содержит катушку, индуктивность которой равна  $L = 0,1$  гн, конденсатор емкости  $C = 0,05$  мкф ( $0,05 \cdot 10^{-6}$  ф) и сопротивление  $R = 5000$  ом. Э. д. с. батареи равна 22,5 в. В момент  $t = 0$  ток по цепи не идет и заряд конденсатора равен нулю.



Фиг. 21.

(а) Найти методом Фокса заряд  $q$  при  $t = 0$  (0,01) 0,04, если цепь замкнута в момент  $t = 0$ .

(б) Определить заряд  $q$ , если  $R = 0$ .

(в) Определить заряд  $q$ , если  $R = 2000$  ом и если при  $t = 0$  через цепь течет ток в 5 ма в том же направлении, в котором приложена э. д. с.

У к а з а н и е. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e,$$

где  $e$  — э. д. с. батареи. Сила тока равна  $dq/dt$ .

О т в е т: (б) Значения  $q$  в точном решении:

$10^2 t$	1	2	3	4
$q$	0,0112	0,0439	0,0998	0,1753

39. Доказать, что численное решение задачи

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

посредством замены  $h^2 y''$  на  $\delta^2 y$  приводит к следующим результатам:

(а) если  $h = T/4,44$ , где  $T = 2\pi/\omega$  — период истинного решения, то получается периодическая функция с частотой  $1,11\omega$ ;

(б) если  $h > T/4,44$ , то решение расходится.



## ГЛАВА IV

# ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### § 1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Для решения краевой задачи методом конечных разностей прежде всего составляется система алгебраических уравнений, аппроксимирующая дифференциальное уравнение и граничные условия. Решив эту систему, мы определим тем самым приближенные значения искомой функции в узловых точках области ее определения. (Если речь идет об одном обыкновенном дифференциальном уравнении, то областью определения является отрезок.) Таким образом, применяя метод конечных разностей, мы сводим интегрирование дифференциального уравнения к решению системы алгебраических уравнений.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет смысл только задача Коши. Различные краевые задачи ставятся для уравнений второго и высших порядков. При этом в случае уравнения нечетного порядка на концах интервала должно быть неодинаковое число граничных условий. Иногда это неудобно для численного интегрирования, и тогда задачу сводят к уравнению четного порядка путем, например, дифференцирования или интегрирования.

Применяя метод конечных разностей, следует по возможности пользоваться при замене входящих в дифференциальное уравнение производных формулами, содержащими центральные разности, на порядок более точными, чем формулы с односторонними разностями (при том же числе точек).

Производные, входящие в граничные условия, можно, вообще говоря, выразить как через центральные разности, так и через односторонние. Например, используя первые члены разложений (7.16) гл. II, мы можем заменить граничные условия в точке  $x = 0$  следующими условиями, выраженными через центральные разности:

$$\begin{aligned}y(0) = 0: & \quad y_0 = 0; \\y'(0) = 0: & \quad y_1 - y_{-1} = 0; \\y''(0) = 0: & \quad y_1 - 2y_0 + y_{-1} = 0; \\y'''(0) = 0: & \quad y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2} = 0; \\y^{IV}(0) = 0: & \quad y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2} = 0.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Эти равенства используются для того, чтобы выразить значения  $y_{-1}$  и  $y_{-2}$ , лежащие вне интервала определения функции, через  $y_0, y_1, y_2$ . Погрешность их есть  $O(h^2)$ <sup>1)</sup>.

Если производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменены центральными разностями с погрешностью порядка  $h^2$ , а производные, входящие в граничные условия, выражаются через односторонние разности, то погрешность последних должна быть по возможности также  $O(h^2)$ . В силу сказанного, например, граничные условия (1.1) следует записать согласно фиг. 9, гл. II, так:

$$\begin{aligned} y(0) = 0: & \quad y_0 = 0; \\ y'(0) = 0: & \quad -y_2 + 4y_1 - 3y_0 = 0; \\ y''(0) = 0: & \quad -y_3 + 4y_2 - 5y_1 + 2y_0 = 0; \\ y'''(0) = 0: & \quad -3y_4 + 14y_3 - 24y_2 + 18y_1 - 5y_0 = 0; \\ y^{IV}(0) = 0: & \quad -2y_5 + 11y_4 - 24y_3 + 26y_2 - 14y_1 + 3y_0 = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

## § 2. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ С ОДНОЙ СТОРОНЫ

Сочетая методы численного интегрирования, изложенные в гл. III, с последовательными приближениями и интерполяциями, мы можем решать краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим, например, следующую простую задачу:

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \quad (a)$$

Процесс интегрирования начнем, как обычно, методом степенных рядов. Предположив, что  $y'_0 = y'(0) = 1$ , найдем:

$$y_0 = 0, \quad y'_0 = 1, \quad y''_0 = 0, \quad y'''_0 = 1, \dots$$

Таким образом, в окрестности точки  $x = 0$  имеет место разложение

$$y = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \operatorname{sh} x.$$

Согласно этому разложению,

$$y(1) = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots = \operatorname{sh} 1 = 1,175,$$

т. е. в точке  $x = 1$  найденное значение  $y$  отличается от истинного на 0,175. В предположении  $y'_0 = 0$  из разложения в степенной ряд следует, что  $y(x) \equiv 0$ . Это решение отличается на правом конце от

<sup>1)</sup> Это означает, что левая часть  $k$ -го равенства равна  $h^k [y^k(0) + O(h^2)]$ . — *Прим. ред.*

искомого на  $-1,0$ . Предполагая, что значение  $y$  на правом конце линейно, зависит от  $y'_0$ , найдем линейной интерполяцией [гл. I, (2.6)]:

$$y'_0 = \frac{1 \cdot (-1) - 0 \cdot (0,175)}{-1 - 0,175} = 0,851.$$

Для этого значения  $y'_0$  методом степенных рядов получим новое приближение  $y$ :

$$y_0 = 0, \quad y'_0 = 0,851, \quad y'' = 0, \quad y''' = 0,851, \dots,$$

$$y = 0,851 \left( x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) = 0,851 \operatorname{sh} x. \quad (6)$$

В точке  $x = 1$  значение этой функции равно

$$y = 0,851 \operatorname{sh} x = 1,000,$$

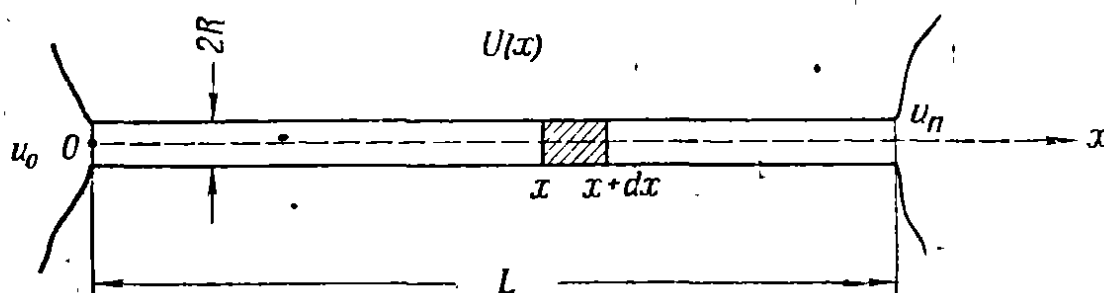
то есть (6) решает задачу (а).

Вообще говоря, для определения  $y(x)$  одной интерполяции недостаточно<sup>1)</sup>, и описанный процесс приходится повторять несколько раз. Ясно, что кроме использованного выше метода степенных рядов можно пользоваться и другими методами гл. III.

В отличие от методов, описываемых ниже, примененный только что метод годится для нелинейных дифференциальных уравнений.

### § 3. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ЦЕНТРАЛЬНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Для того чтобы проиллюстрировать общий метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью центральных разностей, рассмотрим задачу о стационарном распределении температуры  $u(x)$  в круглом металлическом стержне



Фиг. 22.

длины  $L$  и радиуса  $R$  (фиг. 22). На двух концах этого стержня поддерживается постоянная температура, равная соответственно  $u_0$  и  $u_n$ . Кроме того, предполагается, что имеет место излучение в окружающую среду, температура которой равна  $U(x)$ .

<sup>1)</sup> Одной интерполяции достаточно в случае линейного дифференциального уравнения. — Прим. перев.

Приравнявая количество тепла, втекающего в элемент стержня длины  $dx$ , количеству тепла, теряемому наружной поверхностью этого элемента, можно показать<sup>1)</sup>, что рассматриваемая задача описывается следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} u'' - \frac{2k_1}{kR} u &= -\frac{2k_1}{kR} U, \\ u(0) &= u_0, \quad u(L) = u_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Здесь  $k$  — коэффициент теплопроводности,

$k_1$  — коэффициент излучения,

ось  $x$  совпадает с осью стержня, причем точка  $x = 0$  лежит на левом его конце.

Для того чтобы привести уравнение к безразмерной форме, положим

$$z = \frac{x}{L}, \quad v(z) = \frac{u(x)}{u_n}, \quad F(z) = \frac{U(x)}{U(0)}.$$

Согласно (3.1),

$$\left. \begin{aligned} v'' - \frac{2k_1}{kR} L^2 v &= -\frac{2k_1}{kR} L^2 \frac{U(0)}{u_n} F(z), \\ v(0) &= \frac{u_0}{u_n}, \quad v(1) = 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

причем штрих обозначает теперь дифференцирование по  $z$ .

Мы решим задачу для следующего частного случая:

$$L = 100 \text{ см}, \quad R = 1 \text{ см},$$

$$k = 1 \text{ кал/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град},$$

$$k_1 = 6 \cdot 10^{-4} \left( \frac{3}{2} z + \frac{1}{3} \right) \text{ кал/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}^2,$$

$$u_0 = 0, \quad U(0)/u_n = 1,$$

$$F(z) = e^z.$$

При этих значениях параметров рассматриваемая задача (3.2) принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} v'' - 2(9z + 2)v &= -2(9z + 2)e^z, \\ v(0) &= 0, \quad v(1) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Для того чтобы свести эту задачу к соответствующей разностной, разобьем интервал определения функции  $v$  [т. е. интервал  $(0, 1)$  оси  $z$ ] на  $n$  равных частей, выбрав тем самым шаг  $h = 1/n$ . Далее, умножим уравнение (3.3) на  $h^2$  и заменим член  $h^2 v''$ , согласно

<sup>1)</sup> Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 2, М.—Л., 1953, стр. 332—334 и 615. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Известно, что при температурах от 0 до 500 °С коэффициент излучения  $k_1$  почти линейен.

(7.16), гл. II, равным ему выражением  $(\delta^2 v + \varepsilon_2)$ . При этом в точке  $z_i = ih$  получим следующее разностное уравнение:

$$v_l - 2v_i + v_r + \varepsilon_{2i} - 2h^2(9z_i + 2)v_i = -2h^2(9z_i + 2)e^{\varepsilon_i},$$

или

$$v_l - c_{hi}v_i + v_r = -(c_{hi} - 2)e^{\varepsilon_i} - \varepsilon_{2i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (3.4)$$

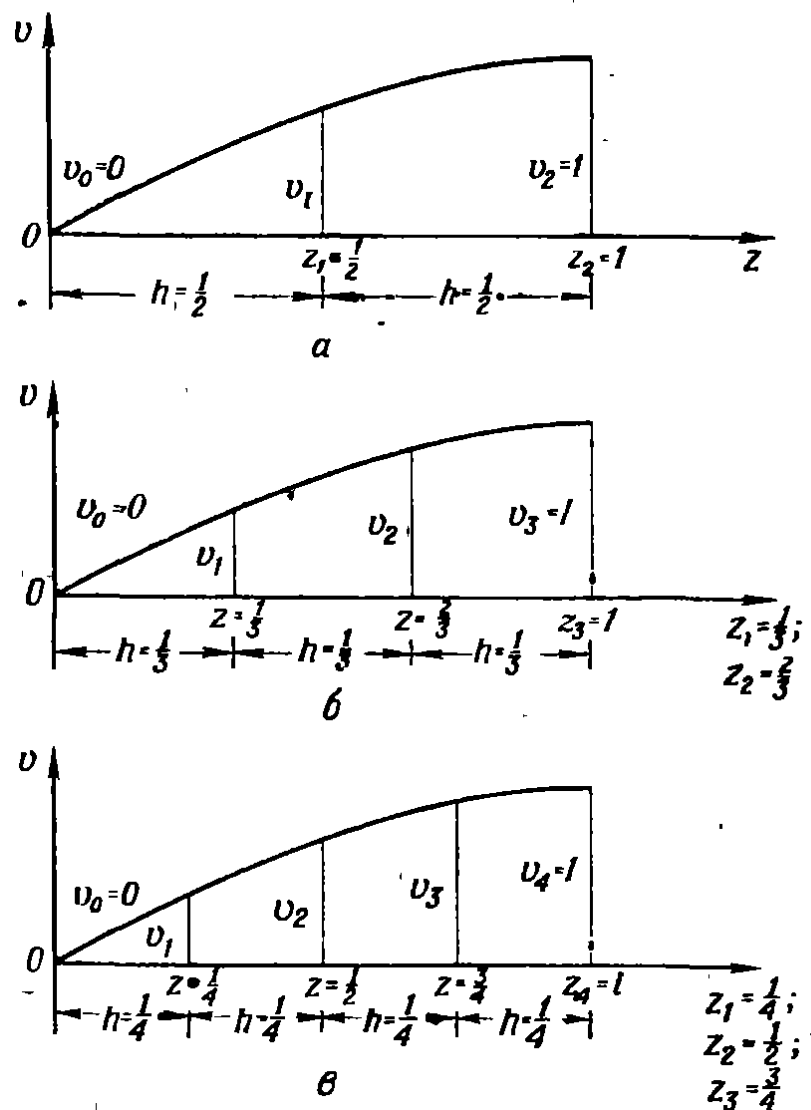
где

$$c_{hi} = 2[1 + h^2(9z_i + 2)]. \quad (3.5)$$

Граничные условия для нашей задачи имеют вид

$$v_0 = 0, \quad v_n = 1. \quad (3.6)$$

Уравнения (3.4), имеющие смысл во внутренних узловых точках  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , составляют систему  $(n-1)$  линейных алгебраических уравнений с  $(n-1)$  неизвестными значениями  $v_i$ . Решив



Фиг. 23.

эту систему, мы определим тем самым значения функции  $v_i$  во всех узловых точках  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  (вспомним, что  $v_0$  и  $v_n$  нам заданы). Увеличивая число интервалов  $n$ , мы можем, по крайней мере теоретически, неограниченно увеличивать точность.

Мы решим задачу, описываемую равенствами (3.4) и (3.6), последовательно для  $n = 2; 3; 4$ , уменьшая тем самым постепенно шаг  $h$ .

1.  $n = 2$ . Уравнение (3.4) имеет смысл в единственной точке  $z_1 = 1/2$  (фиг. 23,а).

Так как

$$h = \frac{1}{2}, \quad v_1 = v_0 = 0, \quad v_r = v_2 = 1,$$

то

$$c_{hi} = 2 [1 + 0,25 (9 \cdot 0,5 + 2)] = 5,25$$

и

$$0 - 5,25v_1 + 1 = -3,25e^{0,5} = -5,359. \quad (3.7)$$

Отсюда

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = v_1^{(1)} = 1,211.$$

2.  $n = 3$ . Уравнение (3.4) имеет смысл в точках  $z_1 = 1/3, z_2 = 2/3$  (фиг. 23,б). Так как

$$h = \frac{1}{3}, \quad v_0 = 0, \quad v_n = v_3 = 1,$$

то

$$c_{hi} = 2 \left[ 1 + \frac{1}{9} (9z_i + 2) \right].$$

Таким образом,

$$\text{в точке } z_1 = 1/3: 0 - 3,1111v_1 + v_2 = -1,1111e^{1/3} = -1,5507,$$

$$\text{в точке } z_2 = 2/3: v_1 - 3,7778v_2 + 1 = -1,7778e^{2/3} = -3,4628.$$

Отсюда

$$v(1/3) = v_1^{(1)} = 0,9599, \quad v(2/3) = v_2^{(1)} = 1,4354.$$

3.  $n = 4$ . Уравнение (3.4) имеет смысл в точках  $z_1 = 1/4, z_2 = 1/2, z_3 = 3/4$  (фиг. 23,в). Так как

$$h = \frac{1}{4}, \quad v_0 = 0, \quad v_n = v_4 = 1,$$

то

$$c_{hi} = 2 \left[ 1 + \frac{1}{16} (9z_i + 2) \right].$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} z_1 = 1/4: & \quad -2,5312v_1 + v_2 = -0,6821, \\ z_2 = 1/2: & \quad v_1 - 2,8125v_2 + v_3 = -1,3396, \\ z_3 = 3/4: & \quad v_2 - 3,0938v_3 = -3,3156. \end{aligned} \right\} (3.8)$$

Систему (3.8) можно решить каким-нибудь из методов гл. I. В табл. 12 (гл. I, § 10) эта система была решена методом релаксации, причем оказалось, что

$$v_1^{(1)} = 0,7753; \quad v_2^{(1)} = 1,2802; \quad v_3^{(1)} = 1,4855. \quad (3.9)$$

Так как мы всюду пренебрегали поправкой  $\epsilon$ , то полученные значения являются лишь первыми приближениями (мы отмечаем это верхним индексом 1, заключенным в скобки).

В табл. 39 система (3.8) решена методом итераций. В качестве начальных приближений были взяты  $v_2^{(0)} = 1$ ,  $v_3^{(0)} = 1$ .

Таблица 39

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$v_1$	0,6646	0,6915	0,7539	0,7699	0,7739	0,7750	0,7752	0,7753
$v_2$	1,0682	1,2260	1,2664	1,2767	1,2793	1,2800	1,2802	1,2802
$v_3$	1,4169	1,4680	1,4810	1,4843	1,4852	1,4854	1,4855	1,4855

В табл. 40 эта же система решена методом Холецкого.

Таблица 40

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$c$	1	2	3	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$k$
1	2,5312	-1	0	0,6821	2,5312	0	0	1	-0,3951	0	0,2695
2	-1	2,8125	-1	1,3396	-1	2,4174	0	0	1	-0,4137	0,6656
3	0	-1	3,0938	3,3156	0	-1	2,6801	0	0	1	1,4855

$$v_3 = 1,4855$$

$$v_2 = 0,6656 + 0,4137 \cdot 1,4845 = 1,2802$$

$$v_1 = 0,2695 + 0,3951 \cdot 1,2802 = 0,7753$$

Увеличивая число шагов, можно вычислить  $v(z)$  с весьма высокой точностью, однако, достигается этой ценой значительного увеличения работы. Но можно добиться увеличения точности вычислений и при весьма малой затрате дополнительного труда. Нужно только воспользоваться ричардсоновскими экстраполяциями или поправкой Фокса. В последующих параграфах мы и покажем, как это делается.

## § 4. УТОЧНЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ ПОПРАВOK

## [а] Схема Гаусса

В первых пяти столбцах табл. 41 система (3.8) решена по схеме Гаусса. Найденное решение  $v_i^{(1)}$  выписано в первой строке нижней половины таблицы. Эти значения с точностью до единицы последнего знака совпадают со значениями, вычисленными другими методами (Холецкого, итераций, релаксации).

Таблица 41

№ строки	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$c$	$c + \epsilon_2^{(1)}$	$c + \epsilon_2^{(2)}$	Пояснения
1	-2,5312	1	0	-0,6821	-0,7122	-0,7130	I
2	1	-2,8125	1	-1,3396	-1,3697	-1,3705	II
3	0	1	-3,0938	-3,3156	-3,3457	-3,3465	III
4	2,5312	-7,1190	2,5312	-3,3908	-3,4670	-3,4690	$2,5312 \times (2)$
5		-6,1190	2,5312	-4,0729	-4,1792	-4,1820	$(1) + (4)$
6		6,1190	-18,9310	-20,2882	-20,4723	-20,4772	$6,1190 \times (3)$
7			-16,3998	-24,3611	-24,6515	-24,6592	$(5) + (6)$

№ приближения	$v_1$ (из первой строки)	$v_2$ (из третьей строки)	$v_3$ (из седьмой строки)	Правая часть
1	0,7752	1,2801	1,4854	$c$
2	0,7968	1,3048	1,5032	$c + \epsilon_2^{(1)}$
3	0,7974	1,3054	1,5036	$c + \epsilon_2^{(2)}$

Корни  $v_i^{(1)}$  вычислялись без учета поправки  $\epsilon$ . Теперь мы можем учесть ее. Для этого составим прежде всего центральные разности



Таблица 42

$i$	$v_i$	$\delta v_{i+1/2}$	$\delta^2 v_i$	$\delta^3 v_{i+1/2}$	$\delta^4 v_i$	$\epsilon_2$
0	0					
		0,7752				
1	0,7752		-0,2703		(-0,3618)	(0,0301)
		0,5049		-0,0293		
2	1,2801		-0,2996		-0,3618	0,0301
		+0,2053		-0,3911		
3	1,4854		-0,6907		(-0,3618)	(0,0301)
		-0,4855				
4	1,0000					

значений  $v_i^{(1)}$ , найденных в табл. 41 (см. табл. 42). Четвертая разность  $\delta^4 v_i^{(1)}$  может быть вычислена лишь в единственной точке  $i = 2$ . Поэтому мы будем считать ее постоянной, равной  $\delta^4 v_2^{(1)} = -0,3618$  (в табл. 42 экстраполированные значения заключены в скобки). Зная  $\delta^4 v$ , можно, согласно (7.16), гл. II, вычислить  $\epsilon_2^{(1)}$ :

$$\epsilon_2^{(1)} \approx -\frac{\delta^4 v}{12} = 0,0301.$$

Принимая во внимание найденное значение  $\epsilon_2^{(1)}$ , мы получим из (3.4) вместо системы (3.8) следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} -2,5312v_1 + v_2 &= -0,6821 - 0,0301 = -0,7122, \\ v_1 - 2,8125v_2 + v_3 &= -1,3396 - 0,0301 = -1,3697, \\ v_2 - 3,0938v_3 &= -3,3156 - 0,0301 = -3,3457. \end{aligned} \right\} (4.1)$$

Эта система отличается от (3.8) лишь правыми частями. Поэтому ее удобно решать по схеме Гаусса, дописав в табл. 41 еще один, шестой, столбец, содержащий новые правые части. Решение этой системы выписано во второй строке нижней половины табл. 41.

Составив центральные разности значений  $v_i^{(2)}$ , мы можем вычислить уточненную поправку  $\epsilon_2^{(2)}$ , а по ней — новые правые части системы (4.1). Эти новые правые части содержатся в седьмом столбце табл. 41.

Соответствующее им решение  $v_1^{(3)}$  выписано в третьей строке нижней половины таблицы. Процесс повторяется до тех пор, пока поправка  $\epsilon$  не стабилизируется. В нашем случае это происходит на третьем шаге, и, таким образом,  $v_1^{(3)}$  оказываются окончательными значениями  $v$ .

Используем теперь поправки Фокса для уточнения решения той же задачи при  $n=2$  (см. стр. 142). Для этого запишем  $\epsilon_2$ , согласно равенству (7.10) гл. II, в дифференциальной форме:

$$\epsilon_2 \cong -\frac{h^4 v^{IV}}{12}. \quad (a)$$

Производную  $v^{IV}$  выразим через  $v$  и  $v'$ , дважды продифференцировав для этого первое из равенств (3.3):

$$v^{IV} = 2(9z+2)v'' + 36v' - 2(9z+20)e^z,$$

и подставив вместо  $v''$  значение, найденное из тех же равенств (3.3):

$$v^{IV} = 2(9z+2)[2(9z+2)v - 2(9z+2)e^z] + 36v' - 2(9z+20)e^z.$$

В последнем выражении заменим производную  $v'$  усредненной центральной разностью:

$$v'_1 \cong \mu \delta v_1 = \frac{v_2 - v_0}{2} = 1,0.$$

Подставив в (a) значение  $v^{IV}$ , найденное при  $v = 1,211$  и  $v' = 1,0$ , получим:

$$\epsilon_2^{(1)} = -\frac{h^4 v^{IV}}{12} = 0,619.$$

Согласно этому значению  $\epsilon$ , уравнение (3.7) заменится уравнением

$$-5,25v_1 + 1 = -5,359 - 0,619 = -5,978,$$

откуда  $v_1^{(2)} = 1,329$ . Повторяя процесс, последовательно вычислим

$$\epsilon_2^{(2)} = 0,515, \quad v_1^{(3)} = 1,309,$$

$$\epsilon_2^{(3)} = 0,533, \quad v_1^{(4)} = 1,313,$$

$$\epsilon_2^{(4)} = 0,529, \quad v_1^{(5)} = 1,312.$$

Аппроксимацию поправки  $\epsilon_2$  производными можно использовать и в случае  $n=4$ .

### [б] Релаксация

Для улучшения результата, полученного из грубых разностных формул, можно воспользоваться поправками Фокса в сочетании

с методом релаксации. В предыдущем разделе мы обнаружили, что для получения уточненной системы (4.1) нужно к правым частям системы (3.8) прибавить первое приближение поправки  $\epsilon_2^{(1)} = 0,0301$ . Пусть правые части системы (3.8), подготовленной для релаксации [гл. I, § 10, (в)], равны <sup>1)</sup>  $k_i^{(1)}$ . Тогда из сказанного выше следует, что правые части подготовленной для релаксации системы (4.1) равны  $k_i = k_i^{(1)} + \epsilon_2^{(1)}/a_{ii}$ . Разности  $k_i - k_i^{(1)} = \epsilon_2^{(1)}/a_{ii}$  обозначим через  $\delta k_i$ . В нашем случае

$$\delta k_1^{(1)} = 0,0301/2,5312 = 0,0119,$$

$$\delta k_2^{(1)} = 0,0301/2,8125 = 0,0107,$$

$$\delta k_3^{(1)} = 0,0301/3,0938 = 0,0097.$$

Если решать систему (4.1) методом релаксации, взяв в качестве первого приближения решение неуточненной системы (гл. I, табл. 12), то невязки  $R_i$  окажутся, очевидно, равными  $\delta k_i$ . Корни уточненной системы можно получить релаксацией этих невязок. Вычисления проведены в табл. 43. На первом шаге делается групповая релаксация при  $\delta = 200$ , причем коэффициенты округляются до двух знаков [гл. I, § 10, (г)]. Для вычисления последних невязок используются точные значения коэффициентов [гл. I, § 10, (в)].

Таблица 43

	7753	119	12802	107	14855	97
	200	X	200	51	200	-39
	19	19	50	X	-23	-23
		-1	-2	X		-1
				X		
$v_i^{(2)}$	7972	-1	13050	1	15032	0

Вторая поправка  $\epsilon_i^{(2)}$ , вычисленная по значениям  $v_i^{(2)}$ , приводит к новым значениям  $\delta k_i = \epsilon_i^{(2)}/a_{ii}$ :

$$\delta k_1^{(2)} = 0,0122, \quad \delta k_2^{(2)} = 0,0110, \quad \delta k_3^{(2)} = 0,0100.$$

Эти значения отличаются от прежних в пределах трех единиц последнего знака. Поэтому, используя в качестве начального приближения значения  $v_i^{(2)}$  (см. табл. 43), а в качестве невязок  $R_i$  разности

1)  $i$  — номер уравнения. — Прим. перев.

$\delta k_i^{(2)} - \delta k_i^{(1)}$ , мы весьма экономно вычислим третье приближение  $v_i^{(3)}$  (вычисления приведены в табл. 44).

Таблица 44

	7972	$\mathcal{A}$	13050	$\mathcal{A}$	15032	$\mathcal{A}$
	4	$\mathcal{A}$	3	$\mathcal{A}$	4	$\mathcal{A}$
		1	3	$\mathcal{A}$		1
$v_i^{(3)}$	7976	0	13056	0	15036	1

Можно получить более точный график функции  $v$ , разбив интервал ее определения на 6 частей, т. е. выбрав шаг  $h = 1/6$ . Система уравнений для определения узловых значений, полученная в этом случае согласно (3.4), записана в табл. 45. Решение этой системы методом релаксации приведено в табл. 46. В качестве начальных брались значения  $v$ , полученные линейной интерполяцией решения, соответствующего  $h = 1/4$ . Невязки контролировались трижды: первый раз после того, как решение было вычислено с тремя знаками, второй — с четырьмя и третий — с пятью. Первое приближение было найдено с четырьмя знаками. После этого по центральным разностям <sup>1)</sup> была вычислена поправка  $\epsilon^{(1)}$  и определено с пятью знаками второе приближение. Для вычисления третьего приближения отыскивалась также по разностям) вторая поправка  $\epsilon^{(2)}$ .

Таблица 45

$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$k$	Групповые коэффициенты
-1	0,4557				0,1047	-0,5443
0,4390	-1	0,4390			0,1702	-0,1220
	0,4235	-1	0,4235		0,2521	-0,1530
		0,4091	-1	0,4091	0,3541	-0,1818
			0,3596	-1	0,8760	-0,6404

<sup>1)</sup> Шестая разность считалась постоянной.

Таблица 46

	$U_1$		$U_2$		$U_3$		$U_4$		$U_5$		Пояснения
	0,56	0 1,00	-1 1,31	-2 1,43	-2 1,33	-2	1,43	1,33	1,43		
							6	12	-1		Начальные значения и невязки
							-1				
	0,560	1,000	1,310	1,430	1,450						Корни с двумя десятичными знаками
	-5	-9	-7	-3	0	16	-2				
	0,5550	0,9880	1,3030	1,4870	1,4660						Корни с тремя десятичными знаками
	-24	-40	-40	-30	-30	-25					
	-7	-8	-20	-10	-3	1	-2				
		-12	-8	-3	1	-2					
		-4	-5	1	-1	-1					
			-10	-2	-10	-2					
			2	-1	-2	1					
			-1	1	-1	1					
				-2	-2	-1					
	0,5519	0,9816	1,2957	1,4827	1,4627						Контроль невязок
$U_1^{(1)}$	0,5519	0,9813	1,2957	1,4827	1,4627						Первое приближение с четырьмя знаками и первая поправка
	40	70	120	160	150	-55					
	3	10	8	6	10	8					
		3	2	4	8	18					
			2	8	8	2					
			1	1	1	1					
		0	0	0	0						Контроль невязок
$U_1^{(2)}$	0,5562	0,9896	1,3087	1,4997	1,4787						Второе приближение и поправка к поправке
	2	2	3	4	4	1					
$U_1^{(3)}$	0,5564	0,9899	1,3090	1,5001	1,4791						Третье приближение

## § 5. УТОЧНЕНИЕ РЕШЕНИЯ МЕТОДОМ ЭКСТРАПОЛЯЦИЙ

В § 3 мы нашли решение  $v(z)$  задачи (3.3) с помощью центральных разностей. В частности,  $h^2 v''$  заменялось второй разностью  $\delta^2 v$ , и это привело к погрешности порядка  $h^2$  в  $v$ . Поэтому для уточне-

ния, например, значения  $v(1/2)$  можно пользоваться ричардсоновскими экстраполяциями порядка  $h^3$  или  $(h^2, h^4)$  (гл. II, § 9).

В табл. 47 приведены значения первых приближений  $v(1/2)$ , полученные при подразделении интервала определения на  $n = 2; 4; 6$  частей. В этой же таблице содержатся экстраполированные значения: порядка  $h^2$  для  $n_2/n_1 = 4/2$ ,  $n_2/n_1 = 6/4$  и порядка  $(h^2, h^4)$  для  $n_3/n_2/n_1 = 6/4/2$ . Экстраполяционные коэффициенты брались из табл. 21 и 22 (гл. II, § 9).

Таблица 47

$n$	Неуточненное значение $v\left(\frac{1}{2}\right)$	$n$	Экстраполяция порядка $h^2$	$n$	Экстраполяция порядка $(h^2, h^4)$	Уточненное значение $v\left(\frac{1}{2}\right)$	$n$	Экстраполяция порядка $h^4$
2	1,2110	2,4	1,3033	2, 4, 6	1,3088	1,3120	2,4	1,3050
4	1,2802	4,6	1,3081			1,3054	4,6	1,3099
6	1,2957					1,3090		

Заметим, что, например, значение

$$v\left(\frac{1}{2}\right)\Big|_{2,4} = 1,3333 \cdot 1,2802 - 0,3333 \cdot 1,2110 = 1,3033,$$

полученное экстраполяцией порядка  $h^2$ , лишь на 0,16% отличается от значения  $v_2^{(3)} = 1,3054$ , полученного при подразделении на 4 интервала с использованием двух поправок (см. табл. 41). Аналогично, значение

$$v\left(\frac{1}{2}\right)\Big|_{4,6} = 1,8 \cdot 1,2957 - 0,8 \cdot 1,2802 = 1,3081.$$

лишь на 0,07% отличается от значения  $v_3^{(3)} = 1,3090$ , полученного при подразделении на 6 интервалов с использованием двух поправок (табл. 46). При этом  $v_3^{(3)}$  является, повидимому, вообще наилучшим приближением среди полученных без экстраполяций.

Далее, табл. 47 содержит значения  $v(1/2)$ , вычисленные при  $n = 2; 4; 6$  и уточненные с помощью поправки Фокса. Учет этой поправки, равной  $-\delta^4 v/12$ , эквивалентен тому, что в разложении  $h^2 D^2$  по степеням центральных разностей берутся два первых члена [гл. II, (7.15)]. Следовательно, погрешность *уточненного* решения есть  $O(h^4)$ , и мы

можем воспользоваться экстраполяцией порядка  $h^4$ . Экстраполированные значения при  $n_2/n_1 = 4/2$  и  $n_2/n_1 = 6/4$  приведены в табл. 47:

$$v\left(\frac{1}{2}\right)\Big|_{2,4} = 1,0667 \cdot 1,3054 - 0,0667 \cdot 1,3120 = 1,3050,$$

$$v\left(\frac{1}{2}\right)\Big|_{4,6} = 1,2462 \cdot 1,3090 - 0,2462 \cdot 1,3054 = 1,3099$$

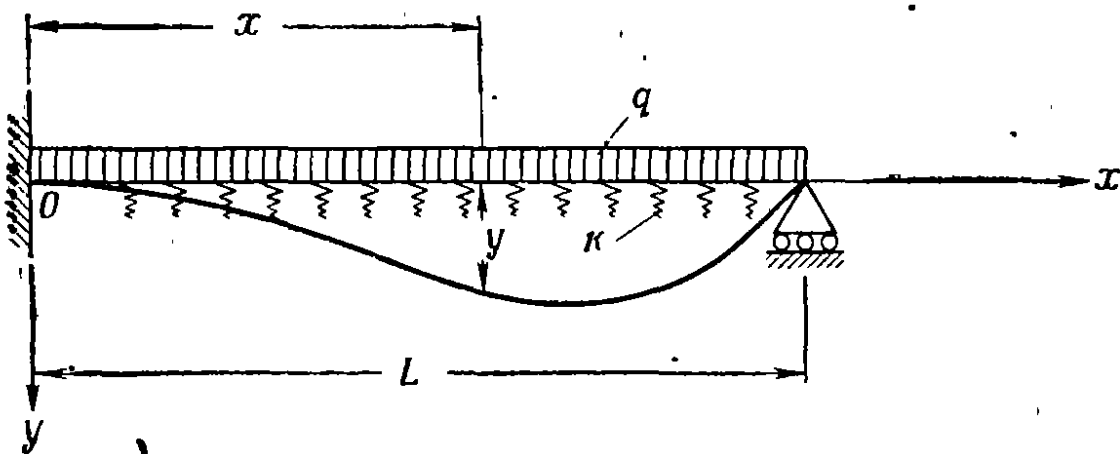
(экстраполяционные коэффициенты — из табл. 23 гл. II).

Из рассмотренного примера видно, что ричардсоновские экстраполяции можно с успехом использовать для уточнения решения. Их выгода по сравнению с поправками Фокса состоит в том, что они не требуют дополнительных громоздких вычислений разностей.

В связи с решением граничных задач методом конечных разностей заметим, что аппроксимацию производной можно улучшать двумя путями: (1) увеличивая число учтенных членов разложения производной в ряд по конечным разностям и (2) уменьшая шаг  $h$ . Первый путь приводит к более сложным формулам при меньшем числе узлов, а второй — к более простым формулам при большем числе узлов. Какой путь предпочесть — зависит от задачи и от склонностей вычислителя. Заметим, тем не менее, что уменьшение  $h$  может гарантировать приближение к точному решению.

## § 6. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о решении с помощью центральных разностей краевых задач для уравнений высших



Фиг. 24.

порядков. В качестве примера рассмотрим изгиб балки длины  $L$ , лежащей на упругом основании (фиг. 24). Левый конец балки заделан, а правый оперт. На балку действует равномерно распределенная

нагрузка плотности  $q$ . Краевая задача об определении изгиба описывается следующими уравнениями<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} y^{IV} + \frac{k}{EI} y &= \frac{q}{EI}, \\ y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

где  $k$  — „коэффициент постели“,  $EI$  — жесткость балки.

Для решения задачи методом конечных разностей приведем прежде всего уравнение (6.1) к безразмерной форме, введя новое независимое переменное

$$z = \frac{x}{L}.$$

Тогда  $\frac{d}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d}{dz}$ , а точкам  $x = 0$  и  $x = L$  отвечают соответственно точки  $z = 0$  и  $z = 1$ . Указанная замена приводит к уравнению

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{kL^4}{EI} y = \frac{qL^4}{EI}.$$

Разобьем интервал определения  $y$  на  $n$  равных частей длины  $h = 1/n$  и умножим последнее уравнение на  $h^4 = 1/n^4$ :

$$\frac{h^4 d^4 y}{dz^4} + \frac{kL^4}{n^4 EI} y = \frac{qL^4}{n^4 EI}.$$

Заменяя  $h^4 d^4 y/dz^4$  приближенным значением  $\delta^4 y_i$ , получим

$$\delta^4 y_i + \frac{kL^4}{n^4 EI} y_i = \frac{qL^4}{n^4 EI},$$

или, согласно (7.16) гл. II,

$$y_{ii} - 4y_i + 6y_i - 4y_r + y_{rr} + \frac{kL^4}{n^4 EI} y_i = \frac{qL^4}{n^4 EI}.$$

Полагая, наконец,

$$\frac{kL^4}{EI} = K, \quad (6.2)$$

приведем дифференциальное уравнение (6.1) к виду

$$y_{ii} - 4y_i + \left[ \frac{K}{n^4} + 6 \right] y_i - 4y_r + y_{rr} = \frac{qL^4}{n^4 EI}. \quad (6.3)$$

В частном случае  $k = \frac{16}{9} 10^2 \text{ кг/см}^2$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $I = 12 \times 10 \text{ см}^4$ ,  $L = 300 \text{ см}$ ,  $q = \frac{8}{27} \cdot 10 \text{ кг/см}$  константа  $K$  принимает значение 6, а  $qL^4/EI = 100$ . Тогда (6.3) перейдет в уравнение

$$y_{ii} - 4y_i + 6 \left( \frac{n^4 + 1}{n^4} \right) y_i - 4y_r + y_{rr} = \frac{100}{n^4}. \quad (a)$$

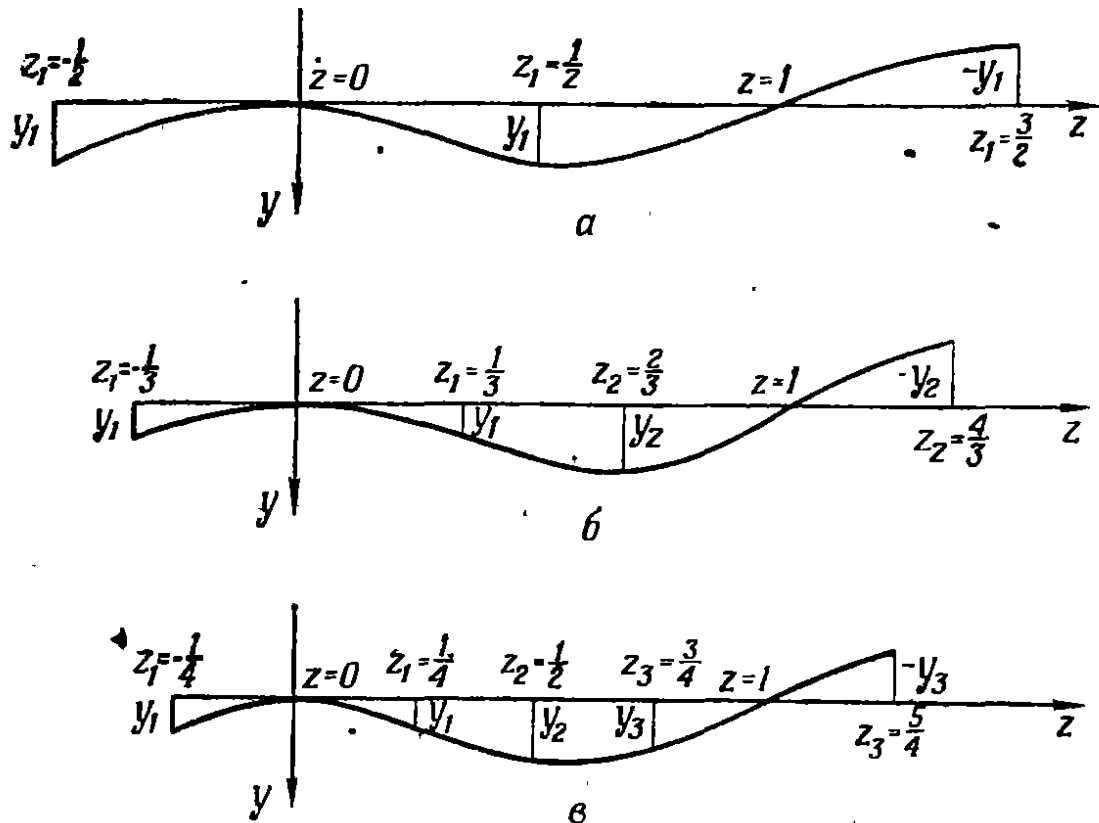
<sup>1)</sup> Беляев И. М., Сопротивление материалов, М. — Л., 1953, стр. 473 и след. — *Прим. перев.*



Граничные условия (6.1) преобразуются согласно (1.1) в условия

$$y_0 = 0, \quad y'_{-1} = y_1, \quad y_n = 0, \quad y_{n+1} = -y_{n-1}. \quad (6)$$

Задачу (а), (б) решим сначала с крупным шагом  $h$  (т. е. с малым  $n$ ), а затем будем повышать точность, увеличивая  $n$ .



Фиг. 25.

1.  $n = 2$ . При  $n = 2$  (фиг. 25, а) уравнение (а) в точке  $z = 1/2$  дает

$$y_1 - 4 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{2^4 + 1}{2^4} y_1 - 4 \cdot 0 - y_1 = \frac{100}{2^4},$$

откуда

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = y_1 = 0,98.$$

2.  $n = 3$ . При  $n = 3$  уравнение (а) дает

$$\text{в точке } z = \frac{1}{3} \quad y_1 + 6 \frac{3^4 + 1}{3^4} y_1 - 4y_2 = \frac{100}{3^4},$$

$$\text{в точке } z = \frac{2}{3} \quad -4y_1 + 6 \frac{3^4 + 1}{3^4} y_2 - y_2 = \frac{100}{3^4},$$

откуда

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = y_1 = 0,56, \quad y\left(\frac{2}{3}\right) = y_2 = 0,69.$$

3.  $n = 4$ . При  $n = 4$  уравнение (а) дает

$$\text{в точке } z = \frac{1}{4} \quad y_1 + 6 \frac{4^4 + 1}{4^4} y_1 - 4y_2 + y_3 = \frac{100}{4^4},$$

$$\text{в точке } z = \frac{1}{2} \quad -4y_1 + 6 \frac{4^4 + 1}{4^4} y_2 - 4y_3 = \frac{100}{4^4},$$

$$\text{в точке } z = \frac{3}{4} \quad y_1 - 4y_2 + 6 \frac{4^4 + 1}{4^4} y_3 - y_3 = \frac{100}{4^4},$$

откуда

$$y\left(\frac{1}{4}\right) = y_1 = 0,34, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = y_2 = 0,64, \quad y\left(\frac{3}{4}\right) = y_3 = 0,51.$$

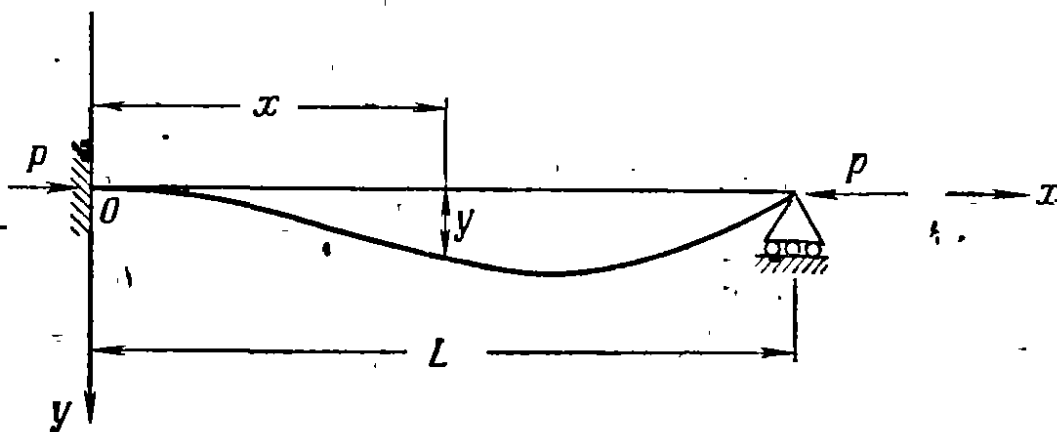
Значение  $y$  в точке  $z = 1/2$  можно уточнить при помощи экстраполяции порядка  $h^2$ . Воспользовавшись для этого приближениями, найденными при  $n = 2$  и  $n = 4$ , получим:

$$y\left(\frac{1}{2}\right)\Big|_{2,4} = 1,333 \cdot 0,64 - 0,333 \cdot 0,98 = 0,53.$$

Это значение отличается от истинного на 4,5%.

## § 7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

Задача о собственных значениях — одна из важнейших в современном анализе. Она играет существенную роль при изучении вопросов о колебаниях и устойчивости сооружений. Мы изложим только один метод решения таких задач, основанный на применении конечных разностей с последующими экстраполяциями<sup>1)</sup>.



Фиг. 26.

Рассмотрим задачу Эйлера об изгибе стержня под действием продольной нагрузки. Левый конец стержня ( $x = 0$ ) заделан, а правый ( $x = L$ ) оперт. К правому концу приложена сила  $p$ , направленная вдоль оси стержня (фиг. 26). Величина  $y$  отклонения стержня от оси

<sup>1)</sup> О других методах см.: Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, М., 1953.

описывается, как известно<sup>1)</sup>, следующей задачей о собственных значениях:

$$\left. \begin{aligned} y^{IV} + \frac{p}{EI} y'' &= 0, \\ y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

где  $EI$  — жесткость стержня.

Для того чтобы свести эту задачу к разностной, нужно заменить производные, входящие в (7.1), центральными разностями согласно формуле (7.16) гл. II или фиг. 12.

Однако прежде приведем (7.1) к безразмерной форме, положив для этого

$$z = \frac{x}{L}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d}{dz},$$

а точкам  $x = 0$  и  $x = L$  будут отвечать точки  $z = 0$  и  $z = 1$ . В новых переменных дифференциальное уравнение (7.1) примет следующий вид:

$$y^{IV} + \frac{pL^2}{EI} y'' = 0, \quad (a)$$

где производные берутся по  $z$ . Разобьем интервал определения  $0 \leq z \leq 1$  на  $n$  равных частей длины  $h = 1/n$  и умножим обе части уравнения (a) на  $h^4$ :

$$h^4 y^{IV} + \frac{pL^2}{n^2 EI} (h^2 y'') = 0.$$

Подставив вместо  $h^4 y^{IV}$  и  $h^2 y''$  их приближенные значения  $\delta^4 y_i$  и  $\delta^2 y_i$ , получим

$$\delta^4 y_i + k_n \delta^2 y_i = 0, \quad (б)$$

где

$$k_n = \frac{pL^2}{n^2 EI} = \frac{1}{n^2} K_n. \quad (7.2)$$

В силу соотношений (7.2) и (7.4) гл. II, конечно-разностное уравнение (б) можно записать в следующей форме:

$$y_{ii} - 4y_i + 6y_i - 4y_r + y_{rr} + k_n(y_l - 2y_i + y_r) = 0,$$

или, окончательно,

$$y_{ii} + (k_n - 4)y_l + (6 - 2k_n)y_i + (k_n - 4)y_r + y_{rr} = 0. \quad (7.3)$$

Это уравнение имеет смысл в  $(n - 1)$  внутренних узловых точках  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

<sup>1)</sup> Филоненко-Бородич М. М. и др., Курс сопротивления материалов, ч. I, М.—Л., 1949, стр. 375—388. — *Прим. перев.*

На концах стержня должны быть выполнены граничные условия (7.1), которые, в силу равенств (7.16) гл. II, приводятся к следующей конечно-разностной форме:

$$y_0 = 0, \quad y_{-1} = y_1, \quad y_n = 0, \quad y_{n+1} = -y_{n-1}; \quad (7.4)$$

здесь  $y_{-1}$  и  $y_{n+1}$  — значения прогиба стержня<sup>1)</sup> соответственно в точках  $z = -h$  и  $z = 1 + h$ .

Система  $n-1$  линейных однородных уравнений (7.3) имеет тривиальное решение  $y_i = 0$ . Это решение соответствует расположению стержня вдоль оси  $x$  (т. е. отсутствию прогиба). Ненулевые решения система (7.3) имеет лишь в том случае, если ее определитель  $\Delta$  обращается в нуль<sup>2)</sup>. Но  $\Delta$  является функцией от  $k_n$ . Следовательно, для того чтобы найти ненулевые решения системы (7.3), надлежит прежде всего определить  $k_n$  из уравнения

$$\Delta(k_n) = 0. \quad (7.5)$$

Легко видеть, что уравнение это — алгебраическое; степень его обозначим через  $r$ . Тогда  $r$  его корней определяют приближенно первые  $r$  характеристических значений, а вместе с тем и  $r$  критических<sup>3)</sup> нагрузок  $p$ . Так как практически важна наименьшая критическая нагрузка, то для нас интересен лишь наименьший корень уравнения (7.5).

Мы решим задачу последовательно для  $n = 2; 3; 4$ .

1.  $n = 2$ . При  $n = 2$  (фиг. 25,а) из уравнения (7.3) получаем:

$$y_1 + (k_2 - 4) \cdot 0 + (6 - 2k_2)y_1 + (k_2 - 4) \cdot 0 - y_1 = 0,$$

или

$$(6 - 2k_2)y_1 = 0.$$

Если  $y_1$  отлично от нуля, то  $6 - 2k_2 = 0$  и

$$K_2 = 2^2 k_2 = 12.$$

2.  $n = 3$ . При  $n = 3$  (фиг. 25,б) из уравнения (7.3) получаем

$$\text{в точке } z = \frac{1}{3} \quad y_1 + (6 - 2k_3)y_1 + (k_3 - 4)y_2 = 0,$$

$$\text{в точке } z = \frac{2}{3} \quad (k_3 - 4)y_1 + (6 - 2k_3)y_2 - y_2 = 0,$$

или

$$(7 - 2k_3)y_1 + (k_3 - 4)y_2 = 0,$$

$$(k_3 - 4)y_1 + (5 - 2k_3)y_2 = 0.$$

1) Эти виртуальные значения получаются посредством симметричного (в соответствии с граничными условиями) продолжения стержня за точки опоры. — Прим. перев.

2) Курош А. Г., Курс высшей алгебры, М.—Л., 1955.—Прим. перев.

3) То есть таких, под влиянием которых стержень теряет прямолинейную форму. — Прим. перев.

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим следующее квадратное уравнение для  $k_3$ :

$$\begin{vmatrix} (7 - 2k_3) & (k_3 - 4) \\ (k_3 - 4) & (5 - 2k_3) \end{vmatrix} = (7 - 2k_3)(5 - 2k_3) - (k_3 - 4)^2 = \\ = 3k_3^2 - 16k_3 + 19 = 0.$$

Его наименьший корень равен 1,78475, и, следовательно,

$$K_3 = 3^2 k_3 = 16,063.$$

3.  $n = 4$ . При  $n = 4$  (фиг. 25,в) из уравнения (7.3) получаем:

$$\text{в точке } z = \frac{1}{4} \quad y_1 + (6 - 2k_4)y_1 + (k_4 - 4)y_2 + y_3 = 0,$$

$$\text{в точке } z = \frac{1}{2} \quad (k_4 - 4)y_1 + (6 - 2k_4)y_2 + (k_4 - 4)y_3 = 0,$$

$$\text{в точке } z = \frac{3}{4} \quad y_1 + (k_4 - 4)y_2 + (6 - 2k_4)y_3 - y_3 = 0.$$

Наименьший корень уравнения (7.5) в этом случае равен  $k_4 = 1,11075$ , откуда

$$k_4 = 4^3 \cdot 1,11075 = 17,772.$$

Таблица 48

$n$	$K_n$	$e$ (%)
2	12,000	-40,5
3	16,063	-20,4
4	17,772	-12,0
$n$	Экстраполяция порядка $h^2$	$e$ (%)
2, 3	19,313	-4,3
3, 4	19,969	-1,1
$n$	Экстраполяция порядка ( $h^2, h^4$ )	$e$ (%)
2, 3, 4	20,189	0,01

В случае уравнения с постоянными коэффициентами можно доказать<sup>1)</sup>, что значение собственного числа  $K$ , определенное при помощи центральных разностей, имеет погрешность порядка  $h^2$ . Следовательно, для уточнения результата можно применить экстраполяции порядка  $h^2$  и ( $h^2, h^4$ ). Результаты этих экстраполяций приведены в табл. 48, которая содержит: (1) вычисленные значения  $K$ , т. е.  $K_n$ ; (2) его экстраполированные значения; (3) погрешности в процентах (истинное значение равно  $K = 20,187$ ).

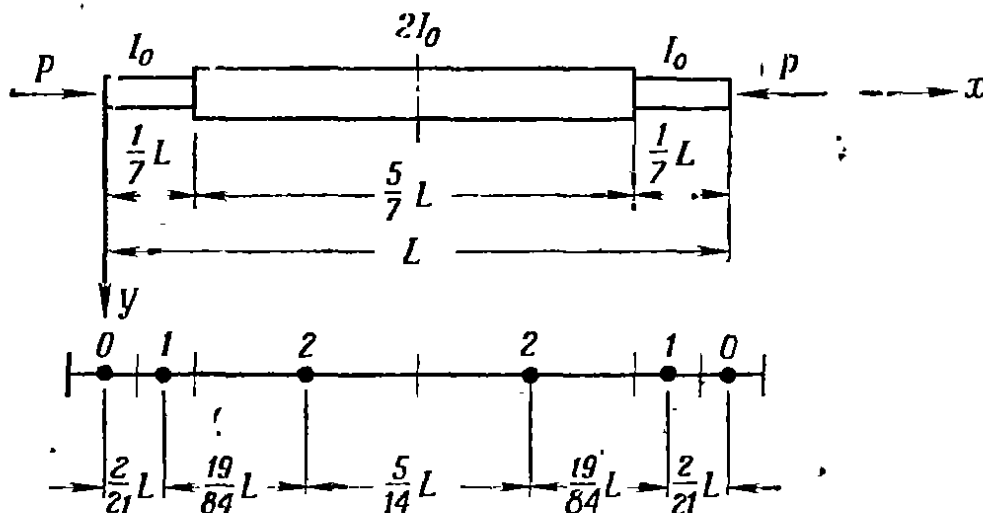
Повышение точности, легко получаемое посредством экстраполяций, иначе может быть достигнуто лишь рассмотрением большого числа узлов, что приводит к необходимости решать уравнения высоких степеней.

<sup>1)</sup> Salvadori M. G., Numerical computation of buckling loads by finite differences, Trans. ASCE, 117 (1952).

### § 8. ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВНОУСТОЯЩИХ УЗЛОВ

Все разностные операторы предыдущих параграфов применялись в случаях равноотстоящих узлов. Однако при решении конкретных физических задач неравноотстоящие узлы часто оказываются более выгодными.

В качестве примера применения неравноотстоящих узлов рассмотрим задачу об изгибе „ступенчатого“ стержня, концы которого  $x = 0$  и  $x = L$  оперты и на который действуют сжимающие силы  $p$ . Моменты инерции поперечных сечений стержня указаны на фиг. 27.



Фиг. 27.

Чтобы решить соответствующую граничную задачу<sup>1)</sup>

$$y'' + \frac{p}{EI} y = 0, \quad y(0) = y(L) = 0, \quad (8.1)$$

разобьем центральную часть стержня на два интервала равной длины и поместим узловые точки в середине каждого из этих интервалов; кроме того, поместим по две узловые точки на каждой из боковых частей стержня: одну (0) на конце, и другую (1) на расстоянии, равном двум третям длины боковой части от конца. При таком подразделении центральная часть стержня состоит из двух „кусков“ длины  $\frac{1}{2} \left( \frac{5}{7} L \right) = \frac{5}{14} L$  с моментом инерции  $2I_0$ , а каждая из боковых — из двух „кусков“ длины  $\frac{2}{3} \left( \frac{1}{7} L \right) = \frac{2}{21} L$  с моментом инерции  $I_0$ , причем половина одного из этих кусков лежит вне стержня (см. фиг. 27).

Так как шаг  $h$  меняется от точки к точке, то вторую производную, входящую в (8.1), следует аппроксимировать, согласно соотношению (2.3) гл. II, следующим равенством:

$$h^2 y_i'' = \frac{2}{\alpha(\alpha+1)} [\alpha y_l - (1+\alpha) y_i + y_r], \quad (a)$$

<sup>1)</sup> Беляев Н. М., Курс сопротивления материалов, М.—Л., 1953, стр. 623. — Прим. перев.

в котором 
$$h = x_i - x_l, \quad \alpha = \frac{x_r - x_i}{x_i - x_l}. \quad (6)$$

Для этой задачи (6) дает:

$$\text{в точках (1)} \quad h_1 = \frac{2}{21} L; \quad \alpha_1 = \frac{19/84}{2/21} = 2,375,$$

$$\text{в точках (2)} \quad h_2 = \frac{19}{84} L; \quad \alpha_2 = \frac{5/14}{19/84} = 1,579.$$

Следовательно, умножая (8.1) на  $h_i^2$  и подставляя вместо  $h^2 y''$  ее приближенное значение, согласно (а) получим:

$$\text{в точках (1)} \quad \frac{2}{2,375(1+2,375)} [2,375 \cdot 0 - (1+2,375)y_1 + y_2] + \frac{P}{EI_0} \left(\frac{2}{21} L\right)^2 y_1 = 0,$$

$$\text{в точках (2)} \quad \frac{2}{1,579(1+1,579)} [1,579y_1 - (1+1,579)y_2] + \frac{P}{E(2I_0)} \left(\frac{19}{84} L\right)^2 y_2 = 0,$$

или

$$\begin{aligned} (0,03635K - 3,375)y_1 + y_2 &= 0, \\ 1,579y_1 + (0,05208K - 1,579)y_2 &= 0, \end{aligned}$$

где

$$K = \frac{PL^2}{EI_0}. \quad (B)$$

Соответствующее характеристическое уравнение есть

$$\begin{vmatrix} 0,03635K - 3,375 & 1 \\ 1,579 & 0,05208K - 1,579 \end{vmatrix} = 0.$$

Его наименьший корень равен  $K = 19,01$ , откуда

$$p_{кр.} \cong 19,01 \frac{EI_0}{L^2}.$$

Значение  $p_{кр.}$ , полученное энергетическим методом в предположении синусоидального прогиба (являющееся, как известно, верхней границей изгибающих нагрузок), равно 19,04. Таким образом, полученный нами результат близок к истинному значению.

### Задачи

1. Выразить условия (1.2) через: правые разности с погрешностью порядка  $h$ ;

$$\text{Ответ: } y_0 = 0; \quad y_1 = y_0 \quad y_2 = 2y_1 - y_0; \quad y_3 = 3y_2 - 3y_1 + y_0; \\ y_4 = 4y_3 - 6y_2 + 4y_1 - y_0.$$

2. Найти по методу § 2 решения следующих краевых задач:

(а)  $y'' + \frac{1}{x}y = 0$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y(2) = 2$ ,  $n = 2; 4$ ;

(б)  $y'' + (\sin x)y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ ,  $n = 2; 4$ .

Воспользоваться разностными операторами с погрешностью порядка  $h^4$ .

О т в е т: (а)  $n = 4$ ;  $y_{-1} = 0,586$ ;  $y_1 = 1,351$ ;  $y_2 = 1,635$ ;  $y_3 = 1,850$ .

3. Вычислить первые три отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения каждой из следующих задач ( $\theta'_0$  и  $y'_0$  считать неизвестными, определить их из правого граничного условия)

(а)  $\theta'' + \sin \theta = 0$ ,  $\theta(0) = 0$ ,  $\theta(1) = 1$ ;

(б)  $y'' + y^2 = x^2 + 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .

О т в е т:

(б)  $y = \begin{cases} -0,5574x + 0,5x^2 + 0,0574x^4, \\ 12,56x + 0,5x^2 - 13,06x^4. \end{cases}$

4. Определить узловые значения функции  $y$ , удовлетворяющей следующей краевой задаче:

$$y'' + 4y = 4x^2 + 2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Решить задачу при  $n = 2$  и  $n = 4$ . Сравнить результат с точным решением ( $y = x^2$ ); выяснить, почему при замене  $y''$  разностью  $\delta^2 y/h^2$  численное решение при любом  $n$  совпадает с точным.

5. (а) Решить с помощью центрально-разностной формулы с погрешностью порядка  $h^2$  следующую краевую задачу ( $n = 2$  и  $n = 4$ ):

$$y'' - 4y' + 4y = e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -2.$$

Возникающую систему алгебраических уравнений решить по схеме Гаусса.

(б) Уточнить результат, полученный при  $n = 2$ , с помощью первого члена поправки Фокса.

(в) Найти такое же, как в (б), уточнение результата, полученного при  $n = 4$ .

(г) Прокстраполировать неуточненные значения  $y$ , найденные при  $n = 2$  и  $n = 4$  в точке  $x = 0,5$ .

(д) Прodelать аналогичную экстраполяцию для уточненных [см. (б) и (в)] значений  $y$ .

О т в е т: (а)  $y_2^{(1)}(0,50) = -1,121$ ;  $y_4^{(1)}(0,25) = -0,3473$ ;  $y_4^{(1)}(0,50) = -0,9508$ ;  $y_4^{(1)}(0,75) = -1,7257$ . (б)  $y_2^{(2)}(0,50) = -0,7840$ .

(в)  $y_4^{(2)}(0,25) = -0,3294$ ;  $y_4^{(2)}(0,50) = -0,9167$ ;  $y_4^{(2)}(0,75) = -1,6884$ . (г)  $y_{2,4}^{(1)}(0,50) = -0,8941$ . (д)  $y_{2,4}^{(2)}(0,50) = -0,9256$ .

6. (а) Решить с помощью центрально-разностной формулы с погрешностью порядка  $h^2$  следующую краевую задачу ( $n = 2$  и  $n = 4$ ):

$$y'' - 8y' + 8y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 4.$$



Возникающую систему алгебраических уравнений решать методом Холецкого.

(б) Уточнить результат, полученный при  $n = 2$ , с помощью поправки Фокса.

(в) Найти такое же, как в (б), уточнение результата, полученного при  $n = 4$ .

(г) Прозэкстраполировать неуточненные значения  $y$ , найденные при  $n = 2$  и  $n = 4$  в точке  $x = 1,5$ .

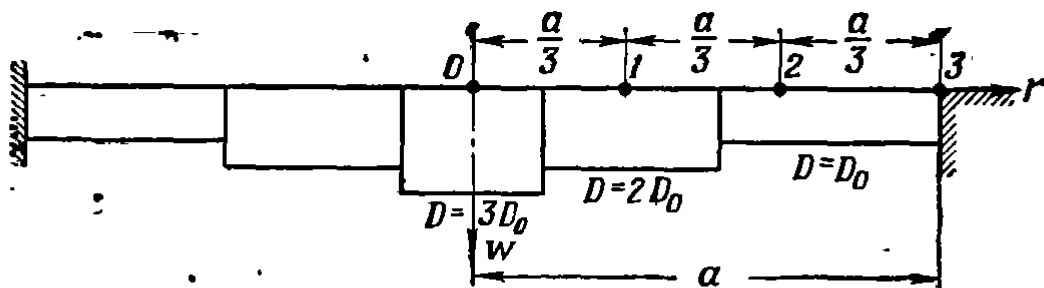
(д) Прodelать аналогичную экстраполяцию для уточненных [см. (б) и (в)] значений  $y$ .

7. Решить задачу о распределении тепла из § 3, если:  $L = 100$  см;  $R = 1$  см;  $k = 1$  кал/см · сек · град;  $k_1 = 6 \cdot 10^{-4}$ ;  $u_0 = 0$ ;  $u_n = 1$ .  $F(z) = U(x)/u_n$  задано таблицей

$z = x/L$	0	0,25	0,50	0,75	1,00
$F(z) = U(x)/u_n$	1,00	1,10	1,35	1,15	1,00

Ответ:  $v_0 = 0$ ;  $v_1 = 0,658$ ;  $v_2 = 0,984$ ;  $v_3 = 1,035$ .

8. Круглая ступенчатая пластинка радиуса  $a$ , заделанная вдоль края



Ф и г. 28.

(фиг. 28), прогибается под действием нагрузки, равномерно распределенной с интенсивностью  $q$ .

(а) Определить ее наклон  $\varphi(r)$ , удовлетворяющий дифференциальному уравнению<sup>1)</sup>

$$\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' - \frac{1}{r^2} \varphi = -\frac{qr}{2D}$$

и граничным условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(a) = 0$$

( $r$  — расстояние от центра,  $D$  — цилиндрическая жесткость пластинки).

(б) Проинтегрировав  $\varphi$  по формуле трапеций, найти прогиб пластинки в центре.

<sup>1)</sup> Саусвелл Р. В., Введение в теорию упругости, М., 1948, стр. 313.—  
Прим. перев.

9. Решить задачу 8 для случая пластинки, опертой вдоль края. Краевые условия в этом случае таковы:

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi' + \frac{\mu}{r} \varphi \Big|_{r=a} = 0.$$

Считать, что коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ .

$$\text{О т в е т: } \varphi\left(\frac{a}{3}\right) = 0,046 \frac{qa^3}{D_0}; \quad \varphi\left(\frac{2a}{3}\right) = 0,085 \frac{qa^3}{D_0}; \quad \varphi(a) = 0,097 \frac{qa^3}{D_0};$$

$$w_0 = 0,60 \frac{qa^4}{D_0}.$$

10. Найти узловые значения функции  $y$ , удовлетворяющей следующей краевой задаче:

$$y''' + 2y = 12x^2 + 2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0.$$

(а) Решить задачу при  $n = 2$ , воспользовавшись для аппроксимации  $y'''$  несимметрическим выражением (2.2) гл. II, а для аппроксимации  $y'$  — усредненной центральной разностью.

(б) Решить задачу при  $n = 3$ , воспользовавшись для аппроксимации  $y'''$  в точке  $x = 1/3$  выражением (2.2) гл. II, а в точке  $x = 2/3$  — усредненными центральными разностями.

$$\text{О т в е т: } (а) \cdot y_1 = \frac{5}{34} = 0,147. \quad (б) \ y_1 = 0,186; \quad y_2 = 0,149.$$

11. Найти узловые значения функции  $y$ , удовлетворяющей следующей краевой задаче:

$$y^{IV} + 81y = 81x^2, \quad y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0.$$

Задачу решить при  $n = 3$ . Производные аппроксимировать симметрическими выражениями.

12. Найти узловые значения функции  $y$ , удовлетворяющей следующей краевой задаче:

$$y^{IV} + 81y = f(x), \quad y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0,$$

где

(а)  $f(x) = 729x^2;$

(б)  $f(x)$  задано таблицей:

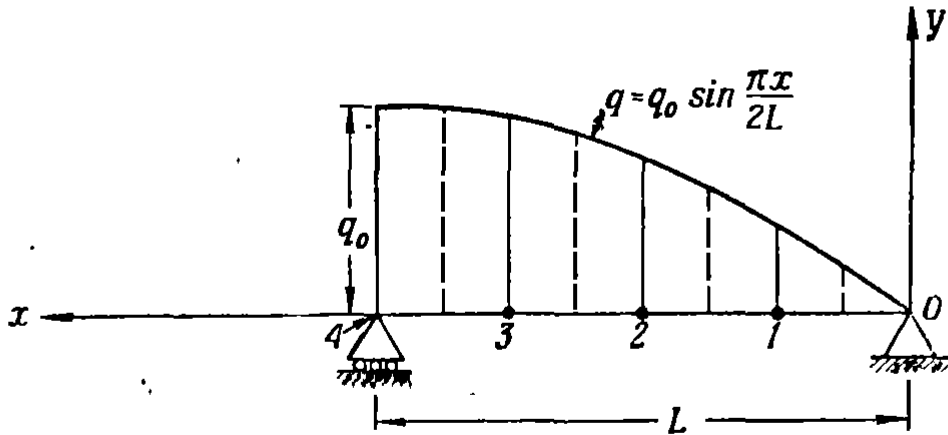
$x$	$1/3$	$2/3$	1
$f(x)$	81	162	243

Задачу решить при  $n = 3$ . Производные аппроксимировать симметрическими выражениями.

О т в е т:

(а)  $y_1 = 1,1539$ ;  $y_2 = 3,9231$ ;  $y_3 = 7,4615$ . (б)  $y_1 = 0,6154$ ;  
 $y_2 = 1,6923$ ;  $y_3 = 2,8462$ .

13. (а) Вычислить узловые значения прогиба балки, изображенной на фиг. 29, считая, что нагрузка приложена к узловым точкам. При реше-

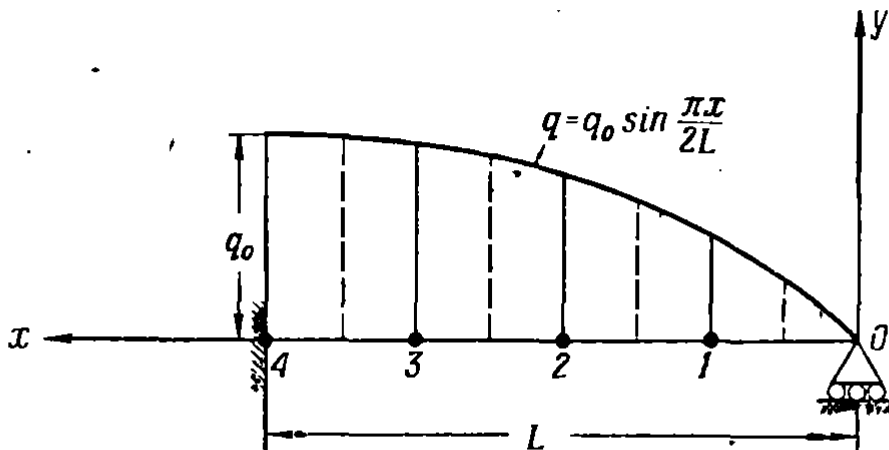


Ф и г. 29.

нии воспользоваться центрально-разностными формулами с погрешностью порядка  $h^2$ .

(б) Найти узловые значения изгибающего момента ( $M = -EIy''$ ).

14. (а) Вычислить узловые значения прогиба балки, изображенной на фиг. 30, считая, что нагрузка приложена к узловым точкам. При реше-



Ф и г. 30.

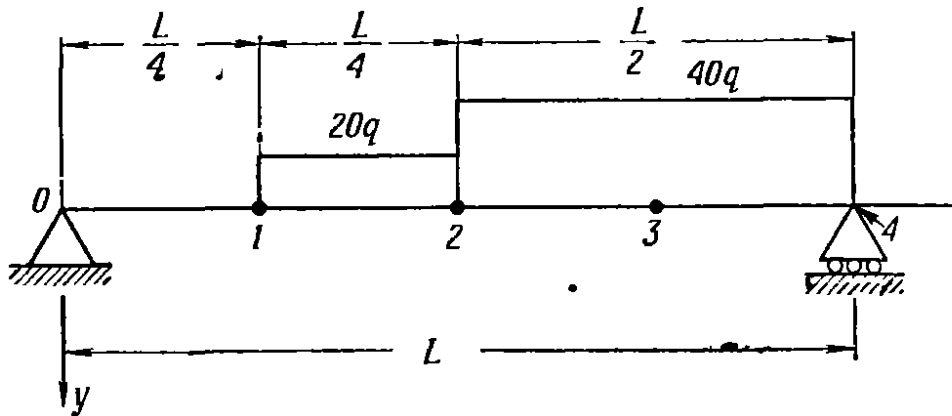
нии воспользоваться центрально-разностными формулами с погрешностью порядка  $h^2$ .

(б) Найти значение изгибающего момента на заделанном конце ( $M = -EIy''$ ).

О т в е т:

$y_3 = -0,0009883q_0L^4/EI$ ;  $y_2 = -0,001154q_0L^4/EI$ ;  
 $y_1 = -0,0005710q_0L^4/EI$ ;  $M_4 = -0,01828q_0L^2$ .

15. (а) Вычислить узловые значения прогиба балки, изображенной на фиг. 31, считая, что нагрузка приложена к узловым точкам. При решении воспользоваться центрально-разностными формулами с погрешностью порядка  $h^2$ .



Фиг. 31.

(б) Найти узловые значения изгибающего момента ( $M = -EIy''$ ).

16. Определить узловые значения прогиба балки, опертой на обоих концах и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки  $q$ , если момент инерции этой балки линейно меняется от  $I_0$  (на левом конце) до  $5I_0$  (на правом конце). Решить задачу при  $n = 4$ , воспользовавшись центрально-разностными формулами с погрешностью порядка  $h^2$ .

О т в е т:  $y_1 = 0,003621qL^4/EI_0$ ;  $y_2 = 0,004883qL^4/EI_0$ ;  
 $y_3 = 0,003377qL^4/EI_0$ .

17. (а) Вычислить узловые значения прогиба балки, опертой на обоих концах и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки  $q$ , если эта балка лежит на упругом основании (см. § 6) с „коэффициентом постели“, равным  $k = 16$ . Решить задачу при  $n = 2$  и  $n = 4$ , воспользовавшись центрально-разностными формулами с погрешностью порядка  $h^2$ . Значение прогиба в центре проэкстраполировать<sup>1)</sup>.

(б) Вычислить значения изгибающего момента центрального сечения при  $n = 2$  и  $n = 4$  ( $M = -EIy''$ ). Результат проэкстраполировать.

18. Стержень длины  $L$ , обладающий постоянным моментом инерции  $I$ , опертый на обоих концах, находится под действием сжимающих сил  $p$ . Вычислить наименьшее критическое значение  $p$ , положив последовательно  $n = 2; 3; 4$ . Результат проэкстраполировать<sup>1)</sup>.

У к а з а н и е. Критические значения  $p$  определяются из следующей (см. § 8) задачи о собственных значениях:

$$y'' + \frac{p}{EI}y = 0; \quad y(0) = y(L) = 0.$$

<sup>1)</sup> Экстраполяцию порядков  $h^2$  и  $(h^2, h^4)$  см. в гл. II, § 9.—Прим. перев.

Ответ:  $K = \frac{pL^2}{EI}$ ;  $K_2 = 8$ ;  $K_3 = 9$ ;  $K_4 = 9,3726$ .  $K_{2;3} = 9,8$ ;  
 $K_{3;4} = 9,85164$ ;  $K_{2;3;4} = 9,86881$ .

19. Стержень длины  $L$ , опертый на обоих концах и подвергнутый действию сжимающих сил  $p$ , обладает следующим моментом инерции:

$$I(x) = I_0 \left(1 + \frac{2x}{L}\right) \text{ при } 0 \leq x \leq \frac{L}{2},$$

$$I(x) = I_0 \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \text{ при } \frac{L}{2} \leq x \leq L.$$

Вычислить наименьшее критическое значение  $p$ , положив последовательно  $n = 2; 3; 4$ . Результат проэкстраполировать (см. задачу 18).

20. Балка с узким прямоугольным поперечным сечением оперта в точках  $x = \pm L/2$  (боковое вращение балки в этих точках предотвращено). В точке  $x = 0$  к балке приложена вертикальная нагрузка  $p$ . Выразить наименьшее критическое значение  $p$  через  $B$  (жесткость балки при изгибе в вертикальной плоскости) и  $C$  (жесткость балки при кручении). Решить задачу при  $n = 2; 3; 4$ . Вычислить путем экстраполяции значение  $p_{2;4}$ .

Указание. Боковое смещение  $\beta$  удовлетворяет<sup>1)</sup> следующей задаче о собственных значениях:

$$\beta'' + \frac{p^2 L^2}{4BC} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right)^2 \beta = 0; \quad \beta\left(\frac{L}{2}\right) = \beta\left(-\frac{L}{2}\right) = 0.$$

21. Консольная балка с узким прямоугольным поперечным сечением заделана в точке  $x = 0$ . В точке  $x = L$  к ней приложена вертикальная нагрузка  $p$ . Найти наименьшее значение  $p$ , при котором балка испытывает боковое смещение. Решить задачу при  $n = 2; 3; 4$ . К результату применить экстраполяцию порядков  $h^2$  и  $(h^2, h^4)$ .

Указание. Боковое смещение  $\beta$  удовлетворяет<sup>2)</sup> следующей задаче о собственных значениях:

$$\beta'' + \frac{p^2 L^2}{BC} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \beta = 0; \quad \beta(0) = 0; \quad \beta'(L) = 0.$$

Ответ:  $p_2 = 4 \sqrt{BC/L^4}$ ;  $p_3 = 3,933 \sqrt{BC/L^4}$ ;  $p_4 = 3,959 \sqrt{BC/L^4}$ ;

$$p_{2;3;4} = 4,030 \sqrt{BC/L^4}; \quad p = 4,013 \sqrt{BC/L^4}^3).$$

22. Заделанная вдоль края круглая пластина радиуса  $R$  и цилиндрической жесткости  $D$  находится под действием приложенных к краю радиальных сжимающих сил плотности  $N$  на единицу длины. Вычислить наименьшее

1) Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М.—Л., 1946, стр. 226.

2) Там же, стр. 222.

3)  $p$  — значение, полученное аналитическими методами. — Прим. ред.

критическое значение  $N$ . Решить задачу при  $n = 2$  и  $n = 3$ . Результат проэкстраполировать. Наклон  $\varphi$  удовлетворяет<sup>1)</sup> следующей задаче о собственных значениях:

$$\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' + \left( \frac{N}{D} - \frac{1}{r^2} \right) \varphi = 0; \quad \varphi(0) = \varphi(R) = 0.$$

Ответ:  $N_2 = 12,00D/R^2$ ;  $N_3 = 13,50D/R^2$ ;  $N_2$ ;  $N_3 = 14,70D/R^2$ ;  $N = 14,68D/R^2$  2).

23. Частоты  $\omega$  собственных колебаний балки, упругая характеристика которой изменяется по линейному закону, определяются следующей задачей<sup>3)</sup> о собственных значениях:

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{K^2}{z} x = 0; \quad x(1) = 0; \quad \left. \frac{dx}{dz} \right|_{0,5} = 0.$$

Здесь  $K^2 = \frac{\omega^2 L^2 m_0}{\alpha^2 k_0}$ ,  $m_0$  и  $k_0$  — значения массы и упругой характеристики на единицу длины при  $z = 0$ ;  $L$  — длина балки и  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  — наклон графика упругой характеристики. Вычислить три наименьших значения  $\omega^2$ . Решить задачу при  $n = 1; 2; 3; 4$ . Результат проэкстраполировать.

24. Нижнее основание ( $x = 0$ ) тонкой вертикальной колонны длины  $L$  заделано, а верхнее ( $x = L$ ) свободно. Момент инерции поперечного сечения колонны равен  $I$ , а вес —  $q$  на единицу длины. Вычислить критическое значение  $q$ , если колонна изгибается под действием собственного веса. Решить задачу при  $n = 1$  и  $n = 2$ . Результат проэкстраполировать. Прогиб колонны  $y$  описывается следующей<sup>4)</sup> задачей о собственных значениях:

$$y^{IV} + \frac{qL}{EI} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) y'' - \frac{qL}{EI} \frac{1}{L} y' = 0;$$

$$y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0.$$

Положить  $k_n = q_n L^3 / EI$ .

Ответ:  $k_1 = 4,0000$ ;  $k_2 = 6,7624$ ;  $k_{1;2} = 7,6832$ ;  $k = 7,83$  2).

25. Определить наименьшую собственную частоту свободных колебаний балки длины  $L$ , опертой на обоих концах. Решить задачу при  $n = 2; 3; 4$ . Результат проэкстраполировать.

1) Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М.—Л., 1946, стр. 328.

2) Значение, полученное аналитическими методами. — Прим. ред.

3) Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, М.—Л., 1953, стр. 555—557. — Прим. перев.

4) Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М.—Л., 1946, стр. 110.

Указание. Дифференциальное уравнение колебаний балки таково<sup>1)</sup>:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

где  $EI$  — жесткость балки,  $\rho$  — ее плотность и  $A$  — площадь поперечного сечения. В этом уравнении следует положить  $y(x, t) = X(x) \cdot \sin \omega t$ . Так как балка на обоих концах оперта, то  $X(0) = X(L) = 0$ ;  $X''(0) = X''(L) = 0$ .

Удобно ввести новую переменную  $w = \frac{\omega L^2}{\sqrt{EI/\rho A}}$ .

Ответ:  $w_2 = 8$ ;  $w_3 = 9$ ;  $w_4 = 9,3726$ ;  $w_{2;3} = 9,8$ ;  $w_{3;4} = 9,8516$ ;  $w_{2;3;4} = 9,8688$ .

26. Определить наименьшую собственную частоту свободных колебаний балки длины  $L$ , один конец которой ( $x = 0$ ) заделан, а другой ( $x = L$ ) оперт. Решить задачу при  $n = 2$ .

Указание: см. задачу 25.

27. Вычислить узловые значения функции  $y$ , удовлетворяющей следующей краевой задаче:

$$y'' + 2y = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

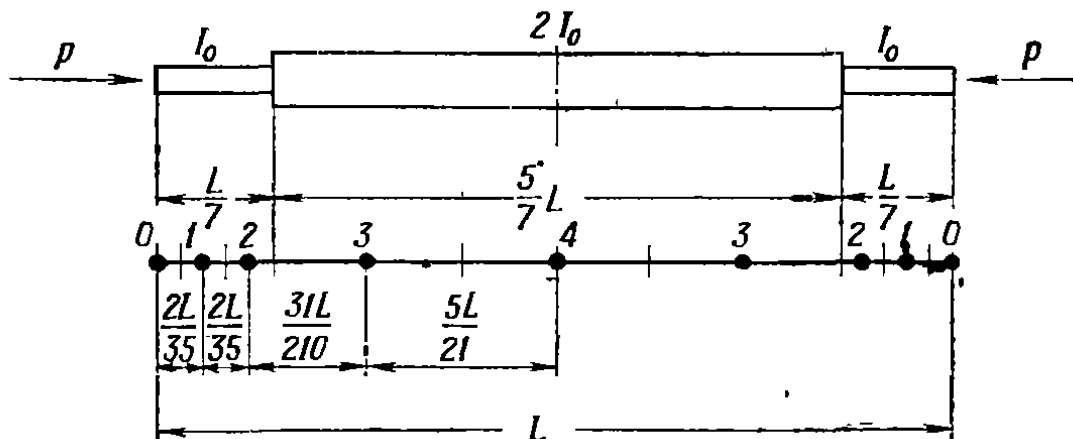
Значения  $f(x)$  заданы следующей таблицей:

$x$	0	0,15	0,40	0,75	1,00
$f(x)$	0	16	30	20	0

При решении задачи аппроксимировать  $y''$  несимметрическим образом с погрешностью порядка  $h$ .

Ответ:  $y_1 = -1,8021$ ;  $y_2 = -3,8260$ ;  $y_3 = -2,7060$ .

28. Вычислить наименьшее критическое значение сжимающих сил  $p$  для балки, изображенной на фиг. 32. Сетка с переменным шагом, которой

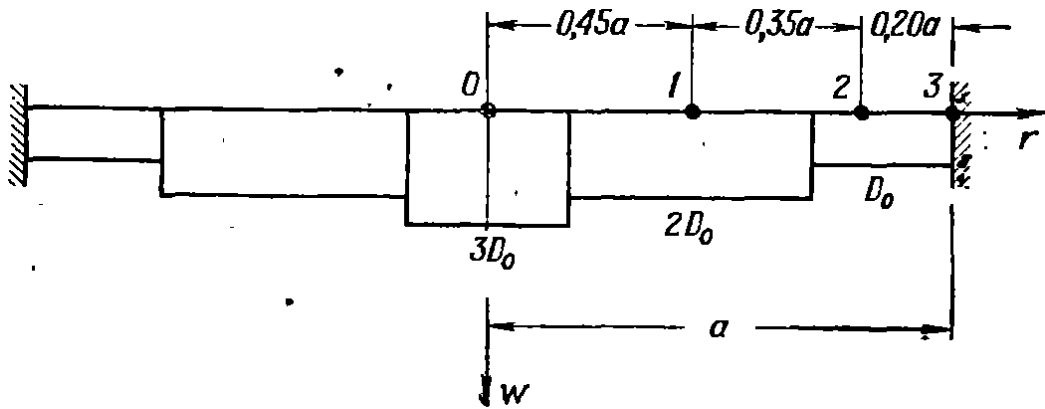


Фиг. 32.

<sup>1)</sup> Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, М.—Л., 1953, стр. 555. — Прим. перев.

следует воспользоваться, указана на чертеже. При решении задачи аппроксимировать производные разностями (неравноотстоящими) с погрешностью порядка  $h$  (см. задачу 18).

**29.** Круглая ступенчатая пластинка, изображенная на фиг. 33, заделана вдоль края. Пластина испытывает равномерно распределенную нагрузку  $q$ .



Фиг. 33.

(а) Определить ее наклон  $\varphi(r)$ , заменив  $\varphi''$  несимметричными разностными выражениями с погрешностью порядка  $h$  (см. задачу 8).

(б) Найти численным интегрированием прогиб в центре.

Ответ:  $\varphi(0,45a) = 0,0163qa^2/D_0$ ;  $\varphi(0,8a) = 0,0177qa^2/D_0$ ;  $w_0 = 0,0114qa^4/D_0$ .

**30.** Решить задачу 29, если пластинка не заделана, а оперта (см. задачу 9).



## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

### § 1. РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Важнейшим применением методов численного интегрирования является решение уравнений в частных производных.

Сведение уравнения в частных производных к соответствующему разностному уравнению получается, в сущности, теми же методами, которые были развиты в предыдущих главах для обыкновенных дифференциальных уравнений. Также перенесение методов возможно благодаря тому, что вычисление частных и обыкновенных производных осуществляется одним и тем же предельным переходом. Единственное отличие состоит в том, что в первом случае все независимые переменные, кроме одного, следует считать постоянными. Обозначим через  $D_x, D_y, \dots$  частные производные функции  $z = f(x, y, \dots)$  соответственно по переменным  $x, y, \dots$ .

Если мы обозначим через  $h$  шаг по  $x$ , а через  $\delta_x^n z_i$   $n$ -ю центральную разность от  $z$  в точке  $i$ , взятую в направлении оси  $x$ , то получим, согласно равенствам (7.16) гл. II, следующие разложения:

$$2hD_x z_i = z_r - z_l + \varepsilon_{1x} \\ \left[ \varepsilon_{1x} = \mu \left( -\frac{\delta_x^3}{6} + \frac{\delta_x^5}{30} - \dots \right) z_i \right], \quad (1.1)$$

$$h^2 D_x^2 z_i = z_r - 2z_i + z_l + \varepsilon_{2x} \\ \left[ \varepsilon_{2x} = \left( -\frac{\delta_x^4}{12} + \frac{\delta_x^6}{90} - \dots \right) z_i \right], \quad (1.2)$$

$$2h^3 D_x^3 z_i = z_{rr} - 2z_r + 2z_l - z_{ll} + \varepsilon_{3x} \\ \left[ \varepsilon_{3x} = \mu \left( -\frac{\delta_x^5}{4} + \frac{7\delta_x^7}{120} - \dots \right) z_i \right], \quad (1.3)$$

$$h^4 D_x^4 z_i = z_{rr} - 4z_r + 6z_i - 4z_l + z_{ll} + \varepsilon_{4x} \\ \left[ \varepsilon_{4x} = \left( -\frac{\delta_x^6}{6} + \frac{7\delta_x^8}{240} - \dots \right) z_i \right]. \quad (1.4)$$

Аналогично, обозначая через  $k$  шаг по  $y$ , а через  $\delta_y^n z_i$   $n$ -ю центральную разность в точке  $i$ , взятую в направлении оси  $y$ , и отмечая узловые точки, лежащие на одной вертикали с  $i$ , индексами,

указанными на фиг. 34, приходим к следующим выражениям для производных по  $y$ :

$$2kD_y z_i = z_a - z_b + \varepsilon_{1y}$$

$$\left[ \varepsilon_{1y} = \mu \left( -\frac{\delta_y^3}{6} + \frac{\delta_y^5}{30} - \dots \right) z_i \right], \quad (1.5)$$

$$k^2 D_y^2 z_i = z_a - 2z_i + z_b + \varepsilon_{2y}$$

$$\left[ \varepsilon_{2y} = \left( -\frac{\delta_y^4}{12} + \frac{\delta_y^6}{90} - \dots \right) z_i \right], \quad (1.6)$$

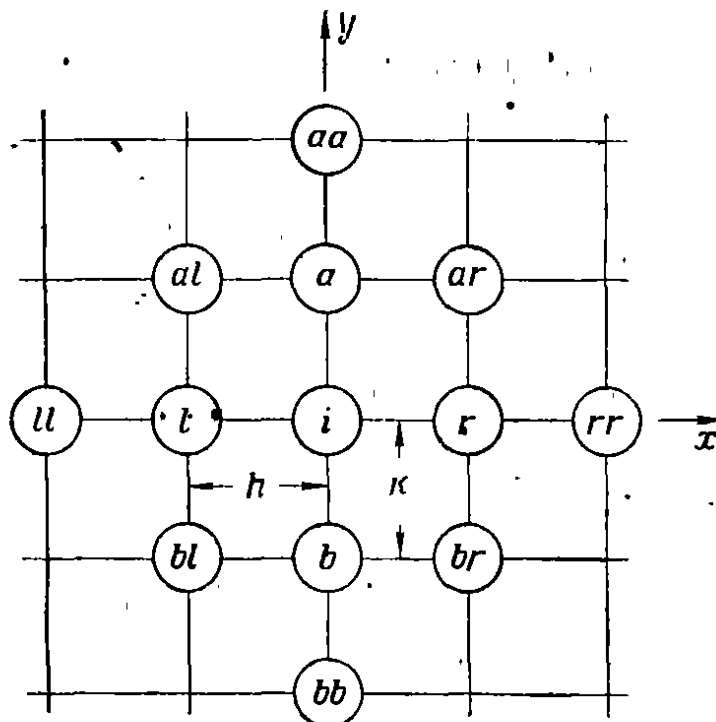
$$2k^3 D_y^3 z_i = z_{aa} - 2z_a + 2z_b - z_{bb} + \varepsilon_{3y}$$

$$\left[ \varepsilon_{3y} = \mu \left( -\frac{\delta_y^5}{4} + \frac{7\delta_y^7}{120} - \dots \right) z_i \right], \quad (1.7)$$

$$k^4 D_y^4 z_i = z_{aa} - 4z_a + 6z_i - 4z_b + z_{bb} + \varepsilon_{4y}$$

$$\left[ \varepsilon_{4y} = \left( -\frac{\delta_y^6}{6} + \frac{7\delta_y^8}{240} - \dots \right) z_i \right]. \quad (1.8)$$

Выражение для смешанной производной  $D_{xy}$  от функции  $z$  получается посредством применения оператора  $D_x$  к оператору  $D_y$ .



Фиг. 34.

В результате операторное произведение  $D_x D_y = D_{xy}$  выражается следующей формулой:

$$D_{xy} z_i = \frac{1}{2h} \left[ \frac{1}{2h} (z_r - z_t)_a - \frac{1}{2h} (z_r - z_l)_b \right] + \frac{1}{4hk} \varepsilon_{2,xy}.$$

или

$$4hkD_{xy}z_i = z_{ar} - z_{al} - z_{br} + z_{bl} + \varepsilon_{2, xy}$$

$$[\varepsilon_{2, xy} = (\varepsilon_{1, x})_a - (\varepsilon_{2, x})_b]. \quad (1.9)$$

Аналогичным образом, исходя из равенства  $\partial^4 z / \partial x^2 \partial y^2 = D_{xxyy} = D_x^2 \cdot D_y^2$ , получаем

$$h^2k^2D_{xxyy}z_i = (z_r - 2z_i + z_l)_a - 2(z_r - 2z_i + z_l)_i +$$

$$+ (z_r - 2z_i + z_l)_b + \varepsilon_{4, xy} =$$

$$= (z_{ar} + z_{al} + z_{br} + z_{bl}) - 2(z_a + z_b + z_r + z_l) + 4z_i + \varepsilon_{4, xy}$$

$$[\varepsilon_{4, xy} = (\varepsilon_{2, x})_a - 2(\varepsilon_{2, x})_i + (\varepsilon_{2, x})_b]. \quad (1.10)$$

Оператор Лапласа (или гармонический оператор)<sup>1)</sup>

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = D_x^2 + D_y^2$$

приобретает, в силу равенств (1.2) и (1.6), в прямоугольной сетке со сторонами ячеек  $h, k$  следующий вид:

$$h^2k^2\nabla^2 z_i = k^2(z_r - 2z_i + z_l) + h^2(z_a - 2z_i + z_b) + k^2\varepsilon_{2x} + h^2\varepsilon_{2y}. \quad (1.11)$$

В частности, для случая квадратной сетки

$$h^2\nabla^2 z_i = z_a + z_b + z_r + z_l - 4z_i + \varepsilon_{2x} + \varepsilon_{2y}, \quad (1.12)$$

где  $\varepsilon_{2x}$  и  $\varepsilon_{2y}$  определяются из (1.2) и (1.6) соответственно.

Бигармонический оператор<sup>2)</sup>

$$\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

имеет в квадратной сетке следующий вид:

$$h^4\nabla^4 z_i = h^4\nabla^2(\nabla^2 z_i) = h^4[\nabla^2 z_a + \nabla^2 z_b + \nabla^2 z_r + \nabla^2 z_l - 4\nabla^2 z_i] =$$

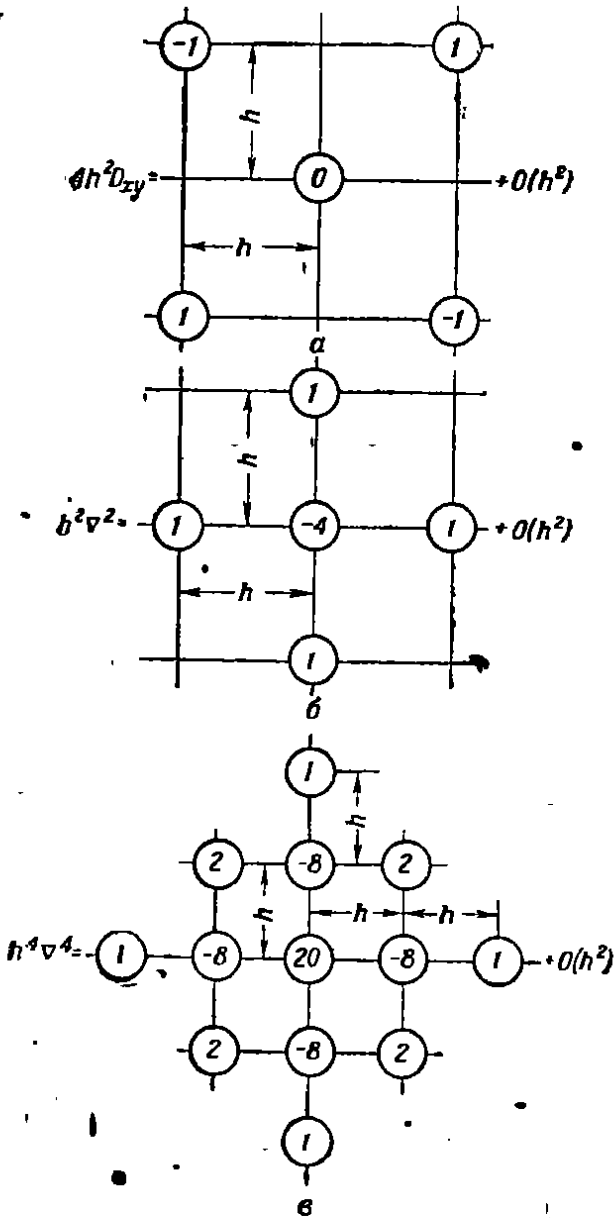
$$= (z_{aa} + z_{bb} + z_{rr} + z_{ll}) + 2(z_{al} + z_{ar} + z_{br} + z_{bl}) -$$

$$- 8(z_a + z_b + z_r + z_l) + 20z_i + \varepsilon, \quad (1.13)$$

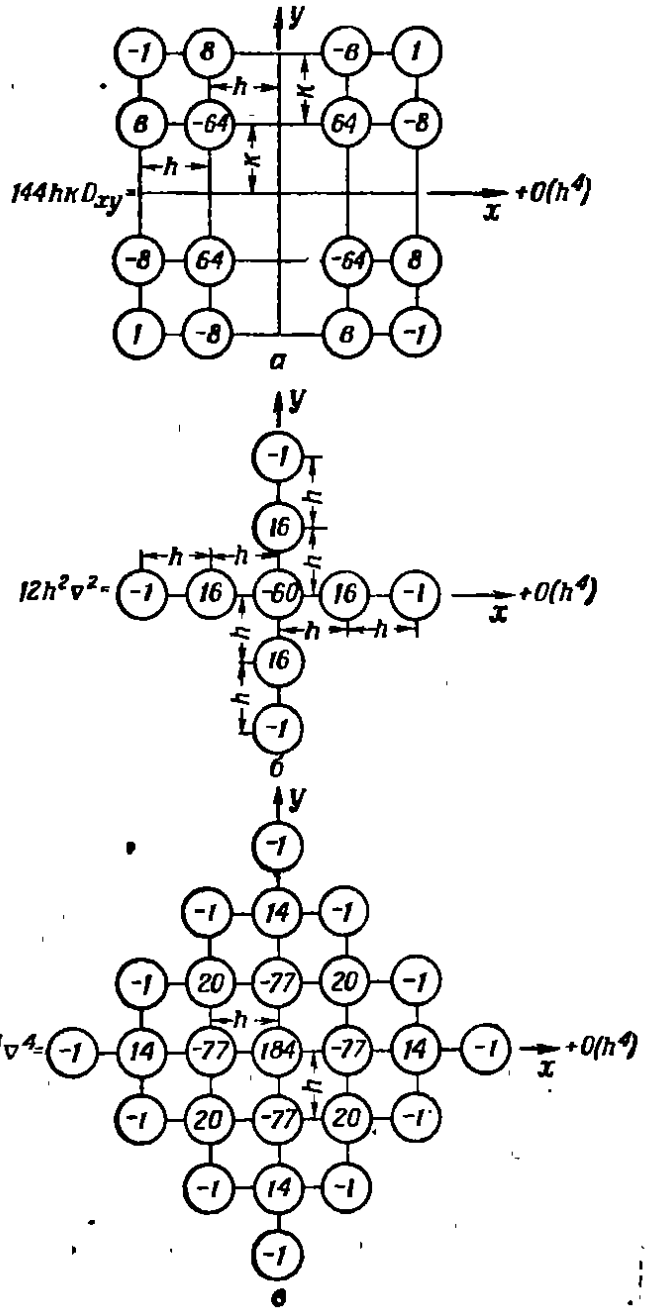
Где  $\varepsilon$  вычисляется по значениям  $\varepsilon_{4x}$ ,  $\varepsilon_{4y}$  и  $\varepsilon_{4, xy}$

1) Не смешивать со второй левой разностью.

2) Не смешивать с четвертой левой разностью.



Фиг. 35.



Фиг. 36.

Операторы  $D_{xy}$ ,  $\nabla^2$  и  $\nabla^4$  в случае квадратных сеток удобно представлять в виде схем, изображенных на фиг. 35<sup>1)</sup> (соответственно  $a$ ,  $б$ ,  $в$ ).

С помощью центрально-разностных операторов фиг. 12,  $б$ , можно получить представления операторов  $D_{xy}$ ,  $\nabla^2$  и  $\nabla^4$  в виде схем, показанных на фиг. 36<sup>1)</sup>. Так как эти представления имеют погрешность  $O(h^4)$ , то ими следует пользоваться в тех случаях, когда нужна большая точность.

Подобным же образом можно получить разностные аналоги трехмерных дифференциальных операторов, которые используются, например, при решении задач о деформациях или о теплопроводности.

<sup>1)</sup>  $O(h^2)$  и  $O(h^4)$  на схемах означают, что погрешности при вычислении  $D_{xy}$ ,  $\nabla^2$  и  $\nabla^4$  по этим схемам имеют указанный порядок. — Прим.-ред.

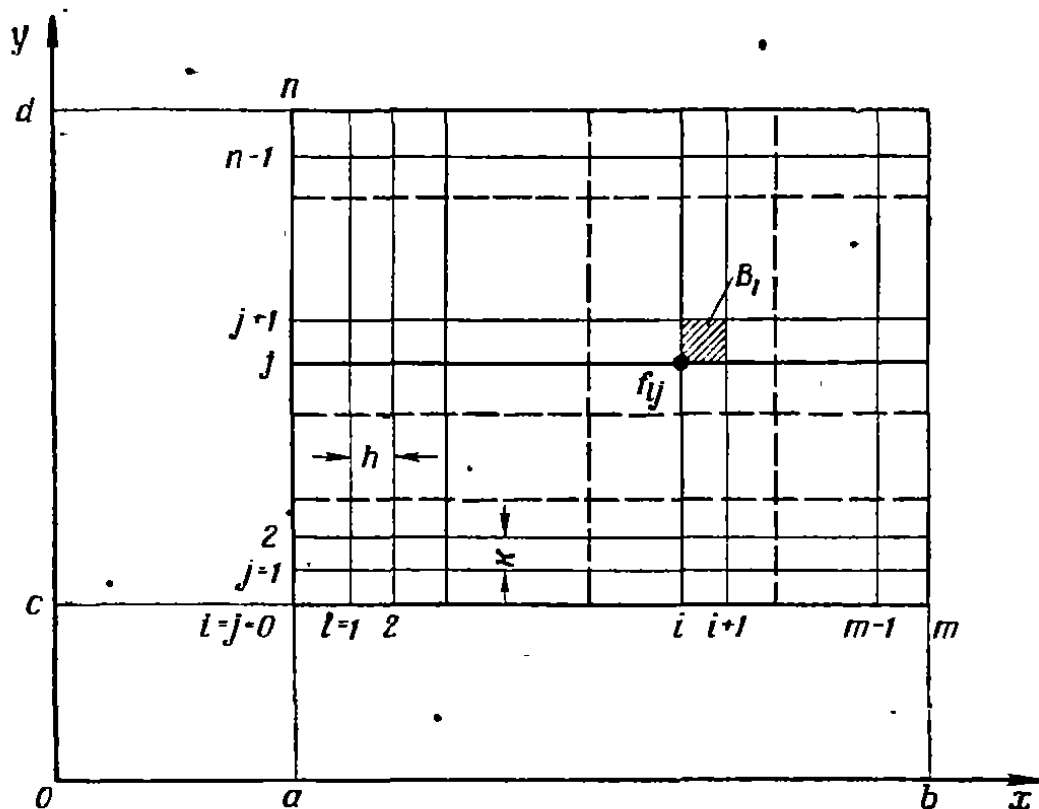
## § 2. ЧИСЛЕННОЕ ДВОЙНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

## [а] Формула трапеций

Двойной интеграл

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy, \quad (2.1)$$

по прямоугольнику  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$  можно вычислить путем повторного (по  $x$  и по  $y$ ) численного интегрирования по формуле трапеций (гл. II, § 8, (а)).



Фиг. 37.

Для этого предположим, что наш прямоугольник разбит на  $m \cdot n$  прямоугольников со сторонами  $h = (b - a)/m$  и  $k = (d - c)/n$ , и рассмотрим значения  $f_{ij}$  функции  $f$  в узловых точках (фиг. 37)

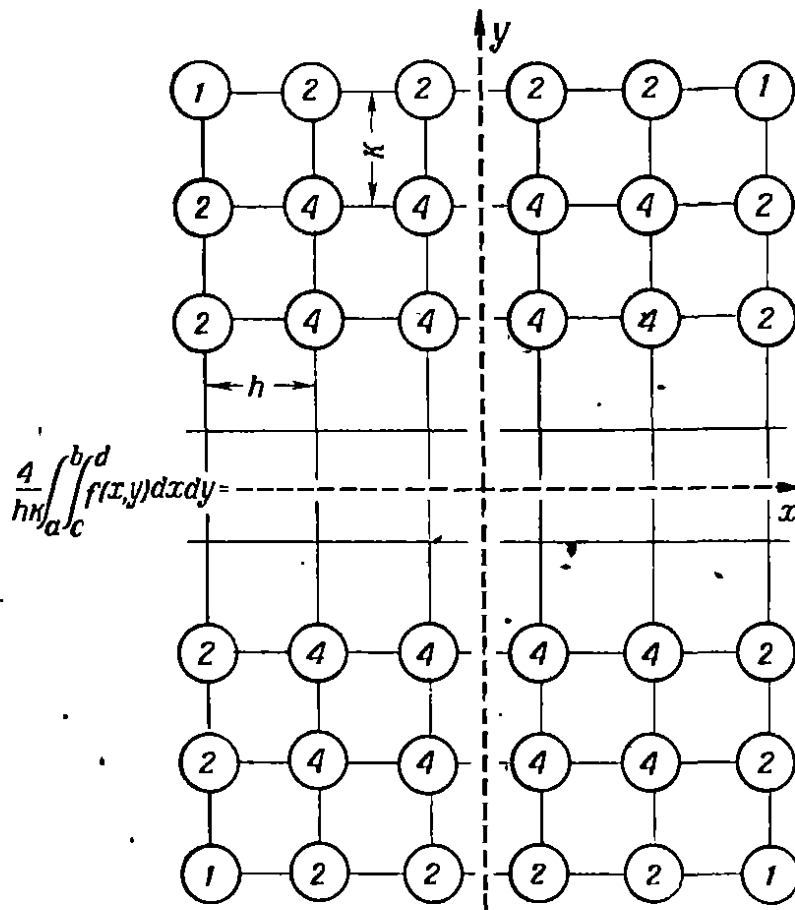
$$x_i = ih + a \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m),$$

$$y_j = jk + c \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Значение  $B_1$  интеграла, распространенного по прямоугольнику со сторонами  $h$ ,  $k$  и с левым нижним углом в узловой точке  $(i, j)$ , согласно формуле трапеций [гл. II, (8.1)], есть

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \cong \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left\{ \frac{h}{2} [f_i(y) + f_{i+1}(y)] \right\} dy \cong \\ &\cong \frac{h}{2} \left[ \frac{k}{2} (f_{i,j} + f_{i,j+1}) + \frac{k}{2} (f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}) \right] = \\ &= \frac{hk}{4} [f_{i,j} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Заметим теперь, что если сложить все значения  $V_1$ , то 1) каждая внутренняя узловая точка встретится четыре раза; 2) каждая граничная точка (кроме вершин основного прямоугольника) встретится два раза; 3) каждая вершина основного прямоугольника встретится один раз. Из сказанного видно, что значение  $V$  может быть приближенно вычислено по схеме, изображенной на фиг. 38.



Фиг. 38. Формула трапеций.

Для оценки погрешности этого оператора рассмотрим площадь  $A(y_j)$  того сечения объема  $V$ , которое получится, если мы проведем секущую плоскость перпендикулярно оси  $y$  на расстоянии  $y_j$  от начала координат. Так как погрешность формулы трапеций есть  $O(h^2)$  (гл. II, § 8, (a)), то

$$A(y_j) = \int_a^b f(x, y_j) dx = A_j + K_j h^2. \quad (a)$$

Проинтегрировав равенство (a) по формуле трапеций в направлении оси  $y$ , получим

$$V = k \left( \frac{1}{2} A_0 + A_1 + \dots + A_{n-1} + \frac{1}{2} A_n \right) + \\ + k \left( \frac{1}{2} K_0 + K_1 + \dots + K_{n-1} + \frac{1}{2} K_n \right) h^2 + K' k^2,$$

где последнее слагаемое представляет собой погрешность, возникшую при интегрировании по  $y$ . Подставив во второе слагаемое правой части последнего равенства вместо  $k$  его значение, равное  $(d - c)/n$ , и полагая

$$\bar{K} = \frac{d-c}{n} \left( \frac{1}{2} K_0 + K_1 + K_2 + \dots + K_{n-1} + \frac{1}{2} K_n \right),$$

найдем, что погрешность при двойном интегрировании по формуле трапеций есть

$$\varepsilon_t = \bar{K} h^2 + K' k^2,$$

или, если обозначить через  $\alpha$  отношение  $k/h$ ,

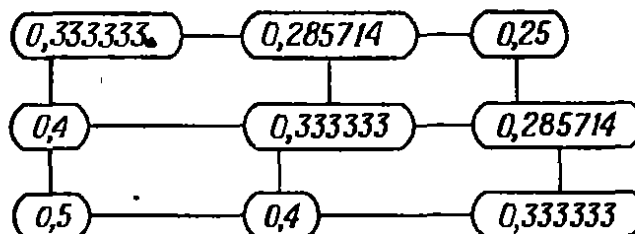
$$\varepsilon_t = (\bar{K} + \alpha^2 K') h^2. \quad (2.3)$$

Итак, погрешность при двойном интегрировании по формуле трапеций есть  $O(h^2)$ ; поэтому для уточнения результата методом экстраполяции следует применять экстраполяции порядка  $h^2$  (гл. II, § 9).

Воспользуемся выведенной формулой для вычисления следующего двойного интеграла:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \int_1^2 \frac{dx dy}{x+y} = \\ &= \int_1^2 [\ln(x+y)]_1^2 dy = \int_1^2 [\ln(x+2) - \ln(x+1)] dy = \\ &= [(x+2) [\ln(x+2) - 1] - (x+1) [\ln(x+1) - 1]]_1^2 = \\ &= \ln \frac{1024}{729} = \ln 1,4046639 = 0,339798. \end{aligned} \quad (6)$$

При  $n = 2$ , т. е. при  $h = k = 0,5$ , значения  $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$  в узловых точках области интегрирования таковы:



Таким образом, согласно оператору фиг. 38, для  $V$  получается следующее приближенное значение (с четырьмя знаками):

$$\begin{aligned} V_{T,2} &= \frac{0,5 \cdot 0,5}{4} \{ (0,3333 + 0,5 + 0,3333 + 0,25) + \\ &+ 2(0,4 + 0,4 + 0,2857 + 0,2857) + 4(0,3333) \} = 0,3433. \end{aligned}$$

Погрешность составляет 1% [сравните с (б)]. При  $n = 4$ , т. е. при  $h = k = 0,25$ , аналогичные вычисления дают

$$V_{T,4} = 0,3406$$

с погрешностью 0,24%. Применим для уточнения результата экстраполяцию порядка  $h^2$ . Выбрав экстраполяционные коэффициенты для  $n_2/n_1 = 2$  из табл. 21 (гл. II) ( $\alpha_1 = 1,3333$ ,  $\alpha_2 = 0,3333$ ), найдем:

$$V_{T|_{2;4}} = 1,3333 \cdot 0,3406 - 0,3333 \cdot 0,3433 = 0,3397$$

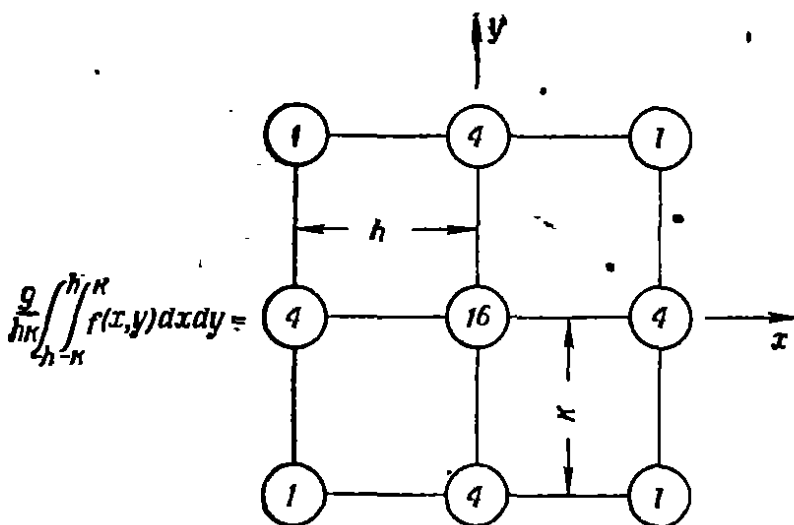
с погрешностью 0,03%.

### [б] Формула Симпсона

Выделим из нашего объема  $V$  часть  $B_2$ , высеченную четырьмя прямоугольниками со сторонами  $h$ ,  $k$  и с общей вершиной в точке  $(i, j)$ . Приближенное значение  $B_2$  можно вычислить двойным применением формулы Симпсона [гл. II, (8.3)] — в направлении оси  $x$  и в направлении оси  $y$ :

$$\begin{aligned} B_2 &= \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} dy \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \cong \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \frac{h}{3} [f_{i-1}(y) + 4f_i(y) + f_{i+1}(y)] dy \cong \\ &\cong \frac{hk}{9} [f_{i-1, j-1} + f_{i+1, j-1} + f_{i-1, j+1} + f_{i+1, j+1} + \\ &\quad + 4(f_{i, j+1} + f_{i, j-1} + f_{i-1, j} + f_{i+1, j}) + 16f_{ij}]. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Оператор  $B_2$  удобно представлять схемой, изображенной на фиг. 39.

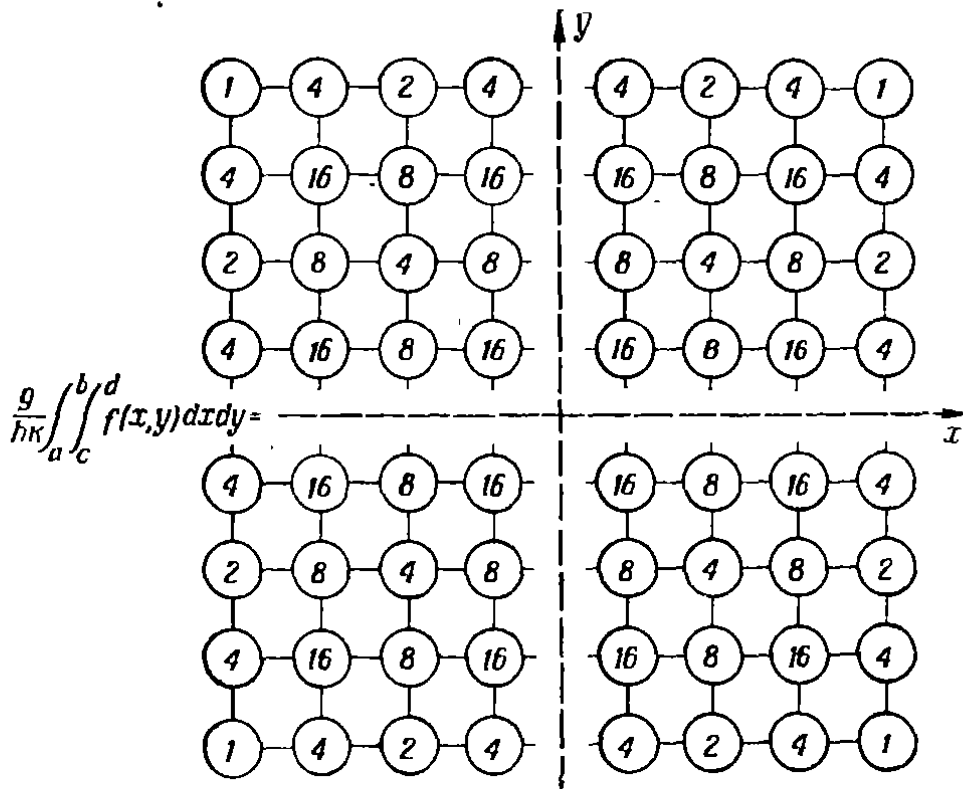


Фиг. 39. Формула Симпсона для четырех квадратов.

Складывая значения  $B_2$  для всех прямоугольников области интегрирования, получим оператор, изображенный на фиг. 40.



Аналогично тому, как это делалось в разделе (а) настоящего параграфа, легко доказать, что погрешность формулы Симпсона для двойного интегрирования есть  $O(h^4)$ ; следовательно, для уточнения



Ф и г. 40. Формула Симпсона.

результата можно пользоваться экстраполяциями порядка  $h^4$  (гл. II, § 9).

Значение интеграла (б), вычисленное по формуле Симпсона при  $n = 2$ , равно:

$$V_{C, 2} = \frac{0,5 \cdot 0,5}{9} [0,5 + 0,333333 + 0,25 + 0,333333 + \\ + 4(0,4 + 0,4 + 0,285714 + 0,285714) + 16 \cdot 0,333333] = 0,339881$$

с погрешностью 0,024%.

### § 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

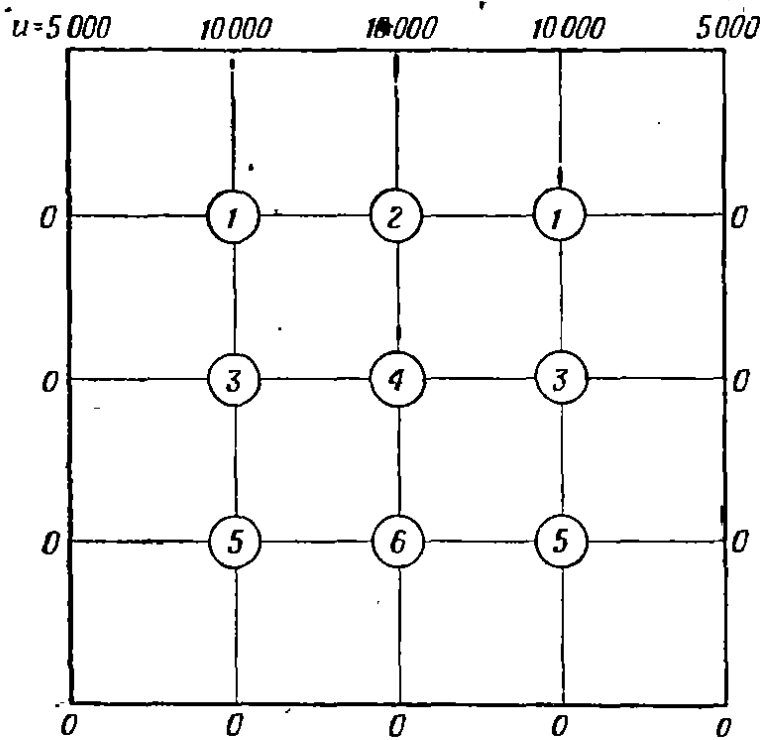
Много разнообразных физических задач описывается уравнением Лапласа

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

с соответствующими граничными условиями. Среди них — задачи о стационарном распределении тепла. Можно доказать<sup>1)</sup>, что если

<sup>1)</sup> Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 2, М.—Л., 1953, стр. 332—334. — Прим. перев.

температура  $u(x, y)$  двумерного тела (изолированной плоской пластинки или бесконечно длинного цилиндра) не зависит от времени, то она удовлетворяет уравнению (3.1).



Фиг. 41.

В качестве примера решения уравнения Лапласа численными методами рассмотрим задачу об определении температуры  $u$  плоской изолированной квадратной пластинки со стороной  $L$ . Шаги по  $x$  и по  $y$  выберем равными  $h$ . Заменяя в (3.1) оператор  $\nabla^2$  разностным оператором фиг. 35, б и пользуясь для узловых точек обозначениями фиг. 34, приходим к разностному уравнению Лапласа:

$$u_a + u_b + u_r + u_l - 4u_i = 0. \quad (3.2)$$

Если  $h = L/4$ , а граничные значения температуры заданы на фиг. 41, то уравнение (3.2) приводит к следующей системе шести линейных алгебраических уравнений (номера узлов те же, что и на фиг. 41):

№ точки	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$c$
1	-4	1	1				-10 000
2	2	-4		1			-10 000
3	1		-4	1	1		0
4		1	2	-4		1	0
5			1		-4	1	0
6				1	2	-4	0

(a)

Решив эту систему по схеме Гаусса, найдем:

$$\begin{aligned} u_1 &= 4286, & u_2 &= 5268, & u_3 &= 1875, \\ u_4 &= 2500, & u_5 &= 714, & u_6 &= 982. \end{aligned} \quad (6)$$

Эту систему удобно решать также методом итераций (гл. I, § 9). Для этого разрешим (3.2) относительно  $u_i$ :

$$u_i = \frac{1}{4} (u_a + u_b + u_r + u_l). \quad (3.3)$$

Отсюда видно, что температура в точке  $i$  равна среднему арифметическому температур в четырех ближайших к  $i$  узловых точках. Отправляясь от произвольных узловых значений  $u$  и последовательно заменяя эти значения средними арифметическими согласно (3.3), мы сможем решить систему весьма простым итерационным процессом.

Для того чтобы обеспечить быструю сходимость итерационного процесса (который в этом частном случае называется *процессом Либмана*), важно начать итерации с подходящих значений  $u_i$ . Эти начальные значения получают обычно, используя крупный шаг. Так, при  $h = L/2$  найдем, согласно (3.3), начальное приближение  $u$  в центре пластинки

$$u_4^{(0)} = \frac{1}{4} (10000 + 0 + 0 + 0) = 2500.$$

Для того чтобы получить начальные приближения значений  $u_1$  и  $u_6$ , заметим, что оператор  $\nabla^2$  инвариантен относительно поворота осей. Поэтому мы можем вычислить, например,  $u_1$  как среднее арифметическое значений  $u$  в четырех точках, граничащих с точкой 1 по диагоналям:

$$u_1^{(0)} = \frac{1}{4} (10000 + 2500 + 0 + 5000) = 4375.$$

Аналогично,

$$u_6^{(0)} = \frac{1}{4} (0 + 2500 + 0 + 0) = 625.$$

Теперь можно вычислить начальные значения  $u$  в точках 2, 3 и 6, пользуясь равенством (3.3) и исходной сеткой:

$$u_2^{(0)} = \frac{1}{4} (4375 + 10000 + 4375 + 2500) = 5312,$$

$$u_3^{(0)} = \frac{1}{4} (0 + 4375 + 2500 + 625) = 1875,$$

$$u_6^{(0)} = \frac{1}{4} (625 + 2500 + 625 + 0) = 938.$$

Последовательные значения  $u_i$ , получаемые процессом Либмана, приведены в табл. 49. Результат с точностью до двух единиц последнего знака совпадает с решением, полученным по схеме Гаусса.

Таблица 49

$n$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$
0	4375	5312	1875	2500	625	938
1	4296	5273	1855	2480	698	969
2	4282	5261	1865	2490	708	976
3	4281	5263	1869	2494	711	979
4	4283	5265	1872	2497	712	980
5	4284	5266	1873	2498	713	981
6	4284	5266	1873	2498	713	981

#### § 4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ РЕЛАКСАЦИИ

Решение уравнения Лапласа  $\nabla^2 u = 0$ , имеющего важные приложения в теории поля (электромагнетизм, теплопроводность, теория упругости), можно получить также методом релаксации (гл. I, § 10).

Невязка  $R_i$  разностного оператора Лапласа (3.2) равна

$$R_i = u_a + u_b + u_r + u_l - 4u_i.$$

Из написанного равенства видно, что если мы увеличим  $u_i$  на  $\delta u_i$ , то  $R_i$  уменьшится на  $4\delta u_i$ . Что же касается четырех соседних невязок, а именно  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_r$  и  $R_l$ , то каждая из них увеличится при этом на  $\delta u_i$ . Таким образом, процесс релаксации складывается из весьма простых операций: сложений, вычитаний и умножений на целые числа. Этот процесс легко провести без использования вычислительных машин.

В табл. 50 приведено решение методом релаксации системы (а) из § 3. Исходные значения были взяты из первой строки табл. 49;  $\delta u_i$  выбиралось каждый раз так, чтобы наибольшая невязка обращалась в нуль. Так как температура симметрична относительно вер-

тикальной оси, то мы смогли ограничиться лишь шестью узловыми точками. Заметим еще, что благодаря этой симметрии изменение  $\delta u$  в точках 1, 3 и 5 приводит к изменению невязок соответственно в точках 2, 4 и 6 на  $2\delta u$ . В задачах такого типа релаксация часто оказывается наиболее простым и удобным методом.

### § 5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА МЕТОДОМ РЕЛАКСАЦИИ

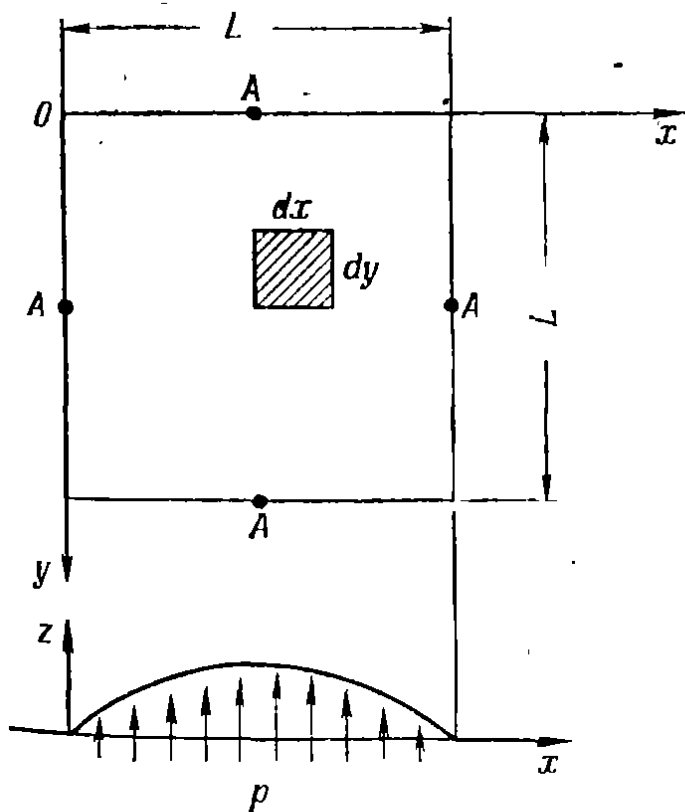
Другое важное уравнение математической физики, а именно *уравнение Пуассона*

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y),$$

описывающее электрические и магнитные явления, явления деформации и т. д., также удобно решать методом релаксации.

Таблица 50

①		②	
4375	-313	5312	2
-80	1	-40	-158
-8	-35	-4	2
-1	1	5268	-14
4286	-8		2
	-1		
③		④	
1875	8	2500	8
	-80		-90
	-8		1
	1		
⑤		⑥	
625	313	938	-2
80	1	40	158
8	-35	4	-2
1	1	982	14
714	8		-2
	1		



Фиг. 42.

Здесь мы воспользуемся этим уравнением для решения задачи об упругой деформации.

Рассмотрим абсолютно гибкую тонкую мембрану, натянутую на горизонтальное квадратное отверстие со стороной  $L$  и незначительно деформирующуюся под действием постоянного давления  $p$  (фиг. 42). Пусть  $S$  — постоянное натяжение мембраны на единицу длины. Отверстие, на которое натянута мембрана, будем считать лежащим в плоскости  $(x, y)$ , а прогиб мембраны обозначать через  $z$ . На элемент мембраны  $dx dy$  действуют следующие силы: (1) давление  $p dx dy$ ; (2) равнодействующая сил натяжения вдоль

$dy$ ; (3) равнодействующая сил натяжения вдоль  $dx$ . Вес мембраны примем равным нулю.

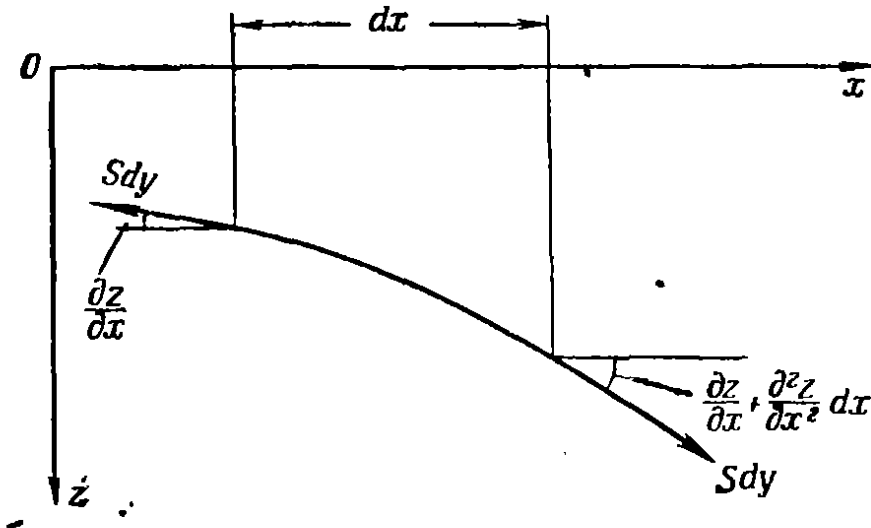
Предполагая наклон мембраны малым (фиг. 43), запишем вертикальную компоненту равнодействующей сил натяжения в направлении  $dy$  следующим образом:

$$-S dy \frac{\partial z}{\partial x} + S dy \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} dx \right) = S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy.$$

Для направления  $dx$  получим аналогичное равенство:

$$-S dx \frac{\partial z}{\partial y} + S dx \left( \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy.$$

Таким образом, уравнение равновесия мембраны в вертикальном



Ф и г. 43.

направлении после деления на  $S dx dy$  примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{p}{S} = 0. \quad (5.1)$$

Это равенство представляет собой уравнение Пуассона с постоянной правой частью, равной  $f(x, y) = -p/S$ . Граничным условием будет

$$z = 0 \quad \text{на границе.} \quad (5.2)$$

Для приведения задачи к безразмерной форме положим

$$x = \xi L, \quad y = \eta L; \quad z(x, y) = \frac{pL^2}{S} \varphi(\xi, \eta) \quad (5.3)$$

и сделаем соответствующие замены в (5.1) и (5.2):

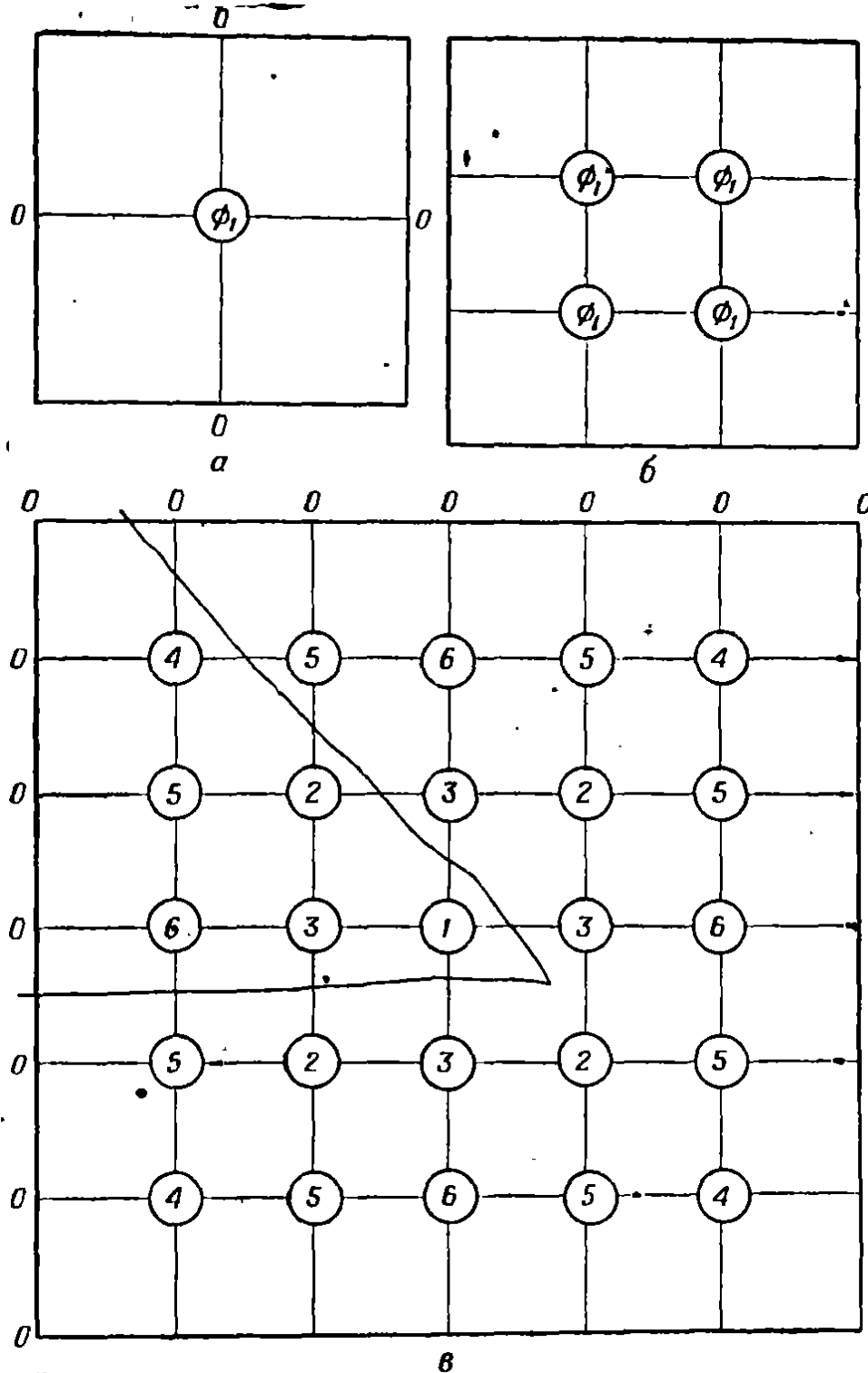
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{p}{S} = \frac{pL^2}{S} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{L^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{L^2 \partial \eta^2} \right] + \frac{p}{S} = 0,$$

$$\frac{pL^2}{S} \varphi = 0 \quad \text{на границе.}$$

Таким образом, функция  $\varphi$  определяется как решение следующей граничной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + 1 &= 0, \\ \varphi(0, \eta) = \varphi(1, \eta) = \varphi(\xi, 0) = \varphi(\xi, 1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Заменим теперь первое из равенств (5.4) разностным уравнением для квадратной сетки с шагом  $h = 1/n$ . Для этого умножим его на



Ф и г. 44.

$h^2 = 1/n^2$  и подставим вместо  $h^2 \nabla^2$  разностный оператор фиг. 35,б. Разностные уравнения

$$\varphi_a + \varphi_b + \varphi_r + \varphi_l - 4\varphi_i + \frac{1}{n^2} = 0 \tag{5.5}$$

совместно с граничными условиями (5.4) представляют собой систему алгебраических уравнений. Решив ее, мы найдем тем самым численное решение задачи о мембране. Деформация мембраны  $z$  вычисляется по функции  $\varphi$  согласно (5.3).

Пусть сначала  $n = 2$  (фиг. 44,а). Тогда, в силу (5.5), имеем

$$0 + 0 + 0 + 0 - 4\varphi_1 + \frac{1}{4} = 0$$

(так как на границе  $\varphi = 0$ ), и, таким образом,  $\varphi_1 = 0,0625$ . Если  $n = 3$  (фиг. 44,б), то (5.5) дает

$$0 + 0 + \varphi_1 + \varphi_1 - 4\varphi_1 + \frac{1}{9} = 0,$$

и, следовательно,  $\varphi_1 = 0,0556$ .

Пусть теперь  $n = 6$ . Умножив для удобства (5.5) на  $10^4$ , получим <sup>1)</sup>

$$\varphi_a + \varphi_b + \varphi_r + \varphi_l - 4\varphi_i + 278 = 0. \quad (5.6)$$

В силу симметрии, мы можем выделить одну восьмую часть мембраны и рассмотреть только шесть узловых значений, как указано на фиг. 44,в. Для релаксации найдем изменения певязок  $\delta R$ , соответствующие  $\delta\varphi_i = 1$ . Они приведены в табл. 51.

Таблица 51

$\delta R_i \backslash \delta\varphi_i$	$l=1$	2	3	4	5	6
$l=1$	-4	0	+1	0	0	0
2	0	-4	+2	0	+1	0
3	+4	+2	-4	0	0	+1
4	0	0	0	-4	+1	0
5	0	+2	0	+2	-4	+2
6	0	0	+1	0	+1	-4

Для начала релаксации мы можем воспользоваться значениями  $10^4\varphi_1 = 625$  и  $10^4\varphi_1 = 556$ , полученными соответственно при  $n = 2$  и  $n = 3$ . Проинтерполировав грубо эти значения на соответствующую

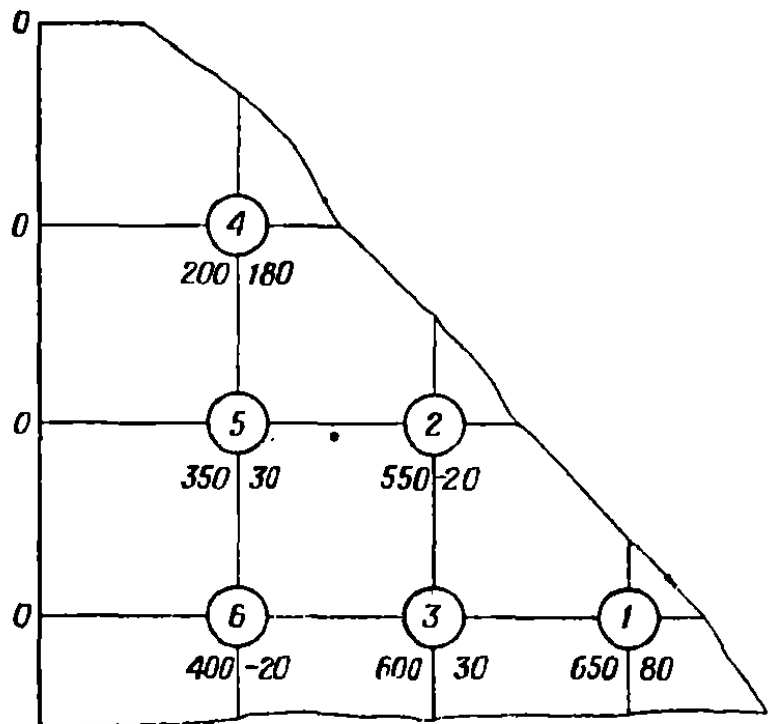
<sup>1)</sup> Под  $\varphi$  здесь также понимается  $10^4\varphi$ . — Прим. перев.



ще узловые точки, получим в качестве начального приближения числа, указанные на фиг. 45<sup>1)</sup>.

Релаксация проведена в табл. 52<sup>1)</sup>. Сперва значения  $\varphi$  брались с двумя знаками, причем невязки также округлялись (на каждом шаге уменьшалась наибольшая из невязок; использовалась преимущественно избыточная релаксация). Следующие два знака  $\varphi$  были вычислены путем релаксации тех невязок, которые соответствуют значениям  $\varphi$ , вычисленным с двумя знаками (преимущественно использовалась избыточная релаксация).

Деформацию мембраны  $z$  можно вычислить по значениям  $\varphi$  из табл. 52<sup>1)</sup> согласно (5.3).



Фиг. 45.

Таблица 52

	①		②		③		④		⑤		⑥	
$\varphi$	8	55	-2	60	8	20	18	35	8	40	-2	
6	-16	3	1	3	8	5	-2	3	8	2	1	
	1		10	1	11	1	1		1		1	
	0		-2		1		0		-2		1	0
71			0		1	26			2			
		58								42		
				64				38				
710	-2	580	-2	640	8	260	-2	380	18	420	-2	
10	38	8	14	10	24	4	14	8	-14	7	14	
1,5	-2	2	-18	?	-16	0,5	-2	?	-10	0,5	24	
	8	0,5	2		-11		2		2		1	
	0		8		1		0		8		8	
			-2		8				-8		2	
721,5			2		-8	264,5			-1		0	
			0		-1,5				-0,5			
					-0,5				18	427,5		
		590,5			0				0,5			
				652,0				390,0				

<sup>1)</sup> Справа от приближенных значений приведены невязки. — Прим. ред

## § 6. УПРУГОЕ КРУЧЕНИЕ

В теории упругости доказывается<sup>1)</sup>, что касательные напряжения  $\tau_z$  в закрученном стержне постоянного поперечного сечения (ось стержня параллельна оси  $z$ ) следующим образом выражаются через производные „функции кручения“  $\psi$ :

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6.1)$$

Здесь  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  — проекции  $\tau_z$  соответственно на оси  $x$  и  $y$ ,  $G$  — модуль сдвига,  $\theta$  — угол закручивания на единицу длины, а функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \psi + 2 = 0 \quad (6.2)$$

и граничному условию

$$\psi = 0 \quad \text{на границе} \quad (6.3)$$

(последнее — в случае сплошного поперечного сечения).

Скручивающий момент  $M_t$ , вызывающий напряжения (6.1), можно выразить через  $\psi$  посредством равенства

$$M_t = 2G\theta \iint \psi \, dx \, dy, \quad (6.4)$$

в котором двойной интеграл берется по всему поперечному сечению стержня.

Наша цель — вычислить максимальное упругое напряжение, возникающее в квадратном (со стороной длины  $L$ ) стержне под действием скручивающего момента  $M_t$ .

Для решения нашей задачи поместим одну из вершин поперечного сечения стержня в начало координат, а стороны направим параллельно осям  $x$  и  $y$ . Далее, приведем уравнения к безразмерной форме посредством замены

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) &= \frac{1}{L^2} \psi(x, y), \\ \xi &= \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Эта замена приводит краевую задачу (6.2), (6.3) к следующей краевой задаче для  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + 2 &= 0, \\ \varphi(0, \eta) = \varphi(1, \eta) = \varphi(\xi, 0) = \varphi(\xi, 1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Сравнивая равенства (6.6) с равенствами (5.4), мы видим, что безразмерная функция кручения  $\varphi$  и безразмерный прогиб  $\varphi$  мем-

<sup>1)</sup> Тимошенко С. П., Теория упругости, М. — Л., 1934, стр. 256 и сл.

браны, рассмотренной в § 5, являются решениями одной и той же краевой задачи. Единственная разница состоит в том, что правая часть уравнения Пуассона (6.6) вдвое больше соответствующей правой части (5.4). Так как уравнения (6.6) и (5.4) линейны, то решения пропорциональны правым частям; следовательно, значения безразмерной функции кручения  $\varphi$  вдвое больше, чем значения прогиба мембраны, приведенные в табл. 52. Другими словами, прогиб мембраны и функция кручения подобны.

В табл. 53 даны значения безразмерной функции кручения  $\varphi$ , полученные путем удвоения соответствующих значений табл. 52.

В переменных (6.5) напряжения (6.1) и скручивающий момент (6.4) примут следующий вид:

$$\tau_{xz} = G\theta L \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad \tau_{yz} = -G\theta L \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad (6.7)$$

$$M_t = 2G\theta L^4 \iint \varphi \, d\xi \, d\eta \equiv 2G\theta L^4 V. \quad (6.8)$$

Эти уравнения показывают, что проекции напряжений на координатные оси пропорциональны *наклону* мембраны в соответствующих направлениях, а скручивающий момент — объему  $V$  той части пространства, которая заключена между мембраной и плоскостью  $(x, y)$ .

Максимум напряжения достигается в центральных точках  $A$  краев поперечного сечения (см. фиг. 42).

$$|\tau_{\max}| = G\theta L \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right|_A. \quad (6.9)$$

Значение максимального напряжения  $\partial \varphi / \partial \xi$  в точке  $A$  можно вычислить, воспользовавшись разложением производной в ряд по правым разностям [гл. II, (5.4)]. Правые разности найдем (с шагом  $h = 1/6$ ) по значениям  $\varphi$  из табл. 53. Эти разности, взятые вдоль центральной оси поперечного сечения стержня, приведены в табл. 54. В силу равенства (5.4) гл. II, находим:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right|_{\max} = \frac{1}{1/6} \left[ 855 - \frac{1}{2}(-406) + \frac{1}{3}(96) - \frac{1}{4}(-64) \right] = 6636.$$

Деля это значение на  $10^4$  (ср. с табл. 53), получим, согласно (6.9):

$$|\tau_{\max}| = 0,6636 G\theta L.$$

Таблица 53

Точка	1	2	3
$10^4 \cdot \varphi$	1443	1181	1304
Точка	4	5	6
$10^4 \cdot \varphi$	529	780	855

Таблица 54

$n$	$\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta^2\varphi$	$\Delta^3\varphi$	$\Delta^4\varphi$	$\Delta^5\varphi$	$\Delta^6\varphi$
0	0	855	-406	96	-64	0	0
1	855	449	-310	+32	-64	0	
2	1304	+139	-278	-32	-64		
3	1443	-139	-310	-96			
4	1304	-449	-406				
5	855	-855					
6	0						

Это значение отличается на 1,70% от значения  $0,675 G\theta L$ , найденного Тимошенко<sup>1)</sup> разложением  $\varphi$  в степенной ряд.

Соответствующее значение скручивающего момента  $M_t$  получается двойным интегрированием  $\varphi$  [согласно (6.8)]. Двойное интегрирование можно выполнить по формуле Симпсона, воспользовавшись оператором  $B_2$ , изображенным на фиг. 39. Применяя этот оператор последовательно к точкам 1, 4 и 6 (см. фиг. 44, в) и сложив затем первое из полученных чисел с учетверенными вторым и третьим, мы получим искомый интеграл:

$$\iint \varphi d\xi d\eta = \frac{1}{9 \cdot 36} \{4 \cdot 1181 + 4 \cdot 4 \cdot 1304 + 16 \cdot 1443 +$$

$$+ 4[0 + 0 + 0 + 1181 + 4(0 + 0 + 780 + 780) + 16 \cdot 529] +$$

$$+ 4[0 + 0 + 1181 + 1181 + 4(0 + 780 + 780 + 1304) + 16 \cdot 855]\} = 685,8.$$

Итак,

$$M_t = 2 \cdot 685,8 \cdot 10^{-4} G\theta L^4 = 0,1372 G\theta L^4. \quad (a)$$

Это значение на 2,42% отличается от значения  $0,1406 G\theta L^4$ , которое Тимошенко нашел разложением в степенные ряды<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Тимошенко С. П., Теория упругости, М—Л., 1934, стр. 274 и след.

## § 7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ МЕТОДОМ РЕЛАКСАЦИИ

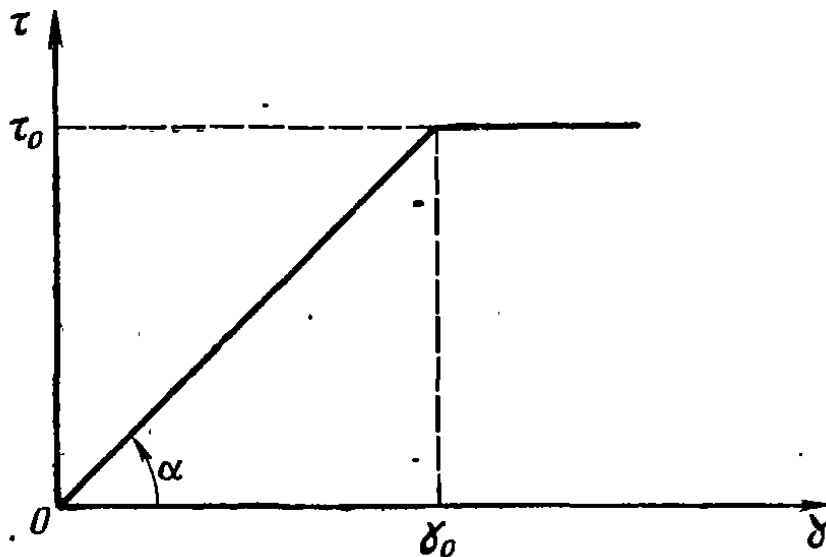
Численное решение задачи о кручении для напряжений, превосходящих предел упругости, т. е. для пластического случая, также можно получить из аналогии с мембраной.

Заметим прежде всего, что применение метода конечных разностей к задаче об упругом кручении можно рассматривать как замену непрерывной среды мембраны упругой решеткой<sup>1)</sup>. Эта решетка нагружена в узлах, совпадающих с узловыми точками расчетной сетки. Посмотрим еще, какой физический смысл имеет уравнение невязок, соответствующее уравнению (6.6), т. е. уравнение

$$R_i = (\varphi_a + \varphi_b + \varphi_r + \varphi_l - 4\varphi_i) + \frac{2}{n^2}. \quad (7.1)$$

Оно состоит из стоящей в скобках величины, которая пропорциональна равнодействующей напряжений, приложенных к четырем элементам решетки, пересекающимся в точке  $i$ , и члена  $2/n^2$ , пропорционального приложенной нагрузке. Таким образом значение  $R_i$  пропорционально дисбалансу в точке  $i$ . При состоянии равновесия этот дисбаланс должен обратиться в нуль.

Предположим теперь, что материал стержня упруг, если срезывающее напряжение  $\tau$  меньше  $\tau_0$ , и пластичен в противном случае. Это

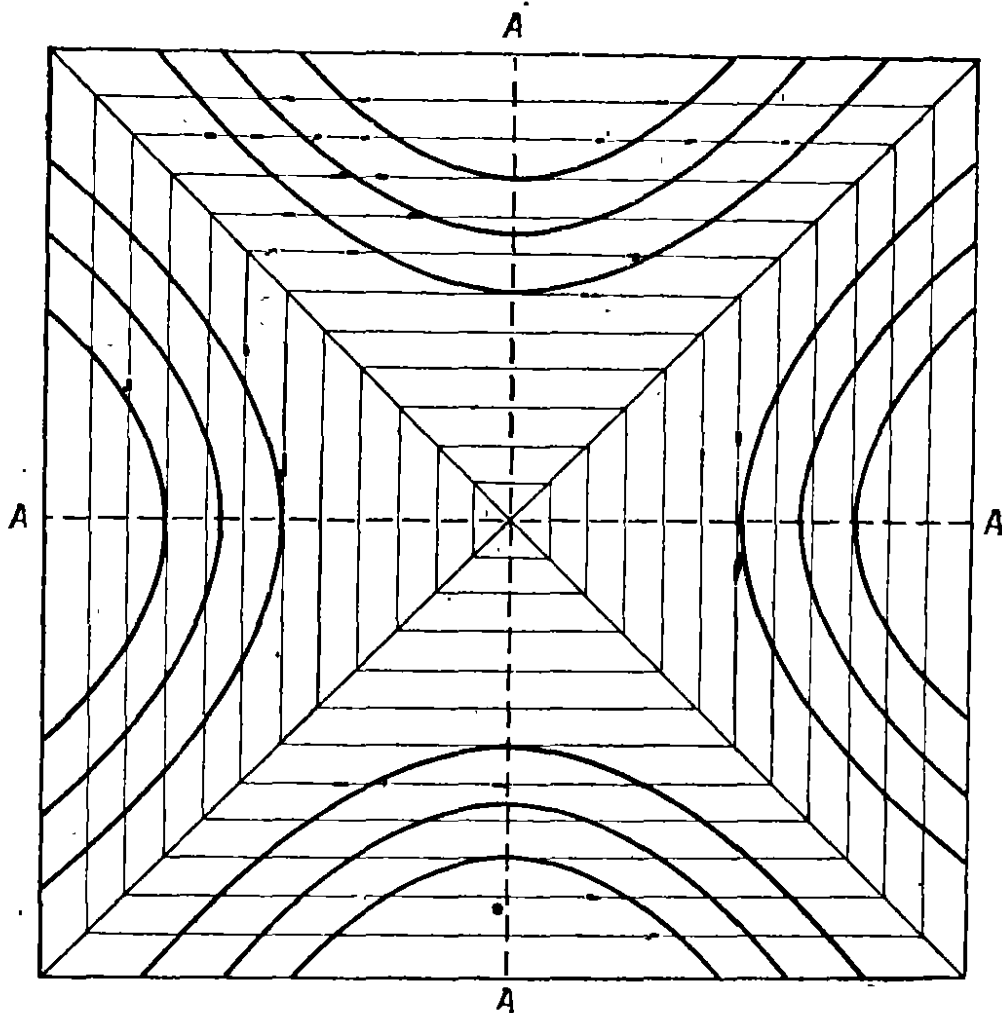


Фиг. 46. Упруго-пластический материал.

означает, что возрастание срезывающего усилия  $\gamma$  не вызывает возрастания  $\tau$  больше, чем до  $\tau_0$  (фиг. 46). Обозначим через  $M_0$  то значение скручивающего момента, которое вызывает напряжение  $\tau_0$  в центральной точке  $A$  стороны поперечного сечения (вспомним, что в этой точке напряжение максимально). При дальнейшем возрастании

1) Напомним, что имеет место рассмотренная в § 6 аналогия между задачей о мембране и задачей об упругом кручении. — Прим. перев.

скручивающего момента пластическое напряжение  $\tau_0$  проникает внутрь мембраны, и точки  $A$  оказываются окруженными областями пластичности (в этих областях  $\tau = \tau_0$ ). Для того чтобы представить себе эти области, проведём аналогию с мембраной. Для этого вспомним, что скручивающему моменту  $M$  в мембране соответствует объем  $V$ , а напряжению  $\tau$  — наклон мембраны [см. равенства (6.7) и (6.8)]. При увеличении  $V$  мембрана „раздувается“ и наклон ее увеличивается.



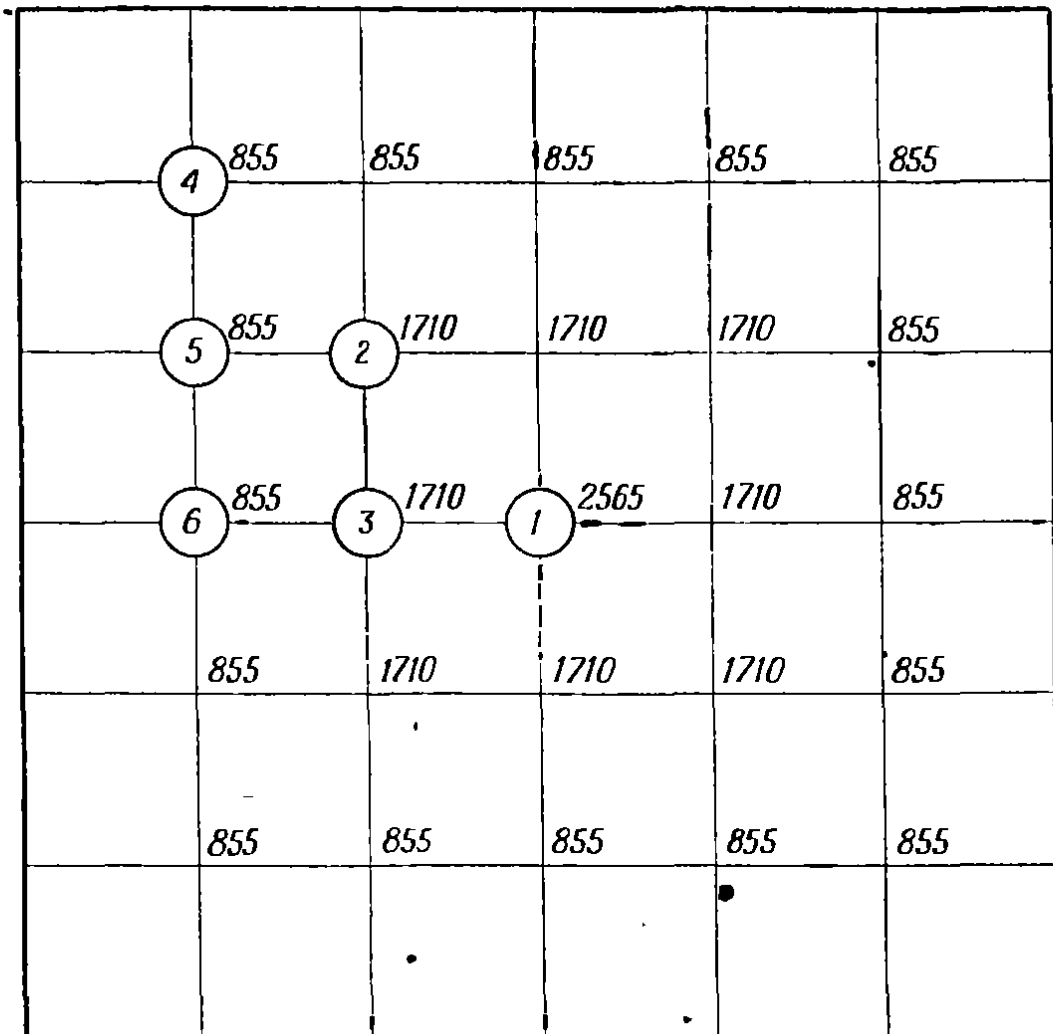
Фиг. 47. Области пластичности при кручении.

Когда  $V$  станет равным  $V_0$  (что соответствует  $M = M_0$ ), в точках  $A$  будет достигнут предельный наклон (соответствующий  $\tau = \tau_0$ ). При дальнейшем увеличении  $V$  этот наклон увеличиваться не будет. Мы можем представить себе, что над мембраной расположена гладкая „крыша“ пирамидальной формы. Соприкосновение мембраны с „крышей“ начинается в точках  $A$ . При дальнейшем возрастании давления (а тем самым и  $V$ ) это соприкосновение распространяется, захватывая все большие области „пластичности“, как показано на фиг. 47. В пределе, когда области пластичности заполнят всё поперечное сечение, мембрана совпадет с „крышей“, приняв пирамидальную форму.

Из сказанного ясно, что в упругих областях внешняя нагрузка  $p$  уравнивается натяжением мембраны  $S$ . В пластических же областях несбалансированная сила уравнивается реакцией „крыши“.

Это замечание, принадлежащее Саусвеллу, дает простой способ решения задачи о пластическом кручении.

Предположим, например, что скручивающему моменту  $M_0$  соответствует безразмерное смещение  $\varphi$  мембраны, приведенное в табл. 53. Тогда пластическому напряжению  $\tau_0$  соответствует наклон поверхности  $\varphi$  в точке  $A$ . Этот наклон приблизительно равен значению  $\varphi = 855$  в точке 6, поделенному на  $h = 1/6$  (фиг. 44, в). „Высота крыши“ равна 855 в точках 4, 5 и 6,  $855 \cdot 2 = 1710$  в точках 2 и 3 и  $855 \cdot 3 = 2565$  в точке 1 (фиг. 48).



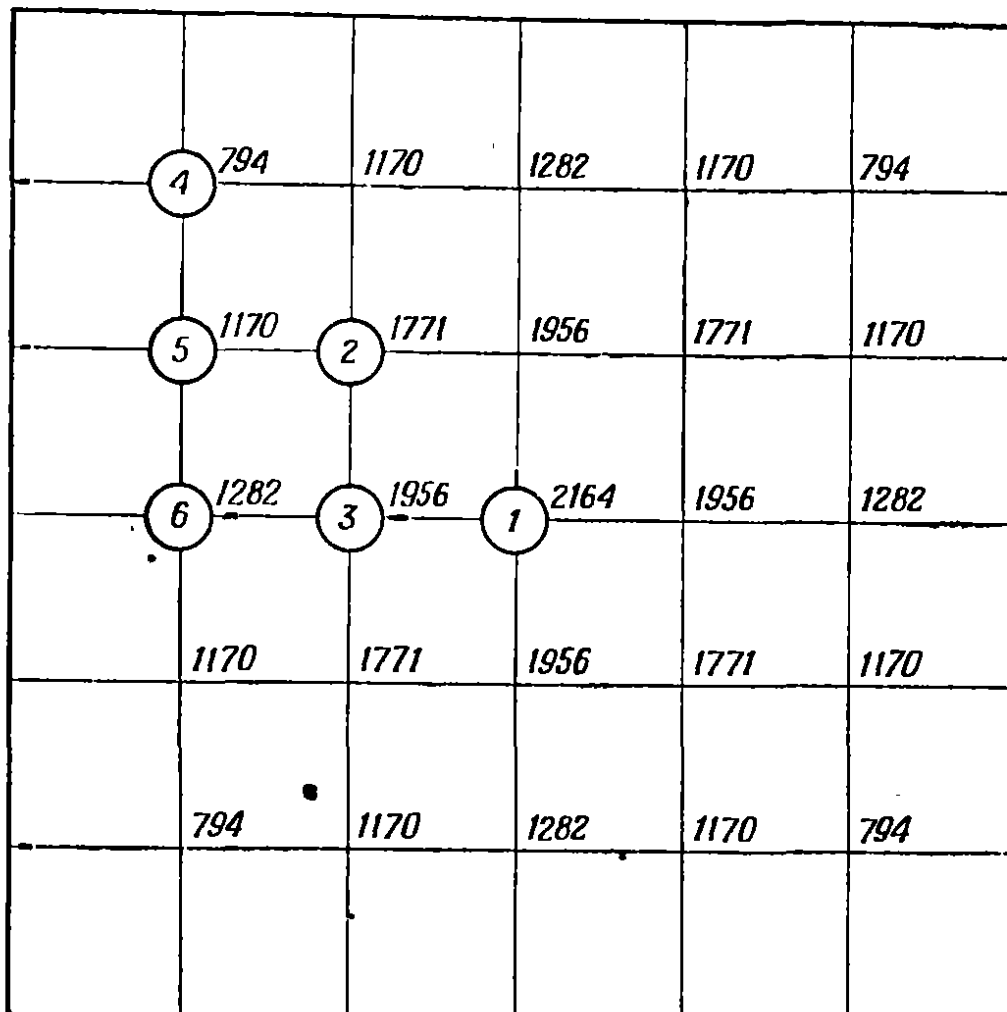
Фиг. 48. Высота пластической „крыши“.

С другой стороны, упругие напряжения пропорциональны скручивающему моменту  $M_t$ . Поэтому если  $M_t$  достигает, например, значения  $1,5 M_0$  и материал ведет себя упругим образом, то соответствующие смещения точек мембраны равны значениям табл. 53, умноженным на 1,5. Эти смещения указаны на фиг. 49. Если значение на фиг. 49 больше, нежели на фиг. 48, то „крыша“ помешает смещению мембраны. Таким образом, точки мембраны 2, 3, 4, 5 и 6 должны быть *снижены* до уровня „крыши“. Соответствующие отрицательные смещения приведены в табл. 55.

Таблица 55

Точка	2	3	5	6
Смещение	$1710 - 1771 =$ $= -61$	$1710 - 1956 =$ $= -246$	$855 - 1170 =$ $= -315$	$855 - 1282 =$ $= -427$

Невязки, возникающие из-за этих смещений, легко вычислить согласно уравнениям (7.1). Эти невязки приведены в табл. 56. Для дальнейшего вспомним, что невязки соответствуют несбалансированным силам. При этом положительные невязки соответствуют силам,

Фиг. 49. Упругие смещения ( $M_2 = 1,5 M_0$ ).

направленным вверх и уравновешенным реакцией „крыши“. Таким образом, при релаксации все положительные невязки следует заранее заменять нулями и заботиться лишь об отрицательных. Релаксация проведена в табл. 57. Новые значения смещений точек мембраны получены в этой таблице с тремя знаками<sup>1)</sup>. Смещение в точке 6,

<sup>1)</sup> То есть в табл. 57, а также и в табл. 58, даны значения  $\varphi \cdot 10^3$ , а не  $\varphi \cdot 10^4$ . — Прим. ред.



## Понижение мембраны до уровня крыши

4							
794							
0	-630						
5		2					
1170		1771					
-315	772	-61	-878				
855		1710					
6		3		1			
1282		1956		2164			
-427	832	-246	435	0	-984		
855		1710		2164			

Таблица 57

Релаксация отрицательных иевязок ( $M_2 = 1,5 M_0$ )

4							
79							
-33	-63						
46							
5		2					
86		0	171	-88			
-35		-74					
51		-2	97	0			
6		3		1			
86		0	171	0	216	-98	
-35		-71			-93		
51		4	100	0	123	-2	

Таблица 58

Релаксация отрицательных невязок  
( $M_1 = 1,25M_0$ )

66		- 24			
- 13					
53		0			
		5			2
86		0	148		- 24
- 14			- 28		
72		0	120		0
		6			3
86		0	163		- 21
- 15			- 30		
71		1	133		- 2
					1
			180		0
			- 30		
			150		0

соответствующее пластическому напряжению  $\tau_0$ , равно теперь 51. Области пластичности простираются за точку 5, почти достигая точек 2 и 3, в которых уровень „крыши“ равен  $2 \cdot 51 = 102$ .

В табл. 58 приведены аналогичные вычисления для  $M = 1,25M_0$ . В этом случае смещение в точке 6, соответствующее пластическому напряжению  $\tau_0$ , равно 71. Области пластичности захватывают точки 5 и 6, но сравнительно далеки от точек 2 и 3. На фиг. 50 изображены области пластичности для  $M = 1,25M_0$  и  $M = 1,5M_0$ .

Теперь мы можем по формуле Симпсона [§ 2, (б)] вычислить интеграл  $V$  упруго-пластической функции  $\varphi$  (точно так, как это делалось в § 6 для упругого случая). Для  $M_1 = 1,25M_0$  и  $M_2 = 1,5M_0$  мы получим соответственно  $V_1 = 651,8$  и  $V_2 = 499,8$ . Следовательно, согласно равенству (6.8) (вспомним, что  $\varphi$  была умножена на  $10^4$ ),

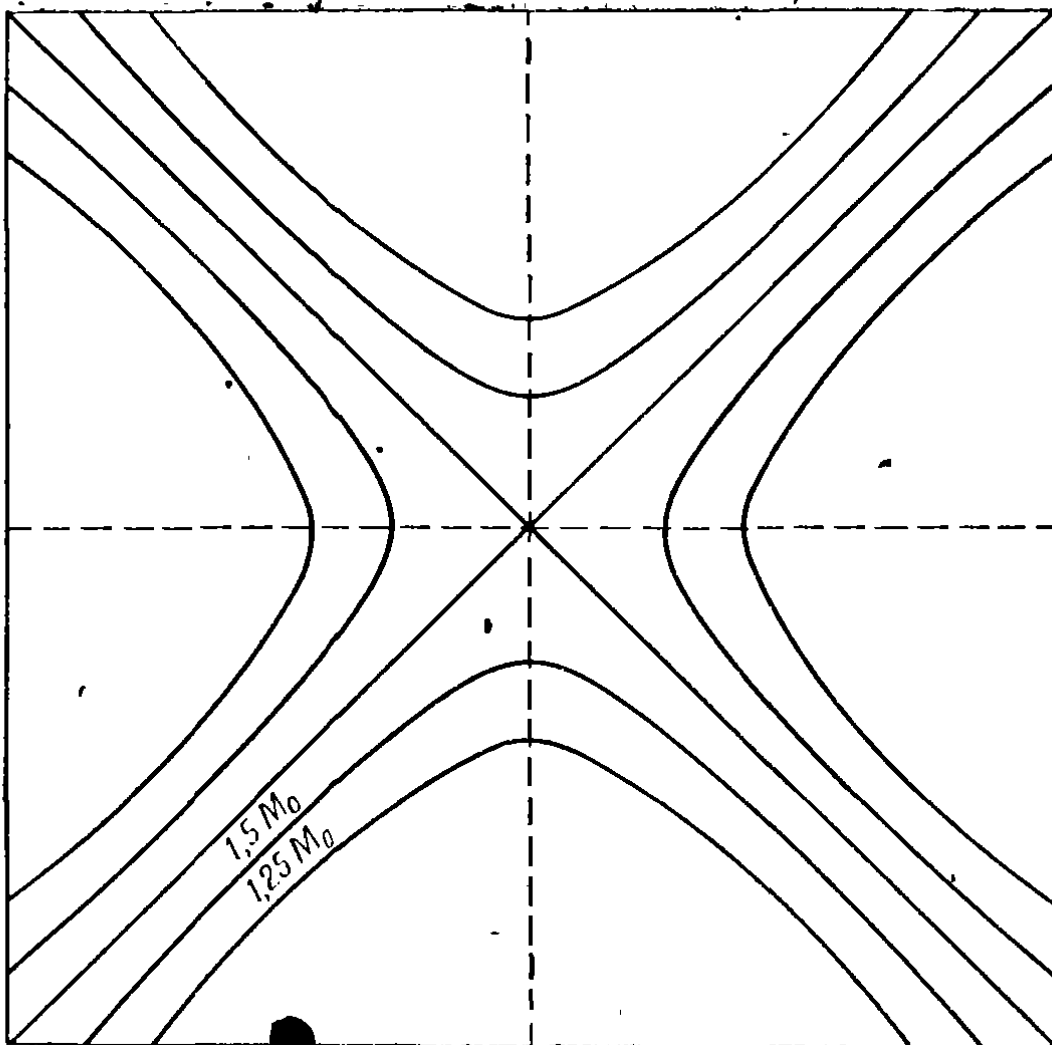
$$1,25M_0 = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 651,8 G\theta_1 L^4 = 0,1304 G\theta_1 L^4, \quad (a)$$

$$1,5M_0 = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 499,8 G\theta_2 L^4 = 0,09996 G\theta_2 L^4, \quad (б)$$

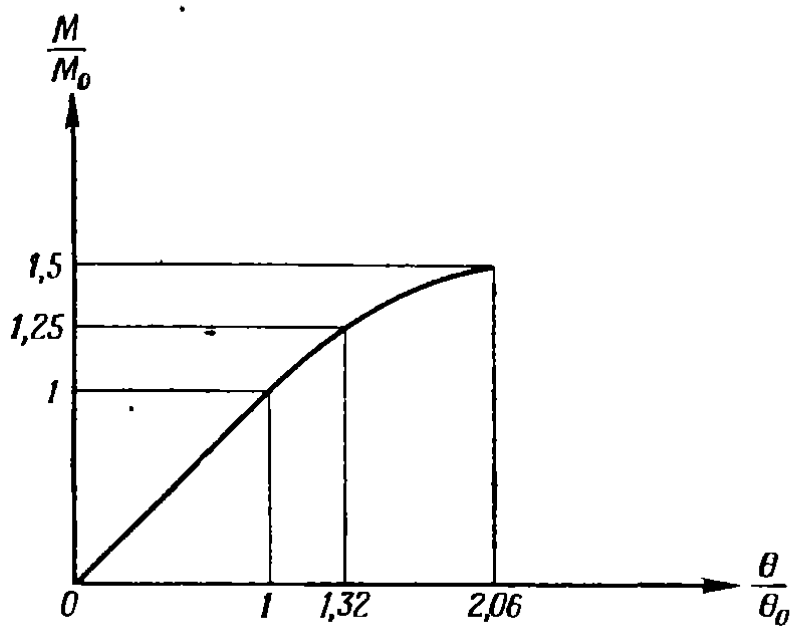
где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — значения  $\theta$ , отвечающие соответственно  $M_1$  и  $M_2$ .

В § 6 мы нашли, что в упругом случае [равенство (а)]

$$M_0 = 0,1372 G\theta_0 L^4. \quad (в)$$



Фиг. 50. Области пластичности при кручении.



Фиг. 51. Зависимость скручивающего момента от угла закручивания при пластическом кручении прямоугольного стержня.

Взяв отношения (а) и (б) к (в), найдем

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = 1,32, \quad \text{если} \quad \frac{M_1}{M_0} = 1,25; \quad \frac{\theta_2}{\theta_0} = 2,06, \quad \text{если} \quad \frac{M_2}{M_0} = 1,5.$$

На фиг. 51 изображен график зависимости  $M/M_0$  от  $\theta/\theta_0$ . Этот график показывает, что в пластическом случае угол закручивания зависит от скручивающего момента нелинейно.

### § 8. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ, СОДЕРЖАЩИЕ $\nabla^4 z$

Граничная задача об изгибе  $w$  квадратной пластинки со стороной  $a$ , заделанной по краям, описывается следующими уравнениями<sup>1)</sup>:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}; \quad w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на границе.} \quad (8.1)$$

Здесь

$q$  — нагрузка на единицу площади;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  — цилиндрическая жесткость;

$h$  — толщина пластинки;

$E, \mu$  — соответственно модуль растяжения и коэффициент Пуассона материала пластинки;

$\nu$  — направление нормали к границе.

Задача (8.1) приводится к безразмерной форме путем замены

$$x = \xi a, \quad y = \eta a; \quad w(x, y) = \frac{qa^4}{D} z(\xi, \eta). \quad (a)$$

Эта замена дает

$$\nabla^4 z = 1; \quad z = \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на границе,} \quad (8.2)$$

причем  $\nabla^4$  берется относительно  $\xi$  и  $\eta$ .

Численное решение задачи (8.2) получается путем замены  $\nabla^4 z$  разностным оператором фиг. 35, в для квадратной сетки с шагом  $1/n$ .

Граничные условия, согласно равенствам (1.1) гл. IV, показывают, что значение  $z$  в каждой соседней с границей узловой точке внутри пластинки равно значению  $z$  в соседней с границей узловой точке, лежащей на той же нормали вне пластинки.

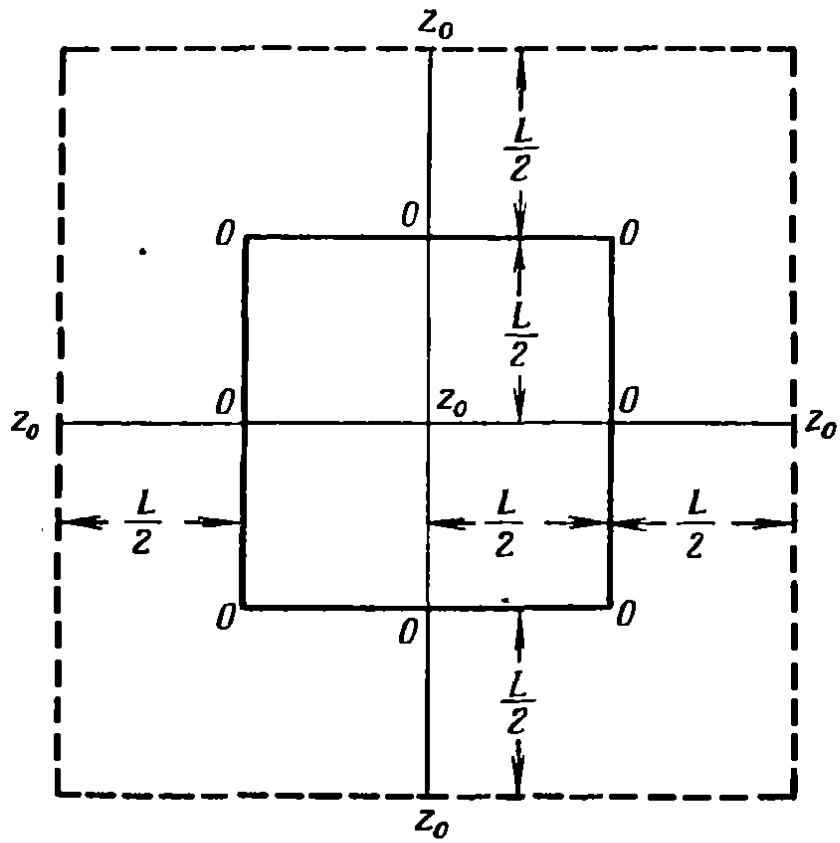
Начнем со случая  $n = 2$  (фиг. 52). Равенство (8.2) в этом случае дает

$$(z_0 + z_0 + z_0 + z_0) + 2 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 20z_0 = \frac{1}{24},$$

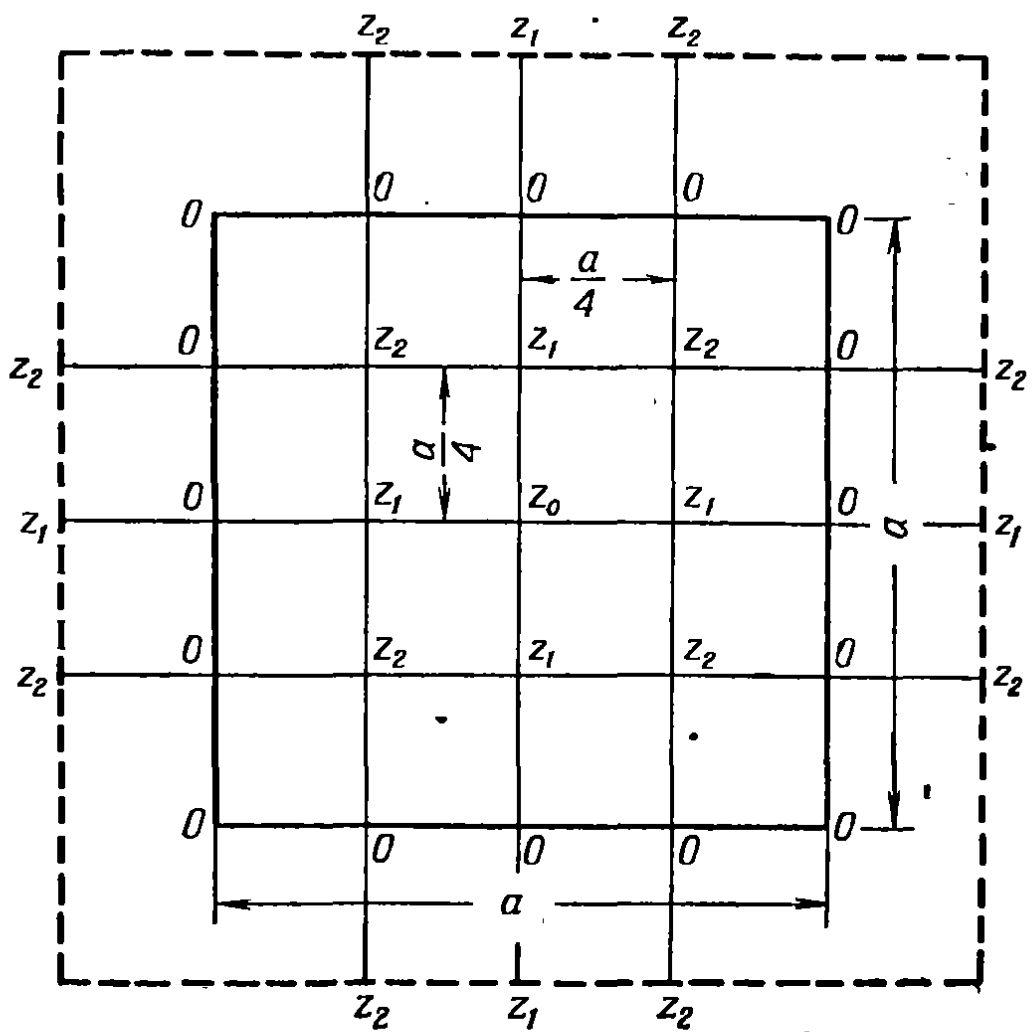
откуда

$$z_0|_2 = \frac{1}{24 \cdot 24} = \frac{1}{384}.$$

<sup>1)</sup> Филоненко-Бородич М. М. и др., Курс сопротивления материалов, ч. II, М.—Л., 1949, стр. 241—245. — Прим. перев.



Фиг. 52.



Фиг. 53,

При  $n = 4$  равенство (8.2), примененное к точкам фиг. 53, дает:

$$\text{в точке (0)} \quad 20z_0 - 32z_1 + 8z_2 = \frac{1}{4^4},$$

$$\text{в точке (1)} \quad -8z_0 + 26z_1 - 16z_2 = \frac{1}{4^4},$$

$$\text{в точке (2)} \quad 2z_0 - 16z_1 + 24z_2 = \frac{1}{4^4}.$$

Из этих уравнений найдем, например, по схеме Гаусса:

$$z_0|_4 = \frac{0,461}{4^4}; \quad z_1|_4 = \frac{0,309}{4^4}; \quad z_2|_4 = \frac{0,209}{4^4}.$$

При  $n = 8$  аналогичным образом вычислим  $z_0|_8 = 5,857/8^4$ . Прогиб пластинки в центре при  $\mu = 0,3$  и  $n = 2; 4; 8$ , согласно (а), оказывается равным

$$\omega_0|_2 = \frac{12(1-0,3^2)}{384} \frac{qa^4}{Eh^3} = 0,0284 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = 106\%),$$

$$\omega_0|_4 = \frac{12(1-0,3^2) \cdot 0,461}{256} \frac{qa^4}{Eh^3} = 0,0197 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = 43\%),$$

$$\omega_0|_8 = \frac{12(1-0,3^2) \cdot 5,857}{4096} \frac{qa^4}{Eh^3} = 0,0156 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = 13\%).$$

Погрешность  $e$  указана относительно решения, найденного Тимошенко<sup>1)</sup> методом степенных рядов ( $\omega_0 = 0,0138qa^4/Eh^3$ ). Воспользовавшись экстраполяцией порядка  $h^2$  (см. гл. II, § 9), получим

$$\omega_0|_{2,4} = 0,0167 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = 21\%),$$

$$\omega_0|_{4,8} = 0,0142 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = 2,9\%),$$

$$\omega_0|_{2,4,8} = 0,0140 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = 1,4\%).$$

## § 9. ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

Рассмотрим квадратную пластинку со стороной  $a$ , опертую с двух противоположных краев и заделанную с двух других (фиг. 54). На пластинку действуют (в ее плоскости) сжимающие силы, перпендикулярные к опертым краям. Силы эти равномерно распределены с плотностью  $N$  (на единицу длины). Начало координат поместим в центре пластинки, ось  $x$  направим параллельно заделанным краям, а ось  $y$  — параллельно опертым. Тогда можно доказать<sup>2)</sup>, что прогиб

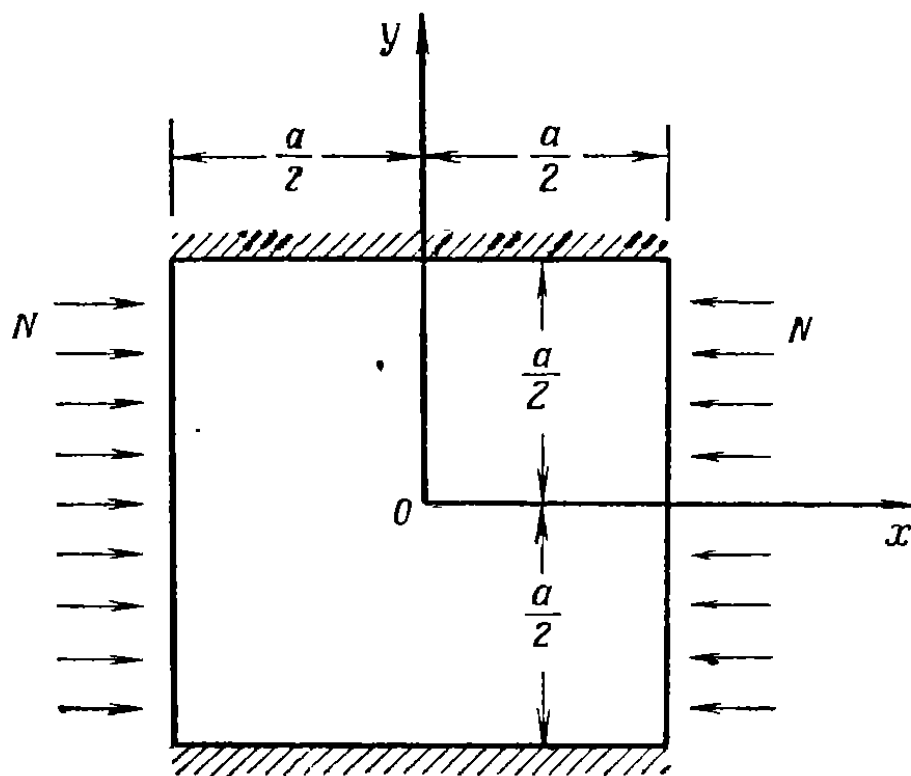
<sup>1)</sup> Тимошенко S., Theory of Plates and Shells, p. 228.

<sup>2)</sup> Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М.—Л., 1946, стр. 302 и 308.

пластинки  $w$  в точке  $(x, y)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla^4 w + \frac{N}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (9.1)$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость пластинки. Мы найдем сейчас наименьшее значение  $N$ , при котором пластинка потеряет свою плос-



Фиг. 54.

кую форму, т. е. при котором  $w$  не будет тождественно равно нулю. Граничные условия таковы:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \frac{a}{2} \quad (\text{на опертых краях}), \quad (9.2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm \frac{a}{2} \quad (\text{на заделанных краях}). \quad (9.3)$$

Уравнение (9.1) приводится к безразмерной форме подстановкой

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}.$$

Если еще умножить его на  $a^4$ , то оно примет следующий вид:

$$\nabla^4 w + \frac{Na^2}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad (9.4)$$

где  $\nabla^4 w$  берется относительно  $\xi$  и  $\eta$ . Разобьем пластинку на квадратные ячейки со стороной  $1/n$ . Умножив (9.4) на  $h^4 = 1/n^4$  и заменив

$h^4 \nabla^4 w$  и  $\partial^2 w / \partial \xi^2$  разностными операторами, согласно фиг. 35, в и равенству (1.2) соответственно, получим следующее разностное уравнение:

$$+ \left(\frac{k}{n^2}\right) (1 - 2 - 1) = 0, \quad (9.5)$$

где

$$k = \frac{Na^2}{D}. \quad (9.6)$$

Применяя равенство (9.5) к каждой из внутренних узловых точек, мы приходим к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых смещений  $w_i$ . Ненулевое решение этой системы существует тогда и только тогда, когда детерминант ее равен нулю. Таким образом, наименьшее значение  $N$ , обращающее детерминант системы (9.5) в нуль, есть в то же время и наименьшее критическое значение сжимающей нагрузки.

Для того чтобы равенство (9.5) имело смысл для внутренних узловых точек пластинки, лежащих вблизи границы, нужно связать значения  $w$  в этих точках с фиктивными значениями  $w$  в узловых точках, лежащих вблизи границы *вне* пластинки. Эта связь осуществляется с помощью граничных условий. Так, из равенств (9.2), согласно равенствам (1.1) гл. IV, получим

$$w_i = 0; \quad w_l = -w_r \quad \text{при} \quad \xi = \pm \frac{1}{2}. \quad (9.7)$$

Аналогично, из (9.3) имеем

$$w_i = 0; \quad w_a = w_b \quad \text{при} \quad \eta = \pm \frac{1}{2}. \quad (9.8)$$

Начнем со случая  $n = 2$  (фиг. 55). Согласно (9.5) найдем  $(-w_0 + w_0 - w_0 + w_0) + 2(0) - 8(0) + 20w_0 +$

$$+ \frac{k_2}{4} (0 - 2w_0 + 0) = 0,$$

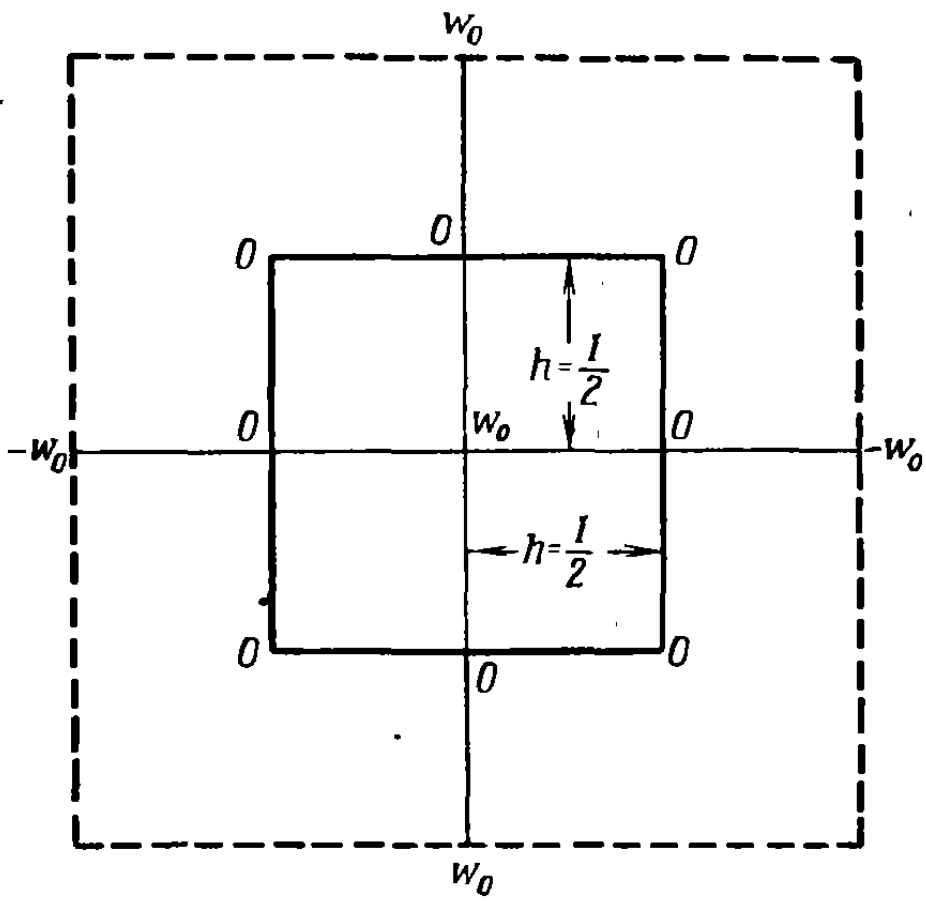
или

$$w_0 \left(20 - \frac{k_2}{2}\right) = 0.$$

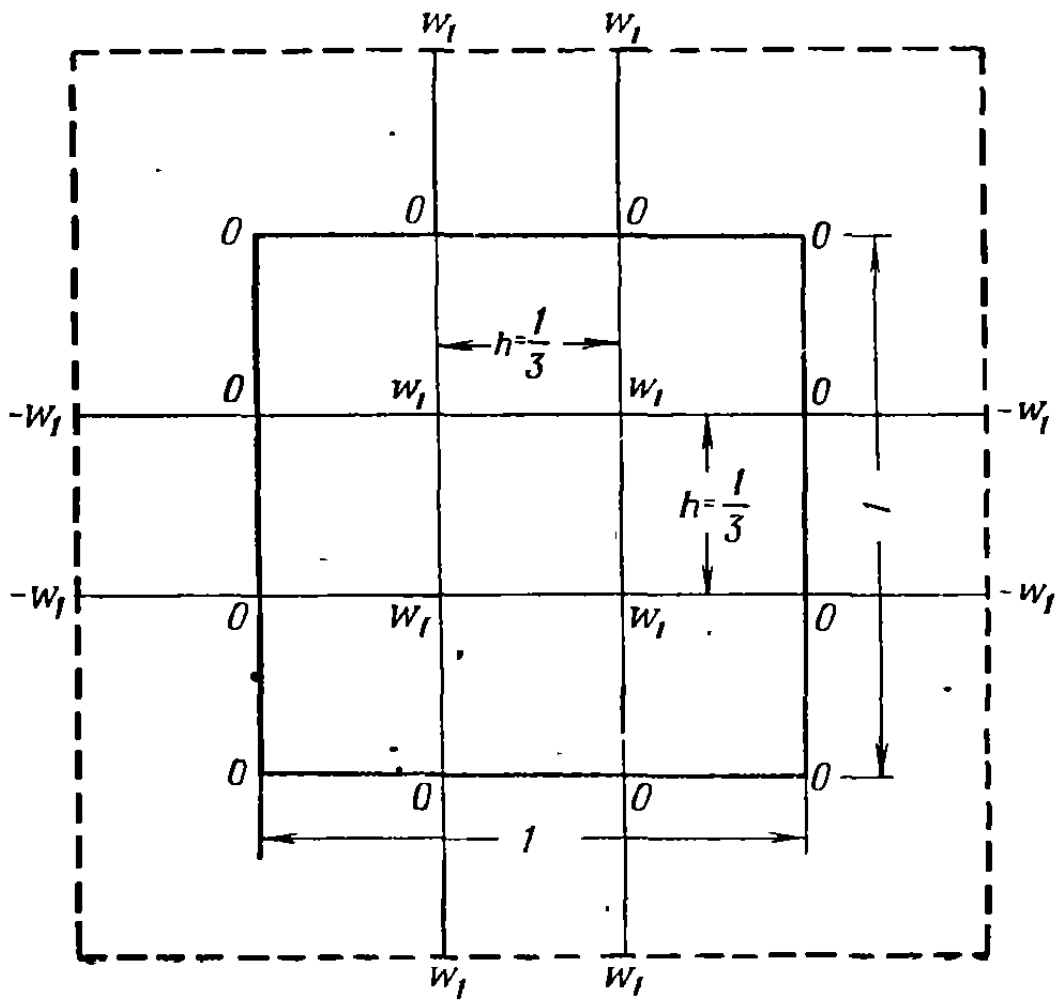
Отсюда

$$k_2 = 40 = 4,053 \pi^2 \quad (e = + 47,3 \%). \quad (a)$$





Фиг. 55.



Фиг. 56.

(Погрешность вычислена относительно значения  $k = 7,69 \pi^2$ , найденного Тимошенко<sup>1)</sup> при коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,25$ .)

При  $n = 3$  (фиг. 56) получим

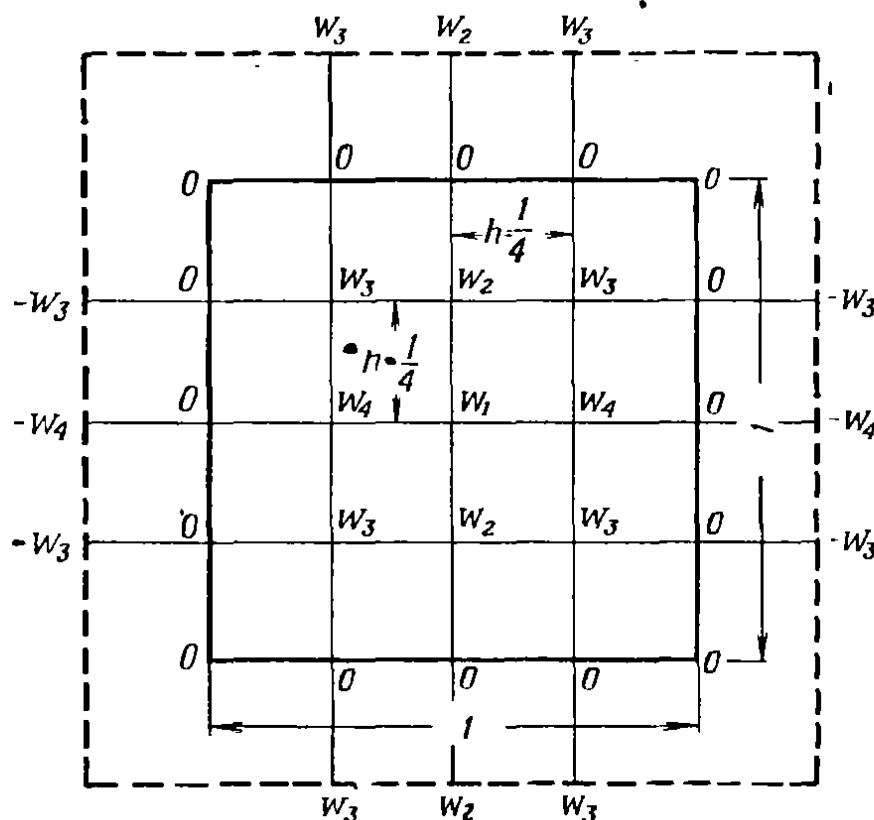
$$\begin{aligned} & (-w_1 + w_1 + 0 + 0) + 2(0 + 0 + 0 + w_1) - \\ & - 8(0 + 0 + w_1 + w_1) + 20w_1 + \frac{k_3}{9}(0 - 2w_1 + w_1) = 0, \end{aligned}$$

или

$$w_1 \left( 6 - \frac{k_3}{9} \right) = 0,$$

откуда

$$k_3 = 54 = 5,471 \pi^2 \quad (e = 28,9 \%). \quad (6)$$



Фиг. 57.

При  $n = 4$  (фиг. 57) получается система уравнений табл. 59, в которой

$$\gamma = \frac{k}{16}.$$

Приравняем нулю определитель этой системы и вычислим наименьший корень получившегося при этом уравнения:  $\gamma = 3,9884$ . Таким образом,

$$k_4 = 63,814 = 6,466 \pi^2 \quad (e = 16,0 \%). \quad (B)$$

<sup>1)</sup> Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М.—Л., 1946, стр. 308.

Таблица 59

$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$c$
$20 - 2\gamma$	$-16$	$8$	$2\gamma - 16$	$0$
$-8$	$22 - 2\gamma$	$2\gamma - 16$	$4$	$0$
$2$	$\gamma - 8$	$22 - 2\gamma$	$-8$	$0$
$\gamma - 8$	$4$	$-16$	$20 - 2\gamma$	$0$

Применим к найденным приближенным значениям  $k$  экстраполяцию порядка  $h^2$  (гл. II, § 9):

$$k_{2;3} = 6,605 \pi^2 (e = +14\%); \quad k_{3;4} = 7,744 \pi^2 (e = -0,65\%).$$

Заметим, что  $k_{2;3;4} = 8,1252 \pi^2$ . Грубость этого приближения ( $e = 5,66\%$ ) показывает, что погрешность не выражается формулой вида (9.2)<sup>1)</sup> гл. II.

### § 10. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ КОМБИНАЦИЕЙ МЕТОДОВ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

При решении уравнений в частных производных часто бывает выгодным комбинировать классический метод разделения переменных с современными численными методами. Эту смешанную методику мы продемонстрируем на задаче об изгибе, разобранный в предыдущем параграфе.

Так как наша квадратная пластинка оперта с двух противоположных сторон, то естественно искать прогиб  $w$  в виде

$$w(x, y) = Y(y) \cdot \cos \frac{\pi}{a} x, \quad (10.1)$$

где  $Y$  есть неизвестная функция лишь одного  $y$ .

Функция (10.1) удовлетворяет граничным условиям (9.2) на открытых краях. Подставив ее в уравнение равновесия пластинки (9.1), мы сведем его тем самым к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно  $Y$ :

$$Y^{IV} - 2 \frac{\pi^2}{a^2} Y'' + \left( \frac{\pi^4}{a^4} - \frac{N \pi^2}{D a^2} \right) Y = 0. \quad (10.2)$$

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 79. — Прим. перев.

Подстановка (10.1) в граничные условия (9.3) на заделанных краях даст нам следующие граничные условия для  $Y$ :

$$Y = 0; \quad Y' = 0 \quad \text{при } y = \pm \frac{a}{2}. \quad (10.3)$$

Таким образом, задача о собственных значениях (9.1), (9.2), (9.3) для уравнения в частных производных свелась к задаче о собственных значениях (10.2), (10.3) для обыкновенного дифференциального уравнения.

Для того чтобы привести эту задачу к безразмерной форме, положим

$$y = a\eta;$$

при этом получим:

$$\frac{d^4 Y}{d\eta^4} - 2\pi^2 \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \left( \pi^4 - \pi^2 \frac{Na^2}{D} \right) Y = 0; \quad (10.4)$$

$$Y(\eta) = 0; \quad \frac{dY}{d\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = \pm \frac{1}{2}. \quad (10.5)$$

Умножая (10.4) на  $h^4 = 1/n^4$  и выражая все входящие в это уравнение производные  $Y$  через центральные разности, мы придем к следующему конечно-разностному соотношению:

$$Y_{bb} - \left( \frac{2\pi^2}{n^2} + 4 \right) Y_b + \left( 6 + \frac{4\pi^2}{n^2} + \frac{\pi^4}{n^4} - \frac{\pi^2 k}{n^4} \right) Y_i - \left( \frac{2\pi^2}{n^2} + 4 \right) Y_a + Y_{aa} = 0, \quad (10.6)$$

где  $k$  определяется формулой (9.6). Граничные условия записываются при этом следующим образом:

$$Y_a = Y_b \quad \text{при } \eta = \pm \frac{1}{2}. \quad (10.7)$$

Пусть сначала  $n = 2$  (фиг. 58,а, ось  $y$  для удобства расположена горизонтально). Тогда из (10.6) имеем:

$$Y_1 + 0 + \left( 6 + \frac{4\pi^2}{4} + \frac{\pi^4}{16} - \frac{\pi^2}{16} k_2 \right) Y_1 + 0 + Y_1 = 0.$$

Отсюда находим:

$$k_2 = 3,935\pi^2 \quad (e = +49\%). \quad (a)$$

Если  $n = 3$  (фиг. 58,б), то, согласно (10.6),

$$Y_1 + 0 + \left( 6 + \frac{4\pi^2}{9} + \frac{\pi^4}{81} - \frac{\pi^2}{81} k_3 \right) Y_1 - \left( \frac{2\pi^2}{9} + 4 \right) Y_1 + 0 = 0,$$

откуда

$$k_3 = 5,318\pi^2 \quad (e = +31\%). \quad (б)$$

При  $n = 4$  (фиг. 58, в) мы получим уже не одно, а два уравнения:

$$Y_1 + 0 + \left(6 + \frac{4\pi^2}{16} + \frac{\pi^4}{256} - \frac{\pi^2}{256} k_4\right) Y_1 - \left(\frac{2\pi^2}{16} + 4\right) Y_2 + Y_1 = 0,$$

$$0 - \left(\frac{2\pi^2}{16} + 4\right) Y_1 + \left(6 + \frac{4\pi^2}{16} + \frac{\pi^4}{256} - \frac{\pi^2}{256} k_4\right) Y_2 - \left(\frac{2\pi^2}{16} + 4\right) Y_1 + 0 = 0.$$

Наименьший корень определителя этой системы равен

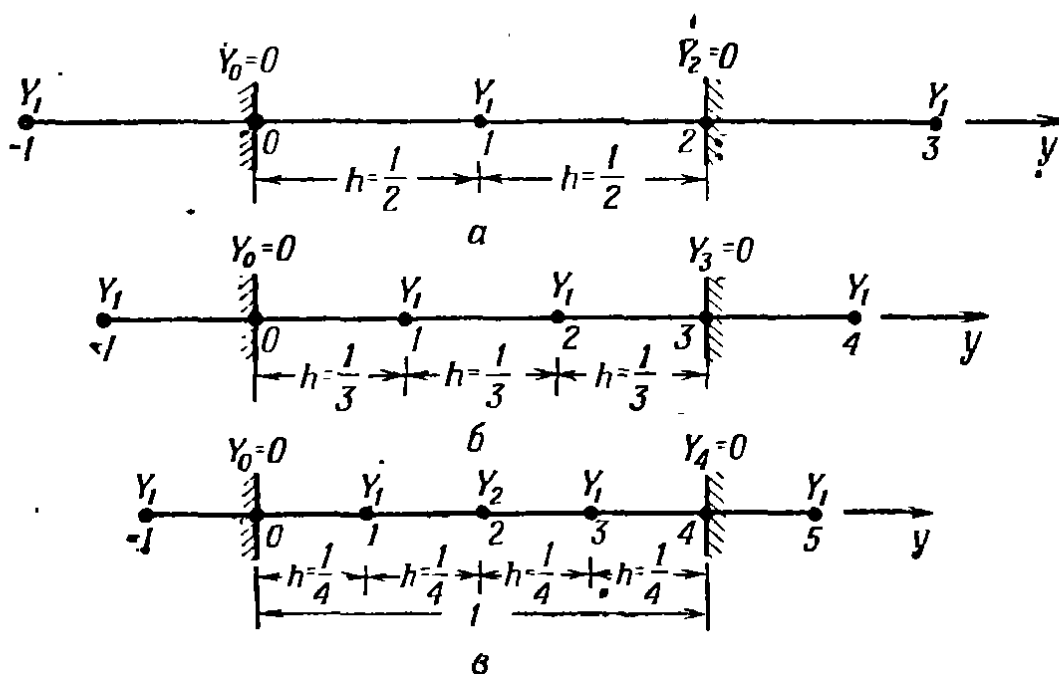
$$k_4 = 6,252 \pi^2 \quad (e = +19\%). \quad (в)$$

Значения (а), (б) и (в) можно уточнить путем экстраполяции порядка  $h^2$ :

$$k_{2,3} = 7,45 \pi^2 \quad (e = +3,1\%);$$

$$k_{3,4} = 7,797 \pi^2 \quad (e = -1,4\%).$$

Таким образом, метод разделения переменных дает результат того же порядка точности, что и метод конечных разностей по двум



Ф и г. 58.

переменным (§ 9). Однако метод § 9 требует для решения задачи существенно большего количества труда. Так, например, сейчас при определении  $k_4$  мы имели дело с определителем второго порядка, а ранее — четвертого.

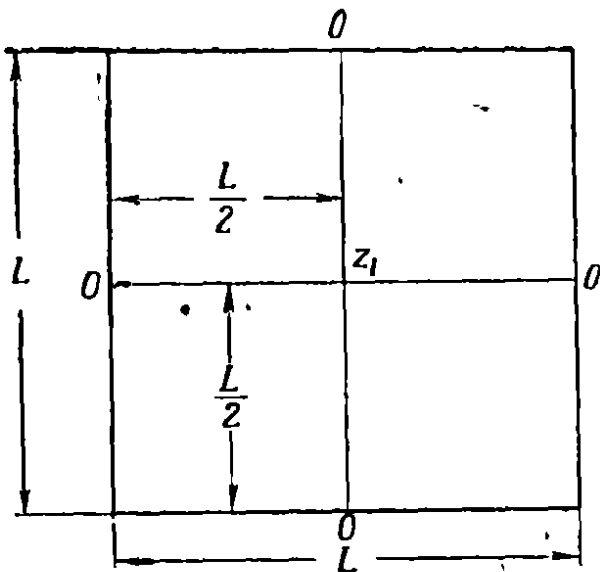
### § 11. КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ

Технику, которой мы пользовались в предыдущих параграфах для решения двумерных задач об изгибе, можно применить и к двумерным задачам о колебаниях.

Дифференциальное уравнение колебаний мембраны получается из уравнения равновесия (5.1), если считать в этом уравнении

давление  $p$  равным нулю и добавить, кроме того, силы инерции —  $m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ , где  $m$  — масса мембраны на единицу площади:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{m}{S} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \quad (11.1)$$



Для отыскания собственных частот мембраны  $\omega$  предположим, что функция  $z(x, y, t)$  описывает гармонические колебания

$$z(x, y, t) = Z(x, y) \sin \omega t \quad (a)$$

и подставим (a) в (11.1). После деления на  $\sin \omega t$  получим

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{m\omega^2}{S} Z = 0. \quad (11.2)$$

Мы будем решать задачу о колебаниях квадратной мембраны со стороной  $L$ , закрепленной по краям. Чтобы привести эту задачу к безразмерной форме, положим, как обычно,

$$x = \xi L, \quad y = \eta L.$$

В новых переменных уравнение (11.2) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} + K^2 Z = 0, \quad (11.3)$$

где

$$K = \frac{mL^2}{S} \omega^2. \quad (11.4)$$

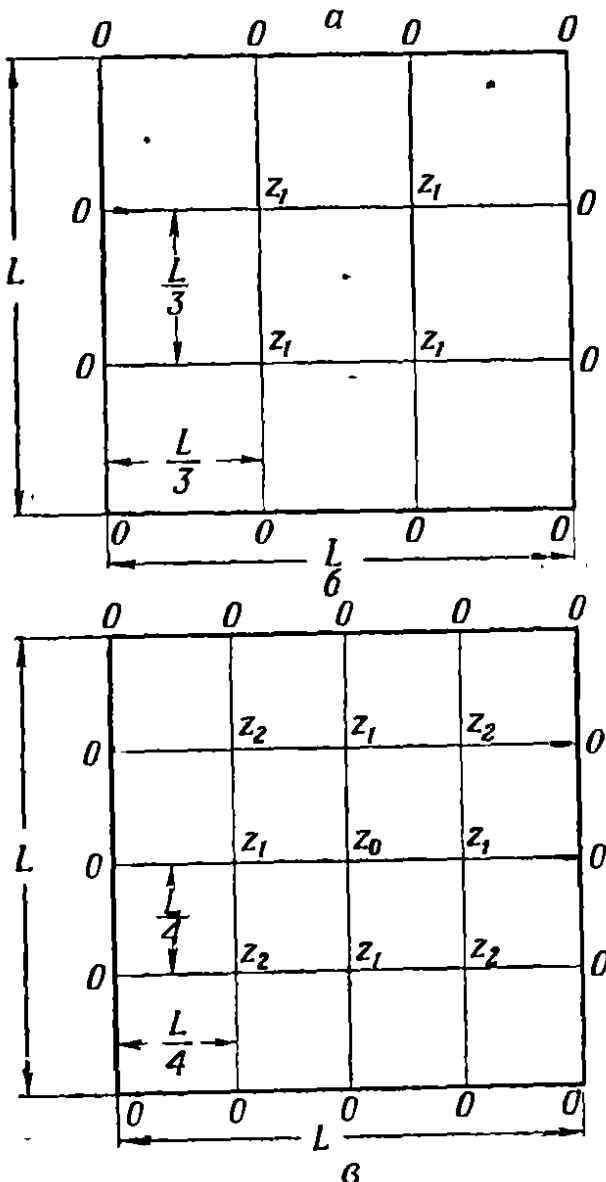
Уравнение (11.3) запишем в разностной форме, согласно оператору фиг. 35,б (положив  $h^2 = 1/n^2$ ):

$$Z_a + Z_b + Z_r + Z_l + \left(\frac{K}{n^2} - 4\right) Z_i = 0. \quad (11.5)$$

Граничные условия описываются равенством

$$Z = 0 \text{ на границе.} \quad (11.6)$$

При  $n = 2$  и  $n = 3$  (фиг. 59,а и



Фиг. 59.

59,б) из (11.5) получим:

$$n = 2: \left(\frac{K_2}{4} - 4\right) Z_1 = 0; \quad K_2 = 16 \quad (e = -19\%),$$

$$n = 3: \quad Z_1 + 0 + Z_1 + 0 + \left(\frac{K_3}{9} - 4\right) Z_1 = 0; \quad K_3 = 18 \\ (e = -9\%).$$

При  $n = 4$  (фиг. 59,в)  $K$  надлежит определить из следующего уравнения:

$$\begin{vmatrix} \frac{K_4}{16} - 4 & 2 & 0 \\ 2 & \frac{K_4}{16} - 4 & 1 \\ 0 & 4 & \frac{K_4}{16} - 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Его наименьший корень равен

$$K_4 = 18,75 \quad (e = -5\%).$$

Экстраполированные значения  $K$  равны

$$K_{2,3} = 19,60 \quad (-0,7\%); \quad K_{3,4} = 19,71 \quad (-0,15\%);$$

$$K_{2,3,4} = 19,75 \quad (+0,051\%).$$

Истинное значение  $K = 19,739$ .

## § 12. УЗЛОВЫЕ ТОЧКИ ВБЛИЗИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЦ

Во всех предыдущих задачах рассматривались только прямоугольные области. Благодаря этому и внутренние и граничные узловые точки удавалось расположить в вершинах некоторой прямоугольной сетки, и, таким образом, они оказывались равноотстоящими как в направлении  $x$ , так и в направлении  $y$ . Если же мы разбиваем на прямоугольные ячейки двумерную область, ограниченную кривыми линиями, то граничные узловые точки (или некоторые из них) могут не попасть в вершины ячеек. Для узловых точек, соседних с ними, нужны особые формулы.

Рассмотрим, например, двумерную задачу о стационарном распределении тепла в пластинке, представляющей собой квадрат со стороной  $L$ , два угла которого срезаны дугами окружности радиуса  $L/2$  (фиг. 60). Температура  $u$  этой пластинки удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 u = 0$  (см. § 3). В точках (1), (2) и (3) это уравнение можно заменить разностным, согласно оператору фиг. 35, б. Точка же (4) лежит на различных расстояниях от своих соседей, и поэтому в ней нужно написать особое разностное уравнение.

Получить это уравнение можно из равенства (2.3) гл. II, которое в нашем случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \frac{2}{\alpha(\alpha+1)} [\alpha u_l - (1+\alpha)u_i + u_r] + O(h), \quad (a)$$

$$\alpha = \frac{x_r - x_i}{h} = \frac{x_5 - x_4}{L/4}. \quad (б)$$

В направлении  $y$  имеем, аналогично,

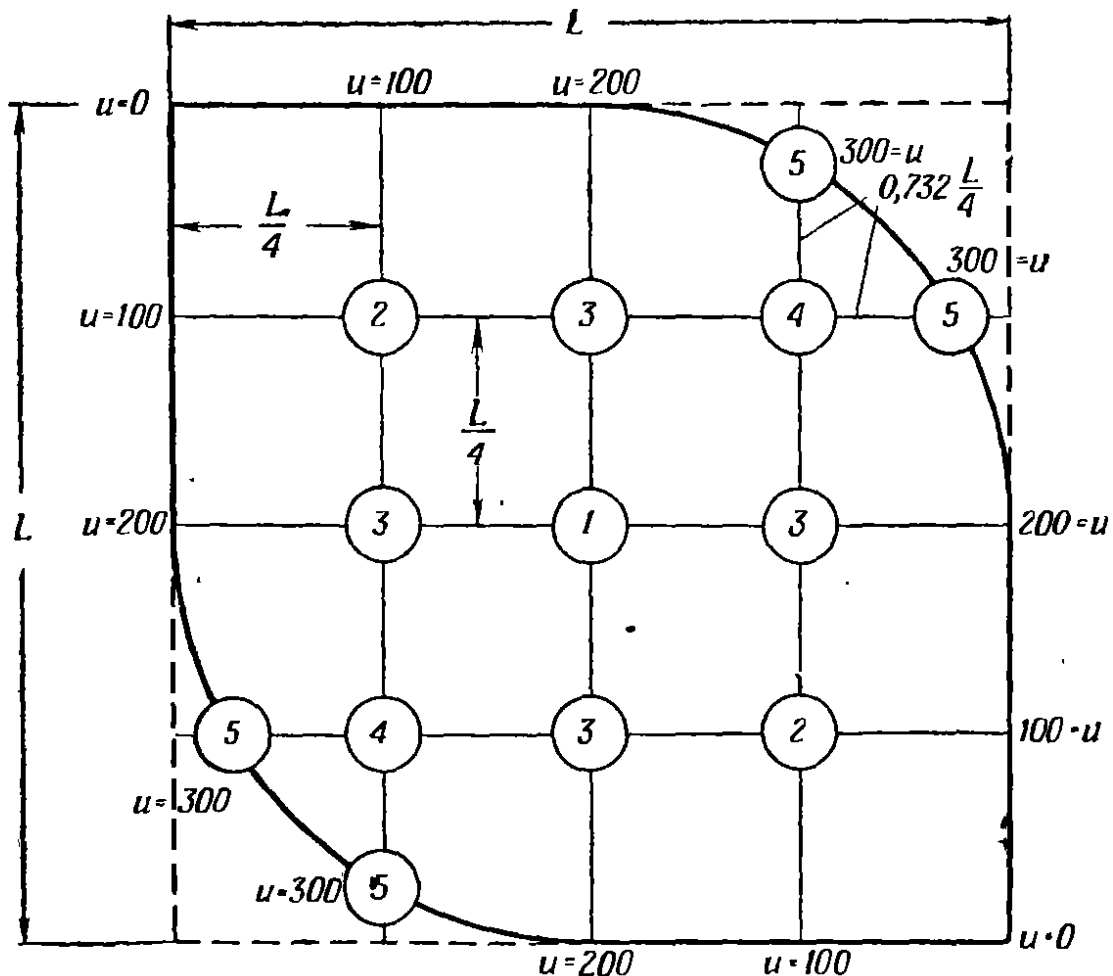
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \frac{2}{\beta(\beta+1)} [\beta u_b - (1+\beta)u_i + u_a] + O(h), \quad (в)$$

$$\beta = \frac{y_a - y_i}{h} = \frac{y_5 - y_4}{L/4}. \quad (г)$$

Подставляя (а) и (в) в оператор  $\nabla^2 u$ , получим:

$$\frac{h^2}{2} \alpha(1+\alpha)\beta(1+\beta) \nabla^2 u = \beta(1+\beta) [\alpha u_l - (1+\alpha)u_i + u_r] + \alpha(1+\alpha) [\beta u_b - (1+\beta)u_i + u_a]. \quad (12.1)$$

Этот оператор изображен на фиг. 61.

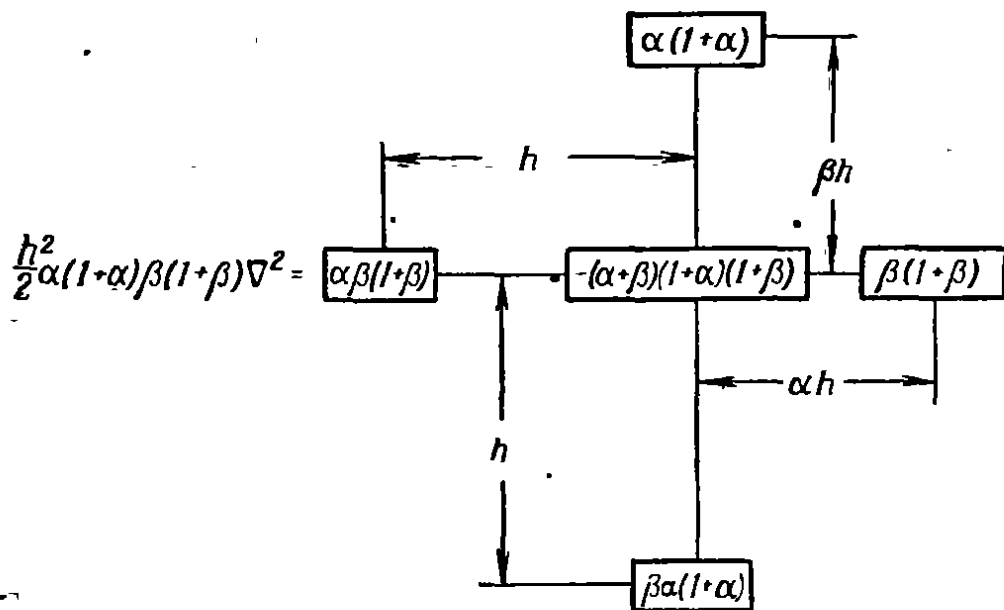


Фиг. 60.

В нашей задаче (см. фиг. 60)  $\alpha = \beta$  и оператор фиг. 61 принимает форму фиг. 62.



Если в точке (4) воспользоваться этим оператором, положив в нем  $\alpha = \sqrt{3} - 1 = 0,732$ , а в точках (1), (2) и (3)—оператором фиг. 35,б,

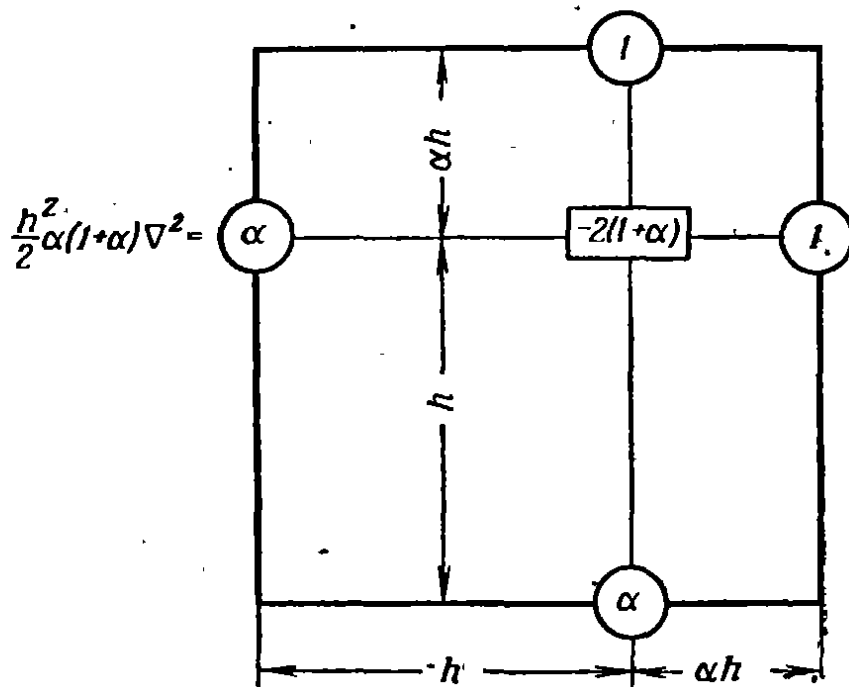


Фиг. 61. Оператор  $\nabla^2$  для неравноотстоящих точек.

то мы получим систему линейных уравнений относительно  $u_i$ , приведенную в табл. 60. Эта система имеет следующее решение:

$$u_1 = 203,7; \quad u_2 = 151,9; \quad u_3 = 203,7; \quad u_4 = 259,3.$$

Разностные уравнения, примененные нами для решения задачи, имеют разный порядок точности внутри области и на границе: погрешность



Фиг. 62.

при замене  $\nabla^2$  оператором фиг. 35,в есть  $O(h^3)$ , а оператором фиг. 62.—  $O(h)$ . Для унификации точности разностной схемы можно вблизи границы

Таблица 60

Точка	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$c$
1	-4	0	4	0	0
2	0	-4	2	0	-200
3	1	1	-4	1	-200
4	0	0	2	-1,464	-600

воспользоваться равенством (3.6) гл. II вместо равенства (2.3) гл. II. Однако в рассматриваемой задаче это изменение не повлияет на первые четыре знака  $u_i$  (см. задачу 31 на стр. 237).

Разностные формулы, аналогичные тем, которые мы использовали вблизи границы, часто применяются в задачах, приводящих к так называемым *неравномерным сеткам*, т. е. к таким, ячейки которых имеют разные размеры в различных частях области определения. Так как малые размеры части ячеек позволяют получить большую точность в тех точках, где она нужна, то такие сетки применяются при больших градиентах искомой функции. Подробное рассмотрение неравномерных сеток выходит за рамки этой книги.

### § 13. ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Квадратная пластинка со стороной  $L$  имеет в начальный момент времени температуру, равную нулю. На двух ее противоположных сторонах поддерживается температура, равная нулю, а на двух других  $u_0$  (фиг. 63). Требуется определить температуру  $u(x, y, t)$  внутренних точек пластинки.

Можно доказать<sup>1)</sup>, что функция  $u(x, y, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{k}{c\delta} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (13.1)$$

где  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $c$  — теплоемкость и  $\delta$  — плотность (масса на единицу площади). Кроме того, должны выполняться

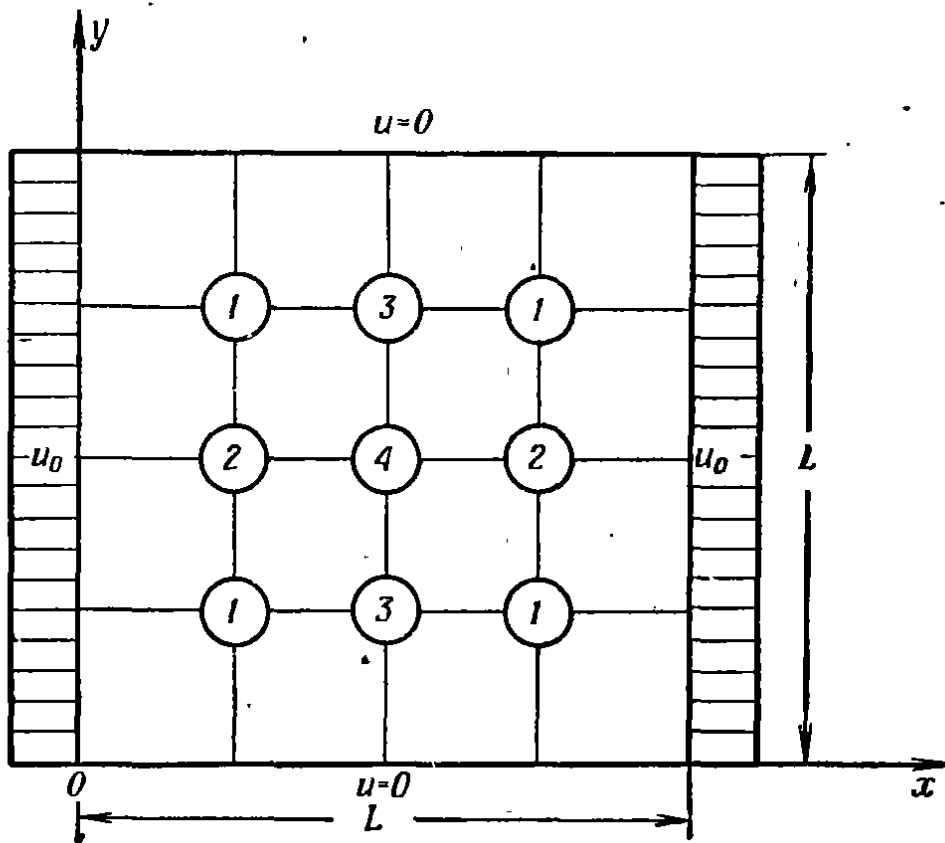
<sup>1)</sup> Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 2, М.—Л., 1953, стр. 332—334. — Прим. перев.

следующие условия:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= u(L, y, t) = u_0, \\ u(x, 0, t) &= u(x, L, t) = 0, \\ u(x, y, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Эта смешанная краевая задача (с начальными условиями по времени и с граничными — по пространству) может быть решена методом конечных разностей.

Разобьем пластинку на квадратные ячейки со стороной  $h = L/n$  и выберем интервал  $\Delta t = \tau$ . Оператор Лапласа  $\nabla^2 u$  заменим центральным



Фиг. 63.

разностным оператором фиг. 35,б, а производную  $du/dt$  — разностью, взятой вперед. Тогда (13.1) приведет к следующему виду:

$$\begin{aligned} u_a(t) + u_b(t) + u_r(t) + u_l(t) - 4u_i(t) &= \\ &= \frac{\delta c h^2}{k \tau} [u_i(t + \tau) - u_i(t)]. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Если интервал  $\tau$  определить из условия  $\delta c h^2 / k \tau = 4$ , т. е. если положить<sup>1)</sup>

$$\tau = \frac{\delta c}{4k} h^2, \quad (13.4)$$

1) Можно доказать, что если  $\tau$  и  $h$  стремятся к нулю так, что  $\tau > \delta c h^2 / 4k$ , то решение разностного уравнения не сходится к решению (13.1).

то из (13.3) получим

$$u_i(t + \tau) = \frac{1}{4} [u_a(t) + u_b(t) + u_r(t) + u_l(t)]. \quad (13.5)$$

Таким образом, температура точки  $i$  в момент  $t + \tau$  есть среднее арифметическое температур четырех соседних с  $i$  точек в момент  $t$ . Чем точнее мы хотим знать зависимость температуры от времени, тем меньше следует выбирать  $\tau$ . Но из равенства (13.4) видно, что вместе с уменьшением  $\tau$  уменьшается и  $h$ , т. е. увеличивается число узловых точек. Поэтому, если мы хотим достаточно точно вычислить значения  $u$  при малых  $t$ , следует выбрать густую сетку.

Таблица 61

①  $x = L/4$   
 $y = L/4$

②  $x = L/4$   
 $y = L/2$

$n=t/\tau$	$u$	5000	$\infty$		$n=t/\tau$	$u$	6250	$\infty$
0	0	4995	19		0	0	6242	19
1	2500	4992	18		1	2500	6240	18
2	3125	4990	17		2	3750	6235	17
3	3750	4985	16		3	4375	6230	16
4	4062	4980	15		4	5000	6220	15
5	4375	4970	14		5	5312	6210	14
6	4531	4960	13		6	5625	6191	13
7	4687	4941	12		7	5781	6171	12
8	4765	4921	11		8	5937	6132	11
9	4843	4882	10		9	6015	6093	10
			$n = t/\tau$					$n = t/\tau$

$$\textcircled{3} \quad \begin{matrix} x = L/2 \\ y = L/4 \end{matrix}$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{matrix} x = L/2 \\ y = L/2 \end{matrix}$$

$n=t/\tau$	$u$	3750	$\infty$		$n=t/\tau$	$u$	5000	$\infty$
0	0	3742	19		0	0	4990	19
1	0	3741	18		1	0	4985	18
2	1250	3735	17		2	1250	4980	17
3	1875	3730	16		3	2500	4970	16
4	2500	3720	15		4	3125	4960	15
5	2812	3710	14		5	3750	4941	14
6	3125	3691	13		6	4062	4921	13
7	3281	3671	12		7	4375	4882	12
8	3437	3632	11		8	4531	4843	11
9	3515	3593	10		9	4687	4765	10
			$n = t/\tau$					$n = t/\tau$

Квадратная пластинка, рассматриваемая в задаче, была разбита на ячейки со стороной  $h = L/4$ . Следовательно, интервал  $\tau$  равен

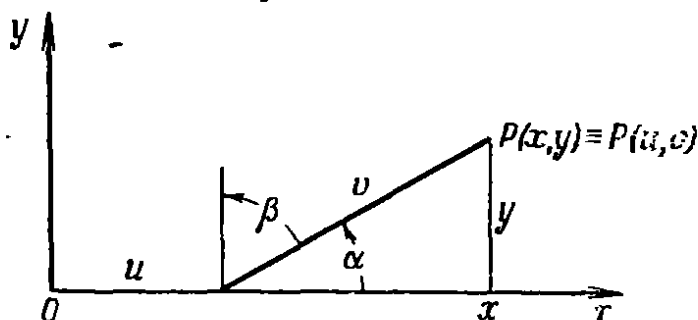
$$\tau = \frac{\delta c L^2}{64k}. \quad (\text{a})$$

Начальная температура на сторонах  $x = 0$  и  $x = L$  была взята равной 10 000. Значения температуры внутри пластинки в поздние моменты времени приведены в табл. 61. Вычисления проводились по формуле (13.5) для одной четверти пластинки с учетом симметрии относительно прямых  $x = L/2$  и  $y = L/2$ . Пока  $t \leq 9\tau$ , табл. 61

следует читать сверху вниз, а затем снизу вверх. Последнее значение температуры, соответствующее  $t = \infty$ , представляет собой решение задачи о стационарном распределении тепла. Это решение было найдено методом релаксации в § 3.

#### § 14. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА В КОСОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Разностными операторами в прямоугольных координатах удобно пользоваться при решении задач о прямоугольных областях. Если же рассматриваемая область имеет форму параллелограмма, бывает удобно прибегать к координатам, оси которых параллельны сторонам этого параллелограмма, т. е. к *косоугольным координатам*.



Фиг. 64. Косоугольные координаты.

Точка плоскости с прямоугольными координатами  $(x, y)$  (фиг. 64) описывается косоугольными координатами  $(u, v)$ , связанными с  $x$  и  $y$  следующими соотношениями:

$$x = u + v \cos \alpha; \quad y = v \sin \alpha, \quad (14.1)$$

где  $\alpha$  — острый угол между осями.

Частные производные  $x, y$  по  $u, v$  равны

$$x_u = 1; \quad x_v = \cos \alpha; \quad y_u = 0; \quad y_v = \sin \alpha. \quad (a)$$

Рассмотрим теперь функцию  $z(u, v)$ , в которой  $u, v$  связаны с  $x, y$  соотношениями (14.1). Первые производные  $z$  по  $u$  и  $v$  получаются по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\begin{aligned} z_u &= z_x x_u + z_y y_u = z_x, \\ z_v &= z_x x_v + z_y y_v = z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha. \end{aligned}$$

Вторые производные можно вычислить, возведя операторы дифференцирования по  $u$  и по  $v$  в квадрат и перемножив их:

$$z_{uu} = z_{xx}, \quad (б)$$

$$z_{vv} = z_{xx} \cos^2 \alpha + 2z_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + z_{yy} \sin^2 \alpha, \quad (в)$$

$$z_{uv} = z_{xx} \cos \alpha + z_{xy} \sin \alpha. \quad (г)$$

Подставляя (б) и (г) в (в), получаем:

$$z_{rv} = z_{uu} \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha (z_{uv} - z_{uu} \cos \alpha) + z_{yy} \sin^2 \alpha.$$

Поэтому  $z_{yy}$  выразится через  $z_{uu}$ ,  $z_{uv}$ ,  $z_{vv}$  формулой

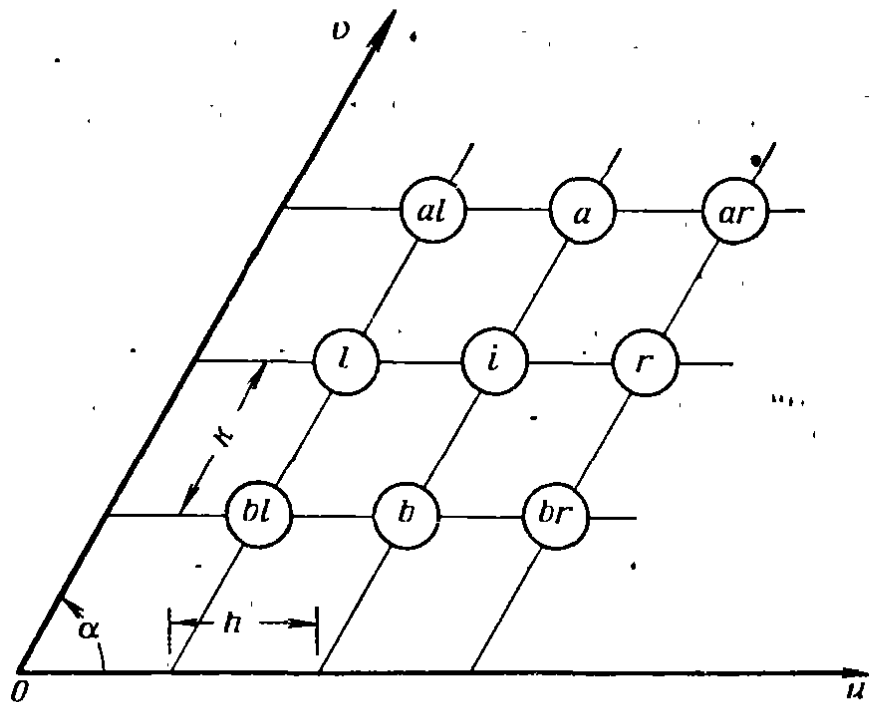
$$z_{yy} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (z_{vv} - 2z_{uv} \cos \alpha + z_{uu} \cos^2 \alpha),$$

и оператор Лапласа в косоугольных координатах, согласно (6), примет следующий вид:

$$(\sin^2 \alpha) \nabla^2 z = z_{uu} - 2z_{uv} \cos \alpha + z_{vv}. \quad (14.2)$$

При  $\alpha = \pi/2$  равенство (14.2) сводится к обычному оператору Лапласа  $\nabla^2 z = z_{xx} + z_{yy}$ .

Для преобразования дифференциального оператора (14.2) в разностный заменим производные  $z_{uu}$ ,  $z_{uv}$  и  $z_{vv}$  разностными выраже-



Фиг. 65. Ячейки в косоугольных координатах.

ниями фиг. 12,а. Тогда в обозначениях фиг. 65

$$h^2 z_{uu} = z_r - 2z_i + z_l, \quad k^2 z_{vv} = z_a - 2z_i + z_b,$$

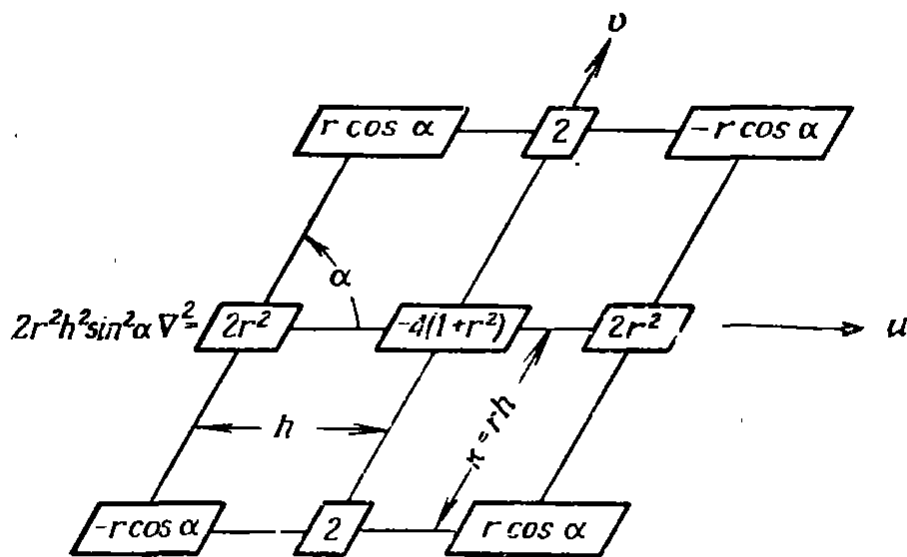
$$4h k z_{uv} = z_{ar} - z_{br} - z_{al} + z_{bl},$$

и оператор  $\nabla^2$  принимает вид фиг. 66<sup>1)</sup>, где  $r = k/h$ .

Оператор фиг. 66 можно использовать для определения прогиба  $w$  в центре ромбической пластинки. Пластинку будем предполагать

<sup>1)</sup> Погрешность при определении операторов  $\nabla^2$  и  $\nabla^4$  с помощью схем фиг. 66, 67, 68, 71, 72, 76 и 77 есть  $O(h^2)$ . — Прим. ред.

равномерно нагруженной, а края ее — опертymi. Сторону ромба обозначим через  $a$ , а острый угол выберем равным  $\alpha = 60^\circ$ . Можно



Фиг. 66.  $\nabla^2$  в косоугольных координатах.

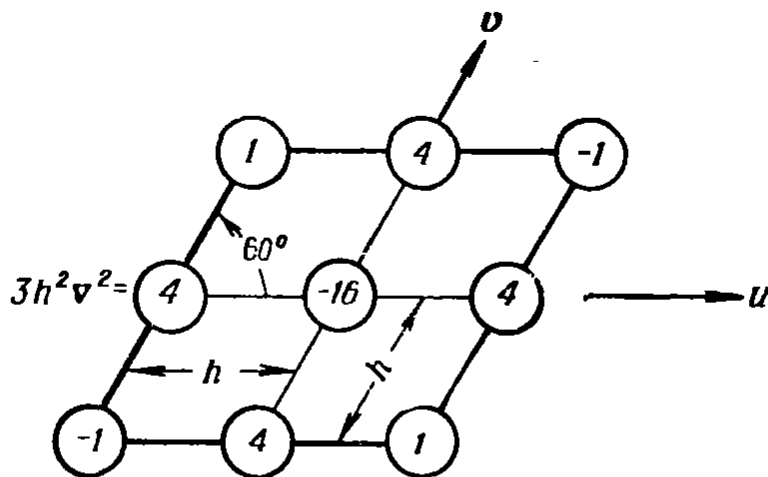
доказать, что эта задача сводится к интегрированию двух уравнений <sup>1)</sup>:

$$\nabla^2 M = -q, \quad \nabla^2 \omega = -\frac{M}{D} \quad (д)$$

с граничными условиями

$$M = 0, \quad \omega = 0 \quad \text{на границе.} \quad (е)$$

Если  $\alpha = 60^\circ$  и  $r = 1$ , то оператор фиг. 66 сводится к опера-



Фиг. 67.

тору фиг. 67. При  $n = 2$ , т. е.  $h = a/2$ , мы найдем в центре пластинки, согласно первому из уравнений (д),

$$-\frac{16}{3(a/2)^2} M_0 = -q \quad \text{и, следовательно,} \quad M_0|_2 = \frac{3}{64} qa^2,$$

<sup>1)</sup> Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М.—Л., 1946. стр. 266 и след.

• Подробнее об этом см. в указании к задаче 13 в конце этой главы. — Прим. перев.



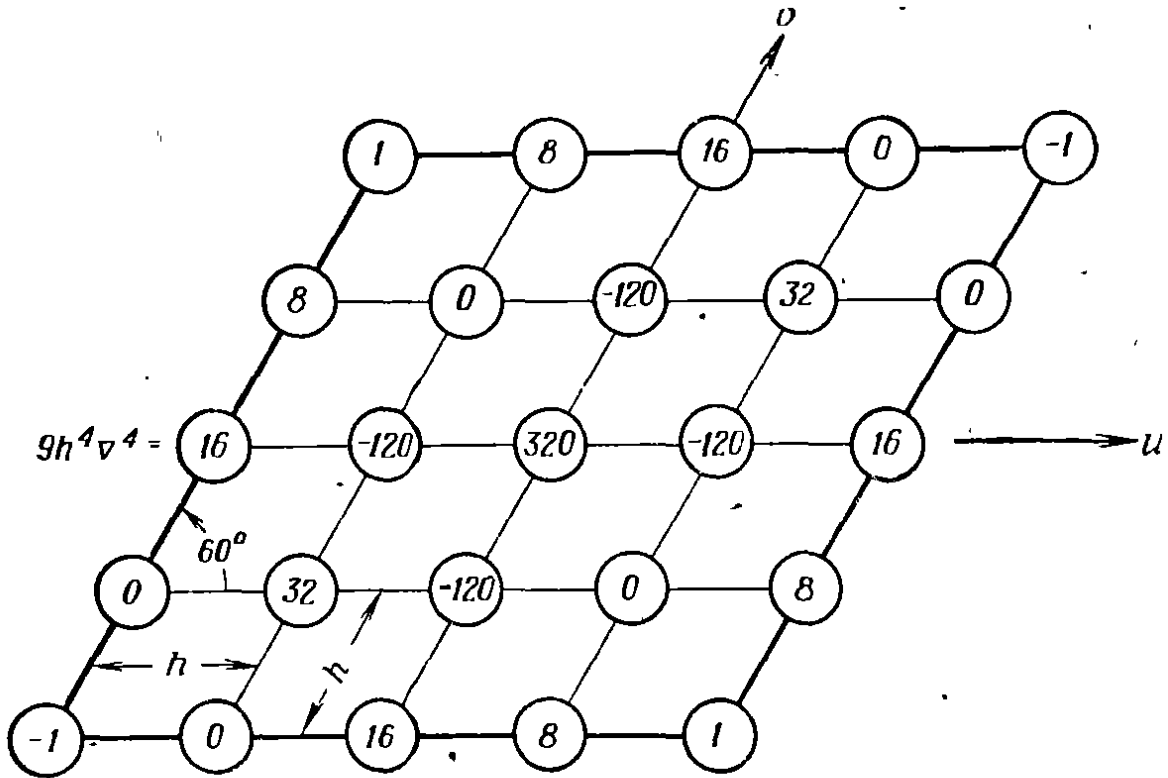
а согласно второму —

$$-\frac{16}{3(a/2)^2} \omega_0 = -\frac{3}{64} \frac{qa^2}{D} \text{ и, следовательно, } \omega_0|_2 = 0,00220 \frac{qa^4}{D}.$$

Полагая  $n = 4$  и решая соответствующую систему пяти уравнений, находим  $\omega_0|_4 = 0,00241 \frac{qa^4}{D}$ . Экстраполяция порядка  $h^2$  дает нам значение

$$\omega_0|_{2;4} = 0,00248 \frac{qa^4}{D}.$$

В каждом отдельном случае, зная разностную аппроксимацию



Ф и г. 68.  $\nabla^4$  в косоугольных координатах ( $\alpha = 60^\circ$ ,  $h = k$ ).

для  $\nabla^2$ , легко получить аппроксимацию для  $\nabla^4$ . Например, если  $\nabla^2$  имеет вид фиг. 67, то

$$9h^4 \nabla^4 z_i = (3h^2 \nabla^2)^2 z_i = (\nabla^2 z_{al} - \nabla^2 z_{ar} + \nabla^2 z_{br} - \nabla^2 z_{bl}) + + 4(\nabla^2 z_a + \nabla^2 z_b + \nabla^2 z_r + \nabla^2 z_l) - 16 \nabla^2 z_i,$$

и  $\nabla^4$  принимает форму, изображенную на фиг. 68.

### § 15. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

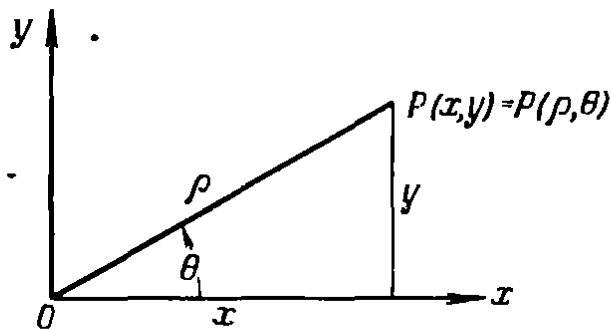
Полярными координатами (фиг. 69) удобно пользоваться в тех случаях, когда рассматриваемая область имеет форму круга. Формулы преобразования полярных координат к декартовым и обратно пишутся так:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, & y &= \rho \sin \theta, \\ \rho &= + (x^2 + y^2)^{1/2}, & \theta &= \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Отсюда получаем частные производные  $\rho$  и  $\theta$  по  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} \rho_x &= \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{x}{\rho^3} = \cos \theta; & \rho_y &= \frac{1}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y}{\rho^3} = \sin \theta; \\ \theta_x &= -\frac{y/x^2}{1 + (y/x)^2} = -\frac{y}{\rho^3} = -\frac{\sin \theta}{\rho}; \\ \theta_y &= \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{\rho^3} = \frac{\cos \theta}{\rho}. \end{aligned} \quad (a)$$

Рассмотрим функцию  $z(\rho, \theta)$ , в которой  $\rho$  и  $\theta$  выражаются через  $x$  и  $y$  по формулам (15.1). Частные производные  $z$  по  $x$  и по  $y$



Фиг. 69. Полярные координаты.

вычисляются по правилу дифференцирования сложных функций. Так как имеют место равенства (а), то

$$\begin{aligned} z_x &= z_\rho \rho_x + z_\theta \theta_x = z_\rho \cos \theta - z_\theta \frac{\sin \theta}{\rho}, \\ z_y &= z_\rho \rho_y + z_\theta \theta_y = z_\rho \sin \theta + z_\theta \frac{\cos \theta}{\rho}. \end{aligned} \quad (б)$$

Возведя оператор дифференцирования по  $x$  в квадрат, найдем

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( z_\rho \cos \theta - z_\theta \frac{\sin \theta}{\rho} \right) = \\ &= z_{\rho\rho} \cos^2 \theta + z_\rho \frac{\sin^2 \theta}{\rho} + z_{\theta\theta} \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} - 2z_{\rho\theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} + \\ &\quad + 2z_\theta \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho}. \end{aligned} \quad (в)$$

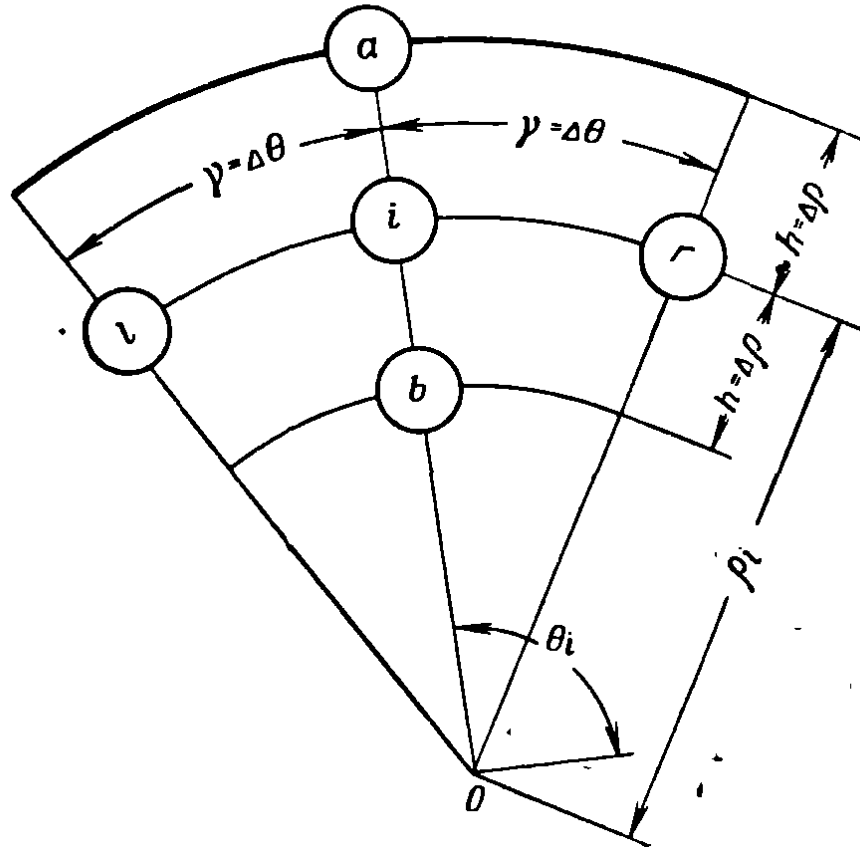
Чтобы получить  $z_{yy}$ , нужно возвести в квадрат оператор дифференцирования по  $y$ . Можно, однако, поступить проще — заменить в равенстве (в)  $\cos \theta$  на  $\sin \theta$ , а  $\sin \theta$  на  $-\cos \theta$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} z_{yy} &= z_{\rho\rho} \sin^2 \theta + z_\rho \frac{\cos^2 \theta}{\rho} + z_{\theta\theta} \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} + 2z_{\rho\theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\rho} - \\ &\quad - 2z_\theta \frac{\cos \theta \sin \theta}{\rho}. \end{aligned} \quad (г)$$

Сумма (в) и (г) даст нам выражение оператора Лапласа в полярных координатах:

$$\nabla^2 z = z_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} z_\rho + \frac{1}{\rho^2} z_{\theta\theta}. \quad (15.2)$$

Воспользовавшись оператором фиг. 12,а, мы найдем в обозначениях



Фиг. 70. Сетка в полярных координатах.

фиг. 70 следующие приближенные выражения для производных, входящих в (15.2):

$$z_{\rho\rho} = \frac{1}{h^2} (z_a - 2z_i + z_b),$$

$$z_\rho = \frac{1}{2h} (z_a - z_b),$$

$$z_{\theta\theta} = \frac{1}{\gamma^2} (z_r - 2z_i + z_l),$$

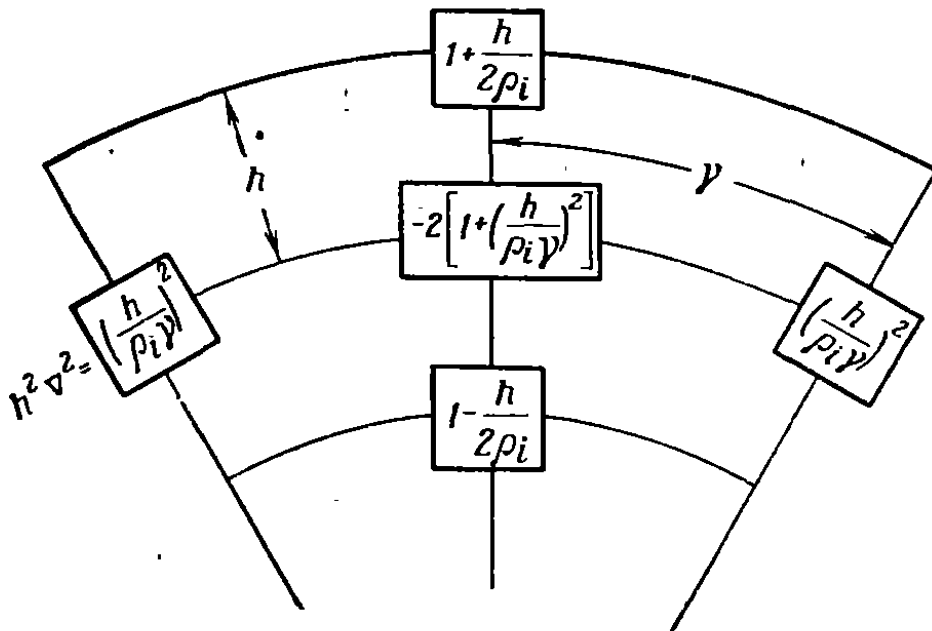
где

$$h = \Delta\rho, \quad \gamma = \Delta\theta. \quad (15.3)$$

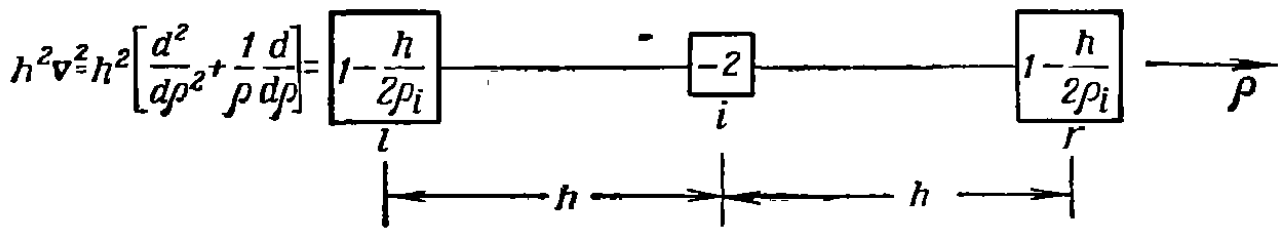
Таким образом, разностный оператор Лапласа принимает форму, изображенную на фиг. 71<sup>1)</sup>.

Если задача центрально-симметрична, т. е. если  $z$  не зависит от  $\theta$ , то  $\nabla^2$  превращается в одномерный дифференциальный оператор. В этом случае соответствующий разностный оператор принимает форму фиг. 72<sup>1)</sup>.

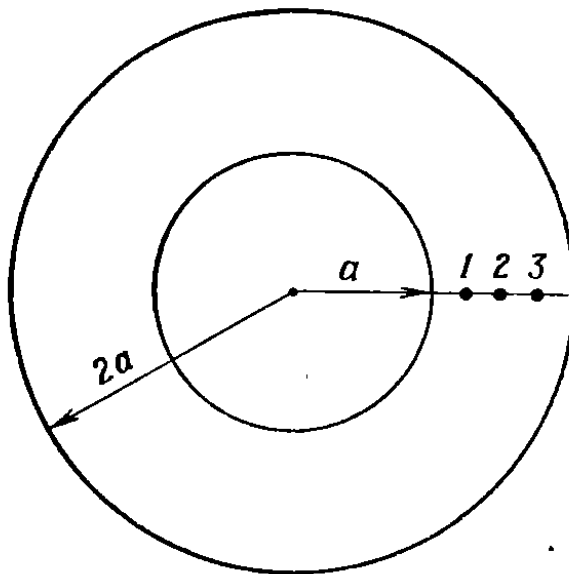
<sup>1)</sup> См. список на стр. 215. — Прим. ред.



Ф и г. 71.  $\nabla^2$  в полярных координатах.



Ф и г. 72.



Ф и г. 73.

Оператор фиг. 72 можно использовать для вычисления прогиба  $w$  в узловых точках находящейся под постоянным давлением  $p$  кольцеобразной мембраны, внутренний и внешний радиусы которой равны соответственно  $a$  и  $2a$  (фиг. 73). В этом случае, в силу симметрии, уравнение (5.1), описывающее прогиб мембраны, сводится к следующему:

$$\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} + \frac{p}{S} = 0. \quad (\text{д})$$

Если положить

$$\rho = ax; \quad w = \frac{pa^3}{S} z; \quad h = \frac{1}{n}, \quad (\text{е})$$

то мы приходим к следующему разностному уравнению:

$$\left(1 - \frac{1}{2nx_i}\right) z_i - 2z_i + \left(1 + \frac{1}{2nx_i}\right) z_r = -\frac{1}{n^2}. \quad (\text{ж})$$

Выбрав  $n = 4$ , т. е. разбив мембрану на четыре concentрических кольца равной ширины, мы получим из (ж)<sup>1)</sup>:

$$\text{при } x = \frac{5}{4} \quad 0 - 2z_1 + \left(1 + \frac{1}{8\left(\frac{5}{4}\right)}\right) z_2 = -\frac{1}{16},$$

$$\text{при } x = \frac{3}{2} \quad \left(1 - \frac{1}{8\left(\frac{3}{2}\right)}\right) z_1 - 2z_2 + \left(1 + \frac{1}{8\left(\frac{3}{2}\right)}\right) z_3 = -\frac{1}{16},$$

$$\text{при } x = \frac{7}{4} \quad \left(1 - \frac{1}{8\left(\frac{7}{4}\right)}\right) z_2 - 2z_3 + 0 = -\frac{1}{16},$$

или

$$-2z_1 + \frac{11}{10} z_2 = -\frac{1}{16},$$

$$\frac{11}{12} z_1 - 2z_2 + \frac{13}{12} z_3 = -\frac{1}{16},$$

$$\frac{13}{14} z_2 - 2z_3 = -\frac{1}{16}.$$

Решение этой системы есть

$$z_1 = 0,100; \quad z_2 = 0,126; \quad z_3 = 0,090.$$

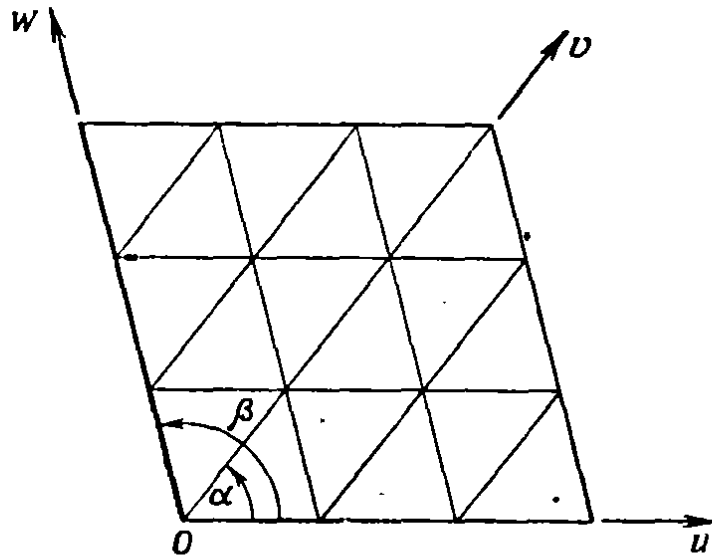
Отсюда находим узловые значения прогиба  $w$ :

$$w_1 = 0,100 \frac{pa^3}{S}; \quad w_2 = 0,126 \frac{pa^3}{S}; \quad w_3 = 0,090 \frac{pa^3}{S}.$$

<sup>1)</sup> Края мембраны предполагаются опертыми. — Прим. перев.

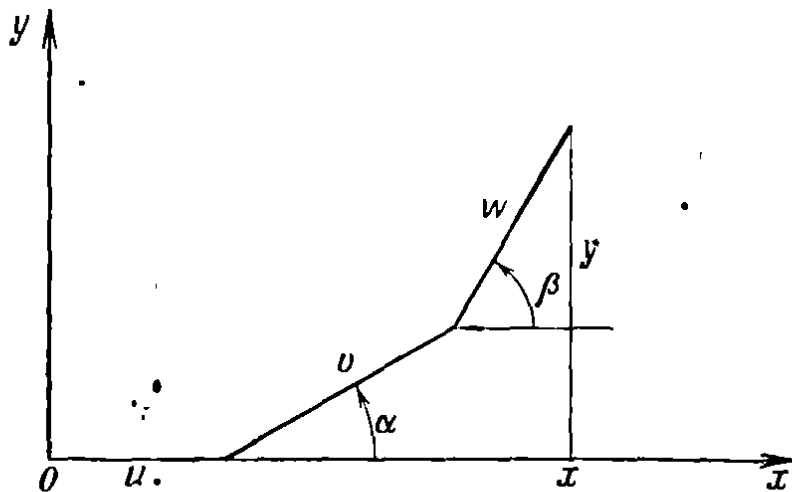
## § 16. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА В ТРЕУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Для покрытия областей с нерегулярными границами часто пользуются *треугольными сетками* (фиг. 74). Оператор Лапласа можно выразить через узловые значения в треугольной сетке с помощью



Фиг. 74. Треугольная сетка.

*треугольных координат*, которые описывают точку плоскости тремя числами  $u$ ,  $v$  и  $w$  (фиг. 75). Между тремя этими числами имеется одно соотношение, так что лишь два из них независимы.



Фиг. 75. Треугольные координаты.

Предполагая, что направление  $u$  совпадает с осью  $x$ , и обозначая через  $\alpha$  и  $\beta$  углы между  $v$  и  $u$  и между  $w$  и  $u$ , мы получим следующие формулы перехода от треугольных координат к декартовым:

$$\begin{aligned} x &= u + v \cos \alpha + w \cos \beta, \\ y &= v \sin \alpha + w \sin \beta. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Следовательно, частные производные  $x$  и  $y$  по  $u$ ,  $v$  и  $w$  равны

$$\begin{aligned} x_u &= 1; & x_v &= \cos \alpha; & x_w &= \cos \beta; \\ y_u &= 0; & y_v &= \sin \alpha; & y_w &= \sin \beta. \end{aligned} \quad (a)$$

В силу равенств (16.1), функцию  $z(x, y)$  можно рассматривать как функцию от  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , зависящую от этих параметров через посредство  $x$  и  $y$ . Частные производные  $z(x, y)$  по  $u$ ,  $v$ ,  $w$  следует вычислять по правилу дифференцирования сложных функций. Принимая во внимание (а), найдем:

$$\begin{aligned} z_u &= z_x x_u + z_y y_u = z_x, \\ z_v &= z_x x_v + z_y y_v = z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha, \\ z_w &= z_x x_w + z_y y_w = z_x \cos \beta + z_y \sin \beta. \end{aligned}$$

Повторным применением операторов дифференцирования получим

$$z_{uu} = z_{xx}, \quad (б)$$

$$z_{vv} = z_{xx} \cos^2 \alpha + 2z_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + z_{yy} \sin^2 \alpha, \quad (в)$$

$$z_{ww} = z_{xx} \cos^2 \beta + 2z_{xy} \sin \beta \cos \beta + z_{yy} \sin^2 \beta. \quad (г)$$

Подставляя (б) в (в) и (г) и исключая из двух полученных при этом соотношений  $z_{xy}$ , выразим  $z_{yy}$  через  $z_{uu}$ ,  $z_{vv}$  и  $z_{ww}$ :

$$z_{yy} = \frac{z_{uu} 2 \cos \alpha \cos \beta \sin(\beta - \alpha) - z_{vv} \sin 2\beta + z_{ww} \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}.$$

Следовательно, в силу (б):

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{yy} = \\ &= \frac{z_{uu} \sin 2(\beta - \alpha) - z_{vv} \sin 2\beta + z_{ww} \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Чаще всего используется сетка, состоящая из *равносторонних треугольников*. Для этого случая

$$\alpha = 60^\circ, \quad \beta = 120^\circ, \quad \beta - \alpha = 60^\circ,$$

$$\sin \alpha = \sin \beta = \sin(\beta - \alpha) = \sin 2\alpha = \sin 2(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

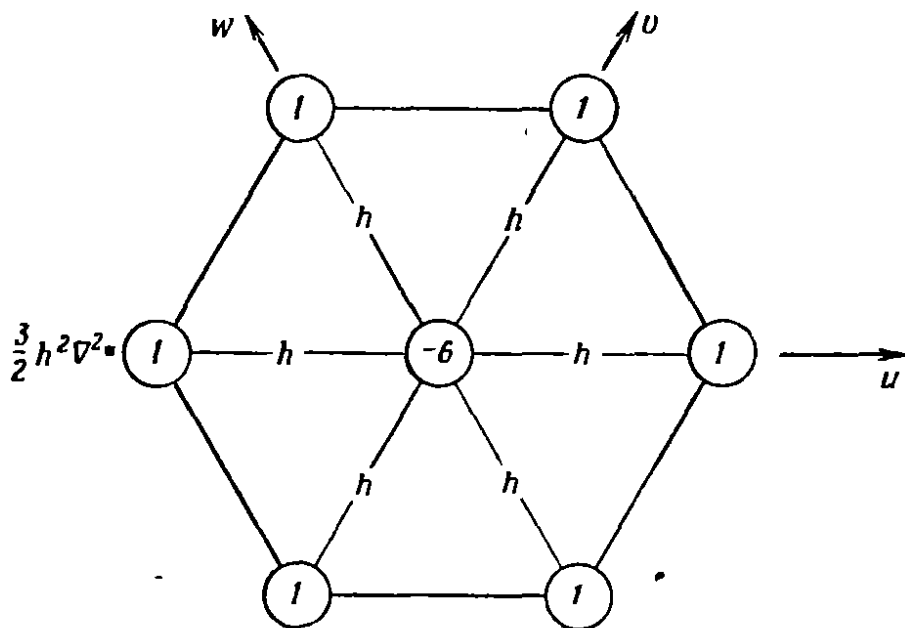
$$\sin 2\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

и (16.2) сводится к

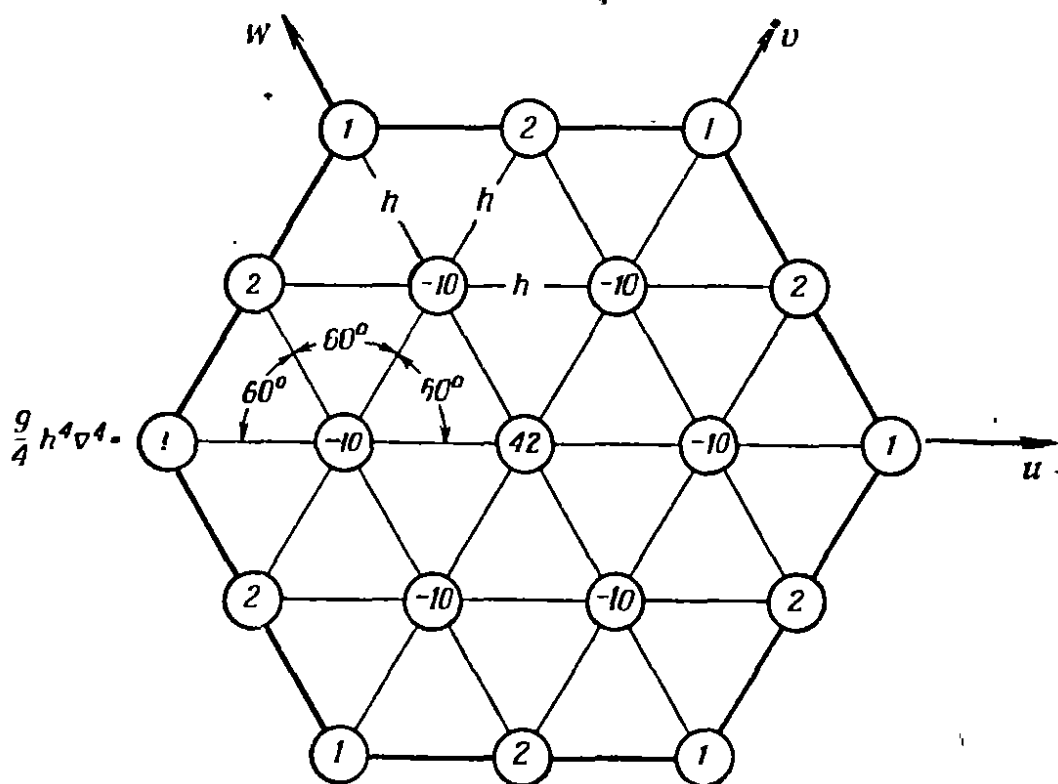
$$\nabla^2 z = \frac{2}{3} (z_{uu} + z_{vv} + z_{ww}). \quad (16.3)$$

Если мы заменим входящие в правую часть этого равенства дифференциальные операторы разностными согласно фиг. 12, а, то получим

разностный оператор, соответствующий  $\nabla^2$  в *равносторонней треугольной сетке*. Вид этого оператора изображен на фиг. 76<sup>1)</sup>.



Фиг. 76.  $\nabla^2$  в равносторонней треугольной сетке.



Фиг. 77.  $\nabla^4$  в равносторонней треугольной сетке.

Повторяя оператор фиг. 76 дважды, мы приходим к разностному оператору, соответствующему  $\nabla^4$  в *равносторонней треугольной сетке*. Вид этого оператора изображен на фиг. 77<sup>1)</sup>.

Мы воспользуемся оператором фиг. 76 для определения узловых значений гармонической функции, заданной на границе равносторон-

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 215.



него шестиугольника (фиг. 78). По определению, гармоническая функция удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 z = 0$ . Следовательно, узловые значения  $z$  должны удовлетворять следующей системе линейных уравнений:

$$\text{в точке (1)} \quad 2z_2 + 4z_3 - 6z_1 = 0,$$

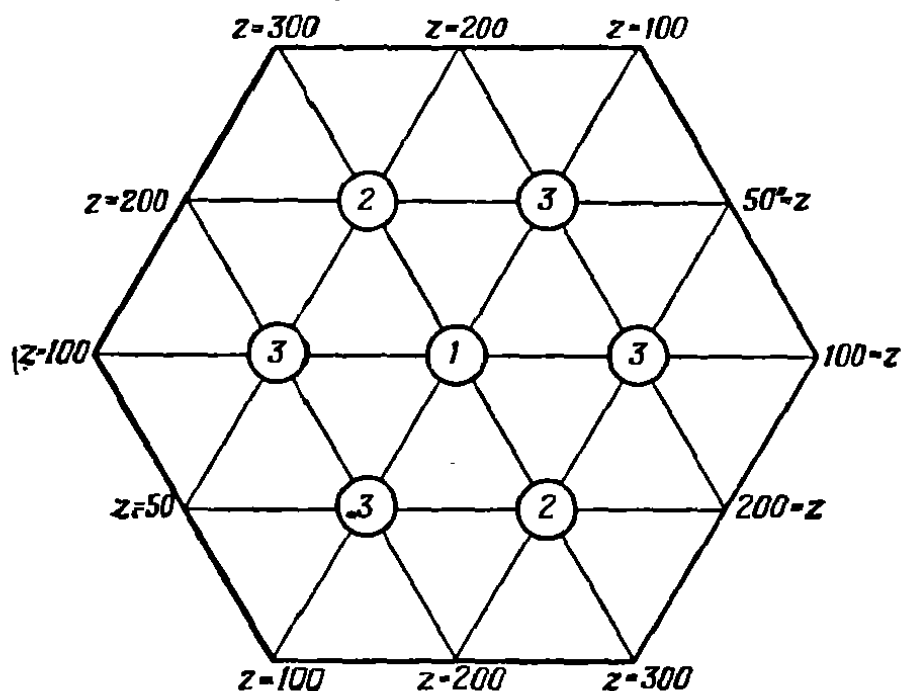
$$\text{в точке (2)} \quad z_1 + 2z_3 - 6z_2 + 200 + 200 + 300 = 0,$$

$$\text{в точке (3)} \quad z_1 + z_2 + z_3 - 6z_3 + 50 + 100 + 200 = 0.$$

Решение этой системы есть

$$z_1 = 156; \quad z_2 = 189; \quad z_3 = 139.$$

Функцию  $z$  можно интерпретировать как значение температуры внутри шестиугольной пластинки, на границе которой поддержи-



Фиг. 78.

вается температура, указанная на фиг. 78. С другой стороны,  $z$  описывает форму натянутой мембраны (не испытывающей давления), граница которой имеет ординаты, указанные на фиг. 78.

В § 14 была рассмотрена пластинка, имеющая форму ромба с острым углом  $\alpha = 60^\circ$ . Эту пластинку также можно покрыть равно-сторонней треугольной сеткой. Так, при  $n = 4$  мы получим сетку, изображенную на фиг. 79. Для решения двух уравнений Пуассона (а) из § 14 применим оператор фиг. 76 к четырем точкам этой сетки. Из соответствующей системы линейных алгебраических уравнений<sup>1)</sup> найдем прогиб в центре:

$$w_0|_4 = 0,00283 \frac{qa^4}{D}.$$

1) E h a s z F. L., Structural Skew Plates, Trans. ASCE, 111, 1011 (1946).

При  $n = 8$  и  $n = 10$  аналогично получим

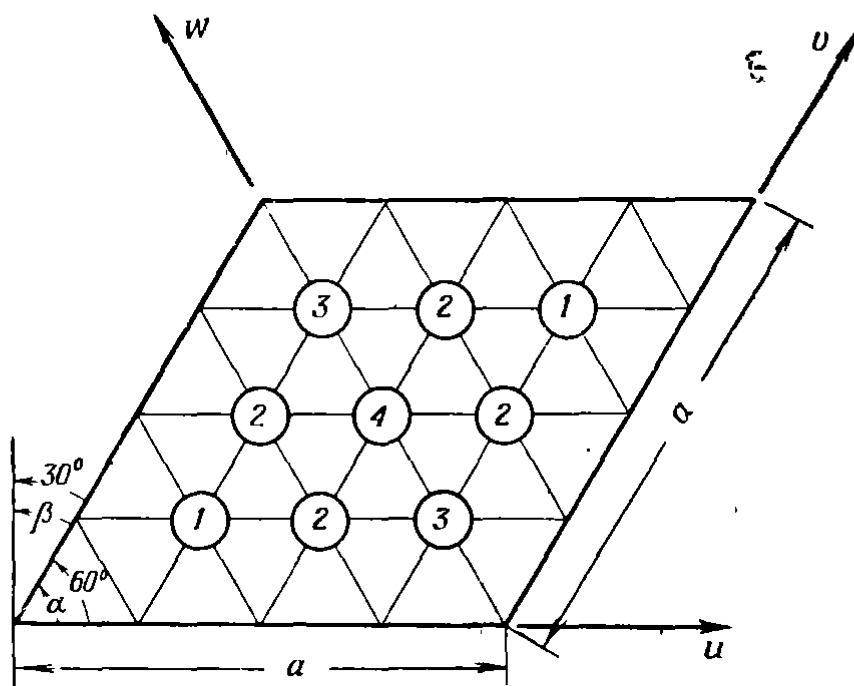
$$w_0|_8 = 0,00262 \frac{qa^4}{D}; \quad w_0|_{10} = 0,00260 \frac{qa^4}{D}.$$

Экстраполированные значения прогиба равны

$$w_0|_{4,8} = 0,00255 \frac{qa^4}{D}; \quad w_0|_{8,10} = 0,00256 \frac{qa^4}{D};$$

$$w_0|_{4,8,10} = 0,00256 \frac{qa^4}{D}.$$

Коэффициент 0,00256 получается путем решения системы по крайней мере шестнадцати уравнений. В то же время в косоугольных



Фиг. 79.

координатах мы получили коэффициент 0,00248, рассматривая лишь четыре узловые точки (правда, с экстраполяциями). Второе число отличается от первого всего на 3%.<sub>0</sub>

Из сказанного видно, что хорошие численные результаты наиболее просто получаются тогда, когда сетка хорошо подогнана к рассматриваемой области.

### Задачи

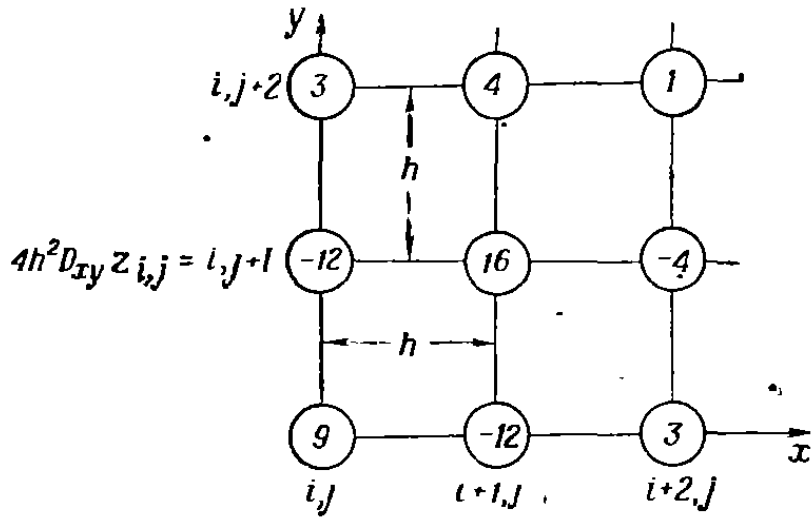
1. Написать разностные операторы с погрешностью порядка  $h^2$ , содержащие лишь разности, взятые вперед, и соответствующие следующим дифференциальным:

(а)  $D_{xy}$ ; (б)  $\nabla^2$ ; (в)  $D_{xxyy}$ .

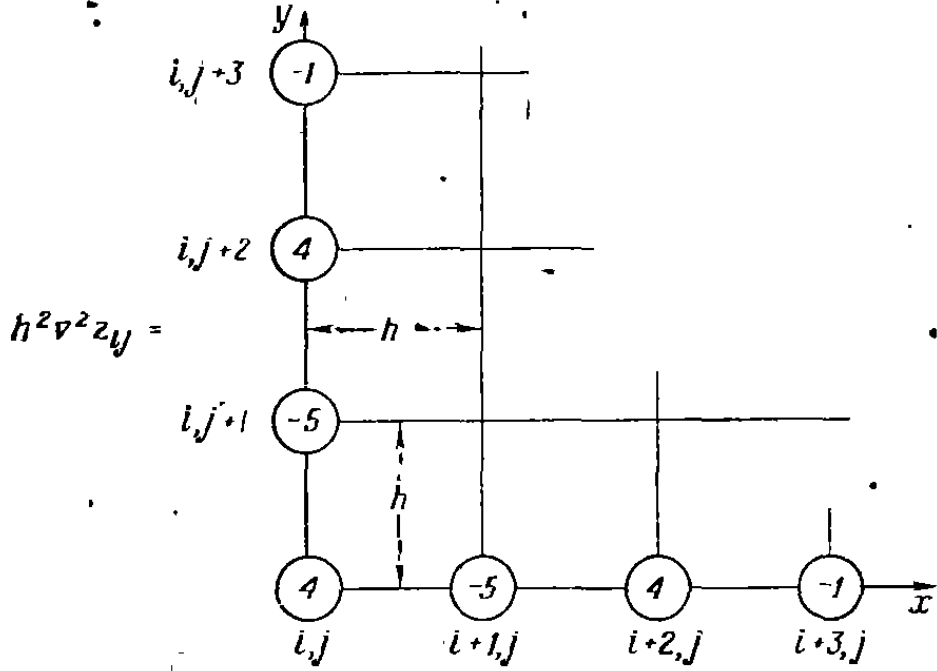
Составить соответствующие схемы.

О т в е т: см. фиг. 80.

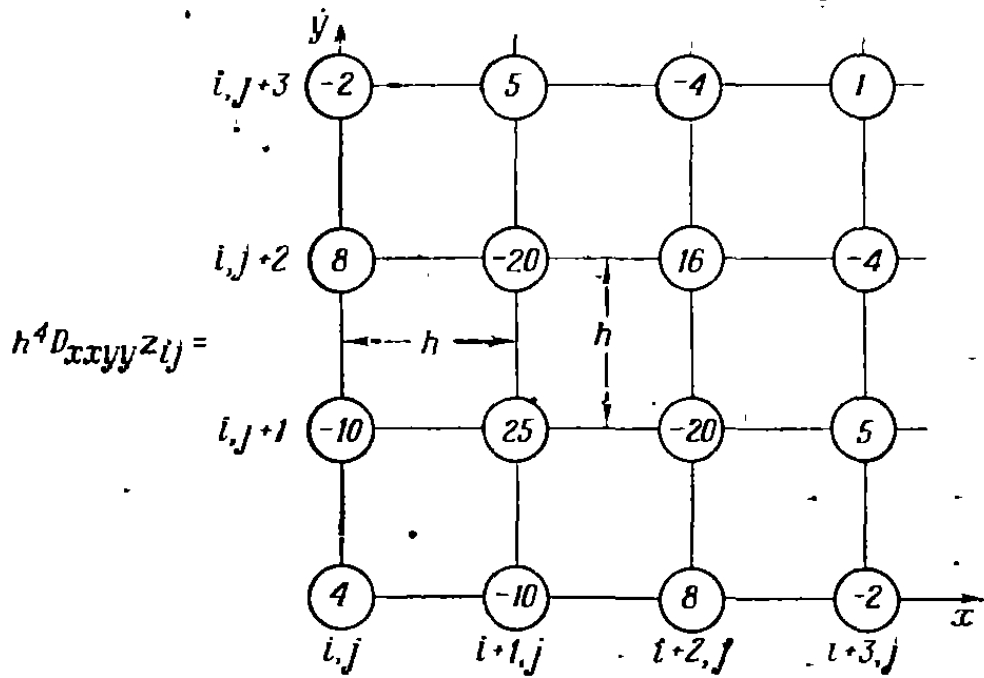
(a)



(б)



(в)



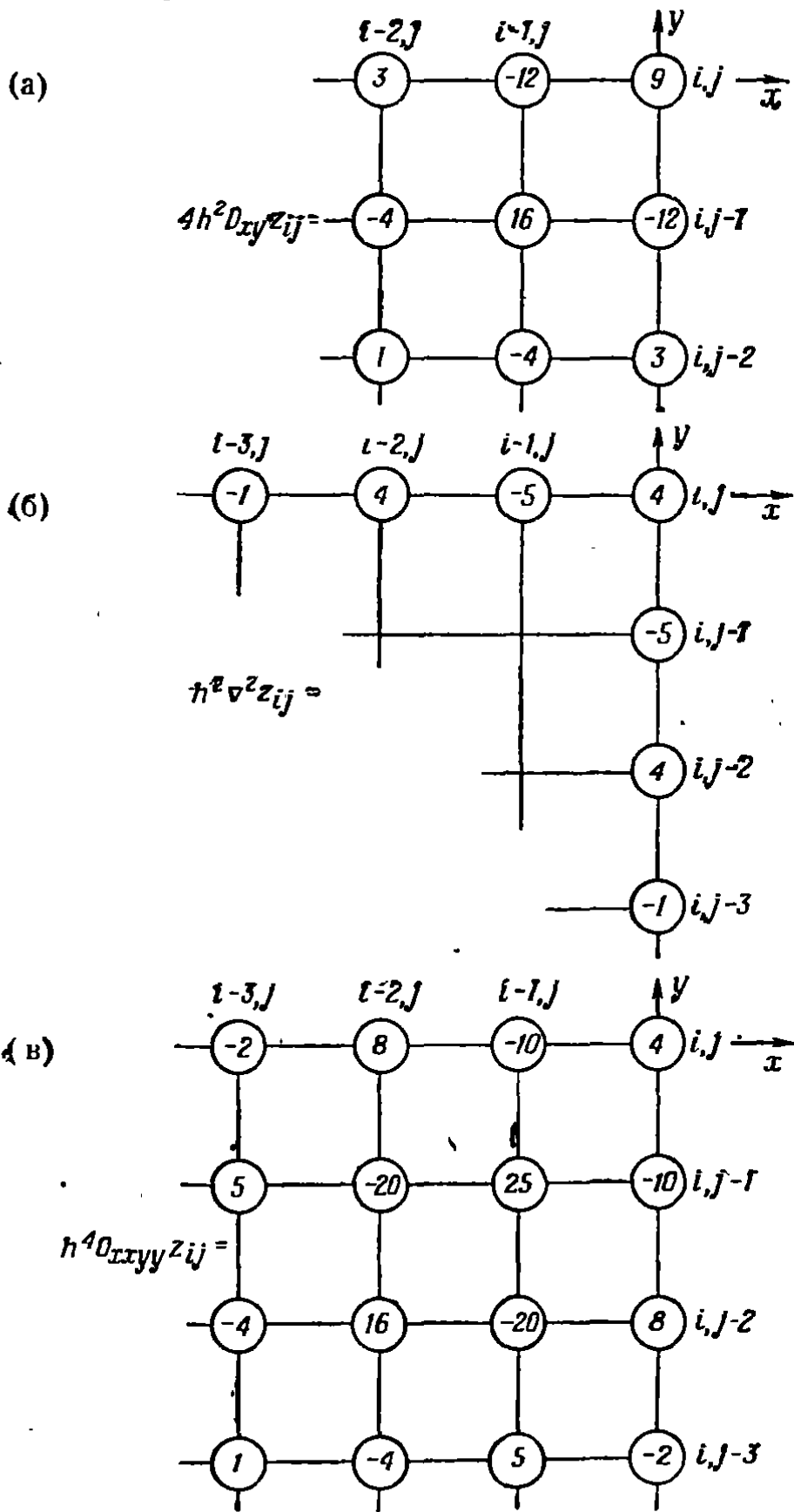
Ф и г. 80.

2. Написать разностные операторы с погрешностью порядка  $h^2$ , содержащие лишь разности, взятые назад, и соответствующие следующим дифференциальным:

(а)  $D_{xy}$ ; (б)  $\nabla^2$ ; (в)  $D_{xyxy}$ .

ставить соответствующие схемы.

Ответ: см. фиг. 81.



Фиг. 81.

3. (а) Определить главный член погрешности в задаче 1, (а), (б), (в).

(б) Определить главный член погрешности в задаче 2, (а), (б).

4. Доказать, что погрешность, возникающая при двойном интегрировании по формуле Симпсона, имеет порядок  $h^4$ .

5. Вычислить по формуле трапеций с четырьмя знаками следующие интегралы:

$$(а) \int_2^4 dy \int_4^6 \ln xy^2 dx; \quad (б) \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\pi/2} \sin \sqrt{2xy} dx;$$

$$(в) \int_1^5 dy \int_1^5 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{1/2}}; \quad (г) \int_0^1 dy \int_0^1 e^{-(x^2 + y^2)} dx.$$

Вычисления вести в квадратной сетке при  $n = 2$  и  $n = 4$ . Результат проэкстраполировать.

О т в е т: (а)  $A_2 = 14,95$ ;  $A_4 = 15,02$ ;  $A_{2;4} = 15,05$ ;

(в)  $A_2 = 4,134$ ;  $A_4 = 3,997$ ;  $A_{2;4} = 3,952$ .

6. Вычислить по формуле Симпсона с четырьмя знаками интегралы задачи 5. Вычисления вести в квадратной сетке при  $n = 2$  и  $n = 4$ . Результат проэкстраполировать.

О т в е т: (б)  $A_2 = 1,585$ ;  $A_4 = 1,724$ ;  $A_{2;4} = 1,733$ ;

(в)  $A_2 = 3,962$ ;  $A_4 = 3,963$ ;  $A_{2;4} = 3,963$ .

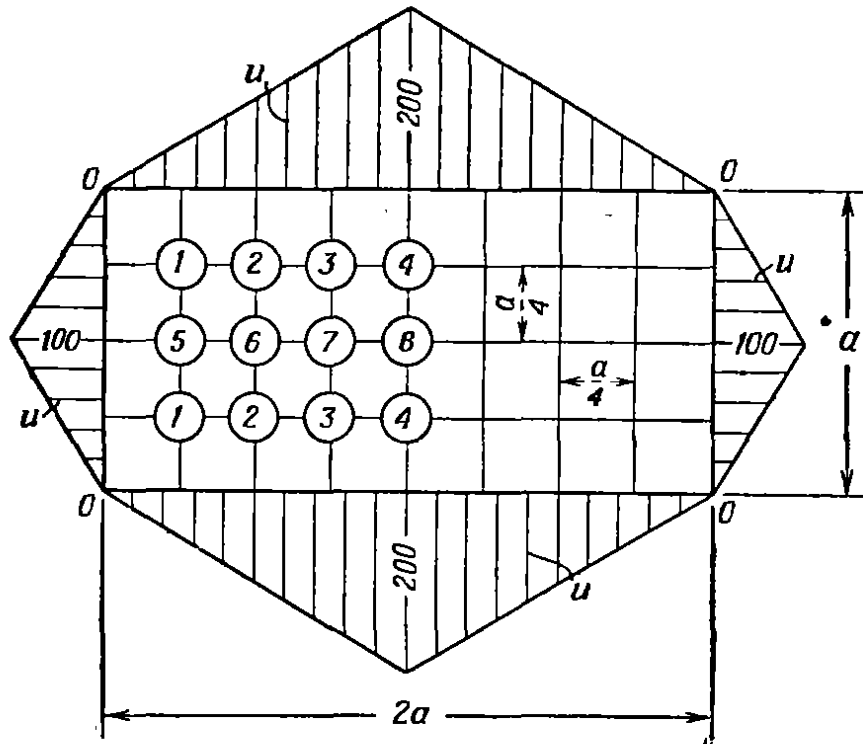
## 7. Интеграл

$$\int_0^1 dy \int_0^{0,8} \operatorname{sh}(x^2 y) dx$$

вычислить с четырьмя знаками по формуле трапеций и по формуле Симпсона. Вычисления вести в прямоугольной сетке, положив сначала  $n = 2$ , а затем  $n = 4$ . Результаты проэкстраполировать.

8. Воспользовавшись методом Либмаиа, определить стационарное распределение температуры в узловых точках прямоугольной пластики

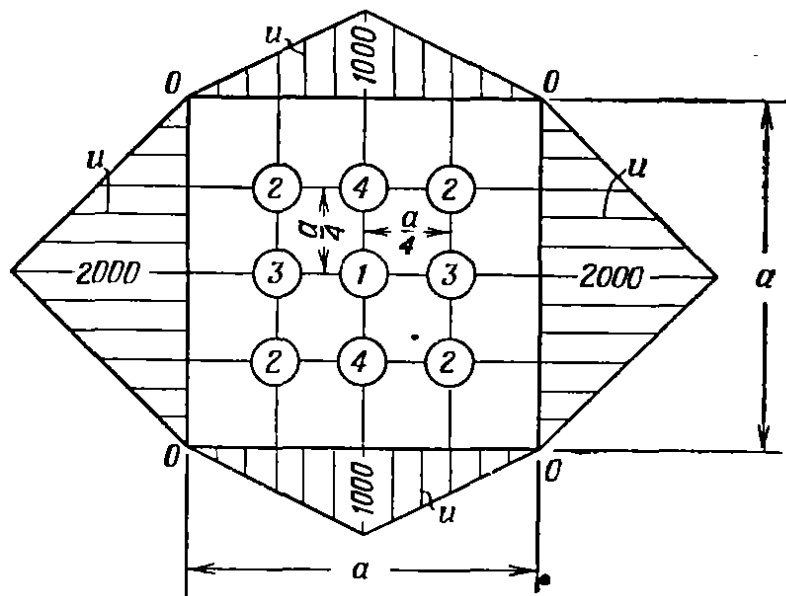
со сторонами  $a$  и  $b = 2a$ . Температура краев пластинки и расчетная сетка указаны на фиг. 82. Применить оператор фиг. 35, б.



Фиг. 82.

Ответ:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
72	102	132	151	87	104	127	139

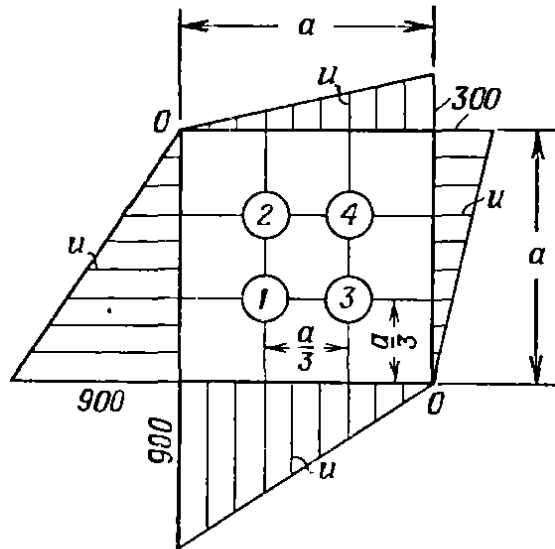


Фиг. 83.

9. Определить методом итераций значения гармонической функции узловых точек квадрата. Граничные значения функции указаны на фиг. 83.

Применить оператор фиг. 35,б, положив  $n = 2$  и  $n = 4$ . Результат проэкстраполировать.

10. Определить методом релаксации стационарное распределение температуры в узловых точках квадратной пластинки. Температура краев

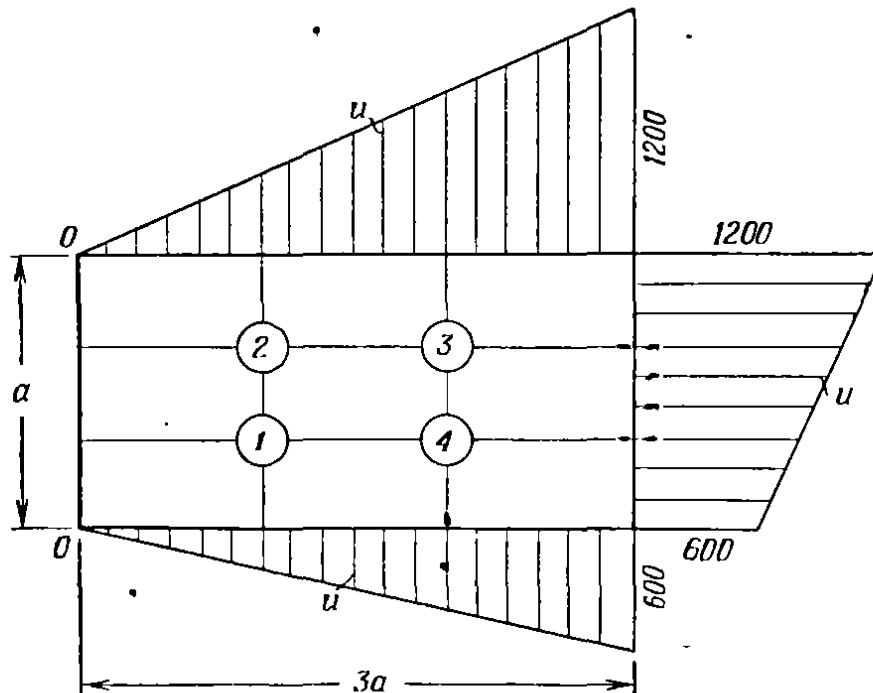


Фиг. 84.

пластинки и расчетная сетка указаны на фиг. 84. Воспользоваться оператором фиг. 35, б.

Ответ:  $u_1 = 433$ ;  $u_2 = 267$ ;  $u_3 = 267$ ;  $u_4 = 233$ .

11. Определить методом релаксации стационарное распределение температуры в узловых точках пластинки, изображенной на фиг. 85. Расчетная



Фиг. 85.

сетка и температура краев пластинки указаны. Воспользоваться оператором (1.11).

12. Определить смещения узловых точек квадратной мембраны со стороны  $L$ , если  $PL^2/S = 16'000$  (см. § 5). Сетку выбрать из условия  $n = 4$ ; воспользоваться оператором фиг. 35, б.

О т в е т:  $u_1 = 1125$ ;  $u_2 = 875$ ;  $u_3 = 687,5$ .

13. Опертая вдоль краев квадратная пластинка со стороной  $a$  испытывает действие равномерной нагрузки  $q$ . Определить прогиб и изгибающий момент в центре пластинки, если коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ . Вычисления провести в двух квадратных сетках:  $n = 2$  и  $n = 4$ . Результат проэкстраполировать.

У к а з а н и е. Дифференциальное уравнение равновесия пластинки  $\nabla^4 w = q/D$  (см. § 8) можно разбить на два уравнения<sup>1)</sup> второго порядка, положив  $M = (M_x + M_y)/(1 + \mu)$ , где  $M_x$  и  $M_y$  — проекции изгибающего момента соответственно на оси  $y$  и  $x$ . В переменных  $M$  и  $w$  имеют место уравнения  $\nabla^2 M = -q$ ,  $\nabla^2 w = -M/D$  и краевые условия  $w = 0$ ,  $M = 0$  на краях. Применить оператор фиг. 35, б. Возникающие системы алгебраических уравнений решать по схеме Гаусса.

О т в е т<sup>2)</sup>:  $M_2 = 0,0406qa^2$ ;  $w_2 = 0,00391qa^4/D$ ;  $M_4 = 0,0457qa^2$ ;  
 $w_4 = 0,00403qa^4/D$ ;  $M_{2,4} = 0,0474qa^2$ ;  $w_{2,4} = 0,00406qa^4/D$ ;  
 $M = 0,0479qa^2$ ;  $w = 0,00405qa^4/D$ .

14. Определить методом итераций величину функций  $z$ , удовлетворяющей уравнению  $\nabla^2 z = 1$ , если на границе квадрата со стороной  $a$  выполняется условие  $z = 0$ . Применить оператор фиг. 35, б. Вычисления провести для двух квадратных сеток: с шагом  $h = a/2$  и  $h = a/4$ . Полученные в центре квадрата значения  $z$  проэкстраполировать.

15. Вычислить  $z$  в узловых точках квадрата со стороной  $a = 4h = 2$ , если внутри квадрата  $\nabla^2 z = x^2y^2$ , а на границе  $z = 0$ . Начало координат поместить в центре квадрата; воспользоваться оператором фиг. 35, б.

О т в е т:  $u_1 = u_3 = -0,00391$ ;  $u_2 = -0,00586$ .

16. (а) Определить методом релаксации узловые значения функции кручения  $\varphi$ , если она удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 \varphi + 2 = 0$  и обращается в нуль на границах сечения, изображенного на фиг. 86, а. Применить оператор фиг. 35, б.

(б) То же для сечения, изображенного на фиг. 86, б.

(в) Найти скручивающий момент для сечения фиг. 86, а (см. § 6).

<sup>1)</sup> Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М. — Л., 1946, стр. 266 и след. — Прим. перев.

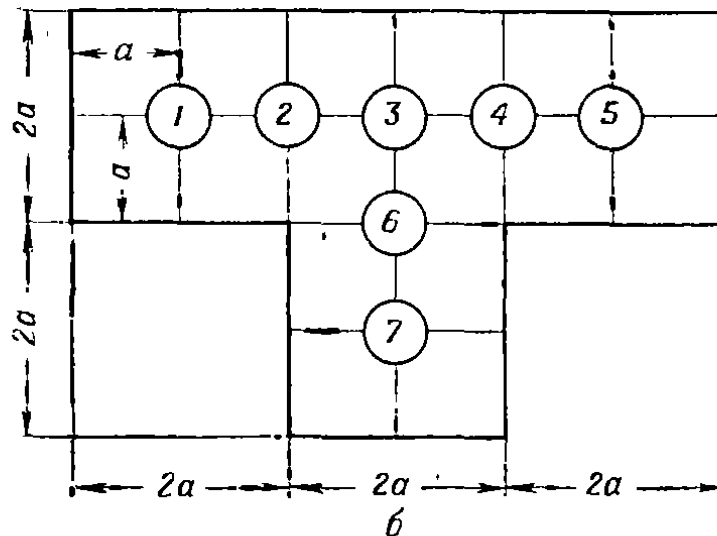
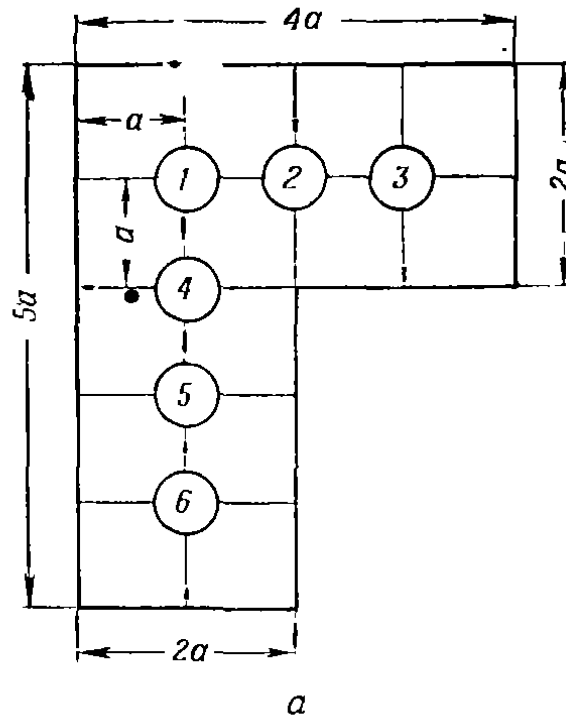
<sup>2)</sup> Здесь и в дальнейших задачах без индекса даны значения, полученные аналитическими методами. — Прим. перев.



(г) То же для сечения фиг. 86, б.

Интегрирование вести по формуле трапеций.

Ответ: (а)  $\varphi_1 = \varphi_4 = 0,9756a^2$ ;  $\varphi_2 = \varphi_5 = 0,9268a^2$ ;  $\varphi_3 = \varphi_6 = 0,7317a^2$ .



Фиг. 86.

17. (а) Определить значения функции кручения для упругопластического случая, описанного в § 7, при  $M = 1,35M_0$ . Значение  $n$  выбрать равным шести.

(б) Найти соответствующие значения  $\theta/\theta_0$ .

18. Определить значение  $\varphi_0$  функции  $\varphi$  в центре квадрата со стороной  $a$ , если  $\varphi$  удовлетворяет уравнению  $\nabla^4\varphi = 0$  внутри квадрата и условиям

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 1$$

на его границе. Воспользоваться оператором фиг. 35, б. Вычисления провести для двух квадратных сеток: при  $n = 2$  и  $n = 4$ .

У к а з а н и е:  $\nu$  — направление внешней нормали.

О т в е т:  $n = 2$ :  $\varphi_0 = -0,1667a$ ;  $n = 4$ :  $\varphi_0 = -0,2191a$ .

19. Равномерно нагруженная прямоугольная пластинка со сторонами  $a$  и  $2a$  заделана вдоль коротких краев и оперта вдоль длинных. Определить прогиб в центре пластинки. Вычисления вести в квадратной сетке с шагом  $h = a/2$  (см. § 8).

У к а з а н и е: На опертых краях имеют место следующие граничные условия:

$$w = 0; \quad \frac{d^2 w}{d\nu^2} = 0.$$

20. Опертая по краям квадратная пластинка со стороной  $a$  находится под действием сжимающих сил  $N$  на единицу длины границы. Найти наименьшее критическое значение  $N$ . Вычисления провести для трех квадратных сеток: при  $n = 2, 3$  и  $4$ . Результат проэкстраполировать (см. § 9).

У к а з а н и е. Задача описывается уравнением<sup>1)</sup>  $\nabla^4 w + \frac{N}{D} \nabla^2 w = 0$  и граничными условиями  $w = 0$ ,  $\nabla^2 w = 0$  на границе. Положить  $\nabla^2 w = z$  и воспользоваться оператором фиг. 35, б.

О т в е т:  $N_2 = 16 \frac{D}{a^2}$ ;  $N_3 = 18 \frac{D}{a^2}$ ;  $N_4 = 18,75 \frac{D}{a^2}$ ;  $N_{2;3} = 19,6 \frac{D}{a^2}$ ;

$$N_{3;4} = 19,71 \frac{D}{a^2}; \quad N_{2;3;4} = 19,75 \frac{D}{a^2}; \quad N = 19,74 \frac{D}{a^2}.$$

21. Опертая по краям прямоугольная пластинка со сторонами  $a$  и  $2a$ , параллельными соответственно осям  $x$  и  $y$ , находится под действием равномерно распределенных вдоль границы сжимающих сил  $N$  на единицу длины. Найти наименьшее критическое значение  $N$ . Вычисления провести для трех прямоугольных сеток: при  $n = 2$ ,  $n = 3$  и  $n = 4$ . Результат проэкстраполировать (см. § 9 и задачу 20).

22. Заделанная по краям прямоугольная пластинка со сторонами  $2a$  и  $a$ , параллельными соответственно осям  $x$  и  $y$ , находится под действием равномерно распределенных вдоль границы сжимающих сил  $N$  на единицу длины. Найти наименьшее критическое значение  $N$ . Вычисление провести для двух прямоугольных сеток: при  $n = 2$  и  $n = 3$ . Результат проэкстраполировать (см. § 9).

О т в е т:  $N_2 = 16,8 \frac{D}{a^2}$ ;  $N_3 = 26,55 \frac{D}{a^2}$ ;  $N_{2;3} = 34,35 \frac{D}{a^2}$ ;

1) Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М. — Л., 1946, стр. 302 и след. — Прим. перев.

23. Опертая по краям квадратная пластинка находится под действием равномерно распределенных вдоль двух противоположных сторон границы сжимающих сил  $N$  на единицу длины. Найти наименьшее критическое значение  $N$ . Вычисления провести для трех квадратных сеток: при  $n = 2, 3$  и  $4$ . Результат проэкстраполировать (см. § 9).

$$\text{О т в е т: } N_2 = 32 \frac{D}{a^2}; \quad N_3 = 36 \frac{D}{a^2}; \quad N_4 = 37,514 \frac{D}{a^2}; \quad N_{2;3} = 39,20 \frac{D}{a^2};$$

$$N_{3;4} = 39,46 \frac{D}{a^2}; \quad N_{2;3;4} = 39,54 \frac{D}{a^2}; \quad N = 39,478 \frac{D}{a^2}.$$

24. Решить задачу 23 методом разделения переменных, положив  $w = Y(y) \sin \frac{\pi}{a} x$  и выбрав  $n = 2, 3$  и  $4$ .

25. Опертая вдоль краев квадратная пластинка свободно колеблется. Определить наименьшую частоту методом конечных разностей, воспользовавшись формулами с погрешностью порядка  $h^2$ . Вычисления провести в трех квадратных сетках: при  $n = 2, 3$  и  $4$ . Результат проэкстраполировать.

У к а з а н и е. Дифференциальное уравнение свободных колебаний пластинки имеет следующий вид:

$$D\nabla^4 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где  $m$  — плотность (масса на единицу площади). Положить  $w(x, y, t) = z(x, y) \cdot \sin \omega t$ .

26. Заделанная вдоль краев прямоугольная пластинка со сторонами  $a$  и  $2a$  свободно колеблется. Определить наименьшую частоту методом конечных разностей. Вычисления провести в двух прямоугольных сетках: при  $n = 2$  и  $n = 3$ . Результат проэкстраполировать (см. задачу 25).

$$\text{О т в е т: } \omega_2 = (12,962/a^2) \sqrt{D/m}; \quad \omega_3 = (17,283/a^2) \sqrt{D/m};$$

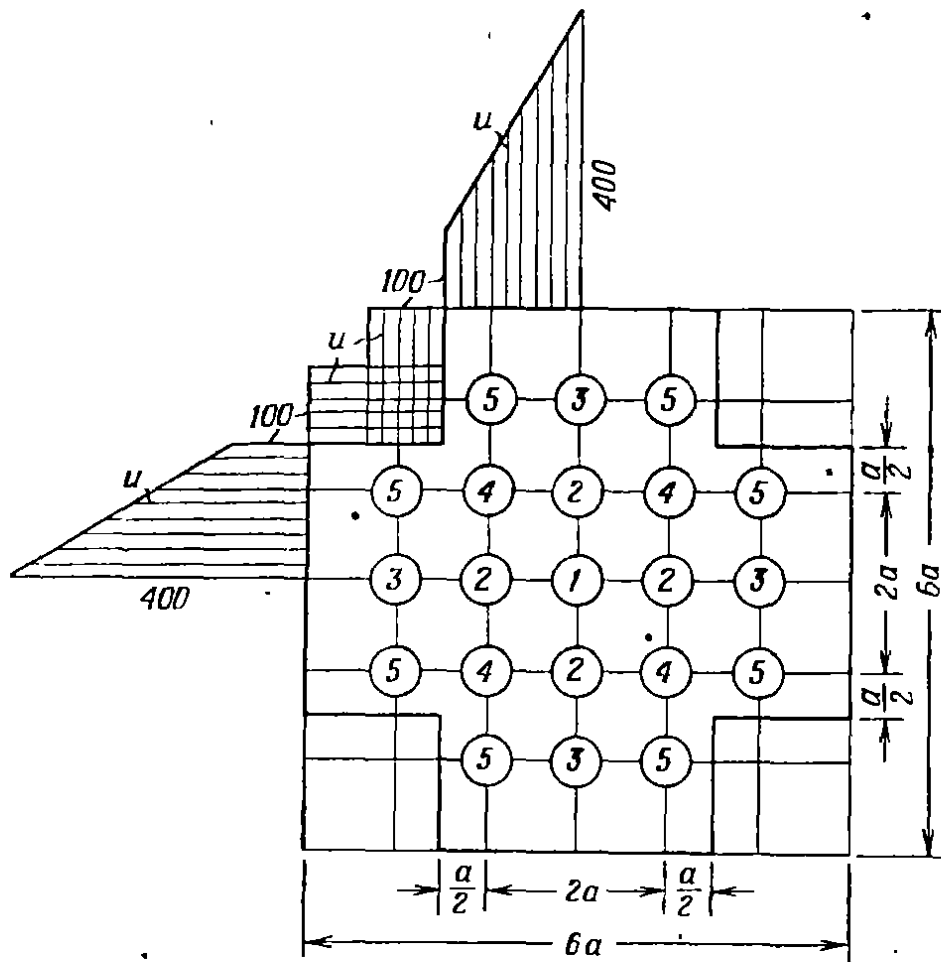
$$\omega_{2;3} = (20,740/a^2) \sqrt{D/m}.$$

27. Прямоугольная пластинка со сторонами  $2a$  и  $a$ , параллельными соответственно осям  $x$  и  $y$ , заделана вдоль длинных сторон и оперта вдоль коротких. Определить наименьшую частоту ее свободных колебаний, комбинируя методы разделения переменных и конечных разностей. Выбрать  $n = 2, 3$  и  $4$ . Результат проэкстраполировать.

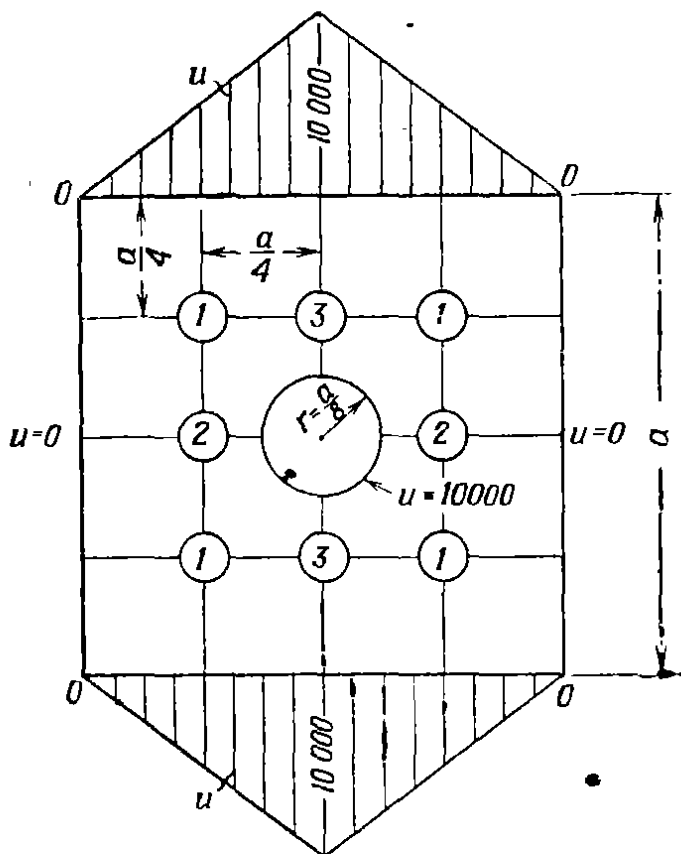
У к а з а н и е. В уравнении задачи 25 положить

$$w(x, y, t) = Y(y) \sin \frac{\pi}{2a} \cdot x \sin \omega t.$$

О т в е т: Если  $W = \omega a^2 \sqrt{m/D}$ , то  $W_2 = 13,175$ ;  $W_3 = 17,132$ ;  $W_4 = 19,373$ ;  
 $W_{2;3} = 20,298$ ;  $W_{3;4} = 22,254$ ;  $W_{2;3;4} = 22,906$ .



Ф и г. 87.



Ф и г. 88.

28. Найти с тремя знаками узловые значения потенциала  $V$  пластинки, изображенной на фиг. 87. Граничные значения  $V$  указаны<sup>1)</sup>. Воспользоваться разностным оператором фиг. 61.

У к а з а н и е. Потенциал  $V$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

29. Определить стационарные значения температуры в узловых точках пластинки, изображенной на фиг. 88. Граничные значения температуры заданы. Во всех точках оператор  $\nabla^2 u$  заменить разностным оператором фиг. 61.

О т в е т:  $u_1 = 4833$ ;  $u_2 = 6056$ ;  $u_3 = 8278$ .

30. Определить наименьшую частоту колебаний эллиптической мембраны с полуосями  $a$  и  $2a/3$ . Вычисления вести в прямоугольной сетке

1) Граничные значения должны быть продолжены симметрично на весь контур. — Прим. ред.

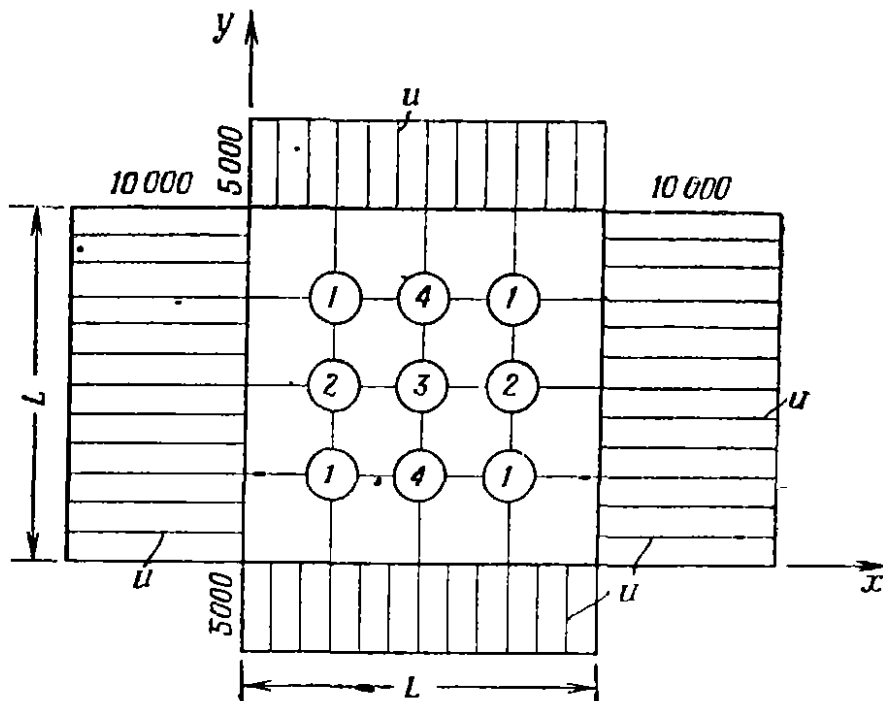
с шагами  $h = a/3$  (в направлении малой оси) и  $k = a/2$  (в направлении большой оси) по разностным формулам с погрешностью порядка  $h$  (см. § 11).

31. Найти наименьшую частоту свободных колебаний мембраны, изображенной на фиг. 60 (см. § 11). Вычисления вести в сетке, указанной там же. В точке 4 воспользоваться разностным оператором с погрешностью порядка  $h$ , а в остальных точках — порядка  $h^2$ .

Ответ:  $\omega = (4,490/L) \sqrt{S/m}$ .

32. Вычислить стационарные значения температуры в узловых точках пластинки, изображенной на фиг. 60. На границах пластинки поддерживается температура, указанная там же. Вычисления вести по схеме второго порядка (с погрешностью порядка  $h^2$ ) во всех точках.

33. Края квадратной пластинки, изображенной на фиг. 89 и имеющей начальную температуру, равную нулю, внезапно нагреты до указанных



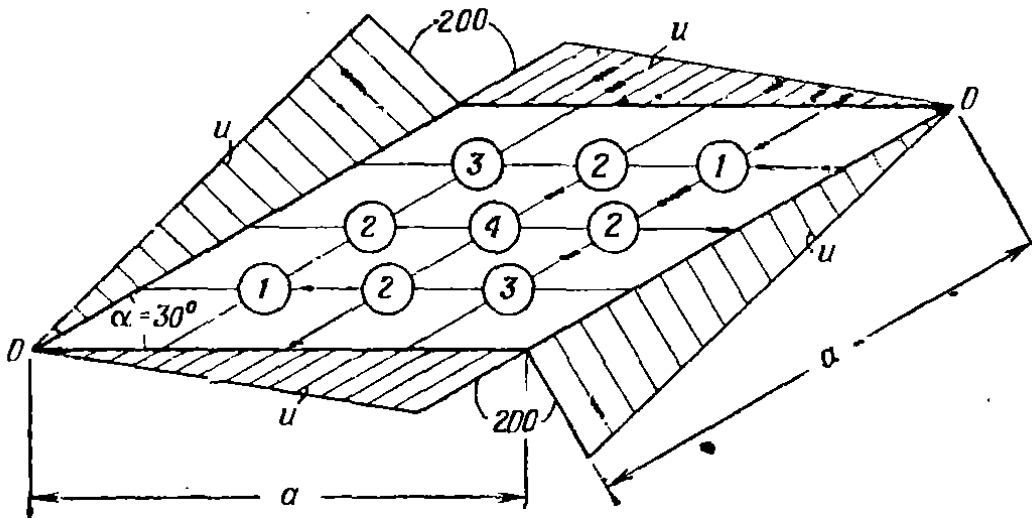
Фиг. 89.

температур (10000 с двух противоположных сторон и 5000 — с двух других). Определить по методу § 13 изменение температуры во времени. Пространственные шаги выбрать одинаковыми по  $x$  и по  $y$ , равными  $h = L/4$ . Вычисления провести для  $n = t/\tau$  от 0 до 10.

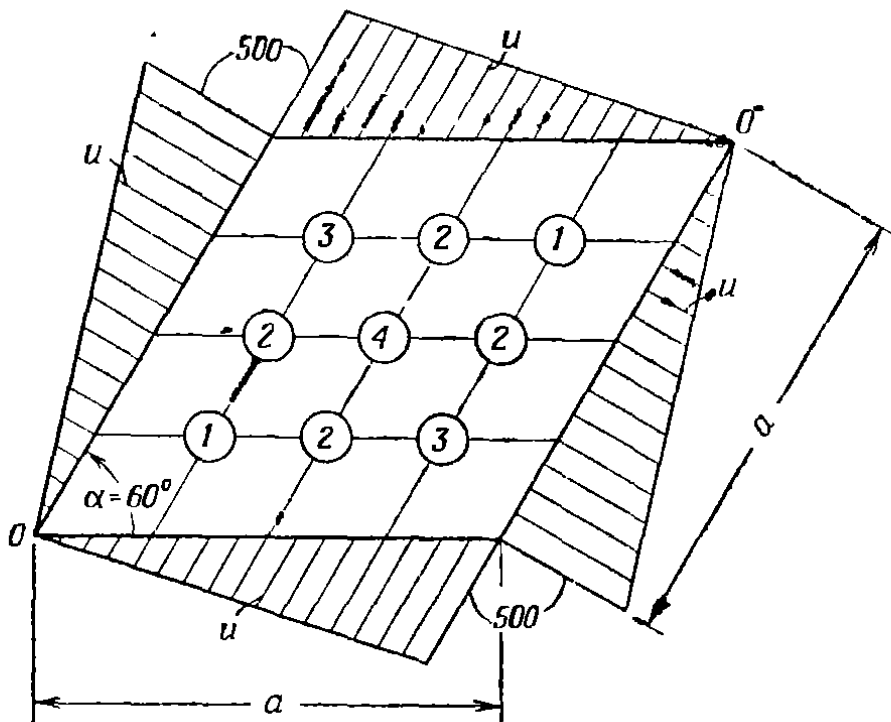
Ответ:

$n = t/\tau$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$
1	3750	2500	0	1250
2	4687	4375	1875	3125
5	6562	6718	5625	5468

34. Определить методом релаксации стационарные значения температуры в узловых точках пластинки, изображенной (а) на фиг. 90, (б) на фиг. 91. На краях пластинки поддерживается указанная температура



Ф и г. 90.



Ф и г. 91.

Ответ: (а)  $u_1 = 99,6$ ;  $u_2 = 139,0$ ;  $u_3 = 160,9$ ;  $u_4 = 152,2$ .

35. Определить прогиб центральной точки мембраны, имеющей форму ромба со стороной  $a$  и острым углом  $\alpha = 60^\circ$ . Отношение давления  $P$  к натяжению  $S$  равно 16000. Выбрать  $n = 2$  и  $n = 4$ . Результат проэкстраполировать (см. § 5).

36. Определить наименьшую частоту свободных колебаний мембраны, имеющей форму ромба со стороной  $a$  и острым углом  $\alpha = 60^\circ$ . Решение

вести в косоугольных координатах. Выбрать  $n = 2$  и  $n = 3$ . Результат проэкстраполировать.

$$\text{О т в е т: } \omega_2 = (4,619/a) \sqrt{S/m}; \quad \omega_3 = (4,880/a) \sqrt{S/m};$$

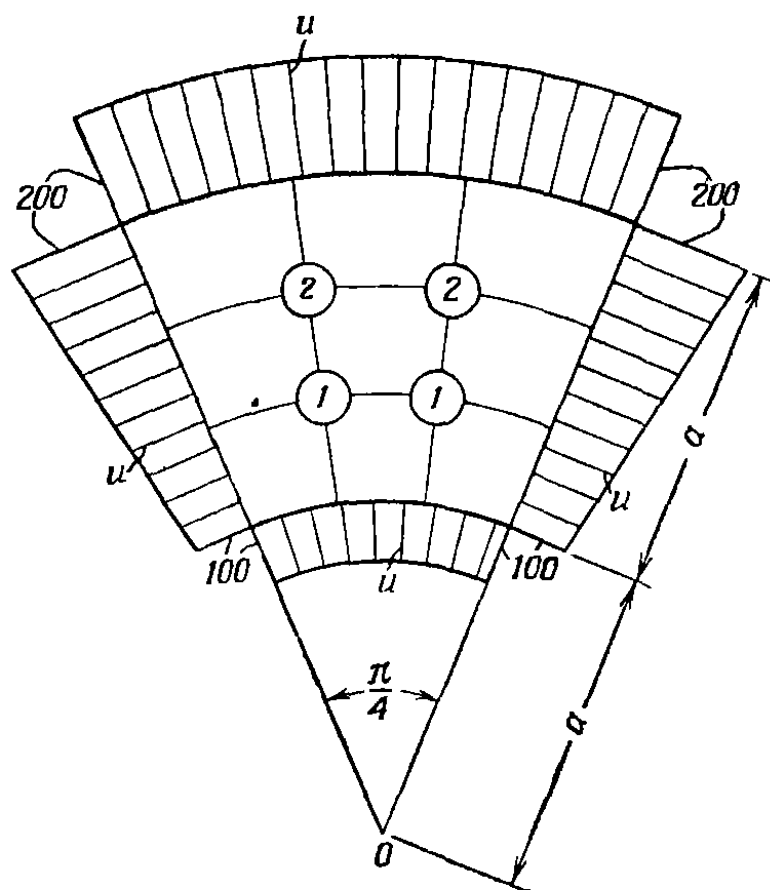
$$\omega_{2;3} = (5,088/a) \sqrt{S/m}.$$

37. Опертая вдоль краев косоугольная пластинка со сторонами  $L$  и  $\sqrt{2}L$  и с острым углом  $\alpha = 45^\circ$  сжимается под действием приложенного к границе давления  $N$  на единицу длины. Вычислить наименьшее критическое значение  $N$ . Вычисления провести в трех косоугольных сетках: при  $n = 2, 3$  и  $4$ . Результат проэкстраполировать (см. задачу 20).

$$\text{О т в е т: } N_2 = 24D/L^2; \quad N_3 = 26,63D/L^2; \quad N_4 = 27,15D/L^2; \quad N_{2;3} = 28,730D/L^2;$$

$$N_{3;4} = 27,820D/L^2; \quad N_{2;3;4} = 27,510D/L^2.$$

38. Определить узловые значения потенциала  $\varphi$  куса кругового сектора, изображенного на фиг. 92. Граничные значения  $\varphi$  указаны. Вычисления провести при  $n = 2$  и  $n = 3$ .



Ф и г. 92.

У к а з а н и е. Потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 \varphi = 0$ .

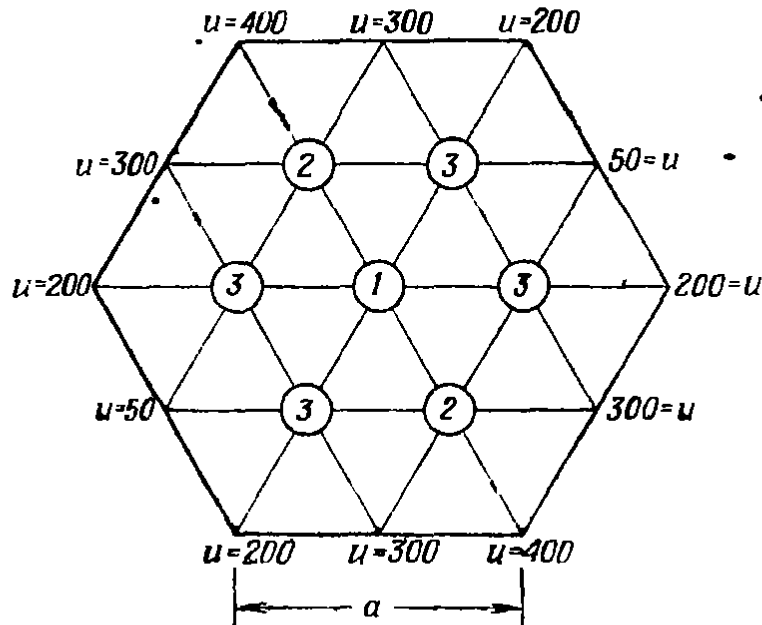
$$\text{О т в е т: } n = 2: \varphi = 155; \quad n = 3: \varphi_1 = 138; \quad \varphi_2 = 171.$$

39. Определить прогиб узловых точек кольцеобразной мембраны, внешний радиус которой равен  $3a$ , а внутренний  $a$ , если давление  $P$  и натяжение  $S$  постоянны. Решить задачу при  $n = 2$  и  $n = 4$ . Значение решения на средней линии мембраны проэкстраполировать (см. § 5).

40. Определить наименьшую частоту свободных колебаний мембраны, рассмотренной в задаче 39. Задачу решить при  $n = 2, 3$  и  $4$ . Результат проэкстраполировать. Положить  $\omega = \omega a \sqrt{m/S}$ .

О т в е т:  $\omega_2 = 1,4142$ ;  $\omega_3 = 1,4893$ ;  $\omega_4 = 1,5153$ ;  $\omega_{2,3} = 1,5495$ ;  $\omega_{3,4} = 1,5487$ .

41. Функция  $u(x, y)$  удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 u = 0$  внутри равностороннего шестиугольника, а на его границе имеет значения, указанные



Ф и г. 93.

на фиг. 93. Вычислить методом итераций узловые значения  $u$  с тремя знаками.

О т в е т:  $u_1 = 233$ ;  $u_2 = 276$ ;  $u_3 = 212$ .

42. Определить функцию кручения  $\varphi$  равностороннего треугольного сечения. Внутри сечения эта функция удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 \varphi + 2 = 0$ , а на границах обращается в нуль (см. § 6). Вычисления провести для трех треугольных сеток: при  $n = 4$ ,  $n = 5$  и  $n = 6$ .

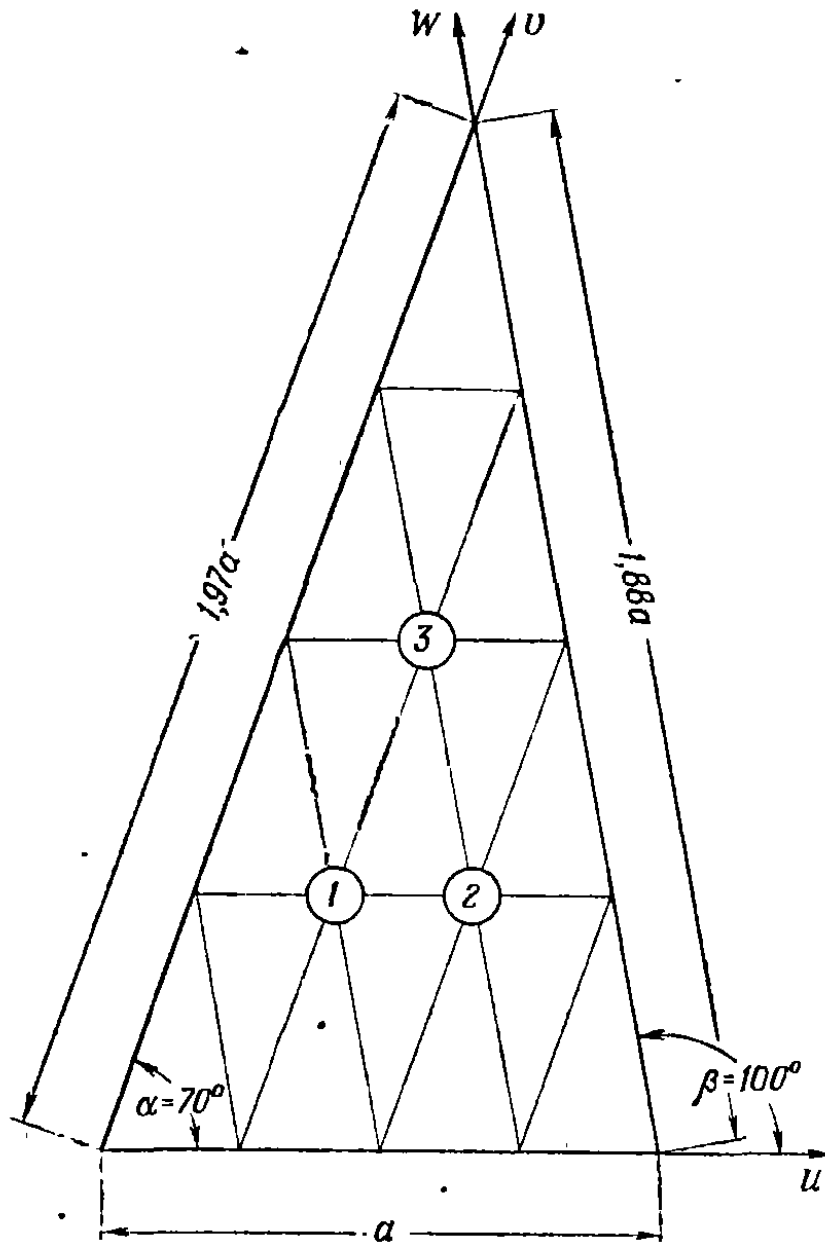
43. Определить наименьшую частоту свободных колебаний равносторонней треугольной мембраны со стороной  $a$ . Вычисления провести в трех треугольных сетках: при  $n = 3$ ,  $n = 4$  и  $n = 5$ . Результат проэкстраполировать.

О т в е т:  $\omega_3 = (6/a) \sqrt{S/m}$ ;  $\omega_4 = (6,532/a) \sqrt{S/m}$ ;  $\omega_5 = (6,788/a) \sqrt{S/m}$ ;  
 $\omega_{3,4} = (7,216/a) \sqrt{S/m}$ ;  $\omega_{4,5} = (7,243/a) \sqrt{S/m}$ ;  $\omega = (7,255/a) \sqrt{S/m}$ .

44. Определить наименьшую частоту свободных колебаний правильной шестиугольной мембраны со стороной  $a$ . Вычисления провести в трех треугольных сетках: при  $n = 1$ ,  $n = 2$  и  $n = 3$ . Результат проэкстраполировать (см. § 11).



45. Определить наименьшую частоту свободных колебаний треугольной мембраны, изображенной на фиг. 94. Вычисления провести в двух треугольных сетках: при  $n = 3$  и  $n = 4$ . Результат проэкстраполировать.



Ф и г. 94.

Указание. Записать оператор  $\nabla^2$  в треугольных координатах при  $\alpha = 70^\circ$ ,  $\beta = 100^\circ$  и положить прогиб равным

$$z(u, v, w, t) = z(u, v, w) \sin \omega t$$

(см. § 11).

Ответ:  $\omega_3 = (4,701/a) \sqrt{S/m}$ ;  $\omega_4 = (4,859/a) \sqrt{S/m}$ ;  $\omega_{3,4} = (5,062/a) \sqrt{S/m}$ .

46. Опертая вдоль краев пластинка правильной треугольной формы со стороной  $a$  находится под действием равномерно распределенной нагрузки  $q$ . Определить узловые значения прогиба. Вычисления провести в четырех треугольных сетках: при  $n = 3, 4, 5$  и  $6$ . Уточнить значение в центре путем экстраполяций (см. задачу 13).

Ответ:  $n = 3$ :  $w_0 = 0,00077qa^4/D$ .  $n = 4$ :  $w_1 = 0,00055qa^4/D$ .  $n = 5$ :  
 $w_1 = 0,00036qa^4/D$ ,  $w_2 = 0,00054qa^4/D$ .  $n = 6$ :  $w_1 = 0,000241qa^4/D$ ,  
 $w_2 = 0,000434qa^4/D$ ,  $w_0 = 0,000627qa^4/D$ ,  $w_0|_{3,6} = 0,000579qa^4/D$ .

47. Опертая вдоль краев пластинка правильной треугольной формы со стороной  $a$  сжимается под действием приложенного к границе давления  $N$  на единицу длины. Вычислить наименьшее критическое значение  $N$ . Вычисления провести в трех треугольных сетках: при  $n = 3, 4$  и  $5$ . Результат проэкстраполировать (см. задачу 20).

48. Опертая вдоль краев пластинка правильной шестиугольной формы со стороной  $a$  сжимается под действием приложенного к границе давления  $N$  на единицу длины. Вычислить наименьшее критическое значение  $N$ . Вычисления провести в трех треугольных сетках: при  $n = 1, 2$  и  $3$ . Результат проэкстраполировать (см. задачу 20).

Ответ:  $N_1 = 4D/a^2$ ;  $N_2 = 6,28D/a^2$ ;  $N_3 = 6,77D/a^2$ ;  $N_{1;2} = 7,04D/a^2$ ;  
 $N_{2;3} = 7,16D/a^2$ ;  $N_{2;3;4} = 7,18D/a^2$ .

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адамса метод 104—108  
 — рекуррентная формула 105  
 Адамса — Штёрмера метод для решения дифференциальных уравнений второго порядка 113  
 — — — рекуррентная формула 115  
 Алгебраические уравнения 7—19  
 — — действительные корни 7—14  
 — — комплексные корни 14—19  
 — — линейная интерполяция 10  
 — — метод касательных Ньютона 11  
 — — — Лобачевского 19  
 — — — Фридмана 17  
 Алгебраические уравнения линейные 21  
 — — — итерационный метод Гаусса — Зейделя 22, 33  
 — — — метод релаксации 22, 35  
 — — — схема Гаусса 21, 22  
 — — — — Холецкого 21, 28
- Бигармонический оператор 171
- Гаусса — Зейделя метод итерационный 33  
 — схема 22—25, 144  
 Горнера схема 9
- Двойное интегрирование численное 173—177  
 — — — формула Симпсона 176  
 — — — трапеций 173  
 Декарта правило знаков 7  
 Дифференциальное уравнение второго порядка 101  
 — — — метод Адамса — Штёрмера 113  
 — — — — Нумерова 121  
 — — — — Фокса 117  
 — — — — накопление погрешности 125  
 — — колебаний маятника 101  
 — — — — в вязкой среде 103  
 — — первого порядка 96  
 — — — — интегрирование при помощи степенных рядов 99
- Дифференциальное уравнение первого порядка, метод Адамса 104  
 — — — — Рунге—Фокса 108  
 Дифференциальные уравнения в частных производных, численное решение 169—242  
 — — обыкновенные, задача Коши 96—136  
 — — — краевые задачи 137—168, см. Краевые задачи  
 — — — система уравнений 111
- Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 96—136  
 — об изгибе пластинки 198, 203  
 — о колебаниях маятника 101, 103  
 — — пластическом кручении, области пластичности 190, 195  
 — — — — решение методом релаксации 189  
 Задача о стационарном распределении тепла в пластинке 207  
 — — теплопроводности 210—214  
 — Эйлера об изгибе стержня под действием продольной нагрузки 154  
 Задачи о собственных значениях 154—157, 198
- Изгиб пластинки 198, 203  
 — стержня под действием продольной нагрузки 154  
 Интерполяционные многочлены 51  
 — формулы Ньютона 64  
 Интерполяция линейная 10
- Колебания маятника 101, 103  
 — мембраны 205  
 Конечные разности 50—84  
 — — левые 55, 56  
 — — правые 62  
 — — центральные 67, 68  
 — — — неусредненные 70  
 — — — усредненные 69  
 Коши задача для обыкновенных дифференциальных уравнений 96—136

- Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений 137--158  
 — — — уравнений второго порядка 138—151  
 — — — — высших порядков 151--154  
 Кручение пластическое 189  
 — упругое 186
- Лапласа оператор 171  
 — — в косоугольных координатах 214—217  
 — — — полярных координатах 217—221  
 — — — треугольных координатах 222—226  
 — уравнение 177
- Либмана процесс 179
- Линейная интерполяция 10
- Линейное дифференциальное уравнение второго порядка, метод Нумерова 121  
 — — — — — Фокса 117—125  
 — — — первого порядка, метод Рунге — Фокса 108
- Лобачевского метод 19
- Матрица единичная 25  
 — квадратная 25  
 — нулевая 25  
 — треугольная 25
- Матрицы 25—28  
 — произведение двух матриц 25  
 — сумма двух матриц 25
- Метод Адамса 104—108  
 — Адамса — Штёрмера для дифференциальных уравнений второго порядка 113
- Метод итерационный Гаусса — Зейделя 33  
 — касательных Ньютона 11  
 — Лобачевского 19  
 — Нумерова 121  
 — разложения в степенные ряды 53  
 — релаксации для систем алгебраических линейных уравнений 22, 35  
 — Фокса для линейного уравнения второго порядка 117  
 — численного интегрирования Рунге — Фокса 108—111
- Нумерова метод 121  
 Нумерова — Фокса формула 123
- Ньютона интерполяционные формулы 64  
 — метод касательных 11
- Оператор бигармонический 171  
 — Лапласа (гармонический оператор) 171  
 — — в косоугольных координатах 214—217  
 — — — полярных координатах 217—221  
 — — — треугольных координатах 222—226
- Операторы второго порядка 172  
 — разностные левые 61  
 — — правые 63  
 — — центральные 72, 172
- Определители 25—28
- Период колебаний маятника 102
- Пластическое кручение 189
- Правило знаков Декарта 7
- Приведенное уравнение 11, 12
- Процесс Либмана 179
- Пуассона уравнение 181
- Рундсона экстраполяционные коэффициенты 81—82  
 — — формулы 80, 81, 82  
 — экстраполяция 79—84
- Рунге — Фокса метод численного интегрирования 108—111, 113  
 — — формула 109
- Ряд Тейлора 53
- Симпсона формула 73, 75, 77, 78
- Система дифференциальных уравнений первого порядка 111—113  
 — линейных алгебраических уравнений 21  
 — — — — диагональная 33
- Схема Гаусса последовательного исключения неизвестных 22—25  
 — Горнера 9
- Тейлора ряд 53
- Трансцендентные уравнения 19
- Треугольные координаты 222
- Узловые значения 50  
 — точки 50  
 — — вблизи криволинейных границ 207—210
- Упругое кручение 186
- Уравнение дифференциальное, см. Дифференциальное уравнение  
 — Лапласа, решение методом итераций 177—180  
 — — — релаксации 180  
 — Пуассона, решение методом релаксации 181—185  
 — равновесия мембраны 182

- Уравнения алгебраические, см. Алгебраические уравнения
- в частных производных, численное решение 169—226
    - — — решенные методом разделения переменных и методом конечных разностей 203
  - трансцендентные 19
- Фокса метод** для линейного дифференциального уравнения второго порядка 117
- формула для линейного дифференциального уравнения второго порядка 118
- Формула Адамса — Штёрмера** 115
- Нумерова — Фокса 123
  - рекуррентная Адамса 105, 111
  - Рунге — Кутты 109
  - Симпсона 73, 75, 77, 78, 176, 177
- Формула трапеций** 73, 75, 76, 173, 174
- Фокса для линейного уравнения второго порядка 118
- Формулы Ньютона** для интерполяции
- вперед 64, 65
  - — — назад 64, 65
  - — — экстраполяции 66
- Фридмана метод** 17
- Функция кручения** 186
- Холецкого метод** решения линейных уравнений 28
- Численное интегрирование** 73—79
- — двойное 173—177
  - — формула Симпсона 77, 176
  - — — трапеций 73, 173
- Экстраполяция по Ричардсону** 79—84
- Эллиптический интеграл** первого рода 102

## ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора . . . . .	3
Из предисловия автора . . . . .	4
<b>Глава I. Численное решение алгебраических и трансцендентных уравнений . . . . .</b>	<b>7</b>
§ 1. Введение . . . . .	7
§ 2. Действительные корни алгебраических уравнений . . . . .	7
§ 3. Комплексные корни алгебраических уравнений . . . . .	14
§ 4. Трансцендентные уравнения . . . . .	19
§ 5. Системы линейных алгебраических уравнений . . . . .	21
§ 6. Схема Гаусса . . . . .	22
§ 7. Матрицы и определители . . . . .	25
§ 8. Схема Холецкого . . . . .	28
§ 9. Итерационный метод Гаусса — Зейделя . . . . .	33
§ 10. Решение систем линейных уравнений методом релаксации . . . . .	35
<i>Задачи</i> . . . . .	41
<b>Глава II. Конечные разности и их приложения . . . . .</b>	<b>50</b>
§ 1. Введение . . . . .	50
§ 2. Интерполяционные многочлены . . . . .	51
§ 3. Разложения в степенные ряды . . . . .	53
§ 4. Левые разности . . . . .	55
§ 5. Правые разности . . . . .	62
§ 6. Интерполяционные формулы Ньютона . . . . .	64
§ 7. Центральные разности . . . . .	67
§ 8. Численное интегрирование . . . . .	73
§ 9. Экстраполяции по Ричардсону . . . . .	79
<i>Задачи</i> . . . . .	84
<b>Глава III. Численное решение задачи Коши . . . . .</b>	<b>96</b>
§ 1. Введение . . . . .	96
§ 2. Начало интегрирования уравнения первого порядка . . . . .	96
§ 3. Начало интегрирования уравнений высших порядков . . . . .	101
§ 4. Метод Адамса . . . . .	104
§ 5. Метод Рунге — Фокса для линейных уравнений . . . . .	108
§ 6. Интегрирование систем дифференциальных уравнений первого порядка . . . . .	111

§ 7. Метод Адамса — Штёрмера для дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	113
§ 8. Метод Фокса для линейного уравнения второго порядка . . . . .	117
§ 9. Накопление погрешности при численном интегрировании . . . . .	125
<i>Задачи</i> . . . . .	129
<b>Глава IV. Численное интегрирование краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений</b> . . . . .	137
§ 1. Краевые задачи . . . . .	137
§ 2. Решение краевых задач с учетом граничных условий с одной стороны . . . . .	138
§ 3. Решение краевых задач для уравнений второго порядка с помощью центральных разностей . . . . .	139
§ 4. Уточнение решения посредством поправок . . . . .	144
§ 5. Уточнение решения методом экстраполяции . . . . .	149
§ 6. Решение краевых задач для уравнений высших порядков . . . . .	151
§ 7. Решение задач о собственных значениях . . . . .	154
§ 8. Применение неравноотстоящих узлов . . . . .	158
<i>Задачи</i> . . . . .	159
<b>Глава V. Численное решение уравнений в частных производных</b> . . . . .	169
§ 1. Разностные операторы в декартовых координатах . . . . .	169
§ 2. Численное двойное интегрирование . . . . .	173
§ 3. Решение уравнения Лапласа методом итераций . . . . .	177
§ 4. Решение уравнения Лапласа методом релаксации . . . . .	180
§ 5. Решение уравнения Пуассона методом релаксации . . . . .	181
§ 6. Упругое кручение . . . . .	186
§ 7. Решение задачи о пластическом кручении методом релаксации . . . . .	189
§ 8. Граничные задачи, содержащие $\nabla^4 z$ . . . . .	196
§ 9. Двумерные задачи о собственных значениях . . . . .	198
§ 10. Решение уравнений в частных производных комбинацией методов разделения переменных и конечных разностей . . . . .	203
§ 11. Колебания мембраны . . . . .	205
§ 12. Узловые точки вблизи криволинейных границ . . . . .	207
§ 13. Двумерная задача о теплопроводности . . . . .	210
§ 14. Оператор Лапласа в косоугольных координатах . . . . .	214
§ 15. Оператор Лапласа в полярных координатах . . . . .	217
§ 16. Оператор Лапласа в треугольных координатах . . . . .	222
<i>Задачи</i> . . . . .	226
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	243

М. Дж. Сальвадори

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕХНИКЕ

Редактор *М. С. АГРАНОВИЧ*  
Технический редактор *В. И. Шпозалов*  
Корректор *Н. Г. Янова*  
Переплет художника *М. Г. Ровенского*

Сдано в производство 8/VI 1955 г.  
Подписано к печати 16/XI 1955 г.  
Т-08360. Бумага  $60 \times 92 \frac{1}{16} = 7,8$  бум. л.  
15,5 печ. л

Уч.-изд. л. 12,8. Изд. № 1/2348

Цена 11 р. Зак. 430

Издательство иностранной литературы,  
Москва, Ново-Алексеевская, 52

---

Министерство культуры СССР.  
Главное управление полиграфической  
промышленности.

4-я тип. им. Евг. Соколовой.  
Ленинград, Измайловский пр., 29.





М. Дж. Сальвадори

ЧИСЛЕННЫЕ  
МЕТОДЫ  
В ТЕХНИКЕ

2