В. В. Шустов

Общее числовое действие и некоторые его свойства

- Формирование определения натуральных арифметических операций
- Натуральные операции и некоторые их свойства
- Целые операции и их свойства

URSS

НОВЫЙ ПОДХОД К ОБОСНОВАНИЮ И ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ЧИСЛОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

В. В. Шустов

ОБЩЕЕ ЧИСЛОВОЕ ДЕЙСТВИЕ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО СВОЙСТВА

URSS
МОСКВА

ББК 22.131

Шустов Виктор Владимирович

Общее числовое действие и некоторые его свойства. — М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 64 с.

В настоящей книге предложен новый взгляд на такие известные со школьной скамьи операции, как сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень, извлечение корня и логарифмирование. На основе представления этих операций в форме числовой переменной введено общее или единое числовое действие, частными случаями которого являются семь известных арифметических операций. Предложены аксиомы общего числового действия, предусматривающие использование новых операндов — номера операции и итерационного числа, что позволило расширить число операций с 7 до множества целых чисел и структурировать понятие «суперстепень», интерес к которому возрос в последнее время. Установлен ряд новых свойств общего действия, представленного в привычной, так называемой инфиксной форме записи. Показаны новые возможности, возникающие в связи с предложенным подходом, в частности, единообразный вывод основных свойств числовых действий, изучаемых в вузовской и школьной математике.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, студентов, учителей, учащихся и всех любознательных читателей, кому интересен новый подход к обоснованию и представлению числовых операций.

Издательство ЛКИ. 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 4. Зак. № 1376.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-382-00546-1

Оглавление

Предисловие автора **5**

Введение **7**

Глава 1. Формирование определения натуральных арифметических операций **11**

1.1. Определение натурального ряда чисел 11
1.2. Операция инкремента и ее свойства 13
1.3. Введение операции сложения 15
1.4. Числовая форма представления операции сложения 16
1.5 Начальное число операции 16
1.6. Определение операции умножения 16
1.7. Начальное число операции умножения 17
1.8. Определение последующих операций 17
1.9. Определение операции возведения в степень как частного вида общей арифметической операции при $n = 3$ 18

Глава 2. Натуральные операции и некоторые их свойства **19**

2.1. Аксиомы натуральных арифметических операций 19
2.2. Общие свойства арифметических операций 21
2.3. Частные свойства арифметических операций 25
2.4. Таблицы арифметических операций 27

2.5. Общее числовое действие ... 29
2.6. Сокращенная запись общего действия, содержащего операции сложения и умножения, при $a = e_n$ ... 29
2.7. Сравнение скорости роста функций, полученных из общего действия ... 30
2.8. Исследование суперстепенной функции ... 34

Глава 3. Целые операции и их свойства ... 37

3.1. Введение отрицательных чисел ... 37
3.2. Определение отрицательного числа повторений ... 38
3.3. Определение обратных операций ... 39
3.4. Расширение множества натуральных операций до множества целых операций ... 40
3.5. Определение обратной операции для шага операции ... 41
3.6. Обратные и противоположные числа ... 44
3.7. Решение уравнений, содержащих неизвестную в итерационном параметре, при ассоциативных и коммутативных операциях ... 46
3.8. Рациональные значения итерационного параметра ... 47
3.9. Табличное представление операционного и итерационного чисел ... 50
3.10. Двойственность свойств ассоциативных и коммутативных операций ... 51
3.11. Языки описания арифметических операций ... 51

Заключение ... 54

Аксиомы и основные формулы ... 58

Литература ... 61

Предисловие автора

Проблемами, затронутыми в книге, я начал заниматься больше десяти лет назад. Сначала считал, что это не очень серьезно и что это — простые и тривиальные вещи, которые можно не выносить на суд публики. Однако оказалось, это совсем не так. Появились приложения предложенного подхода, о которых раньше и не подозревал. Похоже, в рассматриваемом направлении есть своя проблематика и не решенные в настоящее время вопросы, о которых, в частности, говорится в заключении.

Книга эта не является научной монографией в строгом смысле этого слова и не является учебником, в котором все разложено по полочкам и систематически изложено. Это, скорее, описание нового взгляда на известные понятия, который систематизирует и представляет в новом свете все те сведения и представления, которые у нас интуитивно складываются при изучении числовых операций. Здесь есть аксиомы и утверждения, оформленные в редких случаях в виде теорем, а большей частью просто в виде свойств, которые также доказываются и обсуждаются.

Основной моей целью является привлечь внимание читателей к предлагаемому подходу, взглянуть на привычные вещи с неожиданной стороны, показать новые возможности, открывающиеся с новым взглядом. Хотелось бы также, чтобы читатель вместе с автором оценил красоту предлагаемой теории, с одной стороны, объединяющей в единое целое независимый, казалось бы, набор известных числовых действий и, с другой стороны, неограниченно расширяющей число этих действий и представляющей их в удобном виде для использования в теоретических исследованиях и практических приложениях.

В книге много формул и доказательств, однако я старался дать им словесные пояснения, даже в простейших случаях. Каждый читатель может найти то, что заинтересует лично его.

По жанру эта книга представляет собой с одной стороны научное издание, поскольку с новым подходом получены новые, на мой взгляд, результаты. С другой стороны ее можно рассматривать как научно-популярное издание, так как предлагаемые идеи и форма изложения настолько просты и естественны, что могут быть понятны даже школьнику и неискушенному в премудростях математики читателю. Наконец ее можно использовать как учебное пособие при изучении оснований математики, если преподаватель сочтет интересным и полезным предлагаемый новый подход к трактовке числовых действий.

Сравнительно небольшой объем книги, лаконичность и некоторая шероховатость изложения связаны с желанием автора сэкономить время (и деньги, кстати) читателя, а также быстрее донести до него новые знания, добытые автором из сокровищницы природы.

Все замечания, предложения и пожелания автор примет с благодарностью и учтет в своей работе.

«...Вообще в математике типична ситуация, когда введение некоторого объединяющего понятия, которое раскрывает существенные черты некоторых классов объектов и процессов и позволяет объединить их в едином подходе, дает ощутимый толчок в развитии новой области» [10, с. 17].

Введение

С давних времен известны и широко используются действия сложения и вычитания, умножения и деления, возведения в степень, извлечения корня и логарифмирования. Обычно только первые четыре действия относят к арифметическим; далее для общности все действия будем называть арифметическими или числовыми действиями или операциями. Хорошо известны и их свойства, изложенные в ряде книг различного уровня сложности и предназначения: от учебников для младших классов школы до научных трактатов [1], [2]. В частности, как известно, действия сложения и умножения обладают свойствами коммутативности и ассоциативности, т. е. для любых чисел, обозначенных буквами a, b, c имеют место равенства:

$$a + b = b + a;$$

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

$$a * b = b * a;$$

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Тесно связано с арифметическими действиями понятия числа и, соответственно, различные виды чисел:

- натуральные,
- целые,
- рациональные,
- вещественные
- и т. д.

Несмотря на то, что свойства арифметических операций давно и хорошо известны, могут быть поставлены и имеют смысл следующие вопросы.

1. Есть ли другие арифметические операции, и как их можно было бы ввести и обозначить?
2. Сколько таких операций может быть, или, выражаясь в терминах теории множеств [3], какова может быть мощность множества таких операций?
3. Каковы общие и частные свойства множества арифметических операций?
4. Как связаны арифметические операции между собой, в том числе прямые операции с обратными?
5. Можно ли построить общую арифметическую операцию, включающую в себя как частные случаи известные действия и дополнительно к ним еще другие?

Традиционно считается, что число известных операций равно семи.

Тем не менее, ряд авторов в тех или иных целях и тем или иным образом пытались расширить число арифметических операций, рассматривая их, в основном, в функциональной форме (см. работы[4], [6]), в которой действия сложения и умножения записываются, например, в виде *sum*(a, b) и *prod*(a, b), соответственно. Обычно арифметические действия представляются в привычной, так называемой инфиксной форме вида $a + b$, $a * b$, a^b, $a - b$, a/b, $\log_b a$, $\sqrt[b]{a}$, в которой знаки операций располагаются между операндами или обозначаются расположением операндов, что достаточно удобно и широко используется в практике. Отметим, что кроме всего прочего в инфиксной форме знаки операций играют роль разделителей, отделяя одну часть числового выражения от другой и тем самым делая более обозримыми сложные выражения по сравнению с функциональной формой.

В работе [4] в разделе, посвященном вычислению функций, ставится вопрос о «вычислении функций из серии, начинающейся суммой, произведением, экспонентой...» При этом вводится следующий элемент этой серии, названной автором суперэкспонентой

$$sup(x,y) = \left.x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}\right\}y.$$

В работе [8], посвященной способам кодирования информации, вводится понятие, аналогичное суперэкспоненте, и определяется обратная к ней функция, обозначенная как $\log^* x$.

В работе [5], посвященной алгоритмам и рекурсивным функциям, рассматриваются так называемые быстрорастущие функции $P_n(a, x)$. Для операций сложения, умножения и возведения в степень вводятся функции

$$P_0(a, x) = a + x,\ P_1(a, x) = a * x,\ P_2(a, x) = a^x.$$

Далее формулами

$$\begin{aligned} &P_{n+1}(a, 0) = 1 && (n = 1, 2, \ldots),\\ &P_{n+1}(a, 1) = a, &&\\ &P_{n+1}(a, x + 1) = P_n(a, P_{n+1}(a, x)) && (n = 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

определяется последовательность функций $P_n(a, x)$, которые представляют собой двойную рекурсию, как по предыдущему номеру операции n, так и по предыдущему значению второго аргумента операции. Отметим, что представление арифметических действий в функциональной форме не слишком удобно при конструировании из них сложных выражений из-за наличия множества скобок, запятых и обозначений самой функции P.

В работе [6] приводятся определения основных арифметических операций сложения, умножения, возведения в степень в итерационном виде:

A	$x + 0 = x$	$x + (y + 1) = (x + y) + 1$
M	$0 * x = 0$	$(y + 1) * x = (y * x) + x$
E	$x^0 = 1$	$x^{y+1} = (x^y) * x,$

и вводятся определения для последующих операций, названных автором тетрация и пентация:

T	${}^0x = 1$	${}^{(y+1)}x = x^{({}^yx)}$
P	${}_0x = 1$	${}_{(y+1)}x = {}^{({}_yx)}x.$

Не ясно, как обозначить при этом подходе последующие операции, например, десятую. Кроме того, хотелось бы сократить неограниченный в принципе набор определений этих операций до конечного их числа, тем более что все они строятся однотипным образом.

Известна и другая запись определения арифметических операций как повторение определенной ранее операции. Так, в учебнике [9] произведение $m * n$ рассматривается как сумма n слагаемых, каждое из которых равно m:

$$m * n = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{n}.$$

В этом случае фактически используется многократное применение одной операции сложения, определенной для двух чисел. То есть одним из операндов арифметического действия может рассматриваться число повторений операции, формальным образом определенное.

В работе предлагается представление арифметических операций в форме максимально близкой к привычной инфиксной форме. Операции рассматриваются как значения некоторой переменной — операционной. Вводится новая переменная — число повторений операции, — которая используется как для определения последующей операции через предыдущую, так и самостоятельно.

При построении последовательности арифметических действий необходимо избавиться от второй рекурсии, фигурирующей в определении P_{n+1}, и получить более удобную и компактную аналитическую формулу для определения $n + 1$ операции через n-ю. Кроме того, естественным путем стоит уточнить начало ряда арифметических операций (в работе [5] сложение имеет номер $n = 0$, в работе [6] — $n = 1$). Наконец, полезно взглянуть на свойства этих операций с более общих позиций, чем это делается в работах [1], [2].

Интересно было бы выяснить вопрос о том, как в рамках числового подхода определить обратные арифметические действия: вычитание, деление, логарифмирование, извлечение корня — и интерпретировать их как значения n-й операции.

Глава 1

Формирование определения натуральных арифметических операций

Сначала дадим конструктивное определение натуральных чисел и числа нуль.

1.1. Определение натурального ряда чисел

Под натуральным числом будем понимать, в духе работ [1],[6], произвольную непустую конечную последовательность одного и того же символа, например, | — палочка, ограниченную в общем случае фигурными скобками: {||}, {|}, {|||}, впрочем, фигурные скобки далее, там, где это можно, будут опускаться.

Будем называть это записью натурального числа в натуральной форме. Такая форма записи способствует лучшему пониманию понятия натурального числа, операций с ним и свойств таких операций. Из записи чисел в натуральной форме наглядно видно сходство и различие натуральных чисел между собой. Также очевидны исторические предпосылки возникновения этой формы записи.

Под нулем понимаем пустую последовательность, ограниченную такими же скобками, т. е. по определению

$$0=\{\}.$$

Заметим, что знак числа нуль можно рассматривать как единый символ, изображающий в стилизованном виде левую и правую фигурные скобки, слившиеся вместе.

Натуральные числа обладают тем общим свойством, что они состоят из некоторого количества одного и того же символа, а отличаются друг от друга именно разным количеством этих символов. Общее свойство чисел записывается в виде:

$$| \in N^1, || \in N^1, ||| \in N^1 \ldots,$$

или в виде:

$$N^1 = \{|, ||, |||, \ldots\},$$

где N^1 — обозначение последовательности натуральных чисел, расположенных в порядке возрастания, начиная с $|$, и отличающихся друг от друга ровно на один символ $|$. Такая последовательность называется натуральным рядом чисел. Символ $\in$ означает принадлежность числа множеству N^1. Символ ... (многоточие) означает, что последовательность натуральных чисел не ограничена, т. е. за каждым натуральным числом имеется — или можно построить — следующее число, большее данного.

Соответственно, через N^0 можно обозначить совокупность, состоящую из одного числа — нуля, т. е. имеет место

$$\{\} \in N^0 \text{ или } N^0 = \{0\}.$$

Ниже представлена таблица соответствия натуральной и привычной цифровой форм записи натуральных чисел и нуля; третья строчка означает принадлежность числа множеству N^0 или N^1:

Таблица 1

{}	|	||	|||	...
0	1	2	3	...
N^0	N^1	N^1	N^1	...

Различие натуральных чисел между собой может быть выражено посредством отношений «равенство — неравенство» и порядка: меньше — больше, которые являются логическими двухместными функциями, определенными на множестве натуральных чисел с нулем. Отношения чисел могут быть представлены в виде таблиц:

Таблица 2

<table>
<tr><td></td><td>0</td><td>|</td><td>||</td><td>|||</td><td>...</td></tr>
<tr><td>0</td><td>=</td><td>≠</td><td>≠</td><td>≠</td><td>...</td></tr>
<tr><td>|</td><td>≠</td><td>=</td><td>≠</td><td>≠</td><td>...</td></tr>
<tr><td>||</td><td>≠</td><td>≠</td><td>=</td><td>≠</td><td>...</td></tr>
<tr><td>|||</td><td>≠</td><td>≠</td><td>≠</td><td>=</td><td>...</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
</table>

Таблица 3

<table>
<tr><td></td><td>0</td><td>|</td><td>||</td><td>|||</td><td>...</td></tr>
<tr><td>0</td><td>=</td><td>$<$</td><td>$<$</td><td>$<$</td><td>...</td></tr>
<tr><td>|</td><td>$>$</td><td>=</td><td>$<$</td><td>$<$</td><td>...</td></tr>
<tr><td>||</td><td>$>$</td><td>$>$</td><td>=</td><td>$<$</td><td>...</td></tr>
<tr><td>|||</td><td>$>$</td><td>$>$</td><td>$>$</td><td>=</td><td>...</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
</table>

В табл. 2 числа характеризуются двумя отношениями: равенства (=) и неравенства (≠). В табл. 3 отношение неравенства детализируется на отношение меньше ($<$) и на отношение больше ($>$).

1.2. Операция инкремента и ее свойства

Пусть a — произвольное число в последовательности натуральных чисел с нулем. Тогда каждое последующее число в этом ряду может рассматриваться как результат $a1$ применения операции инкремента — увеличения на 1 — к текущему числу a, что может быть записано в виде таблицы:

Таблица 4

<table>
<tr><td>a</td><td>0</td><td>|</td><td>||</td><td>|||</td><td>...</td></tr>
<tr><td>a1</td><td>|</td><td>||</td><td>|||</td><td>||||</td><td>...</td></tr>
</table>

В последующих формулах, наряду с обозначением | (палочка), будем также использовать более привычную запись 1 (единица).

Свойства натуральных чисел, представленных в виде неограниченных таблиц (табл. 1–4), можно компактно записать в конечном виде, используя операцию инкремента и формулы алгебры логики.

Основное свойство принадлежности числа a к натуральному ряду N^1 может быть записано в виде логического выражения, имеющего истинное значение:

$$(1 \in N^1) \wedge (a \in N^1 \Rightarrow a1 \in N^1),$$

и выражено словами: единица есть натуральное число, и если a — натуральное, то $a1$ тоже является натуральным числом.

Результат $a1$ применения операции инкремента $'$ к числу a записывается в виде

$$a' = a1, \tag{1}$$

где $a1$ означает число, полученное в результате добавления к числу единиц, обозначенному буквой a, еще одной единицы.

К числу a' можно также применить операцию инкремента, в результате чего получим число a'':

$$a'' = (a')'.$$

С учетом (1) имеем

$$a'' = a11.$$

По-другому это можно записать

$$a'^{11} = a11,$$

где $'^{11}$ означает, что операция инкремента $'$ применена два раза. Соответственно, однократное применение операции инкремента можно записать как

$$a' = a'^{1}.$$

Рассматривая запись 11 как значение нового числа, обозначим его как k и назовем числом повторений операции, в данном случае операции инкремента. Таким образом, результат применения k раз операции инкремента к числу a можно записать в виде

$$a'^{k} = ak, \tag{2}$$

где ak означает число a, к которому добавлены единицы числа k.

Число повторений операции k записывается в виде верхнего индекса при обозначении шага операции инкремента.

Применяя k раз операцию инкремента к исходному числу 0, имеем

$$0'^{k} = k. \tag{3}$$

Введение чрезвычайно важного понятия числа операций позволяет сокращенно и удобно вводить и другие операции над числами.

Примем по определению, что при $к = 0$ результат применения $к$ раз операции инкремента не изменяет числа, т. е.

$$a'^0 = a.$$

Словесно: 0-кратное применение операции инкремента к числу a не изменяет это число.

1.3. Введение операции сложения

Выражение a'^k, представляющее собой $к$-кратное применение операции инкремента к числу a, можно рассматривать как однократное применение уже некоторой новой операции, назовем ее + (сложение), к двум числам $к$ и a, т. е. по определению, записывая обозначение операции между операндами $к$ и a, имеем

$$a +^1 к = a^k. \quad (4)$$

Первым записываем начальное значение a операции +. Это соотношение при $к = 1$ и с использованием формулы (1), а также соглашения, что единичное число операции можно не указывать, можно записать в виде:

$$a + 1 = a1.$$

Определим число операций для действий сложения в итерационной форме следующим образом:

$$a +^0 h = a;$$

$$a +^{k1} h = (a +^k h) +^1 h.$$

Например, при $к = 11$:

$$a +^{11} h = (a +^1 h) +^1 h.$$

При вычислении значения операции + с числом повторений $k = 11$ сначала вычисляется значение операции при $k = 1$, далее вычисленное на первом этапе значение подставляется на место первого аргумента и еще раз осуществляется сложение полученного на первом этапе числа и второго слагаемого. Таким образом, при вычислении значений двухместной операции происходит итерация по первому аргументу. Скобки ( ) означают, как обычно, что выражение в них вычисляется в первую очередь.

1.4. Числовая форма представления операции сложения

Обозначение операции сложения + можно записать в числовой форме, обозначив ее как [1], где 1 означает, что это первая введенная операция, т. е. по определению

$$[1] = +, \tag{5}$$

а прямоугольные скобки [] означают, что это операция, а не операнд.

Таким образом, формула (4) для определения операции сложения с учетом (5) может быть записана в виде:

$$a\,[1]^1\,\kappa = a'^k.$$

1.5 Начальное число операции

Введем начальное число операции e как такое число, которое при подстановке в качестве начального значения операции при однократном ее применении дает второй операнд, обозначенный далее буквой h, т. е.

$$e[1]^1\,h = h. \tag{6}$$

Из соотношений (4) и (3) следует, что начальное число операции сложения e_1 есть число 0, т. е.

$$e_1 = 0,$$

т. к.

$$0 +^1 h = 0^h = h.$$

1.6. Определение операции умножения

Определим операцию умножения чисел следующим образом:

$$a * h = e_1 +^a h, \tag{7}$$

как a-кратное применение операции сложения с начальным значением e_1, являющимся начальным элементом операции сложения, и с шагом h.

Пример. Пусть $a = 111$, $h = 11$, тогда

$111 * 11 = ((0 + 11) + 11) + 11 = 111111$,

или в десятичном виде $3 * 2 = 6$.

1.7. Начальное число операции умножения

Найдем начальное число операции умножения e_*.

Пусть $a = 0$, тогда $0 * h = 0 +^0 h = 0$, т. е. $0 * h \neq h$ при любом $h > 0$. В силу определения (6) число 0 не является начальным числом операции умножения.

Пусть $a = 1$, тогда $1 * h = 0 +^1 h = h$ для любого h. Отсюда следует, что число 1 является начальным числом операции умножения т. е.

$$e_* = 1.$$

1.8. Определение последующих операций

Операция умножения была определена через предыдущую операцию сложения, в частности, соотношение (7), которое может быть записано с учетом (5) в виде:

$$a * h = e_1\,[1]^a\, h.$$

Таким образом, операция умножения $*$ может быть рассмотрена как следующая после сложения операция и может быть обозначена как:

$$[11] = *,$$

т. е.

$$a\,[11]^1\, h = e_1[1]^a\, h. \qquad (8)$$

Обозначение [1] , [11] можно рассматривать как некоторое число — назовем его номером операции и обозначим буквой n.

Выражение (8) можно рассматривать как соотношение между значениями текущего n и последующего $n + 1$ номера операции, т. е. частный вид при $n = 1$ следующего общего соотношения

$$a[n + 1]^1\, h = e_n[n]^a\, h. \qquad (9)$$

Таким образом, формулой (9) определен общий вид арифметических операций для любого натурального $n = 1, 2, 3, \ldots$, выражающий последующую операцию через предыдущую.

Можно также сказать, что формулой (9) определяется общее арифметическое действие, ставящее в соответствие четверке чисел a, n, k, h некоторое число — результат этого действия.

1.9. Определение операции возведения в степень как частного вида общей арифметической операции при $n = 3$

Пусть $n = 2$ — это операция умножения. Тогда при $n = 3$ согласно (9) имеем:

$$a[3]h = a[1\,1\,1]h = 1[1\,1]^a h = 1*^a h = 1\underbrace{*h*h...*h}_{a} = h^a,$$

или окончательно:

$$a[3]\,h = h^a,$$

т. е. действительно $a[3]h$ обозначает и дает выражение для операции возведения в степень, причем основанием степени является шаг операции h, а показателем — начальное значение a n-й арифметической операции.

Глава 2

Натуральные операции и некоторые их свойства

В этой главе будут рассматриваться арифметические операции над расширенным множеством натуральных чисел N_0, включающим число нуль.

2.1. Аксиомы натуральных арифметических операций

Наиболее точным, ясным и коротким является аксиоматическое определение арифметических операций. Сначала введем некоторые определения и обозначения.

Назовем элементарным арифметическим выражением упорядоченную четверку чисел, записываемую, например, в виде:

$$a[n]^k h$$

— в инфиксной форме или в виде

$$Ar(a, n, k, h)$$

— в функциональной форме

со следующими обозначениями и названиями:

a — начальный операнд операции, или ее начальное значение,

n — номер операции, выделяется заключением в прямоугольные скобки,

h — шаг операции, или шаговый операнд,

k — число повторений, или кратность операции, или итерационный операнд, записываемый в виде верхнего индекса (по соглашению при $k = 1$ его можно не писать),

e_n — начальное число n-й операции,

Ar — функция, осуществляющая отображение Ar: $N_0^4 \to N_0$.

В аксиомах используется понятие функция следования x', ставящая в соответствие своему аргументу — числу нуль или натуральному числу x — следующее натуральное число, и числовые константы 0 — нуль и 1 — единица, связанные соотношением

$$0' = 1.$$

Аксиомами арифметических операций являются следующие итерационные определения (обозначаются буквой I с числовым индексом).

I_1 $$a[1]^1 1 = a'.$$

I_2 $$a[1]^1 h' = (a[1]^1 h)'.$$

I_3 $$a[n']^1 h = e_n [n]^a h.$$

I_4 $$a[n]^{k'} h = (a[n]^k h)[n]^1 h.$$

I_5 $$e_n = \begin{cases} 0 & при\ n = 1 \\ 1 & при\ n > 1 \end{cases}.$$

Аксиомы I_1 и I_2 соответствуют обычному определению сложения [2].

I_1' $$a + 1 = a'.$$

I_2' $$a + h' = (a + h)'.$$

Аксиома I_3 определяет текущую операцию через предыдущую. В других обозначениях эта аксиома, с учетом I_1' и соглашения о необязательности писать число повторений при $k = 1$, имеет вид:

I_3' $$a[n + 1]\, h = e_n [n]^a h.$$

Аксиома I_4 посредством ввода в качестве одного из операндов арифметического выражения числа повторений k формализует определение многократного применения текущей операции.

$$a[n]^k h = \ldots((a\underbrace{[n]h)[n]h)\ldots[n]h}_{k}.$$

Введение числа повторений k позволяет отказаться от двойной рекурсии, использующейся в традиционном определении арифметических операций в функциональной форме (см. введение).

Аксиома I_4 с учетом I_1' также может быть записана в виде:

I_4' $$a[n]^{k+1}\, h = (a\, [n]^k\, h)\, [n]^1\, h.$$

Аксиома I_5 с использованием принципа математической индукции может быть записана в форме:

I_5' $$e_n\, [n]\, h = h,$$

в которой выражено основное свойство начального числа n-й операции.

Действительно, справедливость I_5' при $n = 1$ следует из аксиомы N_1, приведенной ниже, и коммутативности сложения. Справедливость индукционного шага при $n + 1$ следует из цепочки равенств:

$$e_{n+1}\, [n+1]h = e_n\, [n]^{e_{n+1}}\, h = e_n\, [n]^1\, h = h.$$

Кроме итерационных аксиом должны выполняться начальные или нулевые аксиомы:

N_1 $$a[1]^1\, 0 = a.$$

N_2 $$a[0]^k\, h = a.$$

N_3 $$a[n]^0\, h = a.$$

Аксиома N_1 соответствует основному свойству числа нуль:

$$a + 0 = a.$$

Аксиомы N_2 и N_3 выражают свойство нулевой операции и нулевого числа повторений операции соответственно. Можно сказать, что значение арифметического действия для нулевой операции и для нулевого числа повторений операции равно начальному операнду.

2.2. Общие свойства арифметических операций

Из аксиом I_1'–I_5' могут быть выведены ряд свойств арифметических операций, имеющих место для произвольного натурального числа n, т. е. для всех натуральных операций.

1. Значение выражения для последующего значения первого операнда через текущее значение этого операнда удовлетворяет соотношению:

$$(a + 1)[n + 1]h = (a[n + 1]h)[n]h,$$

что доказывается цепочкой равенств:

$$(a+1)[n+1]h = e_n[n]^{a+1} h = (e_n[n]^a h)[n]^1 h = (a[n+1]^1 h)[n]^1 h.$$

При $n + 1 = 2$ и $n + 1 = 3$ свойство 1 может быть записано как:

$$(a+1)[2]h = (a[2]h)[1]h,$$

$$(a+1)[3]h = (a[3]h)[2]h.$$

Последние две формулы, являясь следствием аксиом I_1'–I_5', соответствуют итерационной части определения операций умножения:

$$(a+1) * h = a * h + h,$$

и возведения в степень:

$$h^{a+1} = h^a * h,$$

приведенного в работах [1], [4], [6].

Ниже представлена таблица соответствия между номером операции, названием операции, привычным (символьным) обозначением операции и начальным числом операции.

Номер операции	1	2	3	...	n	...
Название операции	сложение	умножение	возведение в степень	...	n-я операция	...
Символьное обозначение операции	$a + h$	$a * h$	h^a	...	нет	...
Числовое обозначение операции	$a[1]h$	$a[2]h$	$a[3]h$	...	$a[n]h$	...
Начальное число e_n	0	1	1	...	1	...

2. Значение операции для суммы $k + m$ числа операций сводится к последовательному выполнению двух операций, причем начальным операндом второй операции является результат выполнения первой операции со значением числа операций k:

$$a[n]^{k+m} h = (a[n]^k h)[n]^m h.$$

Доказывается индукцией по m. Справедливость свойства при $m = 1$ следует из аксиомы I_4' и аксиомы I_1' при $a = k$. Верность индукционного шага следует из цепочки равенств:

$$a[n]^{k+m'} h = a[n]^{(k+m)'} h = (a[n]^{k+m} h)\, [n]^1 h =$$

$$= ((a[n]^k h)\, [n]^m h)\, [n]^1 h = (a[n]^k h)\, [n]^{m'} h.$$

3. Определим значение $a[n+1]h$ при некоторых значениях a, произвольных h и натуральных n.

Пусть $a = 0$, тогда из цепочки равенств $0[n+1]h = e_n[n]^0\, h = e_n$ следует свойство:

$$0[\mathrm{n}+1]h = e_n.$$

В частном случае при $n = 2$ имеем:

$$0[3]h = 1 \text{ или } h^0 = 1.$$

Обычно это соотношение используется для определения степени при нулевом показателе и положительном основании (например, [6]).

Следствие 3.1. Имеет место формула:

$$0^0 = 1.$$

Подчеркнем, что это соотношение является следствием предложенных аксиом, а не свойством по определению.

Обычно выражение 0^0 считается неопределенным (см., например, [7]). Неопределенным оно считается потому, что при исследовании предела выражения x^y при $x \to \infty$ и при $y \to \infty$, где x и y — действительные числа, получается разным в зависимости от последовательности предельных переходов. В данном случае имеем дело только с целыми числами. Подробнее этот вопрос рассматривается в разделе 2.8.

Из следствия 3.1 следует, что имеет место последовательность равенств:

$$0^1 = 0,\ 0^0 = 1,\ 0^{0^0} = 0,\ 0^{0^{0^0}} = 1, \ldots .$$

Таким образом, значение суперстепени ($n = 4$) с основанием 0 и с начальным операндом a есть:

$$a[4]0 = 0, \text{ если — } a \text{ нечетное, т. е. } a = 2b - 1 \text{ и}$$

$$a[4]0 = 1, \text{ если — } a \text{ четное, т. е. } a = 2b.$$

Пусть $a = 1$, тогда из равенств $1[n+1]h = e_n[n]^1\, h = h$ следует, что

$$1[n+1]h = h.$$

Пусть $a = 2$, тогда из равенств $2[n+1]h = e_n[n]h[n]h = h[n]h$ следует, что

$$2[n+1]h = h[n]h.$$

Следствие 3.2. Из последней формулы следует, что при $h = 2$ выполняется равенство

$$2[n+1]2 = 2[n]2\,,$$

и т. к. $2 + 2 = 4$, то в соответствии с принципом математической индукции при любом натуральном n имеет место равенство

$$2[n]2 = 4, \quad \text{т. е.}$$

$$2 + 2 = 2 * 2 = 2^2 = \ldots = 4.$$

4. Имеет место тождество:

$$3[n+1]2 = 4[n]2.$$

Действительно, цепочка равенств

$$3[n+1]2 = 2[n]2[n]2 = 4[n]2$$

доказывает это соотношение. Свойство 4 при $n = 1, 2, 3$ имеет вид:

$$3 * 2 = 4 + 2,\ 2^3 = 4 * 2,\ 2^{2^2} = 2^4, \text{ соответственно.}$$

5. Связь n-й арифметической операции с функциями Аккермана. В работе [5] соотношением

$$B(n, x) = P_n(2, x)$$

вводятся так называемые функции Аккермана, где $P_n\,(a, x)$ определяются равенствами, которые приведены во введении, а также диагональная функция Аккермана $A(x)$, удовлетворяющая соотношению

$$A(x) = B(x, x).$$

Легко видеть, что функции Аккермана $B(n, x)$ выражаются через n-ю арифметическую операцию как

$$B(n, x) = x[n+1]2,$$

а диагональная функция Аккермана $A(x)$ связана с ней как

$$A(x) = x[x+1]2.$$

Заметим, что диагональная функция Аккермана $A(x)$ определяется арифметическим выражением, содержащим переменную x не только в начальном аргументе операции, но и в номере операции.

В теории рекурсивных функций функция Аккермана $A(x)$ дает пример общерекурсивной функции, не являющейся в смысле этой теории примитивно рекурсивной (см. [5]), т. к. она растет быстрее, чем суперпозиции и итерации функции следования.

2.3. Частные свойства арифметических операций

Из ассоциативности и коммутативности операций сложения и умножения следует ряд свойств n-й арифметической операции, верных, соответственно, только при $n = 1, 2$.

Свойство 1. Имеет место распределительный закон относительно суммы начальных операндов:

$$(a + b)[n + 1]c = (a[n + 1]c)[n](b[n + 1]c).$$

Это доказывает цепочка равенств:

$$(a + b)[n + 1]c = e_n[n]^{a+b}c = (e_n[n]^a c)[n]^b c =$$
$$= (e_n[n]^a c)[n](e_n[n]^b c) = (a[n + 1]c)[n](b[n + 1]c).$$

Следствие 1.1. При $n = 1$ это свойство соответствует распределительному закону умножения относительно сложения:

$$(a + b) * c = a * c + b * c.$$

Следствие 1.2. При $n = 2$ это свойство соответствует правилу возведения в степень суммы показателей.

$(a + b)$ [3] $c = (a[3]$ $c)$ [2] $(b[3]$ $c)$, или в привычном виде:

$$c^{a+b} = c^a * c^b.$$

Свойство 2. Имеет место соотношение:

$$(a * b)[n + 1]c = a[n + 1](b[n + 1]c).$$

Действительно, рассмотрим выражение вида

$$V = e_n [n]c\ [n]c \ldots [n]c$$

....

$$[n]c\ [n]c \ldots [n]c,$$

содержащего a строк, в котором каждая строка кроме первой есть продолжение предыдущей, и имеющего в каждой строке b групп вида $[n]c$.

Выражение V, содержащее $a * b$ групп вида $[n]c$, может быть записано как

$$V_1 = e_n[n]^{a*b}c = (a*b)[n + 1]c.$$

В силу ассоциативности операции n выражение V может быть также записано как

$$V = e_n\,[n]\,(c\,[n]c\ldots[n]c)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[n]\,(c\,[n]c\ldots[n]c).$$

Добавляя после каждой открывающейся скобки в соответствии с аксиомой I_5' группу $e_n[n]$, выражение V можно записать как

$$V_2 = e_n[n]^a(e_n[n]^b\,c) = a[n+1](b[n+1]c).$$

Из равенства выражений V_1 и V_2 следует искомое соотношение.

Следствие 2.1. При $n = 1$ это свойство соответствует ассоциативности умножения:

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Следствие 2.2. При $n = 2$ это свойство соответствует правилу возведения в степень произведения показателей:

$(a * b)\,[3]\,c = a[3]\,(b[3]\,c)$, или в обычной форме:

$$c^{a*b} = (c^b)^a = (c^a)^b.$$

Свойство 3. Имеет место соотношение:

$$a[n+1](b[n]c) = (a[n+1]b)[n](a[n+1]c).$$

Действительно, рассмотрим выражение вида

$$V = e_n[n]b\,[n]b\ldots[n]b$$

$$[n]c\,[n]c\ldots[n]c,$$

содержащее две строки и имеющее в первой строке a групп вида $[n]b$ и во второй строке a групп вида $[n]c$. Выражение V с использованием свойства ассоциативности операции n может быть записано как

$$V_1 = (e_n[n]^a\,b)\,[n]^a\,c = (e_n[n]^a\,b)\,[n]\,(e_n[n]^a\,c) =$$

$$= (a[n+1]b)[n](a[n+1]c).$$

С другой стороны, группируя $[n]b[n]c$ по парам, имеем

$$V_2 = (e_n[n]^a\,(b[n]c) = a[n+1](b[n]c).$$

Из равенства выражений V_1 и V_2 следует искомое соотношение.

Следствие 3.1. При $n = 1$ это свойство соответствует распределительному закону умножения относительно сложения:

$$a * (b + c) = a * b + a * c.$$

Следствие 3.2. При $n = 2$ это свойство соответствует правилу возведения произведения в степень:

$$a[3](b[2]c) = (a[3]b)[2](a[3]c),$$

или в привычной форме:

$$(b * c)^a = b^a * c^a.$$

Свойство 4. Возможность сведения k-кратного применения операции n к однократному применению следующей операции $n + 1$, т. е. имеет место следующая

Теорема. При $n = 1, 2$ справедливо равенство

$$a[n]^k h = a[n](k[n + 1]h).$$

Действительно, в силу ассоциативности операции n верна цепочка равенств:

$$a[n]^k h = a[n](e\,[n]^k h) = a[n](k[n + 1]h).$$

Отметим, что для случая $a = e_n$ указанное свойство в соответствии с аксиомой I_3' верно для любого натурального n (а не только при $n = 1, 2$).

В качестве примера приведем вычисление арифметического выражения при $n = 4$, $k = 2$:

$$2[4]^2 2 = (2[4]2)[4]2 = 4[4]2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536.$$

2.4. Таблицы арифметических операций

Ниже в качестве иллюстрации приведены значения общей арифметической функции $F = a[n]h$ для значений операционного числа $n = 1, 2, 3, 4$, начального значения операции $a = 0, 1, 2, 3, 4$ и шага операции $h = 0, 1, 2, 3, 4$. Таблицы сложения, умножения и возведения в степень приведены для единообразия и сопоставления с более старшими операциями.

Значения операции, когда она может быть легко выполнена, представлены в десятичном виде. В случаях, когда значения в десятичном виде имеют громоздкий вид или не хватит места для их изображения, результаты представлены посредством использования более младших операций.

Следует обратить внимание на то, как резко возрастают значения общей арифметической функции с увеличением номера операции n, и при сравнительно малых значениях n, a, h значения функции могут превышать любые встречающиеся в практике числа.

Отметим, что симметричность таблиц относительно главной диагонали, отражающая коммутативность операций, имеет место только при $n = 1$ и $n = 2$, т. е. только для действий сложения и умножения.

$F = a[1]\, h = a + h.$

a						
4	4	5	6	7	8	
3	3	4	5	6	7	
2	2	3	4	5	6	
1	1	2	3	4	5	
0	0	1	2	3	4	
	0	1	2	3	4	h

$F = a[2]\, h = a * h.$

a						
4	0	4	8	12	16	
3	0	3	6	9	12	
2	0	2	4	6	8	
1	0	1	2	3	4	
0	0	0	0	0	0	
	0	1	2	3	4	h

$F = a[3]\, h = h^a.$

a						
4	0	1	16	81	256	
3	0	1	8	27	64	
2	0	1	4	9	16	
1	0	1	2	3	4	
0	1	1	1	1	1	
	0	1	2	3	4	h

$F = a[4]\, h.$

a						
4	0	1	65536	$3^{3^{27}}$	$4^{4^{256}}$	
3	0	1	16	3^{27}	4^{256}	
2	0	1	4	27	256	
1	0	1	2	3	4	
0	1	1	1	1	1	
	0	1	2	3	4	h

$F = a[5]\, h.$

a						
4	0	1	E	A	B	
3	0	1	2^{16}	C	D	
2	0	1	4	3^{27}	$4^{4^{256}}$	
1	0	1	2	3	4	
0	1	1	1	1	1	
	0	1	2	3	4	h

$E = 2^{16}[4]2$
$A = 3[4]3[4]3[4]3$
$B = 4[4]4[4]4[4]4$
$C = 3[4]3[4]3$
$D = 4[4]4[4]4$

2.5. Общее числовое действие

В числовых выражениях вида 2,5 + 5,3 или $a/h + c$ знаки операций +, *, / и другие кроме основной своей функции как способа действия над числами еще выполняют функцию разделения чисел. При введении вместо конкретных операций переменной, обозначенной буквой, эта функция утрачивается, и необходимо как-то выделить операнд, обозначающий операцию, из остальных операндов. Это можно сделать, окружив переменную n, обозначающую операцию, например, квадратными скобками:

$$a[n]h,$$

или в общем случае при условии использования числа повторений k как:

$$a[n]^k h.$$

Это выражение в случаях, когда параметр k также является некоторым выражением, можно записывать линейно, например, в виде:

$$a[n]h : k,$$

где знак : является разделителем параметров h и k.

Во всех трех выражениях, приведенных выше, все переменные одного типа — числовые, и уже все выражение $a[n]^k h$ можно рассматривать как некоторое действие, ставящее четверке переменных a, n, k, h единственное значение — результат этого действия.

С другой стороны, можно сказать, что общее числовое действие является общей арифметической функцией Ar, заданной рекурсивным образом посредством аксиом I_1'–I_5' и N_1–N_3 и осуществляющей отображение

$$Ar\colon\ N_0^4 \to N_0,$$

т. е. по определению имеет место равенство:

$$Ar(a, n, k, h) = a[n]^k h.$$

2.6. Сокращенная запись общего действия, содержащего операции сложения и умножения, при $a = e_n$

Введем упрощенную запись выражения $a[n]^k h$ при $n = 1$ и $a = e_1$, вообще не записывая эти части выражения, т. е. по определению будем считать, что:

$$e_1[1]\,{}^kh = {}^kh.$$

Свойство коммутативности умножения в этих обозначениях можно записать в виде:

$${}^kh = {}^hk = k * h,$$

или словами: некоторое число h, повторенное k раз равно числу k, повторенному h раз.

В частном случае при числе шага операции $h = 1$ соотношение это можно записать как:

$${}^k1 = {}^1k = k,$$

или словесно: некоторое число k можно рассматривать как единицу, повторенную k раз, либо как само число k, повторенное один раз.

При шаге операции $h = 0$ соотношение это можно записать как:

$${}^k0 = {}^0k = 0,$$

что означает, что число 0, повторенное конечное число раз, есть нуль, и то, что некоторое число, повторенное 0 раз, тоже есть число 0.

Как и ранее, введем упрощенную запись общего выражения $a[n]\,{}^kh$ при $n = 2$ и $a = e_2$, также не записывая эти части выражения, т. е. по определению будем считать, что:

$$e_2[2]\,{}^kh = h^k,$$

причем, в отличие от предыдущего случая, число повторения k операции будем записывать справа от шага операции.

Из вида правой части этого выражения можно сделать вывод о том, что привычную запись возведения в степень h^k можно рассматривать как сокращенную по определенному правилу запись общего числового действия.

2.7. Сравнение скорости роста функций, полученных из общего действия

Из общего действия, рассматриваемого как функция четырех переменных,

$$Ar(a, n, k, h) = a[n]\,{}^kh$$

могут быть построены четыре функции одной переменной x, полученные путем фиксации в качестве параметров остальных трех переменных со следующими названиями и определениями:

$In(x) = x[n]^k h$ — начальная функция,

$Op(x) = a[x]^k h$ — операционная функция,

$It(x) = a[n]^x h$ — итерационная функция,

$St(x) = a[n]^k x$ — шаговая функция.

Можно рассматривать эти функции как проекции некоторой гиперповерхности, определенной в четырехмерном пространстве переменных a, n, k, h, принимающих целочисленные значения, на соответствующие координатные гиперплоскости.

Интересно установить скорости роста этих функций относительно друг друга при стремлении переменной x к бесконечности.

Анализ частных случаев показал, что эти четыре функции по величине скорости роста при больших x располагаются в следующем порядке:

1) $St(x)$ — шаговая функция,
2) $In(x)$ — начальная функция,
3) $It(x)$ — итерационная функция,
4) $Op(x)$ — операционная функция,

т. е. медленнее всего растет шаговая функция, а быстрее всего — операционная.

Строго говоря, имеет место приведенная в достаточно общей формулировке следующая

Теорема. Существует такое натуральное число K, что при любых фиксированных натуральных числах a_0, n_0, k_0, h_0, таких, что

$$K < a_0, K < n_0, K < k_0, K < h_0,$$

существует натуральное число x_0, что при всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x$, имеют место неравенства:

$$a[n]^k x < x[n]^k h < a[n]^x h < a[x]^k h.$$

Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть некоторую точку a, n, k, h и рассмотреть, как растут относительно значения функции $a[n]^k h$ в этой точке функции при увеличении аргументов в различных направлениях на 1.

Задача доказательства исходных неравенств, таким образом, сводится к доказательству следующей цепочки неравенств:

$$a[n]^k h < a[n]^k (h + 1) < (a + 1)[n]^k h < a[n]^{k+1} h < a[n + 1]^k h.$$

При изменении своих параметров значение общего числового действия увеличивается, но с разной скоростью: медленнее всего при увеличении шагового параметра, быстрее в направлении начального параметра, еще быстрее в направлении итерационного параметра и быстрее всего в направлении увеличения операционного параметра.

Отметим, что из последней цепочки неравенств следует, что общее действие монотонно возрастает по всем своим параметрам (в силу транзитивности неравенств каждое последующее выражение цепочки больше начального).

При доказательстве теоремы ограничимся простыми, не вполне строгими рассуждениями.

Неравенство

$$a[n]^k h < a[n]^k (h+1)$$

почти очевидно, если его представить в виде

$$e_1[1]^m h < e_1[1]^m (h+1),$$

где m — натуральное число, определяемое последовательным применением аксиом I_3' и I_4'.

Это неравенство, если его записать в привычной форме

$$0 +^m h < 0 +^m (h+1)$$

или в виде

$$m * h < m * (h+1),$$

выражает известное свойство монотонности операции умножения в случае натуральных значений своих сомножителей.

Неравенство

$$a[n]^k x < x[n]^k h$$

в условиях теоремы сводится к неравенству

$$a[n]x < x[n]h,$$

а это неравенство доказывается индукцией по n и использованием известного неравенства

$$x^a < h^x,$$

выражающего тот факт, что показательная функция растет быстрее степенной (см., например, [14]).

Неравенство

$$(a+1)[n]^{k}h < a[n]^{k+1}h$$

с использованием аксиомы I_4' и коммутативности общего действия относительно суммы итерационных параметров можно записать в виде:

$$(a+1)[n]^{k}h < (a[n]h)[n]^{k}h.$$

Последнее неравенство в условиях теоремы эквивалентно неравенству

$$a+1 < a[n]h,$$

которое верно при всех $a \geq 2$, $n \geq 3$, $h \geq 2$ (действительно, при $n = 3$, $h = 2$ неравенство $a + 1 < 2^{a}$ верно при $a \geq 2$).

Для доказательства неравенства $a[n]^{k+1}h < a[n+1]^{k}h$ левую часть его запишем как

$$a[n]^{k+1}h = (a[n]h)[n]^{k}h \leq (a[n+1]h)[n]^{k}h,$$

а правую часть — как

$$a[n+1]^{k}h = (a[n+1]h)[n]^{k-1}h,$$

что сводит доказательство исходного неравенства к доказательству неравенства вида:

$$A[n]^{k}h < A[n+1]^{k-1}h,$$

где $A = a[n+1]h$ — некоторое натуральное число.

В силу монотонности общего действия доказательство этого неравенства сводится к доказательству неравенства

$$e_n[n]^{k}h < e_n[n+1]^{k-1}h,$$

которое можно записать в виде:

$$e_n[n]^{k}h < (e_n[n+1]^{k-2}h)[n+1]h.$$

Это неравенство может быть представлено в линейной форме записи общего действия с использованием двоеточия : (см. раздел 2.5), после которого следует итерационный параметр, в виде:

$$e_n[n]h : k < e_n[n]h{:}(e_n[n+1]^{k-2}h).$$

В силу монотонности общего действия по итерационному параметру и с использованием равенства $e_n = e_{n+1}$ при $n \geq 2$ последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$k < e_{n+1}[n+1]^{k-2}h$$

или неравенству

$$k < (k-2)[n+2]h.$$

При всех достаточно больших k, n, h это неравенство верно. Например, при $n = 1$, $h = 2$ неравенство

$$k < 2^{k-2}$$

имеет место при $k \geq 5$. Доказательство теоремы закончено.

2.8. Исследование суперстепенной функции

Общее действие при значениях операционного параметра, соответствующих известным арифметическим операциям, может рассматриваться не только при целочисленных, но и при рациональных и вещественных значениях своих параметров.

Рассматривая общее действие как функцию четырех аргументов, можно получить четыре функции одного аргумента, фиксируя остальные три.

При значении операционного параметра $n = 3$ и итерационного $k = 1$ существуют три функции одной переменной:

$x[3]h = h^x$ — показательная функция,

$a[3]x = x^a$ — степенная функция,

$x[-3]h = \log_h x$ — логарифмическая функция.

Свойства и графики этих функций, рассматриваемые при вещественных значениях своих аргументов, хорошо известны и изложены в различных книгах, начиная со школьных учебников по математике. Было бы интересным исследовать функции, полученные из общего действия при $n \geq 4$.

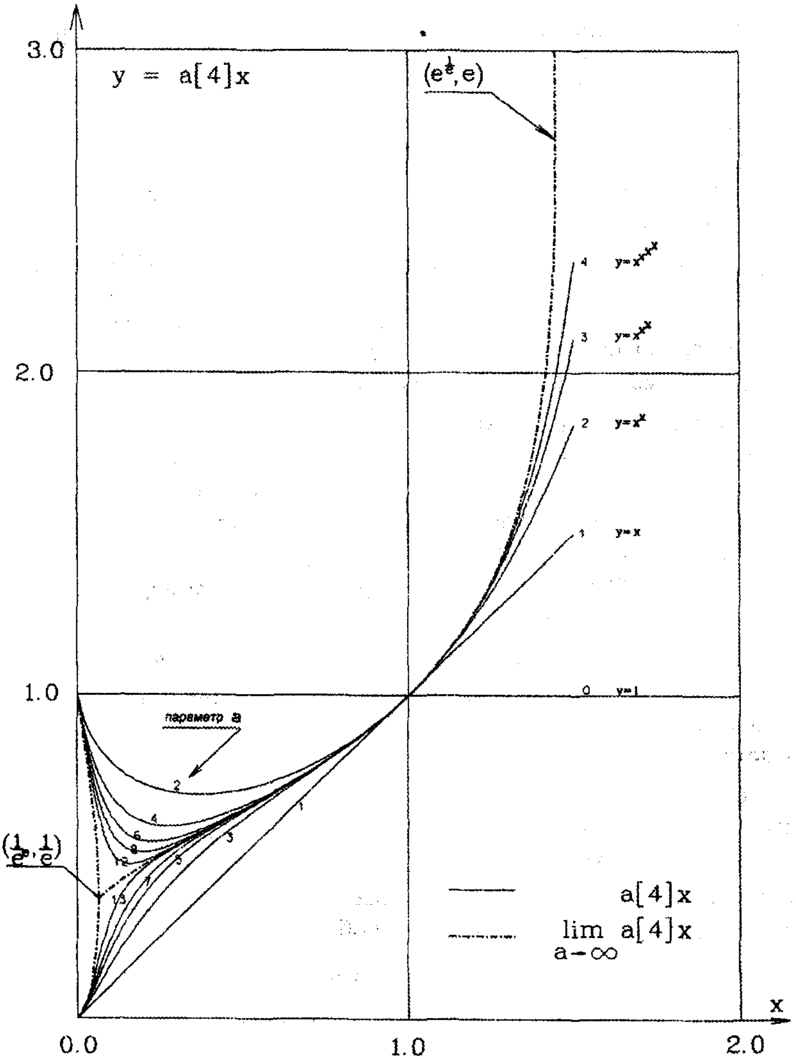
Ограничимся далее рассмотрением суперстепенной или сверхстепенной функции вида

$$sup(x,a) = a[4]x = \left.x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}\right\}a.$$

Автором проведены численные исследования на компьютере свойств этой функции. На рис. 1 представлены графики функции $a[4]x$ при $0 \leq x \leq 1{,}5$ для различных значений параметра a.

Отметим основные особенности суперстепенной функции.

1. При $a \geq 1$ функция возрастает, и очень быстро, при стремлении аргумента x к бесконечности.
2. Функция равна 1 при $x = 1$ и $a = 0, 1, 2, \ldots$.



3.0
2.0
1.0
0.0
1.0
2.0
x
y = a[4]x
$(e^{\frac{1}{e}}, e)$
$y=x^{x^{x^x}}$
$y=x^{x^x}$
$y=x^x$
y = x
y = 1
параметр a
$(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$
a[4]x
$\lim_{a \to \infty} a[4]x$

Рис. 1

3. При $x > 1$ кривые, соответствующие различным значениям параметра a, монотонно стремятся к некоторой предельной кривой $s(x)$, изображенной на рисунке пунктирной линией.

4. При $0 \le x < 1$ поведение кривых различно и зависит от того, принимает ли параметр a четные или нечетные значения. При нечетных $a = 1, 3, 5, \ldots$ значение $sup(0, a) = 0$, при четных $a = 0, 2, 4, \ldots$ значение $sup(0, a) = 1$, т. е. значение функции при $x = 0$ определяется четностью числа a. При нечетных значениях параметра a функция монотонно возрастает, а при четных значениях a имеется точка минимума. При стремлении значения параметра a к бесконечности для нечетных значений a графики стремятся к предельной кривой $s(x)$ снизу, а для четных значений a стремятся к предельной кривой $s(x)$ сверху. Точки, в которых функция принимает минимальные значения, определяются из условия равенства нулю ее первой производной. Так, для значения параметра $a = 2$ точка минимума соответствует значению $x_* = 1/e$.

5. Предельная функция $s(x) = lim\ sup(x, a)$ при $a \to \infty$ на промежутке $[0,1/e^e)$ является двузначной функцией, на отрезке $[1/e^e, e^{1/e}]$ — однозначной функцией (число e — основание натуральных логарифмов). При $x > e^{1/e}$ значение $s(x) = \infty$. Предельную функцию можно рассматривать как функцию, имеющие две однозначные ветви, соответствующие четным и нечетным значениям параметра a, которые при значениях переменной x:

   $0 \le x < 1/e^e$ — различны, а при $1/e^e \le x < \infty$ — совпадают.

Результаты исследований свойств суперстепенной функции, приведенных выше, соответствуют исследованиям, проведенным в работе [11] средствами математического анализа. В указанной работе исследовалась сходимость последовательности вида $a_0 = 1$, $a_n = x^{a_{n-1}}$, которая фактически определяет суперстепенную функцию. Перефразируя полученные в этой работе результаты, можно сказать, что суперстепенная функция $sup(x, a)$ при $a \to \infty$ для различных промежутков изменения переменной x ведет себя следующим образом:

при $0 \le x < 1/e^e$ предела не имеет,

при $1/e^e \le x \le e^{1/e}$ имеет предел (конечный),

при $e^{1/e} < x$ имеет предел бесконечный.

Глава 3

Целые операции и их свойства

В главе 2 предложено представление прямых арифметических операций в числовой форме, согласно которой операциям сложения, умножения и возведения в степень поставлены в соответствие положительные целые числа 1, 2, 3. Было бы интересно в рамках предложенного подхода рассмотреть также обратные операции — вычитание, деление, логарифмирование, извлечение корня — и расширить множество значений операционного операнда в общем арифметическом действии до целых чисел. Интересно также установить соответствие между обратными операциями и отрицательными числами. Для этого необходимо ввести понятие знака числа и дать определяющие его свойства аксиомы.

3.1. Введение отрицательных чисел

Наряду с натуральными или положительными целыми числами вида $n = 1, 2, 3\ldots$, можно рассматривать и отрицательные целые числа вида $-n = -1, -2, -3\ldots$, которые получаются из положительных чисел приписыванием впереди знака – (минус). Таким образом, для каждого положительного числа существует, или, то же самое, можно построить, отрицательное число.

Множество положительных, отрицательных целых чисел и числа нуль составляет множество целых чисел и обозначается как Z. Таким образом, в терминах теории множеств [3] Z равно объединению множеств N, $-N$ и $\{0\}$, т. е. $Z = -N \cup \{0\} \cup N$.

Числа вида $-n = -1, -2, -3, \ldots$ можно также рассматривать как результат применения операции изменения знака, которая обозначается символом $-$, к натуральному числу n. К отрицательному числу $-n$ также можно применить операцию $-$. Принимается, что в этом случае получается исходное положительное число n. Аналогично для отрицательного числа $-n$ двойное применения операции отрицания дает в результате то же отрицательное число $-n$.

Первая знаковая аксиома целых чисел может быть записана как

$$Z1 \qquad -(-z) = z.$$

Двукратное изменение знака числа z приводит к тому же самому числу z. Таким образом, множество значений знака числа бинарно: либо знака у числа нет — в этом случае число называется положительным, либо знак есть — в этом случае число называется отрицательным. Применение операции изменения знака, выполненное четное число раз, не изменяет знак исходного числа, а выполненное нечетное число раз — изменяет его.

Вторая знаковая аксиома целых чисел может быть записана как

$$Z2 \qquad -z + z = 0$$

и выражена словами: сумма противоположных чисел равна нулю.

3.2. Определение отрицательного числа повторений

Расширим область определения числа повторений k операции в общем арифметическом действии

$$a[n]^k h$$

до множества целых чисел.

Формула для суммы чисел повторений операции

$$a[n]^{m+k} h = (a[n]^m h)[n]^k h,$$

при $m = -k$ может быть записана как

$$a[n]^{-k+k} h = (a[n]^{-k} h)[n]^{k} h. \qquad (1)$$

Левая часть (1) в силу аксиомы Z2 и аксиомы N_3 будет равна

$$a[n]^{-k+k} h = a[n]^{0} h = a$$

и, соответственно, (1) перепишется в виде:

$$(a[n]^{-k} h)[n]^{k} h = a, \qquad (2)$$

что дает определение для отрицательного числа повторений операции.

3.3. Определение обратных операций

Пусть для общего арифметического действия известен результат c, но не известен начальный операнд x. Тогда говорят, что x определяется уравнением

$$x[n]^{k} h = \text{c}. \qquad (3).$$

В силу формулы (2) корень уравнения (3) может быть представлен как

$$x = c[n]^{-k} h,$$

а выражение $c[n]^{-k} h$ может быть названо обратным арифметическим действием.

Таким образом, можно сказать, что прямые арифметические операции — это общее арифметическое действие при натуральных значениях числа повторений, а обратные операции — при отрицательных значениях этого числа.

Учитывая, что обратные арифметические операции традиционно определяются соотношениями:

$$(c - h) + h = c,$$

$$(c / h) * h = c,$$

$$h^{\log_h c} = c,$$

соответственно для вычитания, деления и логарифмирования, которые могут быть переписаны в обозначениях общего арифметического действия при $k = 1$ как

$$(c-h)[1]h = c,$$
$$(c/h)[2]h = c,$$
$$\log_h c[3]h = c,$$

можно поставить в соответствие знакам обратных арифметических операций –, /, log соответствующие числа прямых операций и значение итерационного числа k, равного –1.

Ниже представлена таблица соответствия символьного и числового представления обратных операций

Номер обратной операции	**1**	**2**	**3**	**...**	***n***	**...**
Название обратной операции	вычитание	деление	логарифмирование	...	n-я операция	...
Символьное обозначение операции	$a-h$	a/h	$\log_h a$	...	нет	...
Числовое обозначение операции	$a[1]^{-1}h$	$a[2]^{-1}h$	$a[3]^{-1}h$	...	$a[n]^{-1}h$	...

3.4. Расширение множества натуральных операций до множества целых операций

По аналогии с отрицательным числом операций введем отрицательный номер операции. Примем по определению, что

$$a[-n]h = a[n]^{-1}h, \tag{4}$$

т. е. действие с отрицательным номером операции есть действие с положительным ее номером и числом повторений операции, равным –1.

В случае, когда и операционное число отрицательно, и число повторений также отрицательно, примем соглашение, что

$$a[-n]^{-k}h = a[n]^{k}h. \tag{5}$$

Правило знаков номера операции n и числа повторений операции k можно записать в виде таблицы:

$n\backslash k$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

Заметим, что цепочка соотношений

$$a[-n]^{-k}h = a[n]^{-(-k)}h = a[n]^{k}h$$

и цепочка соотношений

$$a[-n]^{-k}h = a[-(-n)]h = a[n]^{k}h$$

соответствуют второй знаковой аксиоме Z2 как для числа операций k, так и для номера операции n.

Правило знаков может также быть записано в виде двух положений.

1. Знак операции можно изменить одновременно с изменением знака числа операций без изменения результата действия.
2. Знак числа повторений операции можно перенести на номер операции и наоборот.

3.5. Определение обратной операции для шага операции

Рассмотрим уравнение относительно шага операции

$$a[n]x = c. \qquad (6)$$

Для $n = 1, 2$ в силу коммутативности операций сложения и умножения это уравнение эквивалентно уравнению

$$x[n]a = c,$$

и решение его представляется аналогично решению для начального операнда в виде:

$$x = c[n]^{-1}a,$$

или в соответствии с правилом знаков (4) выражением:

$$x = c[-n]a.$$

В этом случае одна и та же обратная операция применяется как к начальному значению операции, так и к шагу операции.

В случае, когда $n \geq 3$ (возведение в степень и выше), прямая операция некоммутативна, т. е. в общем случае

$$a[n]h \neq h[n]a\,,$$

поэтому обратная операция для шага операции не равна обратной операции для ее начального операнда.

Пусть имеем уравнение для определения шага операции при возведении в степень

$$a[3]x = c, \tag{7}$$

что эквивалентно в обычных обозначениях уравнению

$$x^a = c.$$

Решением уравнения (7) является выражение:

$$x = (1/a)[3]c. \tag{8}$$

Действительно, подставляя выражение (8) в уравнение (7) и используя формулу

$$a[n+1](b[n+1]c) = (a * b)[n+1]c$$

из раздела 2.3, имеем для левой части уравнения (7) при $n = 2$

$$a[3]((1/a)[3]c) = (a * (1/a))[3]c = 1[3]c = c,$$

что обращает (7) в верное равенство.

В привычных обозначениях решение уравнения (7) записывается как

$$x = \sqrt[a]{c}. \tag{9}$$

Из выражений (8) и (9) следует, что

$$\sqrt[a]{c} = (1/a)[3]c.$$

Таким образом, операция определения величины шага по известным значениям начального операнда a и результата операции c, называемая традиционно извлечением корня a-й степени из числа c, выражается через прямую операцию с обратным значением начального операнда прямой операции.

Ниже представлена единая таблица названий и обозначений прямых и обратных операций в числовом и символьном обозначениях при значениях итерационного числа $k = 1$ (по умолчанию оно не пишется) и $k = -1$.

Номер операции	Название операции	Символьное обозначение операции	Числовое обозначение операции ($k = 1$)	Числовое обозначение операции ($k = -1$)
...	...	...	...	...
n	n–я операция	нет	$a[n]h$	$a[-n]^{-1}h$
...	...	...	...	...
3	возведение в степень	h^a	$a[3]h$	$a[-3]^{-1}h$
2	умножение	$a * h$	$a[2]h$	$a[-2]^{-1}h$
1	сложение	$a + h$	$a[1]h$	$a[-1]^{-1}h$
0	нулевая	нет	$a[0]h$	$a[0]^{-1}h$
–1	вычитание	$a–h$	$a[-1]h$	$a[1]^{-1}h$
–2	деление	a/h	$a[-2]h$	$a[2]^{-1}h$
–3	логарифмирование	$\log_h a$	$a[-3]h$	$a[3]^{-1}h$
...	...	...	...	...
$-n$	$-n$-я операция	нет	$a[-n]h$	$a[n]^{-1}h$
...	...	...	...	...

Таким образом, все 7 известных арифметических операций представлены как определенные значения номера операции и для операции извлечения корня — значения начального операнда в общем арифметическом действии.

В рамках рассмотрения обратных операций приобретает однозначность выбор начала нумерации операций сложения, умножения, возведения в степень и далее. Нумерацию операций следует начинать не с 0, как сделано в работе [5], а с 1, как предложено в работе [6].

На основе предложенных аксиом I_1'–I_5' и аксиом знака $Z1$, $Z2$ могут быть получены известные свойства обратных операций. Так, если к обеим частям равенства

$$(a[n + 1]c)[n](b[n + 1]c) = (a + b)[n + 1]c$$

из раздела 2.3, верного при $n = 1, 2$, применить обратную операцию, то получится равенство

$$((a[n+1]c)[n](b[n+1]c))\,[n+1]^{-1}c = ((a+b)[n+1]c)\,[n+1]^{-1}c.$$

Левая часть равенства при $a = x[n+1]^{-1}c$ и $b = y[n+1]^{-1}c$ будет равна

$$(x[n]y)[n+1]^{-1}c,$$

а правая часть равенства преобразуется как

$$(x[n+1]^{-1}c + y[n+1]^{-1}c)\,[n+1]^{1-1}c = x[n+1]^{-1}c + y[n+1]^{-1}c.$$

Окончательно, приравнивая правую и левую части, имеем

$$(x[n]y)[n+1]^{-1}c = x[n+1]^{-1}c + y[n+1]^{-1}c,$$

что при $n = 1$ соответствует равенству

$(x+y)/c = x/c + y/c$ — известное свойство дроби,

и при $n = 2$ соответствует равенству

$$(x[2]y)[3]^{-1}c = x[3]^{-1}c + y[3]^{-1}c,$$

что в привычных обозначениях

$$\log_c x * y = \log_c x + \log_c y$$

выражает одно из свойств логарифмов.

3.6. Обратные и противоположные числа

Противоположными числами называются такие числа a и h, что в сумме дают число 0, а обратными — такие числа b и h, произведение которых есть 1, т. е. удовлетворяющим равенствам $a + h = 0$ и $b * h = 1$.

В общем случае для произвольного натурального номера операции n такие числа удовлетворяют уравнению

$$x[n]\,h = e_n. \tag{10}$$

Решение этого уравнения, являющегося частным случаем уравнения (2), дается формулой

$$x = e_n\,[n]^{-1}\,h. \tag{11}$$

Действительно, подставляя выражение для x, определяемое формулой (11), в левую часть уравнения (11), имеем:

$$e_n\,[n]^{-1}\,h\,[n]\,h = e_n\,[n]^{-1+1}\,h = e_n\,[n]^0\,h = e_n,$$

что совпадает с правой частью этого уравнения.

Решение уравнения для различных n = 1, 2, 3 имеет вид:

$n = 1$ $\qquad x_1 = 0\,[1]^{-1}\,h = 0\,[-1]\,h = 0 - h = -h,$

$n = 2$ $\qquad x_2 = 1[2]^{-1}\,h = 1[-2]\,h = 1/h,$

$n = 3$ $\qquad x_3 = 1[3]^{-1}\,h = 1[-3]\,h = \log_h 1 = 0.$

Покажем, что при всех $n \geq 3$ обратное число равно нулю, независимо от h. Действительно, в силу $0[n]h = e_{n-1}[n-1]^0\,h = e_{n-1}$ имеет место

$$0[n]\,h = e_{n-1}. \qquad (12)$$

Для тех операций, для которых выполняется условие

$$e_{n-1} = e_n\,,$$

а это условие выполняется при всех $n \geq 3$ (см. аксиому I_5), соотношение (12) имеет вид:

$$0[n]\,h = e_n,$$

а это и означает, что при всех $n \geq 3$ — $x_n = 0$.

Данные о противоположных и обратных числах для всех значениях номера операции n представлены в таблице:

Номер операции	**Операция**	**Корень уравнения (10)**	**Название числа**	**Зависимость от h**
1	сложение	$-h$	противоположное	есть
2	умножение	$1/h$	обратное	есть
3	возведение в степень	0	обратное	нет
...	...	...	...	...
n	$[n]$	0	обратное	нет

Наряду с обычными или левыми обратными числами, являющимися решением уравнения (10), можно рассмотреть и правые обратные числа, которые являются решениями уравнения вида

$$a[n]\,x = e_n. \qquad (13)$$

В силу коммутативности операций сложения и умножения левое противоположное число совпадает с противоположным правым, а левое обратное число совпадает с правым обратным.

Левым обратным числом для операций возведения в степень и выше является единица. Действительно, из цепочки равенств

$$a[n]\, e_{n-1} = e_{n-1}[n-1]^{a}\, e_{n-1} = e_{n-1}[n-1]\, e_{n-1} \ldots [n-1]\, e_{n-1} = e_{n-1}$$

следует, что

$$a[n]\, e_{n-1} = e_{n-1}.$$

Это равенство при условии $e_{n-1} = e_n$, что справедливо при всех $n \geq 3$ (см. аксиому I_5), можно записать в виде:

$$a[n]\, e_n = e_n.$$

Отсюда следует, что $x_n = e_n$ является корнем уравнения (13), и т. к. при $n \geq 3$ начальное число $e_n = 1$, следовательно $x_n = 1$.

3.7. Решение уравнений, содержащих неизвестную в итерационном параметре, при ассоциативных и коммутативных операциях

К уравнениям такого вида относится уравнение типа:

$$a[n]^{x}\, h = c. \tag{14}$$

Рассмотрим это уравнение для значения номера операции $n = 1, 2$, т. е. для действий сложения и умножения, обладающих свойствами ассоциативности и коммутативности.

В этом случае согласно теореме, приведенной в разделе 2.3, имеем

$$a[n]^{x}\, h = a[n](x[n+1]h),$$

и уравнение (14) перепишется в виде:

$$a[n](x[n+1]h) = c.$$

Используя свойство коммутативности, это уравнение можно записать как:

$$(x[n+1]h)[n]\, a = c.$$

Выражение в скобках согласно формуле (3) раздела 3.3 может быть записано в виде:

$$x[n+1]h = c[n]^{-1}\, a.$$

Еще раз используя формулу (3), получаем окончательное выражение для корня уравнения (14):

$$x = (c[n]^{-1}\, a)\,[n+1]^{-1}h. \qquad (15)$$

Пример. Пусть имеем уравнение:

$$3 +^{x} 2 = 11.$$

Подставляя в формулу (15) значения коэффициентов $a = 3$, $n = 1$, $h = 2$, $c = 11$, имеем:

$$x = (11[1]^{-1}\, 3)[1+1]^{-1}2 = (11-3)/2 = 4.$$

Непосредственной проверкой

$$3 +^{4} 2 = 3+2+2+2+2 = 11$$

убеждаемся в том, что $x = 4$ является корнем исходного уравнения.

3.8. Рациональные значения итерационного параметра

Расширим область определения числа повторений операций с множества целых чисел до множества рациональных чисел, которые представляются в виде отношения p/q целых чисел p и q.

Сделаем это для значения номера операции $n = 1, 2$, т. е. для операций сложения и умножения, обладающих свойствами ассоциативности и коммутативности. Докажем сначала, что для таких операций верна следующая

Теорема. При $n = 1, 2$ и, по крайней мере, для неотрицательных a, p, s, h имеет место соотношение:

$$a[n]^{p*s}\, h = a[n]^{p}(e_n[n]^{s}\, h). \qquad (16)$$

Действительно, рассмотрим выражение вида

$$V = a\,[n]\,h\,[n]\,h\ldots[n]\,h$$

....

$$[n]\,h\,[n]\,h\ldots[n]\,h,$$

содержащее p строк, в котором каждая строка кроме первой есть продолжение предыдущей, и в каждой строке s групп вида $[n]\,h$.

Выражение V, содержащее $p*s$ групп вида $[n]$ h может быть записано как

$$V_1 = a[n]^{p*s}\, h.$$

В силу ассоциативности операции n выражение V может быть также записано как

$$V = a\,[n]\,(h\,[n]\,h \ldots [n]\,h)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(h\,[n]\,h \ldots [n]\,h).$$

Добавляя после каждой открывающейся скобки в соответствии с аксиомой I_5' группу $e_n[n]$, выражение V можно записать как

$$V_2 = a[n]^{p}(e_n[n]^{s}\, h).$$

Из равенства выражений V_1 и V_2 следует искомое соотношение.

Используем свойство (16) для определения числа повторений при рациональных его значениях. Пусть $s = 1/q$. Примем по определению, что и в этом случае имеет место (16), которое можно записать как:

$$a[n]^{p/q}\, h = a[n]^{p}(e_n[n]^{1/q}\, h). \qquad (17)$$

Это допущение, аналогичное допущению о существовании рациональных чисел p/q, в случае когда p не делится на q нацело.

В частном случае, когда $p = q$, соотношение (17) при перестановке его сторон местами может быть записано:

$$a[n]^{q}(e_n[n]^{1/q}\, h) = a[n]^{1}\, h. \qquad (18)$$

После обозначения выражения в скобках как h_1, т. е. при

$$h_1 = e_n[n]^{1/q}\, h \qquad (19)$$

выражение (18) принимает вид:

$$a[n]^{q}\, h_1 = a[n]^{1}\, h, \qquad (20)$$

и может быть проинтерпретировано следующим образом: значение действия при однократной итерации и значении итерационного параметра $1/q$ есть q-кратное применение операции с некоторым модифицированным шагом h_1 относительно исходного шага операции h.

Формула (17) с использованием аксиомы I_3' может быть также записана в виде:

$$a[n]^{p/q}\, h = a[n]^{\,p}(1 / q\; [n + 1]^1\, h),$$

а также в виде:

$$a[n]^{p/q}\, h = a[n]\; (p / q\; [n + 1]^1\, h). \tag{21}$$

Формулу (21) можно рассматривать как расширение области действия теоремы о сводимости. Путем дальнейшего обобщения можно показать, что соотношение

$$a[n]^r\, h = a[n]\; (r\; [n + 1]\; h) \tag{22}$$

имеет место при $n = 1, 2$ для всех рациональных значений своих параметров.

Подставляя в (22) значения $n = 1, 2$ и переходя к символьным обозначениям операций, получаем равенства:

$$a +^r h = a + r * h,$$

$$a *^r h = a * h^r,$$

для сложения и умножения соответственно.

Рассматривая функции одного переменного $f_1\,(x)$ и $f_2\,(x)$, определяемые выражениями

$$f_1(x) = a + r * x,$$

$$f_2(x) = a * h^x,$$

в которых в качестве независимого аргумента используется число повторений, обозначенное буквой x, можно сказать, что общее действие как функция числа операций для операции сложения является линейной функцией, а для операции умножения — показательной функцией.

Наконец, отметим, что при целочисленных значениях числа повторений k общее действие можно рассматривать как арифметическую прогрессию с общим членом

$$a_k = a[1]^k\, h$$

для действия сложения и как геометрическую прогрессию с общим членом

$$a_k = a[2]^k\, h$$

для действия умножения. При традиционном подходе общий член прогрессий представляется в виде суперпозиции двух действий: сложения и умножения

$$a_k = a + h * k$$

для арифметической прогрессии и умножения и возведения в степень

$$a_k = a * h^k$$

для геометрической прогрессии.

3.9. Табличное представление операционного и итерационного чисел

Введем сетку с целочисленными координатами, которая в горизонтальном направлении соответствует увеличению номера операции n и в вертикальном направлении соответствует увеличению числа повторений k, как показано в таблице. В узлах сетки помещены обозначения операций, которые соответствуют этим узлам. Здесь используется линейное обозначение операции возведения в степень: $a^b = a \uparrow b$.

			k				
log	/	–	1	+	*	↑	
–3	–2	–1	0	1	2	3	n
↑	*	+	–1	–	/	log	

Представление операций в координатах n, k наглядно показывает:

- упорядоченность операций, соответствующая упорядоченности целых чисел,
- симметричность операций относительно нулевой операции (симметричность операций относительно вертикальной оси),
- симметричность операций относительно нулевого числа повторений операции (симметричность операций относительно горизонтальной оси).

Шесть обычных операций составляют лишь малую часть возможных значений комбинаций номера n и числа повторений k операции, составляющее счетное неограниченное множество.

Необходимо отметить, что общее действие аксиомами I_1'–I_5' и N_1–N_3 определено при всех неотрицательных значениях своих параметров. В то же время, если какой либо параметр принимает отрицательное значение, то общее действие при каких-то значениях других параметров может быть не определено.

Типичный пример: как известно, не существует действительного числа x, такого, что $x^2 = -1$, т. е. выражение (1/2)[3](–1) не определено.

Также и выражение вида $1[3]^{-2}\, h = \log_h \log_h 1$ не определено.

Таким образом, необходимо всякий раз исследовать вопрос о том, при каких значениях своих параметров общее действие определено и имеет смысл.

3.10. Двойственность свойств ассоциативных и коммутативных операций

С точки зрения общего числового действия при значениях операционного параметра $n = 1, 2$ оно является ассоциативным и коммутативным относительного этого параметра. Это обстоятельство и позволило, как показано в разделах 2.3 и 3.5, вывести некоторые формулы, *частными* случаями которых являются известные свойства произведений, степеней и логарифмов. Таким образом, вместо независимого и двукратного вывода свойств, например, произведений и степеней, достаточно один раз вывести формулу и требуемые законы получить, просто подставляя нужные значения операционного параметра.

Аналогичный подход читатель может использовать самостоятельно при выводе свойств дробей, корней и в других случаях, не рассмотренных автором.

3.11. Языки описания арифметических операций

Об арифметических операциях и выражениях можно говорить на разных языках.

Первый язык — это привычный: сложение, умножение, деление с общепринятыми понятиями: слагаемое, уменьшаемое, разность и т. д. Есть числа и постоянные символы, обозначающие конкретные операции. Числа имеют названия в соответствии с текущим именем операции. Например, уменьшаемое — первый операнд операции вычитания и т. д.

Второй язык связан с представлением операций в числовой форме и введением числа повторений операции. В этом случае предлагается говорить о нулевой, первой, второй, n-й операции, выполненной 0, 1, 2, …, k раз с начальным операндом a и шагом операции h.

Третий язык подразумевает, что рассматривается общее числовое действие, имеющее четыре параметра:

- начальный параметр,
- операционный параметр,
- итерационный параметр,
- шаговый параметр.

Все параметры равноправны в том смысле, что все они принимают численные значения.

Четвертый язык — это функциональный язык. Рассмотрение и описание числового действия осуществляется с точки зрения функций. В этом случае вводится обозначение арифметической функции, имеющей определенный набор аргументов. Пример использования этого языка приведен во введении.

Второй язык является промежуточным между первым и третьим языком. В нем сохраняется некоторое выделение понятия «операция» с точки зрения терминологии.

В третьем языке операции представляют собой значения операционного параметра, который является равноправным среди остальных операндов в том смысле, что так же, как и они, принимает числовые значения.

Все четыре языка равноправны с точки зрения общего подхода, однако имеют разные выразительные возможности и каждый более удобен в своей области использования.

Первый язык исторически возник первый, традиционен и удобен в практических приложениях. Но в рамках этого языка невозможно исследовать свойства операций, общие для них всех. Для него кажутся случайными, например, равенства $2 + 2 = 2 * 2 = 2^2$. В этом языке нет понятия итерационного параметра, и только иногда число повторений используется при определении операций умножения и возведения в степень через операции сложения и умножения, не будучи, однако, формально определенным в виде какой-либо аксиомы. В рамках традиционного языка, в том числе из-за недостатка соответствующих выразительных средств, слабые возможности введения других операций, отличных от известных. Далее введения понятия суперстепени и суперлогарифма дело не продвинулось.

Функциональный язык, также представляющий операции в числовой форме, более пригоден для теоретических исследований, однако обилие скобок, запятых в случае сложных выражений делает его, возможно, менее удобным по сравнению со вторым и третьим языком, описывающими общее числовое действие в инфиксной форме.

В работе, как это часто бывает и в реальной жизни, используется смесь описанных языков, что обусловлено, в том числе, и историческими причинами. Вполне допустимо писать, и все следующие выражения эквивалентны:

$$2 +^3 4 = 2[1]^3 4 = 2[1]4 : 3 = 2 + 4 : 3 = 2 + 4 + 4 + 4 = 14.$$

В качестве разделителей параметров общего действия [,], : могут быть выбраны и другие символы.

Хотелось бы подчеркнуть то, что только представление операций в виде переменной, принимающей числовые значения, позволило неограниченно расширить число этих операций.

Заключение

Подведем итог, отметив в краткой форме особенности предложенного подхода и основные полученные результаты.

1. Числовые операции рассматриваются как значения переменной в отличие от классических представлений, когда они считаются постоянными и обозначаются конкретными знаками.
2. Операционная переменная принимает числовые (не символьные) значения, что позволяет неограниченно и просто наращивать их число, единообразно их обозначать и ранжировать операции по порядку.
3. Вводится новое понятие — число повторений операции, или, по другому, итерационное число, что позволяет формализовать определение старшей операции через младшую.
4. Одинаковый тип всех параметров выражения — числовой — позволяет рассматривать все операции как общее числовое действие, в котором операции являются равноправным параметром среди всех четырех параметров действия.
5. Перечисленные особенности позволили структурировать и сократить потенциально бесконечное число аксиом до минимального их числа. Ранее, как отмечено во введении, на определение новой операции требовалась своя пара аксиом.
6. Общее действие представлено в инфиксной форме, максимально приближенной к привычной записи арифметических операций.
7. Предложено аксиоматическое описание общего действия, включающее начальные и итерационные аксиомы, причем известные аксиомы переформулированы в новых обозначениях, и добавле-

ны совершенно новые, определяющие итерационный $a[n]^{k+1}\,h = (a[n]^k\,h)\;[n]^1\,h$ и операционный $a[n+1]\,h = e_n\;[n]^a\,h$ параметры общего действия.

8. Предложенные аксиомы определяют неограниченное множество числовых операций, в соответствии с которым известные арифметические действия — логарифмирование, деление, вычитание, сложение, умножение, возведение в степень — представлены как целые числа вполне определенного диапазона (–3, –2, –1, 1, 2, 3, соответственно).

9. Установлены некоторые свойства числового действия, общие для всех операций, и дополнительные свойства для операций, удовлетворяющих условию коммутативности и ассоциативности.

10. Числовой вид арифметических операций наглядно показывает связь операций между собой в смысле их последовательного определения старших операций через младшие, что выражено аксиомой I_3'.

11. Проведено исследование по сравнению скорости роста функций одной переменной, полученных из общего действия, и установлен порядок, в котором они располагаются по величине скорости роста.

12. Исследованы свойства суперстепенной функции, определенной на множестве вещественных чисел, как пример изучения аналитических свойств общего действия.

13. Установлены знаковые свойства операционного и итерационного операндов, позволяющие согласованно изменять знаки этих операндов.

14. Показано, что известные свойства действий с целыми числами, дробями, логарифмами и корнями могут быть единообразно получены из аксиом, определяющих единое арифметическое действие, и знаковых аксиом. Это может быть использовано в преподавании школьной и вузовской математики.

15. Показана естественная упорядоченность арифметических операций с указанием ее начала (нулевая операция) и взаимной обратимости операций сложения и вычитания, умножения и деления, возведения в степень и логарифмирования, соответствующих противоположным числам 1 и –1, 2 и –2, 3 и –3. Операции извлечения корня ставится в соответствие определенное значение начального операнда в общем числовом действии.

16. Числовая форма операций позволяет рассматривать уравнения не только относительно обычных операндов, например $a[n]x = b$, что привычно, но и уравнения вида $a[x]h = b$, или $a[n]^x\,h = b$, в котором

в роли неизвестного выступает номер операции или число повторений операции.

17. Общее действие может рассматриваться как способ структуризации понятия «суперстепень», или «сверхстепень», рассмотренного в работах [11]–[13].
18. Введение числа операций как одного из операндов общего действия позволяет рассматривать общее действие как математический, точнее алгоритмический процесс, имеющий начало, состоящий из определенного числа шагов определенной величины и приводящий к определенному результату — значению этого действия.

Предложенная числовая форма обозначений арифметических операций не предусматривает отказ от привычных обозначений, имеющих свои несомненные достоинства и долгую историю. Стоит лишь иметь в виду, что в рамках предложенной аксиоматики знаки +, *., –, /, log рассматриваются лишь как удобное символьное обозначение некоторых определенных значений номера операции в общем числовом действии.

В предложенном новом подходе терминология, обозначения и понятия тоже являются новыми, они еще не устоялись, непривычны, и, возможно, могут быть уточнены, улучшены и дополнены. Изложение предложенного подхода могло быть, по-видимому, более понятно, стройно, и, наконец, наукообразно.

Предложенные аксиомы могут рассматриваться как операционная часть общей числовой аксиоматики, включающей в себя также описание отношений принадлежности, равенства и порядка различного типа чисел.

В рамках развития предложенного подхода, наряду с другими направлениями, весьма интересным является направление, связанное с решением следующего вопроса. Существуют ли и как можно естественным путем (отличным от интерполяционного) определить операции, промежуточные между сложением и умножением, умножением и возведением в степень, т. е. при нецелых значениях операционного параметра n? Например, чему равно значение выражения 2[1.5] 3?

Другим до конца не решенным вопросом, является определение общего действия для нецелых значений итерационного параметра в случае не ассоциативных и не коммутативных операций. Например, как число 3 возвести во вторую степень полтора раза, т. е. вычислить $2[3]^{1.5}\,3$?

Интересным, на мой взгляд, является направление, связанное с изучением аналитических свойств общего действия, т. е. для веществленных значений его параметров вне изученного классического диапазона операционного числа [–3, 3]. Достаточно ли комплексных чисел для существования общего действия при всех отрицательных значений его параметров вне классического диапазона?

Отметим, что в философском плане введение итерационного числа и названий других операндов позволяет ввести известную динамику в классические представления об арифметических операциях.

Надеюсь, что читателю понравилась книга, что у него пробудился интерес к затронутым в ней проблемам и он получил новые знания и представления в этой области. Если это так, то автор считает свою задачу выполненной, а цель, поставленную в начале, — достигнутой.

Если у читателя возникли какие-то вопросы, замечания и предложения, то он может связаться с автором через издательство или по электронной почте *shuvik2@rambler.ru*.

Аксиомы и основные формулы

Для справочных целей без пояснений приведены аксиомы и основные формулы, выражающие свойства общего действия.

Итерационные аксиомы:

	(исходная форма)		(упрощенная форма)
I_1	$a[1]^1 1 = a'$.	I_1'	$a + 1 = a'$.
I_2	$a[1]^1 h' = (a[1]^1 h)'$.	I_2'	$a + h' = (a + h)'$.
I_3	$a[n']^1 h = e_n\,[n]^a h$.	I_3'	$a[n + 1]h = e_n\,[n]^a h$.
I_4	$a[n]^{k'} h = (a\,[n]^k h)[n]^1 h$.	I_4'	$a[n]^{k+1} h = (a[n]^k h)[n]^1 h$.
I_5	$e_n = st(n)$.	I_5'	$e_n[n]\,h = h$.

$$st(n) = \begin{cases} 0, & при\ n = 1, \\ 1 & при\ n > 1. \end{cases}$$

Нулевые аксиомы:

N_1	$a[1]^1 0 = a$.	N_1'	$a + 0 = a$.
N_2	$a[0]^k h = a$.	N_2'	$a[0]^k h = a$.
N_3	$a[n]^0 h = a$.	N_3'	$a[n]^0 h = a$.

Свойства при произвольном $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$

$$(a+1)[n+1]h = (a[n+1]h)[n]h\,,$$

$$a[n]^{k+m}\,h = (a[n]^k\,h)[n]^m\,h.$$

$$0[n+1]h = e_n.$$

$$1[n+1]h = h.$$

$$2[n+1]h = h[n]h.$$

$$2[n]2 = 4.$$

$$3[n+1]2 = 4[n]2.$$

Свойства при $n = 1, 2$

$$(a+b)[n+1]c = (a[n+1]c)[n](b[n+1]c), \qquad n = 1, 2.$$

$$(a*b)[n+1]c = a[n+1](b[n+1]c), \qquad n = 1, 2.$$

$$a[n+1](b[n]c) = (a[n+1]b)[n](a[n+1]c), \qquad n = 1, 2.$$

$$a[n]^k\,h = a[n](k[n+1]h), \qquad n = 1, 2$$

Аксиомы знака:

Z1 $\quad -(-z) = z.$

Z2 $\quad -z + z = 0.$

Свойства при произвольном $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$

$$(a[n]^{-k}\,h)[n]^k\,h = a,$$

уравнение $x[n]^k\,h = c$, его корень: $x = c[n]^{-k}\,h$.

$$a[-n]^k\,h = a[n]^{-k}h,$$

$$a[-n]^{-k}\,h = a[n]^k\,h.$$

Свойство при $n = 3$

Уравнение $\quad a[3]\,x = \mathrm{c}$, $\quad$ его корень: $\quad x = (1/a)[3]\mathrm{c}$

Свойства при $n = 1, 2$

$$((a[n+1]c)[n](b[n+1]c))\,[n+1]^{-1}c = ((a+b)[n+1]c)\,[n+1]^{-1}c,$$

уравнение $a[n]^x h = c$, его корень $x = (c[n]^{-1}\,a)\,[n+1]^{-1}h$,

$$a[n]^{p*s}\,h = a[n]^{\,p}(e_n[n]^s h),$$

$$a[n]^{\,q}(e_n[n]^{1/q}\,h) = a[n]h,$$

$$a[n]^{p/q}\,h = a[n]^{\,p}(1\,/\,q[n+1]h),$$

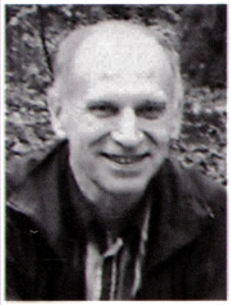
$$a[n]^r\,h = a[n]\,(r\,[n+1]\,h).$$

Литература

1. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические счисления и формализация арифметики / Пер. с нем. Н. М. Нагорного. Под ред. С. И. Адяна. М.: Наука, 1979. 560 с.
2. *Феферман С.* Числовые системы. Основания алгебры и анализа / Пер. с англ. А. А. Мальцева. Под ред. А. Д. Тайманова. М.: Наука, 1972. 440 с.
3. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств / Пер. с англ. А. Д. Тайманова. М.: 1970. 416 с.
4. *Буллос Дж., Джерри Р.* Вычислимость и логика. Пер. с англ. М., 1994. 396 с.
5. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. 2-е изд. М.: Наука; Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. 386 с.
6. *Гудстейн Р. Л.* Рекурсивный математический анализ / Пер. с англ. А. О. Слисенко. Под ред. Г. Е. Минца. М.: Наука, 1970. 472 с.
7. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. М.: Советская энциклопедия, 1988. 847 с.
8. *Кричевский Р. Е.* Сжатие и поиск информации. М.: Радио и связь, 1989. 168 с.
9. *Ларин С. В.* Числовые системы. М.: Изд. центр «Академия», 2001.
10. *Гасанов Э. Э. и др.* Теория хранения и поиска информации. М.: Физматлит, 2002.
11. *Егоров А.* Уравнения и пределы // Квант. 1977. № 10.
12. *Ленин А. И.* Сверхстепенные функции и некоторые их применения в анализе // Вестник Новгородского государственного университета. 1999. № 13.
13. *Эвнин Ю. А.* Сверхстепени и их разности // Математическое образование. 2001. № 1 (16).
14. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 1. М.: Высшая школа, 1970.

Об авторе

Виктор Владимирович ШУСТОВ



Старший научный сотрудник отраслевого НИИ. Кандидат технических наук. Родился в 1953 г. в Самарской области. В 1976 г. окончил Московский физико-технический институт. Закончил аспирантуру и в 1993 г. защитил кандидатскую диссертацию в Московском авиационном институте. Основные области научных интересов: основания математики, численные методы анализа, обработка изображений, теория информации.

9 785382 005461

Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу **URSS@URSS.ru**. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине **http://URSS.ru**